

Cambridge International AS & A Level

Chuyên luyện thi IELTS/SAT → AP / IB / A-levels



Cambridge International AS & A Level Mathematics

Giáo trình luyện thi chuyên sâu

Song ngữ Anh-Việt

8020 ENGLISH

5A/2 Trần Phú, P.4, Q.5, TP.HCM · luyenthi8020.com

Thầy Tường 0332 747 169 · Cô Nancy 0983 422 692

Lời mở đầu • Foreword

Cuốn sách này thuộc bộ giáo trình luyện thi chương trình quốc tế của **8020 English (8020 Education)** — trung tâm luyện thi trọng điểm **IELTS • SAT • AP • IB • A-level • IGCSE** và sẵn học bổng du học. Toàn bộ nội dung được biên soạn bởi đội ngũ **Giáo sư • Tiến sĩ • Thạc sĩ** tốt nghiệp các trường top đầu thế giới, bám sát khung chương trình chính thức, trình bày đầy đủ lý thuyết, ví dụ mẫu, hình minh họa và hệ thống bài tập có lời giải chi tiết.

This book is part of the 8020 English international exam-prep series: complete English theory with Vietnamese explanations, worked examples, illustrations and fully-solved practice, aligned to the official framework.

Thành tích 8020 English

9.0 IELTS cao nhất

1570 SAT cao nhất

5/5 AP — điểm tuyệt đối

90/100 IB Diploma

100% GV $\geq$ 8.0 IELTS / 1500 SAT

CMU Tiến sĩ ĐH #1 Hoa Kỳ về CS

Đội ngũ tiêu biểu: Thầy Châu Cát Tường (Academic Head, ThS Western Sydney, top 1% IELTS 8.5) · TS Nguyễn Anh Huy (Carnegie Mellon, cựu kỹ sư Amazon) · TS Nguyễn Phước Trường (Toán, ĐH Klagenfurt) · cùng đội ngũ giảng viên SAT 1500–1600, IELTS 8.0–8.5.

Kết quả học viên — điểm thi thật: IELTS 8.0–9.0 · SAT 1550 / 1570 / 1590 · AP 5/5 (Calculus BC, Microeconomics) · IB 90/100 (Economics) · Duolingo 110 · PTE 90 · TOEFL 120. **Bảng vàng SAT:** Khánh Đăng 1510 · Thảo Nguyên 1520 · Tâm Anh 1530.

“Cuối cùng đã đậu vào trường top như mong muốn.” — Phan Thị Thanh Hằng, IELTS Overall 8.5.

Cách dùng sách hiệu quả: mỗi Unit gồm (1) **Lý thuyết trọng tâm** tiếng Anh kèm **giải thích tiếng Việt**; (2) **Ví dụ mẫu** có lời giải; (3) **Hệ thống bài tập** kèm **lời giải chi tiết**. Hãy tự làm bài trước khi xem lời giải để đạt hiệu quả tối đa.

THÀNH TÍCH THỰC TẾ • 8020 ENGLISH

Điểm thi thật • Bảng & bảng điểm thật của giảng viên và học viên 8020 English — Điểm thật • Thầy thật • Kết quả thật

ĐỘI NGŨ

ĐỘI NGŨ GIÁO VIÊN TẬN TÂM

***Tối thiểu 8.0 IELTS Overall**



Gv. Nguyễn Nhật Nam
IELTS 8.5 Overall



Gv. Nguyễn Khanh
IELTS 8.0 Overall



Gv. Nguyễn Đan Vy
IELTS 8.0 Overall



Giảng viên 8020 — IELTS 8.5 & 8.0 Overall (British Council • IDP • Cambridge)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

THÀNH TÍCH HỌC VIÊN

Bảng điểm thi thật – chất lượng được giám sát nghiêm ngặt. Một số học viên chỉ cần 1–2 khóa để đạt kết quả mong muốn.



Học viên 8020 — IELTS 8.0 Overall (bảng điểm thật)

ĐỘI NGŨ

ĐỘI NGŨ GIÁO VIÊN TẬN TÂM

*Tối thiểu 1500 SAT Overall

8020
ENGLISH

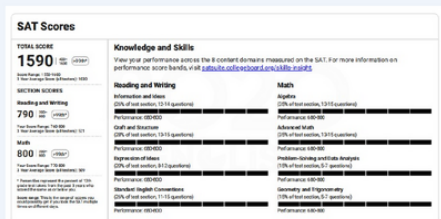
Thầy Quang Minh

Đại học Bách Khoa Hà Nội



SAT 1590

IELTS 8.0



THẾ MẠNH & KINH NGHIỆM

- Học sinh đạt 1450–1560 SAT
- Day nhanh band 1400–1550+
- Chiến thuật làm bài & quản lý thời gian

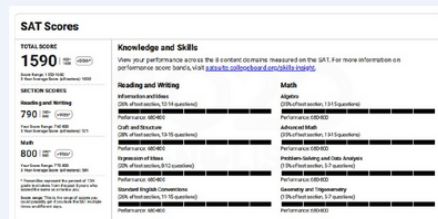
Cô Phương Vy

Đại học Ngoại thương



SAT 1590

IELTS 8.0



THẾ MẠNH & KINH NGHIỆM

- SAT Verbal Instructor (Springboard, QAS)
- Day lớp nhỏ & xây dựng tài liệu riêng
- Chuyên Reading & Writing: Logic – Grammar

Giảng viên 8020 – SAT 1590 (ĐH Bách Khoa Hà Nội & ĐH Ngoại thương)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

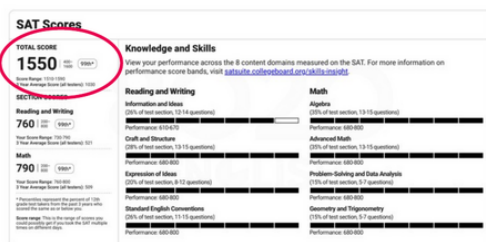
TUTOR 1-1 – ĐIỂM SỐ ẤN TƯỢNG

8020
ENGLISH

SAT

Your Scores

Name: Tam T Nguyen
Grade: 12
Test administration: SAT May 3, 2025
Tested on: May 3, 2025
Record Locator: 410244771



Build your future, your way, with free personalized
career and college planning tools

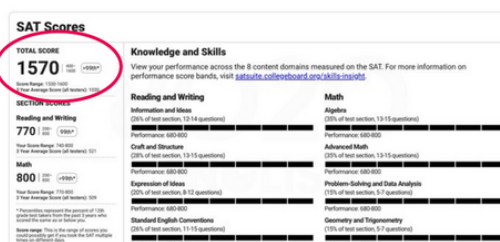


satsuite.org/whatsnext

SAT

Your Scores

Name: Linh Pham
Grade: 12
Test administration: SAT December 7, 2024
Tested on: Dec 7, 2024
Record Locator: 409986376



Build your future, your way, with free personalized
career and college planning tools



satsuite.org/whatsnext

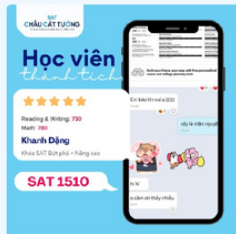
Học viên 8020 – SAT 1550 & 1570 (College Board)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

BẢNG VÀNG HỌC VIÊN

SAT
CHAU CÁT TƯỜNG
Tư vấn hướng nghiệp học & điểm số8020
ENGLISH

Bảng vàng học viên



Bé Khanh Đăng

SAT Bứt phá + Nâng cao Cam kết 140++ => Kết quả 1510



Bé Phan Nguyễn Thảo Nguyễn

SAT Nâng cao



Bé Lê Tâm Anh

SAT Bứt phá + Nâng cao Cam kết 140++ => Bứt phá kết quả 1530

KHÁNH ĐĂNG – SAT 1510

“SAT Bứt phá + Nâng cao cam kết 140++ → 1510”

THẢO NGUYỄN – SAT 1520

“SAT Nâng cao → 1520”

TÂM ANH – SAT 1530

“SAT Bứt phá + Nâng cao cam kết 140++ → 1530”

Bảng vàng SAT – Học viên đạt 1510 · 1520 · 1530

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ AP

8020
ENGLISH

AP Biology: 4 · AP Chemistry: 4



AP Calculus AB: 5



AP Calculus BC: 5



AP Chemistry: 5

Bảng điểm AP thật của học viên – nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Điểm AP thật – Calculus AB/BC 5/5 · Biology & Chemistry 4–5 (College Board)

Mục lục • Contents

1	Pure Mathematics 1	7
1.1	Quadratics	7
1.2	Functions	9
1.3	Coordinate geometry	13
1.4	Circular measure	15
1.5	Trigonometry	16
1.6	Series and the binomial expansion	18
1.7	Differentiation	20
1.8	Integration	23
2	Pure Mathematics – Further Pure	37
2.1	Algebra: the factor theorem, remainder theorem and partial fractions	37
2.2	Logarithmic and exponential functions	40
2.3	Further trigonometry	44
2.4	Further differentiation and integration	47
2.5	Numerical solution of equations	53
3	Vectors and Differential Equations	67
3.1	Vectors: magnitude, unit vectors and the scalar product	67
3.2	The vector equation of a line	69
3.3	The foot of the perpendicular and the shortest distance from a point to a line	71
3.4	Using vectors to solve geometric problems	73
3.5	Differential equations: formulating and separating variables	75
3.6	Exponential growth and decay	78
3.7	Other separable models in context	79
3.8	Practice problems	81
4	Complex Numbers	98
4.1	Cartesian Form and Algebraic Operations	98
4.2	Quadratic, Cubic and Quartic Equations with Complex Roots	101
4.3	Modulus-Argument (Polar) Form	105
4.4	Loci in the Argand Diagram	108
4.5	Chapter Practice Problems	115
5	Mechanics	126
5.1	Kinematics of Motion in a Straight Line	126
5.2	Forces and Equilibrium	130
5.3	Newton's Laws of Motion	134
5.4	Momentum and Impulse	137
5.5	Work, Energy and Power	140

6	Probability & Statistics 1	156
6.1	Representation of data	156
6.2	Permutations and combinations	162
6.3	Probability	165
6.4	Discrete random variables	169
6.5	The normal distribution	171
6.6	Practice problems	174
7	Probability & Statistics – Further	186
7.1	The Poisson distribution	186
7.2	Linear combinations of random variables	191
7.3	Sampling and estimation	195
7.4	Hypothesis testing	201
7.5	Continuous random variables	207

Pure Mathematics 1

Mục tiêu Unit: Phương trình/bất phương trình bậc hai và điều kiện tiếp xúc với đường thẳng; hàm số, hàm ngược, hàm trị tuyệt đối và phép biến đổi đồ thị; hình học tọa độ (đường thẳng, đường tròn); đo góc bằng radian; lượng giác; cấp số cộng/nhân và nhị thức Newton; đạo hàm, tích phân và các ứng dụng cơ bản (mức AS Level, Paper 1).

1.1 Quadratics

A quadratic expression $ax^2 + bx + c$ (with $a \neq 0$) can be written in completed-square form

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

which reveals the vertex of the corresponding parabola directly, without any calculus.

1.1.1 Completing the square and the vertex

Writing $f(x) = a(x - h)^2 + k$ with $h = -\frac{b}{2a}$ and $k = f(h) = c - \frac{b^2}{4a}$: the graph of $y = f(x)$ has vertex (h, k) and axis of symmetry $x = h$. If $a > 0$ the parabola opens upward and k is the **minimum** value of f ; if $a < 0$ it opens downward and k is the **maximum** value. The graph crosses the x -axis exactly where $f(x) = 0$, so the number of real roots of f equals the number of x -intercepts.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Hoàn thành bình phương giúp tìm đỉnh (vertex) và giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của tam thức bậc hai mà không cần đạo hàm. Nếu $a > 0$, đồ thị là parabol quay bề lõm lên trên và đỉnh là điểm **thấp nhất**; nếu $a < 0$, parabol quay bề lõm xuống và đỉnh là điểm **cao nhất**. Số giao điểm của đồ thị với trục hoành chính là số nghiệm thực của phương trình $f(x) = 0$.

Ví dụ mẫu • Worked example

Find the range of $f(x) = 3x^2 - 12x + 7$ for $x \in \mathbb{R}$.

$f(x) = 3(x^2 - 4x) + 7 = 3[(x - 2)^2 - 4] + 7 = 3(x - 2)^2 - 5$. Since $3(x - 2)^2 \geq 0$, the minimum value is -5 at $x = 2$, so $f(x) \geq -5$.

1.1.2 The discriminant

Discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ for $ax^2 + bx + c = 0$: $\Delta > 0$ gives two distinct real roots (curve crosses the x -axis twice); $\Delta = 0$ gives one repeated root (the x -axis is tangent to the parabola); $\Delta < 0$ gives no real roots (the parabola never meets the x -axis).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ cho biết **số nghiệm thực**: $\Delta > 0$ hai nghiệm phân biệt, $\Delta = 0$ nghiệm kép (đồ thị tiếp xúc trục hoành), $\Delta < 0$ vô nghiệm thực.

1.1.3 Quadratic inequalities

To solve a quadratic inequality, first solve the associated equation to find the critical values, then use the shape of the parabola (or a sign diagram) to decide which region satisfies the inequality.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $2x^2 - 5x - 3 \geq 0$.

Factorise: $2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$, roots $x = -\frac{1}{2}$ and $x = 3$. The parabola opens upward, so it is ≥ 0 *outside* the roots:

$$x \leq -\frac{1}{2} \quad \text{or} \quad x \geq 3.$$

(!) Lỗi thường gặp: For a quadratic inequality, first solve the *equation* to find critical values, then use the shape of the parabola to decide the inequality region – do *not* simply flip the inequality sign onto the factors, and do not divide both sides by an expression that could be negative or zero.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve the inequality $\frac{x^2 - 2x - 8}{x - 1} \leq 0$.

Factorise the numerator: $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$, so the critical values are $x = -2, 1, 4$ (the value $x = 1$ must be excluded, since it makes the denominator zero). These three values split the number line into four intervals; testing one point in each:

$x = -3$: $\frac{(-7)(-1)}{-4} = \frac{7}{-4} < 0$ – satisfies. $x = 0$: $\frac{(-4)(2)}{-1} = 8 > 0$ – fails.

$x = 2$: $\frac{(-2)(4)}{1} = -8 < 0$ – satisfies. $x = 5$: $\frac{(1)(7)}{4} = 1.75 > 0$ – fails.

The expression equals 0 at $x = -2$ and $x = 4$ (included, since the inequality is ≤ 0), but is undefined at $x = 1$ (excluded).

Solution: $x \leq -2$ or $1 < x \leq 4$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bất phương trình chứa phân thức, không được nhân chéo hai vế một cách tùy tiện (vì không biết dấu của mẫu số). Thay vào đó, đưa tất cả về một vế rồi lập **bảng xét dấu (sign diagram)**: tìm các giá trị làm tử số hoặc mẫu số bằng 0 (nghiệm và điểm không xác định), đánh dấu chúng trên trục số, rồi thử một giá trị đại diện trong mỗi khoảng để xác định dấu. Luôn loại bỏ giá trị làm mẫu số bằng 0 khỏi tập nghiệm.

1.1.4 Lines meeting curves: intersection, tangency, and no intersection

When a line $y = mx + k$ is substituted into a quadratic curve $y = f(x)$, the result is a quadratic equation in x . The number of real solutions of that equation tells us how the line and curve relate geometrically.

Substituting the line into the curve gives $f(x) - mx - k = 0$, a quadratic in x with discriminant Δ . Then: $\Delta > 0 \Rightarrow$ the line crosses the curve at two distinct points; $\Delta = 0 \Rightarrow$ the line is a **tangent** to the curve (touches at exactly one point); $\Delta < 0 \Rightarrow$ the line does not meet the curve at all.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Muốn xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường cong bậc hai, thế phương trình đường thẳng vào đường cong để được một phương trình bậc hai theo x , rồi xét dấu Δ của phương trình đó: $\Delta > 0$ cắt tại 2 điểm, $\Delta = 0$ tiếp xúc (tiếp tuyến), $\Delta < 0$ không cắt nhau.

Ví dụ mẫu · Worked example

The line $y = 2x + c$ meets the curve $y = x^2 - 4x + 7$. (a) Find the value of c for which the line is a tangent to the curve. (b) Find the range of values of c for which the line does not meet the curve.

Substitute: $x^2 - 4x + 7 = 2x + c \Rightarrow x^2 - 6x + (7 - c) = 0$. Here $\Delta = 36 - 4(7 - c) = 8 + 4c$.

(a) Tangency needs $\Delta = 0$: $8 + 4c = 0 \Rightarrow c = -2$. (Check: the equation becomes $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2 = 0$, so the point of contact is $x = 3$, $y = 4$, and indeed $3^2 - 4(3) + 7 = 4$.)

(b) No intersection needs $\Delta < 0$: $8 + 4c < 0 \Rightarrow c < -2$.

1.1.5 Solving equations that are quadratic in disguise

Some equations are not quadratics themselves but become quadratic after a substitution. A common example is a quartic containing only even powers of x : letting $u = x^2$ turns $x^4 + px^2 + q = 0$ into $u^2 + pu + q = 0$.

To solve an equation “quadratic in disguise”: choose a substitution $u = g(x)$ that turns the equation into $au^2 + bu + c = 0$, solve for u , then solve $g(x) = u$ for each valid value of u (rejecting any u that is impossible for g , e.g. a negative value when $g(x) = \sqrt{x}$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với những phương trình không phải bậc hai nhưng có dạng ẩn của bậc hai (ví dụ phương trình trùng phương $x^4 + px^2 + q = 0$), ta đặt ẩn phụ $u = x^2$ (hoặc $u = \sqrt{x}$, tùy bài) để đưa về phương trình bậc hai theo u , giải u trước, rồi quay lại giải x theo u – nhớ loại bỏ giá trị u không hợp lệ.

1.2 Functions

A function f maps each element of its **domain** to exactly one element of its **range**. The domain is the set of inputs for which f is defined; the range is the set of all possible outputs $f(x)$ as x varies over the domain.

1.2.1 Domain and range

Common domain restrictions: a square root $\sqrt{g(x)}$ requires $g(x) \geq 0$; a fraction $\frac{1}{g(x)}$ requires $g(x) \neq 0$. The range is found from the shape of the graph – e.g. for a quadratic, the range follows from the vertex (Section 1.1); for $y = \sqrt{g(x)}$, the range is $y \geq 0$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Miền xác định (domain) là tập các giá trị x hợp lệ để công thức có nghĩa (căn bậc hai không âm, mẫu số khác 0). Miền giá trị (range) là tập các giá trị $y = f(x)$ có thể nhận được – thường tìm bằng cách xét hình dạng đồ thị (đỉnh của parabol, tiệm cận, v.v.).

1.2.2 Composite functions

The **composite** $fg(x) = f(g(x))$ applies g first, then f . For fg to be defined at x , the value $g(x)$ must lie in the domain of f .

Ví dụ mẫu · Worked example

$f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = 2x - 3$. Find $fg(x)$ and $gf(x)$.

$$fg(x) = f(2x-3) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10. \quad gf(x) = g(x^2+1) = 2(x^2+1) - 3 = 2x^2 - 1.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$fg(x)$ nghĩa là làm g trước rồi mới làm f (đọc từ trong ra ngoài). Điều kiện để $fg(x)$ xác định là $g(x)$ phải nằm trong miền xác định của f .

Ví dụ mẫu · Worked example

The functions f and g are defined by $f(x) = (x+1)^2 - 3$ for $x \geq -1$, and $g(x) = 2x + 5$ for $x \in \mathbb{R}$. Find the range of the composite function fg .

Since f is only defined for inputs ≥ -1 , the composite $fg(x) = f(g(x))$ requires $g(x) \geq -1$: $2x + 5 \geq -1 \Rightarrow x \geq -3$. So the domain of fg is restricted to $x \geq -3$.

$$fg(x) = f(2x+5) = [(2x+5)+1]^2 - 3 = (2x+6)^2 - 3 = 4(x+3)^2 - 3.$$

For $x \geq -3$, $(x+3)^2 \geq 0$ and is increasing, so the minimum of fg occurs at $x = -3$, giving $fg(-3) = 4(0)^2 - 3 = -3$.

Range: $fg(x) \geq -3$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi hàm f trong hàm hợp fg có **miền xác định bị giới hạn** (ví dụ f chỉ xác định khi đầu vào ≥ -1), điều kiện “ $g(x)$ phải nằm trong miền xác định của f ” sẽ tạo ra một ràng buộc mới lên x – đây chính là miền xác định của fg . Sau khi thu gọn biểu thức $fg(x)$, phải xét trên miền xác định đã bị giới hạn này (chứ không phải toàn bộ $\mathbb{R}$) để tìm đúng miền giá trị.

1.2.3 Inverse functions and their graphs

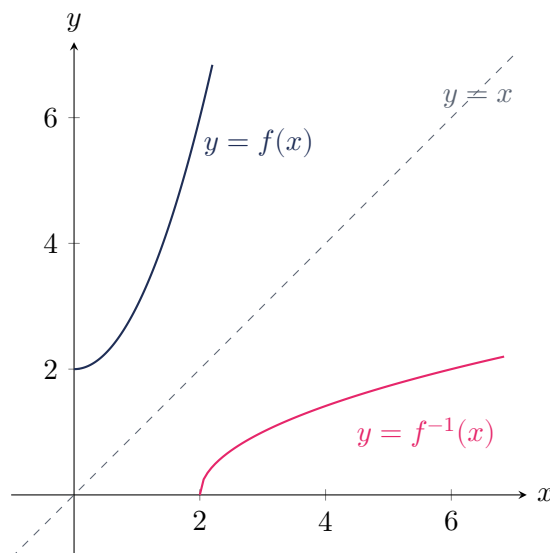
If f is one-one on its domain, its **inverse** f^{-1} undoes f : $f^{-1}(x)$ is found by writing $y = f(x)$, swapping x and y , and solving for y . The domain of f^{-1} equals the range of f , and the range of f^{-1} equals the domain of f .

f^{-1} exists only when f is one-one (often achieved by restricting the domain, e.g. taking $x \geq 0$ for a quadratic). The graph of $y = f^{-1}(x)$ is the **reflection** of the graph of $y = f(x)$ in the line $y = x$; consequently f and f^{-1} meet (if at all) only on the line $y = x$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hàm ngược f^{-1} chỉ tồn tại khi f là hàm **đơn ánh (one-one)** trên miền xác định; cách tìm: đặt $y = f(x)$, đổi vai trò $x \leftrightarrow y$, rồi giải y theo x . Đồ thị của f^{-1} chính là **ảnh phản chiếu** của đồ thị f qua đường thẳng $y = x$; miền xác định của f^{-1} bằng miền giá trị của f và ngược lại.



$f(x) = x^2 + 2$ for $x \geq 0$, and its inverse $f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2}$, are reflections of one another in $y = x$.

1.2.4 Transformations of graphs

Starting from a known graph $y = f(x)$, several standard transformations produce new graphs.

Translations: $y = f(x) + a$ shifts the graph up by a (down if $a < 0$); $y = f(x - a)$ shifts it right by a (left if $a < 0$).

Stretches: $y = af(x)$ stretches vertically by scale factor a (from the x -axis); $y = f(ax)$ stretches horizontally by scale factor $\frac{1}{a}$ (from the y -axis).

Reflections: $y = -f(x)$ reflects in the x -axis; $y = f(-x)$ reflects in the y -axis.

When transformations are combined, they must be applied in the order the equation builds them up around f .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với đồ thị $y = f(x)$: cộng vào bên ngoài ($f(x) + a$) là tịnh tiến theo trục y ; cộng/trừ bên trong ($f(x \pm a)$) là tịnh tiến theo trục x (chú ý dấu ngược trục giác $-f(x - a)$ dịch sang **phải**); nhân bên ngoài là co giãn theo trục y ; nhân bên trong là co giãn theo trục x (theo tỉ lệ nghịch đảo); dấu trừ bên ngoài lật qua trục x , dấu trừ bên trong (đổi $x \rightarrow -x$) lật qua trục y . Khi có nhiều phép biến đổi liên tiếp, phải áp dụng đúng thứ tự mà biểu thức xây dựng quanh f .

1.2.5 The modulus function

The modulus (absolute value) of x is defined by $|x| = x$ for $x \geq 0$ and $|x| = -x$ for $x < 0$; it is always ≥ 0 .

Graph of $y = |f(x)|$: take the graph of $y = f(x)$ and reflect in the x -axis any part that lies below it, leaving the rest unchanged.

Graph of $y = f(|x|)$: keep only the part of $y = f(x)$ for $x \geq 0$, then reflect that part in the y -axis to form the part for $x < 0$.

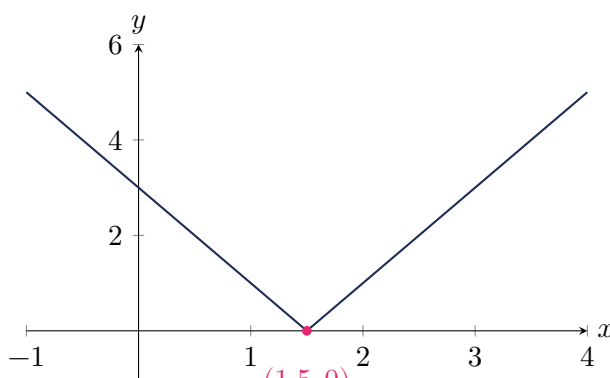
Equations: $|f(x)| = k$ (with $k \geq 0$) is solved via $f(x) = k$ or $f(x) = -k$; $|f(x)| = |g(x)|$ is solved via $f(x) = g(x)$ or $f(x) = -g(x)$.

Inequalities: for $k > 0$, $|x| < k \iff -k < x < k$, and $|x| > k \iff x < -k$ or $x > k$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trị tuyệt đối $|x|$ luôn không âm. Đồ thị $y = |f(x)|$: phần nào của $y = f(x)$ nằm dưới trục hoành thì lật lên trên (phản chiếu qua trục x), phần đã ở trên giữ nguyên. Phương trình $|f(x)| = k$ ($k \geq 0$) tách thành hai trường hợp $f(x) = k$ hoặc $f(x) = -k$. Bất phương trình $|x| < k$ tương đương $-k < x < k$; $|x| > k$ tương đương $x < -k$ hoặc $x > k$.



The graph of $y = |2x - 3|$: a V-shape with vertex at $(1.5, 0)$, since the negative portion of $y = 2x - 3$ is reflected upward.

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Solve $|2x - 3| = x + 3$. (b) Solve $|2x - 3| < 5$.

(a) Case 1: $2x - 3 = x + 3 \Rightarrow x = 6$ (check $x + 3 = 9 \geq 0$, valid). Case 2: $2x - 3 = -(x + 3) \Rightarrow 2x - 3 = -x - 3 \Rightarrow 3x = 0 \Rightarrow x = 0$ (check $x + 3 = 3 \geq 0$, valid). Solutions: $x = 0$ or $x = 6$.

(b) $-5 < 2x - 3 < 5 \Rightarrow -2 < 2x < 8 \Rightarrow -1 < x < 4$.

(!) Lỗi thường gặp: When solving $|f(x)| = g(x)$, always check each solution back in the *original* equation: since $|f(x)| \geq 0$, any branch that gives $g(x) < 0$ must be rejected – squaring or splitting into cases can otherwise introduce extraneous roots.

Ví dụ mẫu · Worked example

The graph of $y = f(x)$, where $f(x) = x^2 - 4$ for $-3 \leq x \leq 3$, crosses the x -axis at $x = -2$ and $x = 2$, has a minimum value of -4 at $x = 0$, and end values $f(-3) = f(3) = 5$. Sketch $y = |f(x)|$ and state its range.

The portion of $y = f(x)$ that already lies on or above the x -axis – for $-3 \leq x \leq -2$ and for $2 \leq x \leq 3$, where $f(x) = x^2 - 4$ rises from 0 up to 5 – is left unchanged. The portion that dips below the axis – for $-2 \leq x \leq 2$, where $f(x)$ falls from 0 down to -4 and back up to 0 – is reflected upward in the x -axis, becoming $4 - x^2$, a “hump” rising from 0 at $x = \pm 2$ to a peak of

4 at $x = 0$. So

$$|f(x)| = \begin{cases} x^2 - 4, & -3 \leq x \leq -2 \text{ or } 2 \leq x \leq 3, \\ 4 - x^2, & -2 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Since $|f(x)| \geq 0$ everywhere and the largest value reached is at the endpoints ($|f(\pm 3)| = 5$, larger than the reflected peak of 4), the **range is** $0 \leq |f(x)| \leq 5$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Muốn vẽ đồ thị $y = |f(x)|$ từ đồ thị $y = f(x)$ đã biết: giữ nguyên phần đồ thị đã nằm trên hoặc trên trục hoành; phần nào nằm dưới trục hoành thì **lật ngược lên trên** (phản chiếu qua trục x , đổi dấu giá trị y). Sau khi lật, toàn bộ đồ thị mới nằm trên hoặc trên trục hoành ($|f(x)| \geq 0$); miền giá trị mới là từ 0 đến giá trị tuyệt đối lớn nhất mà đồ thị gốc từng đạt được (dù đó là điểm cao nhất hay điểm thấp nhất ban đầu).

1.3 Coordinate geometry

For two points $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$: the **gradient** of AB is $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, the **midpoint** of AB is $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, and the **distance** is $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

1.3.1 Straight lines: gradient, parallel and perpendicular conditions

Two lines with gradients m_1 and m_2 are **parallel** iff $m_1 = m_2$, and **perpendicular** iff $m_1 m_2 = -1$. The line through (x_1, y_1) with gradient m is $y - y_1 = m(x - x_1)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai đường thẳng **song song** khi có cùng hệ số góc $m_1 = m_2$; **vuông góc** khi tích hai hệ số góc bằng -1 : $m_1 m_2 = -1$. Phương trình đường thẳng qua một điểm với hệ số góc cho trước: $y - y_1 = m(x - x_1)$.

1.3.2 The equation of a circle

A circle with centre (a, b) and radius r has equation $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$. Expanding gives the general form $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, which by completing the square has centre $(-g, -f)$ and radius $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$ (provided $g^2 + f^2 - c > 0$).

Circle in general form $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$: centre $(-g, -f)$, radius $r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$. A tangent to a circle at a point P on the circle is perpendicular to the radius CP at that point.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Dạng tổng quát của đường tròn $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ có tâm $(-g, -f)$ và bán kính $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$. Tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm P trên đường tròn luôn **vuông góc** với bán kính nối tâm với P .

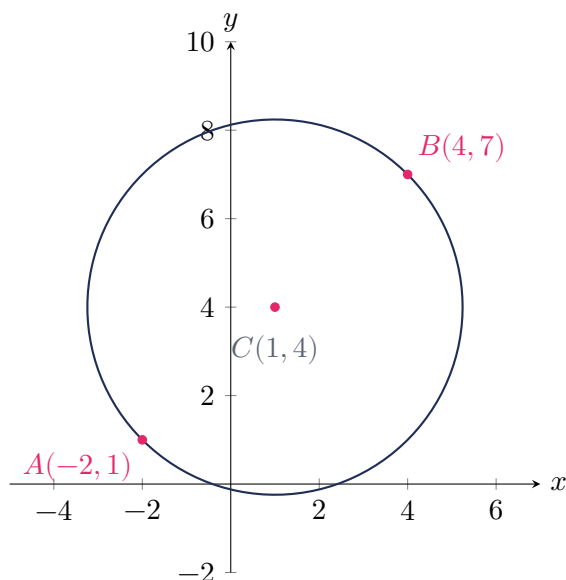
(!) Lỗi thường gặp: When reading off the centre from $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, the centre is $(-g, -f)$, **not** (g, f) – the sign flips because completing the square produces $(x+g)^2 + (y+f)^2 = g^2 + f^2 - c$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the equation of the circle with diameter endpoints $A(-2, 1)$ and $B(4, 7)$.

Centre = midpoint of $AB = (1, 4)$. $AB = \sqrt{6^2 + 6^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$, so radius $r = 3\sqrt{2}$, $r^2 = 18$.

$$(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 18.$$



Circle with diameter AB : centre $(1, 4)$, radius $3\sqrt{2}$.

1.3.3 Geometric problems: tangents, chords, and intersections with lines

Substituting a line's equation into a circle's equation gives a quadratic in one variable; exactly the same discriminant logic as in Section 1.4 tells us whether the line is a secant (two intersection points), a tangent (one point), or misses the circle entirely.

As a worked illustration: to find the tangent to the circle $x^2 + y^2 = 25$ at the point $(3, 4)$ (which lies on the circle, since $3^2 + 4^2 = 25$), first find the gradient of the radius to that point: $\frac{4 - 0}{3 - 0} = \frac{4}{3}$.

The tangent is perpendicular to the radius, so its gradient is $-\frac{3}{4}$. The tangent line is

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 4y - 16 = -3x + 9 \Rightarrow 3x + 4y = 25.$$

A chord of a circle is a line segment joining two points on the circle; the perpendicular bisector of any chord always passes through the centre, which gives a useful method for locating an unknown centre from two points known to lie on the circle.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Muốn tìm tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm đã biết trên đường tròn: tính hệ số góc bán kính nối tâm với điểm đó, rồi lấy nghịch đảo âm để được hệ số góc tiếp tuyến (vì tiếp tuyến vuông góc bán kính). Đường trung trực của một dây cung (chord) luôn đi qua tâm đường tròn – tính chất này thường dùng để tìm tâm khi biết hai điểm trên đường tròn.

Ví dụ mẫu · Worked example

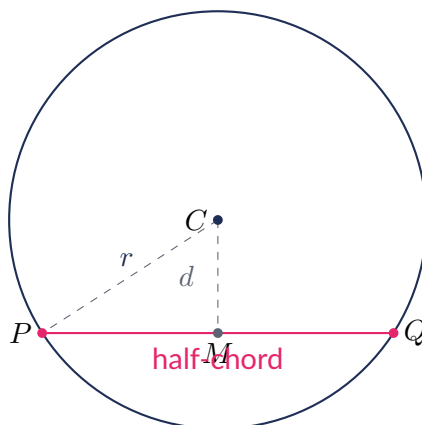
The circle $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 159 = 0$ has a chord that lies at a perpendicular distance 5 from the centre. Find the length of the chord.

Centre: $2g = -2 \Rightarrow g = -1$; $2f = -6 \Rightarrow f = -3$; centre $= (-g, -f) = (1, 3)$. Radius: $r^2 = g^2 + f^2 - c = 1 + 9 - (-159) = 169 \Rightarrow r = 13$.

The perpendicular from the centre to a chord bisects the chord, so the radius, the perpendicular distance, and the half-chord form a right-angled triangle:

$$\text{half-chord} = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12.$$

$$\text{Chord length} = 2 \times 12 = 24.$$



The perpendicular from centre C to chord PQ bisects it at M ; by Pythagoras, half-chord $= \sqrt{r^2 - d^2}$, so $PQ = 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi biết bán kính r và khoảng cách vuông góc d từ tâm đến một dây cung, đường vuông góc từ tâm luôn **chia đôi** dây cung tại trung điểm M , tạo thành một tam giác vuông với các cạnh r , d , và nửa dây cung. Áp dụng định lý Pythagoras: nửa dây cung $= \sqrt{r^2 - d^2}$, nên độ dài dây cung $= 2\sqrt{r^2 - d^2}$.

1.4 Circular measure

An angle of θ **radians** subtends an arc of length $s = r\theta$ and a sector of area $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ on a circle of radius r . The area of the corresponding **segment** (the region between a chord and its arc) is $\frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta)$, obtained by subtracting the triangle's area from the sector's area.

Arc length $s = r\theta$; sector area $A = \frac{1}{2}r^2\theta$; segment area $= \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta)$. All formulas require θ measured in **radians**. The perimeter of a sector is $2r + r\theta$; the perimeter of the corresponding segment is the arc plus the chord, $r\theta + 2r \sin(\frac{\theta}{2})$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Luôn dùng **radian** (không phải độ) trong công thức $s = r\theta$ và $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. Diện tích hình viên phân (segment) = diện tích hình quạt (sector) – diện tích tam giác $= \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta)$. Chu vi hình quạt $= 2r + r\theta$ (hai bán kính cộng cung); chu vi hình viên phân = cung + dây cung $= r\theta + 2r \sin(\frac{\theta}{2})$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A sector has radius 8 cm and angle 1.2 radians. Find the arc length, the sector area, and the segment area.

Arc = $r\theta = 8(1.2) = 9.6$ cm. Sector area = $\frac{1}{2}(8)^2(1.2) = 38.4$ cm². Segment area = $\frac{1}{2}(64)(1.2 - \sin 1.2) = 32(1.2 - 0.9320) = 32(0.2680) = 8.57$ cm².

As a further illustration combining perimeter and area: a circle of radius 10 cm has a chord subtending an angle of 1.4 radians at the centre. The perimeter of the minor segment is

$$r\theta + 2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 10(1.4) + 20 \sin(0.7) = 14 + 20(0.6442) = 14 + 12.88 = 26.88 \text{ cm (2 d.p.)}$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A plot of land is bounded by two arcs and two straight edges, forming a sector-shaped ring with common centre O : the outer arc has radius 15 m, the inner arc has radius 9 m, and both arcs subtend an angle of 1.4 radians at O . Find (a) the perimeter, and (b) the area, of the plot.

(a) Outer arc = $15(1.4) = 21$ m. Inner arc = $9(1.4) = 12.6$ m. Each straight edge has length $15 - 9 = 6$ m, and there are two such edges, contributing $2(6) = 12$ m.

$$\text{Perimeter} = 21 + 12.6 + 12 = 45.6 \text{ m.}$$

(b) The area of the plot is the outer sector's area minus the inner sector's area:

$$\frac{1}{2}(15)^2(1.4) - \frac{1}{2}(9)^2(1.4) = \frac{1}{2}(1.4)[225 - 81] = 0.7(144) = 100.8 \text{ m}^2.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với một hình dạng ghép từ hai hình quạt đồng tâm cùng góc θ nhưng bán kính khác nhau (bán kính ngoài và bán kính trong) – tạo thành một “dải quạt” – chu vi gồm: cung ngoài + cung trong + hai cạnh thẳng nối hai cung (mỗi cạnh bằng hiệu hai bán kính). Diện tích của dải quạt bằng diện tích hình quạt lớn (bán kính ngoài) trừ diện tích hình quạt nhỏ (bán kính trong), cùng chung góc θ .

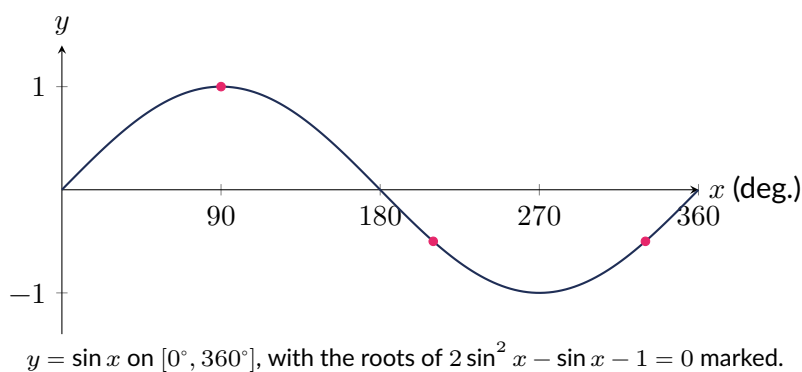
1.5 Trigonometry**1.5.1 The graphs of sine, cosine, and tangent**

$y = \sin x$ and $y = \cos x$ both have period 360° and range $[-1, 1]$; $y = \cos x$ is the graph of $y = \sin x$ translated 90° to the left. $y = \tan x$ has period 180° , range $\mathbb{R}$, and vertical asymptotes at $x = 90^\circ + 180^\circ n$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đồ thị $\sin x$ và $\cos x$ đều tuần hoàn chu kỳ 360° và có miền giá trị $[-1, 1]$; $\cos x$ chính là $\sin x$ tịnh tiến sang trái 90° . Đồ thị $\tan x$ tuần hoàn chu kỳ 180° , miền giá trị là toàn bộ số thực, và có các đường tiệm cận đứng tại $x = 90^\circ + 180^\circ n$.



1.5.2 Exact values and identities

Exact values: $\sin 0^\circ = 0$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin 90^\circ = 1$, with $\cos \theta = \sin(90^\circ - \theta)$ giving the corresponding cosine values in reverse order. Two fundamental identities hold for all x : $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ and $\tan x \equiv \frac{\sin x}{\cos x}$.

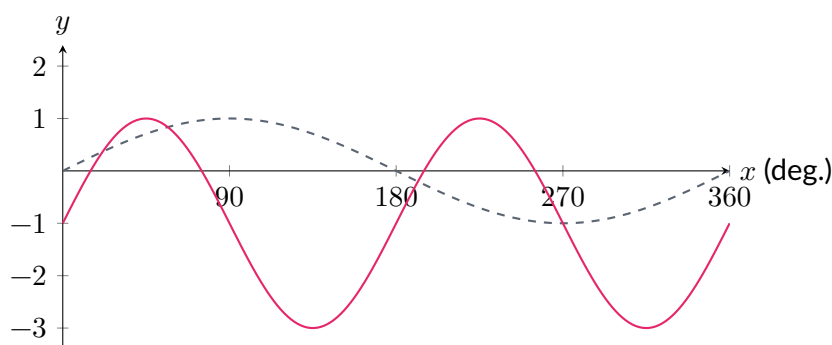
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cần thuộc lòng các giá trị lượng giác đặc biệt tại $0^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 90^\circ$. Hai hằng đẳng thức lượng giác cơ bản luôn đúng với mọi x : $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$ và $\tan x \equiv \frac{\sin x}{\cos x}$ – dùng để rút gọn hoặc biến đổi phương trình lượng giác về dạng chỉ chứa sin hoặc chỉ chứa cos.

1.5.3 Transformations of trigonometric graphs

The general translation/stretch rules of Section 2.4 apply directly to trigonometric graphs: for $y = a \sin(bx) + c$, the number $|a|$ is the **amplitude**, $\frac{360^\circ}{b}$ is the **period**, and c shifts the whole graph (its midline) vertically.



Dashed: $y = \sin x$. Solid: $y = 2 \sin(2x) - 1$, with amplitude 2, period 180° , and midline $y = -1$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với $y = a \sin(bx) + c$: $|a|$ là biên độ (amplitude – độ cao dao động so với đường giữa), $\frac{360^\circ}{b}$ là chu kỳ, và c tịnh tiến toàn bộ đồ thị lên/xuống theo trục y (đường giữa của dao động là $y = c$).

1.5.4 Solving trigonometric equations

Solve trig equations by finding a first solution (often using exact values or a calculator), then using the graph's period and symmetry to list every solution in the given interval. Equations that are quadratic in $\sin x$, $\cos x$, or $\tan x$ are solved by substitution, exactly as in Section 1.5.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Let $s = \sin x$: $2s^2 - s - 1 = (2s + 1)(s - 1) = 0 \Rightarrow s = -\frac{1}{2}$ or $s = 1$. $s = 1 \Rightarrow x = 90^\circ$.
 $s = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = 210^\circ, 330^\circ$. **Solutions:** $x = 90^\circ, 210^\circ, 330^\circ$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $\sin(2x + 30^\circ) = 0.5$ for $0^\circ \leq x \leq 180^\circ$.

Let $\theta = 2x + 30^\circ$; as x ranges over $[0^\circ, 180^\circ]$, θ ranges over $[30^\circ, 390^\circ]$.

$\sin \theta = 0.5 \Rightarrow \theta = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ$ (the last since $390^\circ = 360^\circ + 30^\circ$ also satisfies $\sin \theta = 0.5$, and it lies within the range for θ).

Converting back via $x = \frac{\theta - 30^\circ}{2}$: $\theta = 30^\circ \Rightarrow x = 0^\circ$; $\theta = 150^\circ \Rightarrow x = 60^\circ$; $\theta = 390^\circ \Rightarrow x = 180^\circ$.

Solutions: $x = 0^\circ, 60^\circ, 180^\circ$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi phương trình lượng giác chứa **góc kép** như $\sin(2x + 30^\circ)$, đặt ẩn phụ $\theta = 2x + 30^\circ$ rồi đổi luôn cận của x sang cận của θ (nhân với hệ số góc và cộng/trừ), giải phương trình lượng giác cơ bản theo θ trong miền mới, rồi mới đổi ngược lại theo công thức $x = \frac{\theta - 30^\circ}{2}$. Luôn đổi miền giá trị trước khi liệt kê nghiệm, để không bỏ sót hoặc thừa nghiệm.

1.6 Series and the binomial expansion

1.6.1 Arithmetic progressions

Arithmetic progression (AP): n th term $u_n = a + (n - 1)d$; sum of the first n terms $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d] = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cấp số cộng (AP) tăng/giảm đều một lượng d (công sai) mỗi bước. Số hạng tổng quát $u_n = a + (n - 1)d$; tổng n số hạng đầu $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$, cũng có thể viết là trung bình cộng của số hạng đầu và cuối nhân với n .

Ví dụ mẫu · Worked example

An AP has first term 5 and common difference 3. Find S_{20} .

$$S_{20} = \frac{20}{2}[2(5) + 19(3)] = 10(10 + 57) = 670.$$

1.6.2 Geometric progressions

Geometric progression (GP): n th term $u_n = ar^{n-1}$; sum of the first n terms $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ ($r \neq 1$). If $|r| < 1$, the series converges and the **sum to infinity** is $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$; if $|r| \geq 1$, S_∞ does not exist.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cấp số nhân (GP) nhân đều theo tỉ số r (công bội) mỗi bước: $u_n = ar^{n-1}$, $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$. Chỉ khi $|r| < 1$ thì tổng vô hạn $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ mới tồn tại (các số hạng tiến dần về 0); nếu $|r| \geq 1$, tổng vô hạn không hội tụ.

Ví dụ mẫu · Worked example

A ball is dropped from a height of 4 m. Each time it hits the ground, it rebounds to 0.6 of the height from which it fell. Find the total distance the ball travels, assuming it keeps bouncing forever.

The ball falls 4 m, then bounces up and down repeatedly with successive rebound heights forming a GP: $4(0.6) = 2.4$ m, then $2.4(0.6) = 1.44$ m, and so on, with common ratio $r = 0.6$. Each rebound height is travelled twice (once up, once down), so the total distance is

$$4 + 2(2.4 + 1.44 + \dots) = 4 + 2\left(\frac{2.4}{1-0.6}\right) = 4 + 2(6) = 4 + 12 = 16 \text{ m.}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong bài toán thực tế như quả bóng nảy, tổng quãng đường vô hạn tính được nhờ **tổng cấp số nhân vô hạn** $S_\infty = \frac{a}{1-r}$ (vì $|r| < 1$, các số hạng nhỏ dần về 0). Chú ý mỗi độ cao nảy lên đều được đi qua **hai lần** (lên rồi xuống) – chỉ có cú rơi ban đầu là tính một lần.

1.6.3 The binomial expansion

For n a positive integer, $(a+b)^n = \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, where $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ is the number of ways to choose r objects from n . The general term is $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong khai triển nhị thức $(a+b)^n$, số hạng tổng quát là $\binom{n}{r} a^{n-r} b^r$, với r chạy từ 0 đến n ; $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ là số cách chọn r phần tử từ n phần tử.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the coefficient of x^3 in the expansion of $(2+x)^5$.

General term $\binom{5}{r} 2^{5-r} x^r$. For $r = 3$: $\binom{5}{3} 2^2 = 10 \times 4 = 40$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the coefficient of x^4 in the expansion of $(2-3x)^6$.

General term: $\binom{6}{r} (2)^{6-r} (-3x)^r$. For the term in x^4 , take $r = 4$:

$$\binom{6}{4} (2)^2 (-3)^4 = 15 \times 4 \times 81 = 4860.$$

Coefficient of x^4 is 4860.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi khai triển $(a + bx)^n$ với b âm (ví dụ $(2 - 3x)^6$), số hạng tổng quát vẫn là $\binom{n}{r}a^{n-r}(bx)^r$, chỉ cần thay $b = -3$ và tính lũy thừa $(-3)^r$ cẩn thận (chú ý dấu: $(-3)^4 = 81$ dương vì số mũ chẵn, còn $(-3)^r$ sẽ âm nếu r lẻ). Muốn tìm hệ số của x^k cụ thể, chỉ cần thay $r = k$ vào số hạng tổng quát.

1.6.4 Pascal's triangle and binomial coefficients

The coefficients $\binom{n}{r}$ can be read directly from Pascal's triangle, where each entry is the sum of the two entries diagonally above it: $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$.

n	Row of Pascal's triangle: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$						
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tam giác Pascal cho ta các hệ số $\binom{n}{r}$ trực tiếp mà không cần tính giai thừa: mỗi số bằng tổng hai số ở hàng trên liền kề nó ($\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$). Hàng thứ n (đếm từ 0) chính là các hệ số của khai triển $(a + b)^n$.

1.6.5 Applications of the binomial expansion

For small x , the first few terms of the binomial expansion of $(1 + x)^n$ give a good numerical approximation, since higher powers of x become very small.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi x rất nhỏ, chỉ cần lấy vài số hạng đầu của khai triển $(1 + x)^n$ là đã xấp xỉ tốt giá trị thật, vì các lũy thừa cao của x rất nhỏ và có thể bỏ qua.

1.7 Differentiation**1.7.1 The idea of a derivative**

The derivative of f at x is defined as the limit of the gradient of a chord as the two points come together:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

For $f(x) = x^2$: $\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h \rightarrow 2x$ as $h \rightarrow 0$, confirming $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$.

Power rule: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ for any real n . **Sum rule:** the derivative of a sum is the sum of the derivatives, so a polynomial is differentiated term by term.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm tại một điểm là giới hạn của hệ số góc dây cung khi hai điểm tiến sát nhau – đây là ý tưởng nền tảng của phép tính vi phân. Quy tắc lũy thừa: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$; đạo hàm của một tổng bằng tổng các đạo hàm từng số hạng.

1.7.2 Tangents and normals

The **tangent** to $y = f(x)$ at a point has gradient $f'(x)$ at that point; the **normal** is perpendicular to the tangent, so its gradient is $-\frac{1}{f'(x)}$ (provided $f'(x) \neq 0$).

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the equations of the tangent and normal to the curve $y = x^3 - 2x + 1$ at the point where $x = 1$.

At $x = 1$: $y = 1 - 2 + 1 = 0$, so the point is $(1, 0)$. $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 2$, so at $x = 1$ the gradient is $3 - 2 = 1$.

Tangent (gradient 1): $y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$.

Normal (gradient -1): $y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = 1 - x$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tiếp tuyến tại một điểm có hệ số góc bằng đạo hàm tại điểm đó; pháp tuyến vuông góc với tiếp tuyến nên có hệ số góc bằng $-\frac{1}{f'(x)}$ (nghịch đảo âm).

1.7.3 Increasing and decreasing functions

f is **increasing** on an interval where $f'(x) > 0$, and **decreasing** where $f'(x) < 0$. The boundary points where $f'(x) = 0$ are the stationary points.

As an illustration: for $y = x^3 - 3x$, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, which is negative for $-1 < x < 1$; so the function is decreasing on $(-1, 1)$ and increasing for $x < -1$ or $x > 1$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hàm số **đồng biến (tăng)** trên khoảng mà $f'(x) > 0$, **nghịch biến (giảm)** trên khoảng mà $f'(x) < 0$. Ranh giới giữa các khoảng này là các điểm dừng, nơi $f'(x) = 0$.

1.7.4 Stationary points and their nature

A stationary point has $\frac{dy}{dx} = 0$; its nature is found from the sign of $\frac{d^2y}{dx^2}$ (positive $\Rightarrow$ minimum, negative $\Rightarrow$ maximum, zero $\Rightarrow$ test further, e.g. with the sign of f' either side).

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the stationary points of $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ and determine their nature.

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3, -1$. $y'' = 6x - 6$. At $x = 3$: $y'' = 12 > 0$ (min), $y = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$. At $x = -1$: $y'' = -12 < 0$ (max), $y = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm bằng 0 chỉ cho **điểm dừng** — phải xét y'' (hoặc đổi dấu y') để biết đó là cực đại hay cực tiểu.

1.7.5 Connected rates of change

When two quantities are related and both change with time, the chain rule connects their rates:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt}.$$

As an illustration: a circular ripple has radius increasing at 3 cm/s. When the radius is 10 cm, since $A = \pi r^2$ gives $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt} = 2\pi(10)(3) = 60\pi \approx 188.5 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bài toán tốc độ thay đổi liên kết: nếu hai đại lượng A và r liên hệ với nhau và cùng thay đổi theo thời gian t , ta dùng $\frac{dA}{dt} = \frac{dA}{dr} \times \frac{dr}{dt}$ để nối tốc độ thay đổi của đại lượng này với đại lượng kia.

Ví dụ mẫu · Worked example

Air is pumped into a spherical balloon at a constant rate of $150 \text{ cm}^3/\text{s}$. Find the rate of increase of the radius when the radius is 5 cm. (Volume of a sphere: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.)

$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$. Here we are given $\frac{dV}{dt} = 150$ and want $\frac{dr}{dt}$, so the chain rule is rearranged:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dV/dt}{dV/dr} = \frac{150}{4\pi r^2}.$$

$$\text{At } r = 5: \frac{dr}{dt} = \frac{150}{4\pi(25)} = \frac{150}{100\pi} = \frac{1.5}{\pi} \approx 0.477 \text{ cm/s}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi đề bài cho tốc độ thay đổi của đại lượng “ngoài” (ví dụ $\frac{dV}{dt}$) và yêu cầu tìm tốc độ thay đổi của đại lượng “trong” (ví dụ $\frac{dr}{dt}$), ta vẫn dùng chuỗi $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt}$ nhưng **giải ngược lại** để có $\frac{dr}{dt} = \frac{dV/dt}{dV/dr}$.

1.7.6 Small increments and approximations

For a small change δx in x , the resulting change in $y = f(x)$ is approximately $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \delta x$.

As an illustration: for $y = x^3$ at $x = 2$, $\frac{dy}{dx} = 3x^2 = 12$, so increasing x by $\delta x = 0.01$ gives $\delta y \approx 12(0.01) = 0.12$ (the exact change is $2.01^3 - 2^3 = 0.120601$, very close).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với một thay đổi nhỏ δx trong x , thay đổi tương ứng của $y = f(x)$ có thể xấp xỉ bằng $\delta y \approx \frac{dy}{dx} \delta x$ – đây là ứng dụng đạo hàm để ước lượng nhanh mà không cần tính giá trị chính xác.

1.8 Integration

1.8.1 Indefinite integration

Integration reverses differentiation: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ for $n \neq -1$, where C is an arbitrary constant of integration (since the derivative of any constant is 0).

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ ($n \neq -1$); integration is term-by-term over a sum, exactly as differentiation is.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tích phân là phép toán ngược của đạo hàm: $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (với $n \neq -1$); hằng số C xuất hiện vì đạo hàm của một hằng số bất kỳ đều bằng 0, nên không thể xác định C nếu chỉ biết đạo hàm.

1.8.2 Finding a curve from its gradient function

If $\frac{dy}{dx}$ is known together with one point on the curve, integrate to find y in terms of x and C , then substitute the known point to find C .

As an illustration: a curve has $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$ and passes through $(1, 2)$. Integrating, $y = x^3 - 4x + C$; substituting $x = 1, y = 2$ gives $1 - 4 + C = 2 \Rightarrow C = 5$, so $y = x^3 - 4x + 5$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nếu biết đạo hàm $\frac{dy}{dx}$ và một điểm nằm trên đường cong, ta lấy tích phân để được y theo x và hằng số C , sau đó thay tọa độ điểm đã biết vào để tìm C .

1.8.3 Finding a curve from its second derivative

If $\frac{d^2y}{dx^2}$ is known, integrating once gives $\frac{dy}{dx}$ (with a constant of integration), and integrating again gives y (with a second, generally different, constant). Two independent pieces of information – such as a point on the curve and the gradient at a point – are needed to pin down both constants.

Given $\frac{d^2y}{dx^2} = h(x)$: integrate once to get $\frac{dy}{dx} = \int h(x) dx + A$; use a known gradient to find A .

Integrate again to get $y = \int \left(\frac{dy}{dx} \right) dx + B$; use a known point on the curve to find B .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nếu biết đạo hàm cấp hai $\frac{d^2y}{dx^2}$, ta lấy tích phân **hai lần liên tiếp**: lần đầu ra $\frac{dy}{dx}$ kèm hằng số A (dùng hệ số góc đã biết tại một điểm để tìm A); lần thứ hai ra y kèm hằng số B (dùng tọa độ một điểm đã biết trên đường cong để tìm B). Cần **hai dữ kiện độc lập** (một về hệ số góc, một

về điểm) để xác định đầy đủ cả hai hằng số.

Ví dụ mẫu · Worked example

A curve is such that $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 4$. At the point $(1, 3)$ on the curve, the gradient is 5. Find the equation of the curve.

Integrate once: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + A$. At $x = 1$, gradient = 5: $3 - 4 + A = 5 \Rightarrow A = 6$, so

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 6.$$

Integrate again: $y = x^3 - 2x^2 + 6x + B$. At $(1, 3)$: $1 - 2 + 6 + B = 3 \Rightarrow B = -2$.

$$\text{Equation of the curve: } y = x^3 - 2x^2 + 6x - 2.$$

(Check: $y' = 3x^2 - 4x + 6$, so $y'(1) = 3 - 4 + 6 = 5$ ✓; $y'' = 6x - 4$ ✓; $y(1) = 1 - 2 + 6 - 2 = 3$ ✓.)

1.8.4 Definite integrals and the area under a curve

$\int_a^b f(x) dx$ gives the **signed** area between the curve $y = f(x)$ and the x -axis, from $x = a$ to $x = b$: positive where the curve is above the axis, negative where it is below.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the area enclosed between the curve $y = 4x - x^2$ and the x -axis.

Roots: $x(4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, 4$.

$$\int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}.$$

1.8.5 Regions that dip below the x -axis

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi tính diện tích bằng tích phân, nếu đường cong nằm dưới trục hoành trên một đoạn, tích phân trên đoạn đó ra âm; muốn có diện tích thật phải lấy trị tuyệt đối của từng phần rồi cộng lại, chứ không được cộng trực tiếp các tích phân có dấu khác nhau.

(!) **Lỗi thường gặp:** Do not assume $\int_a^b f(x) dx$ is automatically the area you want. If $f(x)$ changes sign on $[a, b]$, split the interval at the roots, evaluate each piece separately, take the *absolute value* of any negative piece, and only then add the pieces together to get the total enclosed area.

1.8.6 Area between two curves

The area of the region enclosed between two curves $y = f(x)$ and $y = g(x)$, between their points of intersection $x = p$ and $x = q$ (with $f(x) \geq g(x)$ on $[p, q]$), is

$$\int_p^q [f(x) - g(x)] dx.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the area of the region enclosed between the curve $y = x^2$ and the line $y = 2x$.

Intersections: $x^2 = 2x \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$. On $(0, 2)$ the line is above the curve (e.g. at $x = 1$: line = 2, curve = 1).

$$\int_0^2 [2x - x^2] dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3} \right) - 0 = \frac{4}{3}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Diện tích giữa hai đường cong bằng tích phân của (đường trên trừ đường dưới) trên đoạn giữa hai giao điểm – luôn xác định trước xem đường nào nằm trên trong đoạn đang xét bằng cách thử một giá trị x ở giữa.

Practice bank

Bài tập luyện tập

For which value(s) of k does $kx^2 + 8x + k = 0$ have equal roots?

(A) $k = 4$ only(C) $k = -4$ only(B) $k = \pm 4$ (D) $k = 0$

Lời giải chi tiết

Equal roots $\Rightarrow \Delta = 0$: $64 - 4k^2 = 0 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = \pm 4$. (B).

Bài tập luyện tập

Solve the inequality $x^2 - 5x + 6 \leq 0$.

(A) $x \leq 2$ or $x \geq 3$ (C) $x \leq -2$ or $x \geq -3$ (B) $2 \leq x \leq 3$ (D) $-3 \leq x \leq -2$

Lời giải chi tiết

Factorise: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, roots 2, 3. The parabola opens upward, so it is ≤ 0 between the roots: $2 \leq x \leq 3$. (B).

Bài tập luyện tập

Find the range of values of k for which the line $y = kx - 4$ does not intersect the curve $y = x^2 + 2x + 7$.

Lời giải chi tiết

Substitute: $x^2 + 2x + 7 = kx - 4 \Rightarrow x^2 + (2 - k)x + 11 = 0$. No intersection requires $\Delta < 0$: $(2 - k)^2 - 44 < 0 \Rightarrow (2 - k)^2 < 44 \Rightarrow -2\sqrt{11} < 2 - k < 2\sqrt{11}$. Rearranging: $2 - 2\sqrt{11} < k < 2 + 2\sqrt{11}$.

Bài tập luyện tập

Solve $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Lời giải chi tiết

Let $u = x^2$: $u^2 - 5u + 4 = (u - 1)(u - 4) = 0 \Rightarrow u = 1$ or $u = 4$. $u = 1 \Rightarrow x = \pm 1$; $u = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. **Solutions:** $x = -2, -1, 1, 2$.

Bài tập luyện tập

$f(x) = \frac{3x+2}{x-1}$, $x \neq 1$. Find $f^{-1}(x)$.

(A) $\frac{x+2}{x-3}$

(C) $\frac{3x+2}{x+1}$

(B) $\frac{x-2}{x+3}$

(D) $\frac{x+3}{x-2}$

Lời giải chi tiết

$y = \frac{3x+2}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = 3x+2 \Rightarrow x(y-3) = y+2 \Rightarrow x = \frac{y+2}{y-3}$. So $f^{-1}(x) = \frac{x+2}{x-3}$. (A).

Bài tập luyện tập

$f(x) = \sqrt{5-2x}$ for real x . State the domain and range of f .

(A) $x \leq 2.5, f(x) \geq 0$

(C) $x \leq 2.5, f(x) \leq 0$

(B) $x \geq 2.5, f(x) \geq 0$

(D) all real $x, f(x) \geq 0$

Lời giải chi tiết

Need $5-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2.5$. Since a square root is never negative, $f(x) \geq 0$. (A).

Bài tập luyện tập

The graph of $y = f(x)$ is transformed to give $y = f(x+2) - 3$. Describe fully the geometric transformation.

(A) Translation by $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(C) Translation by $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

(B) Translation by $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

(D) Stretch, factor 2, then down 3

Lời giải chi tiết

$f(x+2)$ shifts the graph 2 units in the negative x -direction; then -3 shifts it 3 units in the negative y -direction. This is a translation by the vector $\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $|3x-2| = |x+4|$.

Lời giải chi tiết

Case 1: $3x - 2 = x + 4 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$. Case 2: $3x - 2 = -(x + 4) \Rightarrow 4x = -2 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$.
Check: $x = 3$: $|7| = |7| \checkmark$. $x = -\frac{1}{2}$: $|-3.5| = |3.5| \checkmark$. **Solutions:** $x = -\frac{1}{2}, 3$.

Bài tập luyện tập

$l_1: 3x - 4y + 8 = 0$. Line l_2 passes through $(4, -1)$ and is perpendicular to l_1 . Find the equation of l_2 .

(A) $4x + 3y = 13$

(C) $4x - 3y = 13$

(B) $3x + 4y = 13$

(D) $4x + 3y = 7$

Lời giải chi tiết

Gradient of l_1 : $y = \frac{3}{4}x + 2 \Rightarrow m_1 = \frac{3}{4}$, so $m_2 = -\frac{4}{3}$. Line: $y + 1 = -\frac{4}{3}(x - 4) \Rightarrow 3y + 3 = -4x + 16 \Rightarrow 4x + 3y = 13$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the distance AB and the midpoint of AB , where $A(-3, 2)$ and $B(5, -4)$.

(A) $AB = 10$, midpoint $(1, -1)$

(C) $AB = 10$, midpoint $(2, -3)$

(B) $AB = 8$, midpoint $(1, -1)$

(D) $AB = 12$, midpoint $(1, -1)$

Lời giải chi tiết

$AB = \sqrt{(5 - (-3))^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$. Midpoint = $\left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{2 - 4}{2}\right) = (1, -1)$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the centre and radius of the circle $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$.

(A) centre $(3, -2)$, $r = 4$

(C) centre $(3, -2)$, $r = 16$

(B) centre $(-3, 2)$, $r = 4$

(D) centre $(6, -4)$, $r = 4$

Lời giải chi tiết

Complete the square: $(x^2 - 6x) + (y^2 + 4y) = 3 \Rightarrow (x - 3)^2 - 9 + (y + 2)^2 - 4 = 3 \Rightarrow (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 16$. Centre $(3, -2)$, radius $\sqrt{16} = 4$. (A).

Bài tập luyện tập

The line $y = x + 1$ meets the circle $x^2 + y^2 = 13$ at points A and B . Find the length of AB .

Lời giải chi tiết

Substitute: $x^2 + (x + 1)^2 = 13 \Rightarrow 2x^2 + 2x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = -3, 2$. Points: $(-3, -2)$ and $(2, 3)$. $AB = \sqrt{(2 - (-3))^2 + (3 - (-2))^2} = \sqrt{25 + 25} =$

$$\sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

Bài tập luyện tập

A sector of radius 6 cm has perimeter 22 cm. Find its area.

(A) 30 cm^2

(C) 36 cm^2

(B) 22 cm^2

(D) 15 cm^2

Lời giải chi tiết

Perimeter $= 2r + r\theta \Rightarrow 22 = 12 + 6\theta \Rightarrow \theta = \frac{10}{6} = \frac{5}{3} \text{ rad}$. Area $= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(36)\left(\frac{5}{3}\right) = 30 \text{ cm}^2$. (A).

Bài tập luyện tập

A sector of radius 5 cm has angle 2 radians. Find the area of the corresponding segment, correct to 3 significant figures.

Lời giải chi tiết

Segment area $= \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta) = \frac{1}{2}(25)(2 - \sin 2) = 12.5(2 - 0.9093) = 12.5(1.0907) = 13.6 \text{ cm}^2$ (3 s.f.).

Bài tập luyện tập

A chord of a circle of radius 8 cm subtends an angle of 1.5 radians at the centre. Find the perimeter of the minor segment, correct to 3 significant figures.

(A) 22.9 cm

(C) 20.9 cm

(B) 12.0 cm

(D) 10.9 cm

Lời giải chi tiết

Arc $= r\theta = 8(1.5) = 12 \text{ cm}$. Chord $= 2r \sin(\theta/2) = 16 \sin(0.75) = 16(0.6816) = 10.906 \text{ cm}$. Perimeter $= 12 + 10.906 = 22.9 \text{ cm}$ (3 s.f.). (A).

Bài tập luyện tập

Solve $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 3$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Lời giải chi tiết

Use $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$: $2(1 - \sin^2 x) + 3 \sin x = 3 \Rightarrow -2 \sin^2 x + 3 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$. Factorise: $(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$ or $\sin x = 1$. $\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 30^\circ, 150^\circ$; $\sin x = 1 \Rightarrow x = 90^\circ$. **Solutions:** $x = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$.

Bài tập luyện tập

Find the exact value of $\cos 300^\circ$.

(A) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(B) $-\frac{1}{2}$

(D) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải chi tiết

$300^\circ = 360^\circ - 60^\circ$, and cosine is positive in the fourth quadrant: $\cos 300^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Lời giải chi tiết

Factorise: $(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \tan x = 1$ or $\tan x = \sqrt{3}$. $\tan x = 1 \Rightarrow x = 45^\circ, 225^\circ$. $\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow x = 60^\circ, 240^\circ$. **Solutions:** $x = 45^\circ, 60^\circ, 225^\circ, 240^\circ$.

Bài tập luyện tập

The curve $y = a \sin(bx)$ (with $a > 0, b > 0$) has amplitude 4 and period 180° . Find the value of a and of b .

(A) $a = 4, b = 2$

(C) $a = 4, b = \frac{1}{2}$

(B) $a = 2, b = 4$

(D) $a = 180, b = 4$

Lời giải chi tiết

Amplitude is $|a|$, so $a = 4$. Period $= \frac{360^\circ}{b} = 180^\circ \Rightarrow b = 2$. (A).

Bài tập luyện tập

The 5th term of an AP is 23 and the 12th term is 51. Find the first term a and common difference d .

Lời giải chi tiết

$u_5 = a + 4d = 23; u_{12} = a + 11d = 51$. Subtracting: $7d = 28 \Rightarrow d = 4$. Then $a = 23 - 4(4) = 7$. $a = 7, d = 4$. (Check: $u_{12} = 7 + 11(4) = 51$ ✓.)

Bài tập luyện tập

A GP has first term 4 and 4th term 32. Find the common ratio and the sum of the first 6 terms.

(A) $r = 2, S_6 = 252$

(C) $r = 8, S_6 = 252$

(B) $r = 2, S_6 = 126$

(D) $r = 2, S_6 = 508$

Lời giải chi tiết

$u_4 = ar^3 = 32 \Rightarrow 4r^3 = 32 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$. $S_6 = \frac{4(2^6 - 1)}{2 - 1} = 4(63) = 252$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the sum to infinity of the geometric series $12 - 4 + \frac{4}{3} - \dots$.

- (A) 9 (C) 16
(B) 8 (D) 12

Lời giải chi tiết

$a = 12, r = \frac{-4}{12} = -\frac{1}{3}$, and $|r| < 1$ so S_∞ exists: $S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{12}{1-(-\frac{1}{3})} = \frac{12}{\frac{4}{3}} = 9$. (A).

Bài tập luyện tập

Use the binomial expansion of $(1+x)^5$ up to and including the term in x^2 to estimate 1.02^5 .

Lời giải chi tiết

$(1+x)^5 \approx 1 + 5x + 10x^2$. With $x = 0.02$: $1 + 5(0.02) + 10(0.02)^2 = 1 + 0.1 + 0.004 = 1.104$. (The true value is $1.02^5 = 1.10408 \dots$, so the approximation is accurate to 3 d.p.)

Bài tập luyện tập

Find the equation of the normal to the curve $y = x^2 - 3x + 5$ at the point where $x = 2$.

- (A) $x + y = 5$ (C) $x + y = 1$
(B) $x - y = 5$ (D) $y = x + 5$

Lời giải chi tiết

$y' = 2x - 3$; at $x = 2$, gradient = 1, and $y(2) = 4 - 6 + 5 = 3$, giving point (2, 3). Normal gradient = -1. Normal: $y - 3 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 5 \Rightarrow x + y = 5$. (A).

Bài tập luyện tập

Find and classify the stationary points of $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

Lời giải chi tiết

$y' = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 2, -1$. $y'' = 12x - 6$. At $x = 2$: $y'' = 18 > 0$ (minimum), $y = 16 - 12 - 24 + 5 = -15$. At $x = -1$: $y'' = -18 < 0$ (maximum), $y = -2 - 3 + 12 + 5 = 12$. Minimum (2, -15); maximum (-1, 12).

Bài tập luyện tập

Find the range of values of x for which $y = x^3 - 3x$ is a decreasing function.

- (A) $-1 < x < 1$ (C) $0 < x < 1$
(B) $x < -1$ or $x > 1$ (D) $-1 < x < 0$

Lời giải chi tiết

$y' = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. This is negative between the roots: $-1 < x < 1$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A spherical balloon is inflated so that its radius increases at a constant rate of 0.5 cm/s. Find the rate of increase of its volume when the radius is 6 cm. (Volume of a sphere: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.)

Lời giải chi tiết

$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2$. By the connected-rates chain, $\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \times \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2(0.5) = 2\pi r^2$. At $r = 6$:
 $\frac{dV}{dt} = 2\pi(36) = 72\pi \approx 226 \text{ cm}^3/\text{s}$.

Bài tập luyện tập

The curve $y = x^2 - 4x + 3$ meets the x -axis at $x = 1, 3$. Find the total area enclosed between the curve and the x -axis for $0 \leq x \leq 3$.

(A) $\frac{8}{3}$

(C) $\frac{4}{3}$

(B) 0

(D) $\frac{16}{3}$

Lời giải chi tiết

$\int y dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x$. On $[0, 1]$ (curve above axis): value $= \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}$. On $[1, 3]$ (curve below axis): $\left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x\right]_1^3 = (9 - 18 + 9) - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}$, so this piece contributes area $\frac{4}{3}$. Total area $= \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Find the area of the region enclosed between the curve $y = x^2$ and the line $y = x + 2$.

(A) $\frac{9}{2}$

(C) $\frac{9}{4}$

(B) 3

(D) 6

Lời giải chi tiết

Intersections: $x^2 = x + 2 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1, 2$. On $(-1, 2)$ the line is above the curve.

$$\int_{-1}^2 [(x+2) - x^2] dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}.$$

(A).

Bài tập luyện tập

A curve has gradient function $\frac{dy}{dx} = 4x - 3$ and passes through the point $(2, 5)$. Find the equation of the curve.

(A) $y = 2x^2 - 3x + 3$

(C) $y = 4x^2 - 3x - 3$

(B) $y = 2x^2 - 3x + 5$

(D) $y = 2x^2 - 3x - 3$

Lời giải chi tiết

$y = \int (4x - 3) dx = 2x^2 - 3x + C$. At $x = 2$: $8 - 6 + C = 5 \Rightarrow C = 3$. So $y = 2x^2 - 3x + 3$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the range of values of k for which $x^2 + kx + 9 = 0$ has two distinct real roots.

(A) $-6 < k < 6$

(C) $k = \pm 6$

(B) $k < -6$ or $k > 6$

(D) all real k

Lời giải chi tiết

Two distinct real roots require $\Delta > 0$: $k^2 - 4(1)(9) > 0 \Rightarrow k^2 - 36 > 0 \Rightarrow k^2 > 36 \Rightarrow k < -6$ or $k > 6$. (B).

Bài tập luyện tập

Solve the inequality $\frac{2x+1}{x-2} \leq 3$.

Lời giải chi tiết

Bring everything to one side (never cross-multiply by an expression of unknown sign): $\frac{2x+1}{x-2} - 3 \leq 0 \Rightarrow \frac{2x+1-3(x-2)}{x-2} \leq 0 \Rightarrow \frac{7-x}{x-2} \leq 0$. Critical values: $x = 2$ (excluded, undefined) and $x = 7$ (included, equality). Testing: $x = 0 \Rightarrow \frac{7}{-2} < 0$ (satisfies); $x = 5 \Rightarrow \frac{2}{3} > 0$ (fails); $x = 8 \Rightarrow \frac{-1}{6} < 0$ (satisfies). **Solution:** $x < 2$ or $x \geq 7$.

Bài tập luyện tập

$h(x) = \frac{1}{x+3}$ for $x \neq -3$. Find $h^{-1}(x)$.

(A) $\frac{1-3x}{x}$

(C) $\frac{1+3x}{x}$

(B) $\frac{1}{x} + 3$

(D) $x - 3$

Lời giải chi tiết

$y = \frac{1}{x+3} \Rightarrow y(x+3) = 1 \Rightarrow x+3 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{y} - 3 = \frac{1-3y}{y}$. So $h^{-1}(x) = \frac{1-3x}{x}$. (A).

Bài tập luyện tập

The functions f and g are defined by $f(x) = (x - 2)^2 + 1$ for $x \geq 2$, and $g(x) = 3x - 1$ for $x \in \mathbb{R}$. Find the range of the composite function fg .

Lời giải chi tiết

Since f requires its input ≥ 2 , we need $g(x) \geq 2$: $3x - 1 \geq 2 \Rightarrow x \geq 1$, so fg has domain $x \geq 1$. $fg(x) = f(3x - 1) = [(3x - 1) - 2]^2 + 1 = (3x - 3)^2 + 1 = 9(x - 1)^2 + 1$. For $x \geq 1$ this is minimised at $x = 1$, giving $fg(1) = 1$, and increases thereafter. **Range:** $fg(x) \geq 1$.

Bài tập luyện tập

Find the equation of the line through the points $(2, 5)$ and $(6, -3)$.

(A) $2x + y = 9$

(C) $2x - y = 9$

(B) $x + 2y = 9$

(D) $y = 2x + 9$

Lời giải chi tiết

Gradient = $\frac{-3 - 5}{6 - 2} = \frac{-8}{4} = -2$. Line: $y - 5 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 9 \Rightarrow 2x + y = 9$. **(A).**

Bài tập luyện tập

The circle C has equation $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$. Find the centre and radius of C , and determine whether the point $(5, 1)$ lies inside, on, or outside the circle.

Lời giải chi tiết

$2g = -4 \Rightarrow g = -2$; $2f = 6 \Rightarrow f = 3$; centre = $(-g, -f) = (2, -3)$. Radius = $\sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4 + 9 + 12} = \sqrt{25} = 5$. Distance from the centre to $(5, 1)$: $\sqrt{(5 - 2)^2 + (1 - (-3))^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$, equal to the radius, so $(5, 1)$ **lies on the circle**.

Bài tập luyện tập

A sector has area 60 cm^2 and radius 8 cm . Find its angle in radians.

(A) 1.875 rad

(C) 3.75 rad

(B) 0.9375 rad

(D) 15 rad

Lời giải chi tiết

Area = $\frac{1}{2}r^2\theta \Rightarrow 60 = \frac{1}{2}(64)\theta = 32\theta \Rightarrow \theta = \frac{60}{32} = 1.875 \text{ rad}$. **(A).**

Bài tập luyện tập

A sector OAB has radius 6 cm and angle 1.3 radians . Find the perimeter of the segment cut off by the chord AB (i.e. arc AB plus chord AB), correct to 3 significant figures.

Lời giải chi tiết

Arc = $r\theta = 6(1.3) = 7.8$ cm. Chord = $2r \sin(\theta/2) = 12 \sin(0.65) = 12(0.6052) = 7.263$ cm (4 s.f.). Perimeter = $7.8 + 7.263 = 15.063 \approx 15.1$ cm (3 s.f.).

Bài tập luyện tập

Solve $\cos x = -0.5$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$, and find the sum of all solutions.

(A) 360° (C) 240° (B) 300° (D) 480°

Lời giải chi tiết

$\cos x = -0.5 \Rightarrow x = 120^\circ, 240^\circ$ (cosine is negative in the second and third quadrants). Sum = $120^\circ + 240^\circ = 360^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $2 \cos(x - 60^\circ) = \sqrt{3}$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Lời giải chi tiết

$\cos(x - 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Let $\theta = x - 60^\circ$; as x ranges over $[0^\circ, 360^\circ]$, θ ranges over $[-60^\circ, 300^\circ]$.
 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \theta = \pm 30^\circ$ within this range, i.e. $\theta = -30^\circ$ or $\theta = 30^\circ$. $x = \theta + 60^\circ$: $\theta = -30^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$; $\theta = 30^\circ \Rightarrow x = 90^\circ$. **Solutions:** $x = 30^\circ, 90^\circ$.

Bài tập luyện tập

Find the number of terms in the arithmetic progression 5, 9, 13, ..., 153.

(A) 38

(C) 39

(B) 37

(D) 40

Lời giải chi tiết

$u_n = 5 + (n - 1)(4) = 153 \Rightarrow (n - 1)(4) = 148 \Rightarrow n - 1 = 37 \Rightarrow n = 38$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the coefficient of x^3 in the expansion of $(1 - 2x)^7$.

(A) -280

(C) -560

(B) 280

(D) -35

Lời giải chi tiết

General term $\binom{7}{r}(1)^{7-r}(-2x)^r$. For $r = 3$: $\binom{7}{3}(-2)^3 = 35 \times (-8) = -280$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the equation of the tangent to the curve $y = 2x^3 - 5x + 1$ at the point where $x = -1$.

Lời giải chi tiết

At $x = -1$: $y = 2(-1)^3 - 5(-1) + 1 = -2 + 5 + 1 = 4$, so the point is $(-1, 4)$. $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 5$;
at $x = -1$: $6(1) - 5 = 1$. Tangent: $y - 4 = 1(x - (-1)) \Rightarrow y = x + 5$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_1^3 (3x^2 - 2x) dx$.

(A) 18

(C) 20

(B) 16

(D) 24

Lời giải chi tiết

$\int (3x^2 - 2x) dx = x^3 - x^2$. $[x^3 - x^2]_1^3 = (27 - 9) - (1 - 1) = 18 - 0 = 18$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the equation of the perpendicular bisector of the segment joining $A(-4, -1)$ and $B(2, 7)$.

(A) $3x + 4y = 9$

(C) $3x - 4y = 9$

(B) $4x + 3y = 9$

(D) $4x - 3y = 9$

Lời giải chi tiết

Midpoint of $AB = \left(\frac{-4+2}{2}, \frac{-1+7}{2} \right) = (-1, 3)$. Gradient of $AB = \frac{7 - (-1)}{2 - (-4)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, so the perpendicular bisector has gradient $-\frac{3}{4}$. Equation: $y - 3 = -\frac{3}{4}(x + 1) \Rightarrow 4y - 12 = -3x - 3 \Rightarrow 3x + 4y = 9$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the area enclosed between the curve $y = 6x - x^2 - 8$ and the x -axis.

Lời giải chi tiết

Roots: $-(x^2 - 6x + 8) = 0 \Rightarrow (x - 2)(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 2, 4$; the curve is positive between them.

$$\int_2^4 (6x - x^2 - 8) dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3} - 8x \right]_2^4 = \left(48 - \frac{64}{3} - 32 \right) - \left(12 - \frac{8}{3} - 16 \right) = \left(-\frac{16}{3} \right) - \left(-\frac{20}{3} \right) = \frac{4}{3}.$$

$$\text{Area} = \frac{4}{3}.$$

Bài tập luyện tập

Find the exact value of $\tan 135^\circ$.

(A) -1

(C) $-\sqrt{3}$

(B) 1

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải chi tiết

$135^\circ = 180^\circ - 45^\circ$, and tangent is negative in the second quadrant: $\tan 135^\circ = -\tan 45^\circ = -1$.
(A).

Ôn tập nhanh: luôn kiểm tra lại nghiệm khi giải phương trình chứa trị tuyệt đối hoặc căn; dùng Δ để xét vị trí tương đối giữa đường thẳng và đường con (cắt/tiếp xúc/không cắt); nhớ đổi sang radian khi dùng công thức cung và diện tích hình quạt; khi tính diện tích bằng tích phân mà đồ thị đổi dấu, phải tách đoạn và lấy trị tuyệt đối từng phần trước khi cộng.

Pure Mathematics --- Further Pure

Mục tiêu Unit: Đại số nâng cao (định lý nhân tử/định lý số dư, chia đa thức, phân thức tối giản với mẫu là nhân tử bậc nhất phân biệt/lập/tam thức vô nghiệm, phân thức không chính quy), hàm số mũ-logarit (quy tắc log, giải phương trình mũ-log, tuyến tính hoá dữ liệu), lượng giác nâng cao (sec, cosec, cot, công thức cộng, công thức nhân đôi, dạng $R \sin(x \pm \alpha)$), đạo hàm-tích phân nâng cao (đạo hàm ẩn, đạo hàm tham số, tích phân từng phần, đổi biến, phân thức tối giản), và giải phương trình bằng phương pháp số (Cambridge 9709, Paper 2/3).

2.1 Algebra: the factor theorem, remainder theorem and partial fractions

2.1.1 The factor theorem and the remainder theorem

For a polynomial $f(x)$, the **factor theorem** states that $(x - a)$ is a factor of $f(x)$ if and only if $f(a) = 0$. This is the standard tool for factorising cubics and quartics once one root is known or can be guessed by testing divisors of the constant term.

The **remainder theorem** generalises this idea: when $f(x)$ is divided by $(x - a)$, the remainder is the constant $f(a)$ (since $f(x) = (x - a)q(x) + f(a)$, and substituting $x = a$ kills the $(x - a)q(x)$ term). More generally, when $f(x)$ is divided by $(ax + b)$, the remainder is $f(-\frac{b}{a})$ — this lets us find a remainder **without carrying out any division at all**, simply by evaluating f at the root of the divisor.

Factor theorem: $f(a) = 0 \iff (x - a)$ is a factor of $f(x)$.

Remainder theorem: dividing $f(x)$ by $(x - a)$ leaves remainder $f(a)$; dividing by $(ax + b)$ leaves remainder $f(-\frac{b}{a})$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý nhân tử (factor theorem): $f(a) = 0 \Rightarrow (x - a)$ là nhân tử của $f(x)$ — dùng để phân tích đa thức bậc 3 trở lên khi đã biết hoặc đoán được một nghiệm (thường là ước của hệ số tự do).

Định lý số dư (remainder theorem): số dư khi chia $f(x)$ cho $(x - a)$ chính là $f(a)$; khi chia cho $(ax + b)$, số dư là $f(-b/a)$ — nghĩa là **không cần thực hiện phép chia**, chỉ cần thay giá trị làm triệt tiêu biểu thức chia vào $f(x)$.

2.1.2 Polynomial division

Once a linear (or higher-degree) factor is identified, polynomial long division (or synthetic/inspection division by comparing coefficients) reduces the degree of the polynomial by that amount, exposing the remaining factor(s). This is essential preparation both for full factorisation and for partial fractions when the algebraic fraction is improper.

Ví dụ mẫu • Worked example

(a) Factorise completely $f(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$, given that $(x - 1)$ is a factor.

$f(1) = 1 - 7 + 14 - 8 = 0$, confirming $(x - 1)$ is a factor. Dividing: $f(x) = (x - 1)(x^2 - 6x + 8) = (x - 1)(x - 2)(x - 4)$.

(b) Find the remainder when $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5x + 1$ is divided by (i) $(x - 2)$ and (ii) $(2x + 1)$, without performing full division.

(i) By the remainder theorem, the remainder is $f(2) = 2(8) + 3(4) - 10 + 1 = 16 + 12 - 10 + 1 = 19$.

(ii) The root of $2x + 1 = 0$ is $x = -\frac{1}{2}$, so the remainder is $f(-\frac{1}{2}) = 2(-\frac{1}{8}) + 3(\frac{1}{4}) - 5(-\frac{1}{2}) + 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{5}{2} + 1 = 4$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Factorise completely $f(x) = x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6$, given that $(x - 1)$ and $(x + 1)$ are both factors.

$f(1) = 1 - 5 + 5 + 5 - 6 = 0$ and $f(-1) = 1 + 5 + 5 - 5 - 6 = 0$, confirming both factors, so $(x - 1)(x + 1) = x^2 - 1$ is a factor of $f(x)$. Dividing:

$$x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = (x^2 - 1)(x^2 - 5x + 6) = (x^2 - 1)(x - 2)(x - 3).$$

So $f(x) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x - 3)$, a product of four distinct linear factors.

Ví dụ mẫu · Worked example

The polynomial $f(x) = x^3 + px^2 - 5x + q$ has $(x + 2)$ as a factor, and leaves a remainder of 12 when divided by $(x - 1)$. Find the values of p and q , and hence factorise $f(x)$ completely.

Since $(x + 2)$ is a factor, $f(-2) = 0$: $-8 + 4p + 10 + q = 0 \Rightarrow 4p + q = -2$.

By the remainder theorem, $f(1) = 12$: $1 + p - 5 + q = 12 \Rightarrow p + q = 16$.

Subtracting the first equation from four times the second (or solving directly), $3p = -2 - 16 = -18 \Rightarrow p = -6$, and then $q = 16 - (-6) = 22$.

So $f(x) = x^3 - 6x^2 - 5x + 22$. Dividing by $(x + 2)$ gives $f(x) = (x + 2)(x^2 - 8x + 11)$; the quadratic factor has discriminant $64 - 44 = 20 > 0$ but is not a perfect square, so it does not factorise further over the rationals.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi đề bài cho **đồng thời** một điều kiện nhân tử ($f(a) = 0$) và một điều kiện số dư ($f(b) = \text{giá trị cho trước}$), hãy viết cả hai phương trình theo các hệ số chưa biết, giải **hệ phương trình bậc nhất** để tìm chúng, rồi mới thực hiện phép chia đa thức để phân tích nhân tử hoàn toàn.

2.1.3 Partial fractions: distinct linear factors

A rational function $\frac{N(x)}{D(x)}$ (with $\deg N < \deg D$) whose denominator factorises into distinct linear factors can be split into a sum of simpler fractions:

$$\frac{N(x)}{(x - a)(x - b)} = \frac{A}{x - a} + \frac{B}{x - b}.$$

Multiplying both sides by the denominator and substituting $x = a$ (which eliminates B) and $x = b$ (which eliminates A) gives the constants directly – the “cover-up” method.

Ví dụ mẫu · Worked example

Express $\frac{7x+1}{(x-2)(x+3)}$ in partial fractions.

$7x+1 = A(x+3) + B(x-2)$. Let $x = 2$: $15 = 5A \Rightarrow A = 3$. Let $x = -3$: $-20 = -5B \Rightarrow B = 4$.

$$\frac{7x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+3}.$$

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Định lý nhân tử (factor theorem): $f(a) = 0 \Rightarrow (x-a)$ là nhân tử của $f(x)$ – dùng để phân tích đa thức bậc 3 trở lên. Khi tách phân thức tối giản với các nhân tử bậc nhất phân biệt, nhân chéo (khử mẫu) rồi **thế giá trị x triệt tiêu một nhân tử** để tìm nhanh từng hằng số A, B .

2.1.4 Partial fractions: repeated linear factors

When a linear factor is repeated, e.g. $(x-a)^2$, a single term $\frac{A}{x-a}$ is not general enough, because the numerator of the combined fraction would only ever be linear in $x-a$. The correct decomposition includes *one term for every power up to the repeat*:

$$\frac{N(x)}{(x-a)^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}, \quad \frac{N(x)}{(x-a)^2(x-b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2} + \frac{C}{x-b}.$$

Substituting $x = a$ finds B directly (as before); substituting $x = b$ finds C ; the remaining constant A is usually found by comparing coefficients of the highest power of x , or by substituting a convenient further value such as $x = 0$.

2.1.5 Partial fractions: an irreducible quadratic factor

If the denominator contains a quadratic factor that cannot be factorised over the reals (no real roots, i.e. negative discriminant), the numerator placed over it must be a *general linear* expression $Bx + C$, not just a constant:

$$\frac{N(x)}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{A}{x-a} + \frac{Bx+C}{x^2+b}.$$

Substituting $x = a$ gives A immediately; B and C are then found by comparing coefficients of x^2 and the constant term (or by substituting two further convenient values of x).

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Express $\frac{x^2+3x-7}{(x-2)^2(x+1)}$ in partial fractions.

Write $\frac{x^2+3x-7}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+1}$, so $x^2+3x-7 = A(x-2)(x+1) + B(x+1) + C(x-2)^2$.

$x = 2$: $3 = 3B \Rightarrow B = 1$. $x = -1$: $-9 = 9C \Rightarrow C = -1$. Comparing x^2 coefficients: $1 = A + C \Rightarrow A = 2$.

$$\frac{x^2+3x-7}{(x-2)^2(x+1)} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{(x-2)^2} - \frac{1}{x+1}.$$

(b) Express $\frac{x^2+2x+7}{(x-1)(x^2+4)}$ in partial fractions.

Write it as $\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$, so $x^2+2x+7 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1)$. $x=1$: $10 = 5A \Rightarrow A=2$. Comparing x^2 : $1 = A + B \Rightarrow B = -1$. Comparing constants: $7 = 4A - C \Rightarrow 7 = 8 - C \Rightarrow C = 1$.

$$\frac{x^2+2x+7}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1-x}{x^2+4}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi mẫu số có nhân tử bậc nhất **lặp** $(x-a)^2$, phải viết đủ hai số hạng $\frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-a)^2}$ (không chỉ một số hạng). Khi mẫu số có nhân tử **tam thức bậc hai vô nghiệm** (x^2+b) , tử số tương ứng phải là biểu thức bậc nhất tổng quát $Bx+C$ chứ không phải chỉ một hằng số – đây là lỗi rất hay gặp. Sau khi thế các giá trị x triệt tiêu nhân tử, dùng **so sánh hệ số** của x^2 và hệ số tự do để tìm các hằng số còn lại.

2.1.6 Improper algebraic fractions

A fraction $\frac{N(x)}{D(x)}$ is **improper** when $\deg N \geq \deg D$. Partial fractions can only be applied to a *proper* fraction, so the first step is always to divide out: $N(x) = Q(x)D(x) + R(x)$ with $\deg R < \deg D$, giving

$$\frac{N(x)}{D(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)},$$

after which the remainder term $\frac{R(x)}{D(x)}$ (now proper) is split into partial fractions as usual.

Ví dụ mẫu · Worked example

Express $\frac{2x^3+3x^2-3x+2}{x^2-1}$ in partial fractions.

Since the numerator has degree $3 \geq 2 = \deg(x^2-1)$, divide first:

$$2x^3+3x^2-3x+2 = (2x+3)(x^2-1) + (-x+5),$$

so $\frac{2x^3+3x^2-3x+2}{x^2-1} = 2x+3 + \frac{-x+5}{(x-1)(x+1)}$. Writing $\frac{-x+5}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$:
 $x=1$ gives $4 = 2A \Rightarrow A=2$; $x=-1$ gives $6 = -2B \Rightarrow B=-3$.

$$\frac{2x^3+3x^2-3x+2}{x^2-1} = 2x+3 + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1}.$$

(!) **Lỗi thường gặp:** Never split an improper fraction ($\deg N \geq \deg D$) straight into partial fractions – divide first. A quadratic denominator factor with no real roots (check the discriminant) needs a linear numerator $Bx+C$ over it, never a bare constant.

2.2 Logarithmic and exponential functions

2.2.1 Laws of logarithms and solving exponential equations

$\ln x$ and e^x are inverse functions, as are $\log_a x$ and a^x for any base $a > 0$, $a \neq 1$. The laws of logarithms follow directly from the laws of indices:

$$\log(ab) = \log a + \log b, \quad \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b, \quad \log(a^n) = n \log a, \quad \log_a a = 1, \quad \log_a 1 = 0.$$

To solve an exponential equation $a^x = b$, take logarithms (any consistent base, usually $\ln$ or $\lg = \log_{10}$) of both sides: $x \ln a = \ln b \Rightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$. Equations with the unknown appearing in two different exponential terms (e.g. $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$) are solved by substituting $u = e^x$ to obtain a quadratic in u .

$a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$ (any base of logarithm may be used, provided it is used consistently on both sides).

$$\log(ab) = \log a + \log b, \quad \log(a/b) = \log a - \log b, \quad \log(a^n) = n \log a.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $3^{2x+1} = 20$, giving x to 3 s.f.

$$(2x + 1) \ln 3 = \ln 20 \Rightarrow 2x + 1 = \frac{\ln 20}{\ln 3} = 2.7268 \Rightarrow x = 0.863.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$\ln x$ và e^x là hai hàm ngược nhau; tương tự $\log_a x$ và a^x . Khi giải $a^x = b$, lấy $\log$ hai vế rồi dùng $\log(a^n) = n \log a$ để đưa số mũ xuống thành hệ số. Khi phương trình chứa cả e^{2x} và e^x (dạng bậc hai ẩn e^x), đặt ẩn phụ $u = e^x$ để đưa về phương trình bậc hai quen thuộc, giải u rồi mới suy ra $x = \ln u$ (chỉ nhận $u > 0$).

Change of base: for any valid bases a, b and $x > 0$, $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\log_b x}{\log_b a}$.

This identity lets any logarithm be rewritten in terms of natural (or common) logarithms, which is exactly why taking $\ln$ of both sides of an exponential equation works regardless of which base originally appears, and why a calculator with only $\ln$ and $\lg$ keys can still evaluate $\log_a x$ for any base a .

a. For instance, $\log_5 20 = \frac{\ln 20}{\ln 5} = \frac{2.9957}{1.6094} = 1.861$ (3 d.p.).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức đổi cơ số (change of base): $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ — nhờ công thức này, có thể tính $\log_a x$ với **bất kỳ cơ số** a nào bằng máy tính (vốn thường chỉ có phím $\ln$ và $\lg$), và giải thích vì sao lấy $\ln$ hai vế của một phương trình mũ/log luôn hợp lệ dù cơ số ban đầu là gì.

2.2.2 Solving logarithmic equations, including simultaneous equations

Logarithmic equations are solved by combining all logarithms on one side using the laws above into a single $\log(\dots)$, then converting to exponential form. Because $\log$ is only defined for a positive argument, **every candidate solution must be checked against the domain** of every logarithm in the original equation, and any value giving a non-positive argument must be rejected. Simultaneous equations involving logs are usually solved by treating $\log$ of each unknown as a new variable (e.g. $a = \lg x$, $b = \lg y$), solving the resulting linear system, and converting back at the end.

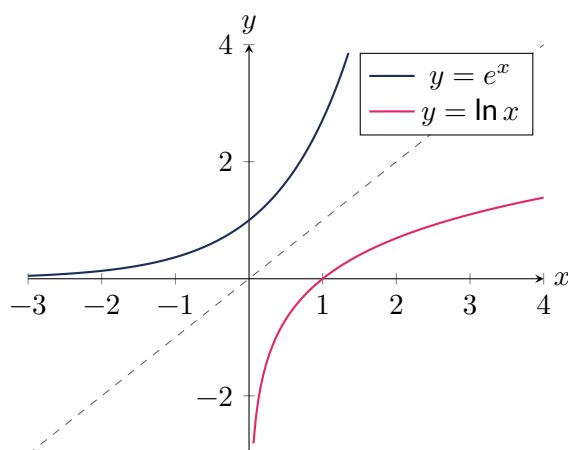
Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Solve $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$.

$\log_2 [x(x - 2)] = 3 \Rightarrow x(x - 2) = 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) = 0$. Since $x > 2$ is required for $\log_2(x - 2)$ to be defined, reject $x = -2$: $x = 4$.

(b) Solve simultaneously, for $x, y > 0$: $\lg(xy) = 3$ and $\lg\left(\frac{x}{y}\right) = 1$.

These give $\lg x + \lg y = 3$ and $\lg x - \lg y = 1$. Adding: $2\lg x = 4 \Rightarrow \lg x = 2 \Rightarrow x = 100$. Subtracting: $2\lg y = 2 \Rightarrow \lg y = 1 \Rightarrow y = 10$. (Check: $xy = 1000$, $\lg 1000 = 3$; $x/y = 10$, $\lg 10 = 1$.)



$y = e^x$ and $y = \ln x$ are reflections of each other in $y = x$; the same relationship holds between $y = a^x$ and $y = \log_a x$ for any base $a > 1$.

(!) Lỗi thường gặp: $\log(x - 2)$ is only defined for $x > 2$ – always check that candidate solutions lie in the valid domain before accepting them. Also, $\log a + \log b \neq \log(a + b)$; only *products* and *quotients* combine simply under a log.

2.2.3 Equations reducible to a quadratic using a logarithmic substitution

Some equations contain $\log_a x$ (for a base a other than e or 10) together with $(\log_a x)^2$ or $\log_a(x^k)$ terms. Writing $y = \log_a x$ throughout converts such an equation into an ordinary quadratic in y ; once y is found, $x = a^y$ recovers the original unknown. Because $y = \log_a x$ can take *any* real value (positive, negative or zero), unlike a substitution such as $u = e^x$, **both** roots of the quadratic in y are automatically valid – there is no positivity restriction to check before converting back.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $(\log_3 x)^2 - 4\log_3 x - 5 = 0$.

Let $y = \log_3 x$: $y^2 - 4y - 5 = 0 \Rightarrow (y - 5)(y + 1) = 0 \Rightarrow y = 5$ or $y = -1$. So $\log_3 x = 5 \Rightarrow x = 3^5 = 243$, or $\log_3 x = -1 \Rightarrow x = 3^{-1} = \frac{1}{3}$.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Khi phương trình chứa cả $\log_a x$ và $(\log_a x)^2$ (cơ số a khác e và 10), đặt $y = \log_a x$ để đưa về phương trình bậc hai quen thuộc theo y . Khác với đặt $u = e^x$ (luôn dương), biến $y = \log_a x$ có thể nhận **mọi giá trị thực**, nên cả hai nghiệm y tìm được đều hợp lệ, không cần loại nghiệm

nào trước khi suy ra $x = a^y$.

2.2.4 Graphs of $y = a^x$ and $y = \log_a x$

For $a > 1$, $y = a^x$ is an increasing curve through $(0, 1)$ with the negative x -axis as an asymptote and range $y > 0$; its inverse $y = \log_a x$ is an increasing curve through $(1, 0)$, defined only for $x > 0$, with the negative y -axis as an asymptote. Because they are inverse functions, their graphs are reflections of each other in the line $y = x$ (shown above for the case $a = e$).

Ví dụ mẫu · Worked example

State the domain, range, and the equation of the asymptote of (a) $y = 2^x - 3$, and (b) $y = \log_2(x + 3)$.

(a) Since $2^x > 0$ for all real x , we have $y = 2^x - 3 > -3$, so the range is $y > -3$ and the horizontal asymptote is $y = -3$ (the graph of $y = 2^x$ shifted down by 3 units); the domain is all real x .

(b) $\log_2(x + 3)$ requires $x + 3 > 0$, so the domain is $x > -3$; the vertical asymptote is $x = -3$ (the graph of $y = \log_2 x$ shifted left by 3 units), and since $\log_2$ takes every real value, the range is all real y .

2.2.5 Linearising data of the form $y = ax^n$ and $y = Ab^x$

Logarithms convert power and exponential relationships into straight lines, which is the basis of fitting models to experimental data.

- If $y = ax^n$, taking logs of both sides gives $\lg y = n \lg x + \lg a$. Plotting $\lg y$ against $\lg x$ gives a straight line of **gradient** n and **vertical intercept** $\lg a$.
- If $y = Ab^x$, taking logs gives $\lg y = x \lg b + \lg A$. Plotting $\lg y$ against x (not $\lg x$) gives a straight line of **gradient** $\lg b$ and **vertical intercept** $\lg A$.

In both cases, once the gradient and intercept of the fitted line are read off, n (or b) and a (or A) can be recovered by solving $\lg a = \text{intercept}$ (so $a = 10^{\text{intercept}}$), and similarly $b = 10^{\text{gradient}}$ in the second case.

$$y = ax^n \Rightarrow \lg y = n \lg x + \lg a \text{ (plot } \lg y \text{ vs } \lg x: \text{ gradient } n, \text{ intercept } \lg a).$$

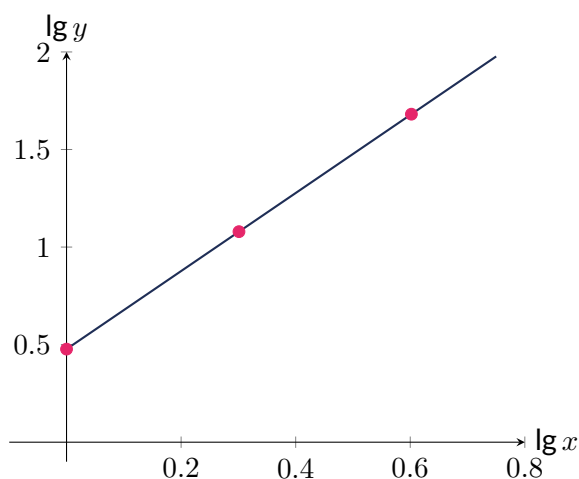
$$y = Ab^x \Rightarrow \lg y = (\lg b)x + \lg A \text{ (plot } \lg y \text{ vs } x: \text{ gradient } \lg b, \text{ intercept } \lg A).$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Variables x and y are believed to satisfy $y = ax^n$. Experimental values give the table below.

x	1	2	4
y	3	12	48
$\lg x$	0	0.301	0.602
$\lg y$	0.477	1.079	1.681

Using the first and last columns, $\text{gradient} = \frac{1.681 - 0.477}{0.602 - 0} = \frac{1.204}{0.602} = 2.00$, so $n = 2$. The intercept is $0.477 = \lg a \Rightarrow a = 10^{0.477} = 3.00$. Hence $y = 3x^2$.



Straight-line reduction of $y = ax^n$: gradient $n = 2$, intercept $\lg a = 0.477$, so $a = 3$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Muốn tuyến tính hoá dữ liệu dạng $y = ax^n$: lấy lg hai vế được $\lg y = n \lg x + \lg a$, vẽ đồ thị $\lg y$ theo $\lg x$ sẽ được đường thẳng có **hệ số góc** n và **tung độ gốc** $\lg a$. Với dạng mũ $y = Ab^x$, lấy lg hai vế được $\lg y = (\lg b)x + \lg A$, lần này vẽ $\lg y$ theo x (không phải $\lg x$) – hệ số góc là $\lg b$, tung độ gốc là $\lg A$. Sau khi đọc hệ số góc và tung độ gốc từ đồ thị/bảng số liệu, dùng lũy thừa cơ số 10 để suy ngược ra a, n (hoặc A, b).

2.3 Further trigonometry

2.3.1 Secant, cosecant, cotangent and further Pythagorean identities

Three further trigonometric ratios are defined as reciprocals of cosine, sine and tangent:

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}.$$

Dividing the identity $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ through by $\cos^2 \theta$ gives $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$; dividing instead by $\sin^2 \theta$ gives $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta$. These extended Pythagorean identities are used constantly for simplifying expressions, proving further identities, and solving equations that mix reciprocal trigonometric functions.

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}, \quad \operatorname{cosec} \theta = \frac{1}{\sin \theta}, \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}.$$

$$\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta, \quad \operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Ba tỉ số lượng giác nghịch đảo: $\sec \theta = 1/\cos \theta$, $\operatorname{cosec} \theta = 1/\sin \theta$, $\cot \theta = 1/\tan \theta$. Từ hằng đẳng thức cơ bản $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, chia cho $\cos^2 \theta$ được $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$; chia cho $\sin^2 \theta$ được $\operatorname{cosec}^2 \theta = 1 + \cot^2 \theta$. Hai công thức mở rộng này dùng rất nhiều khi rút gọn biểu thức hoặc giải phương trình có $\sec$, cosec , $\cot$.

2.3.2 Compound angle formulae

For any angles A, B :

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B, \quad \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B, \quad \tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}.$$

These can be justified by placing two points on the unit circle at angles A and B from the positive x -axis, at coordinates $(\cos A, \sin A)$ and $(\cos B, \sin B)$, and computing the squared distance between them in two ways: directly by the distance formula, and via the cosine rule using the angle $A - B$ between the two radii. Equating the two expressions and simplifying yields $\cos(A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B$; replacing B by $-B$ gives the $\cos(A + B)$ form, and using $\sin \theta = \cos(90^\circ - \theta)$ converts these into the sine formulae. Dividing $\sin(A \pm B)$ by $\cos(A \pm B)$ and dividing numerator and denominator by $\cos A \cos B$ produces the tangent formula.

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B, \quad \cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B.$$

$$\text{Double angle: } \sin 2A = 2 \sin A \cos A, \quad \cos 2A = \cos^2 A - \sin^2 A = 2 \cos^2 A - 1 = 1 - 2 \sin^2 A, \\ \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Given $\sin A = \frac{3}{5}$ (A acute) and $\cos B = \frac{12}{13}$ (B acute), find $\sin(A + B)$.

$$\cos A = \frac{4}{5}, \sin B = \frac{5}{13}. \quad \sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{36}{65} + \frac{20}{65} = \frac{56}{65}.$$

(b) Prove that $\sec \theta - \cos \theta \equiv \sin \theta \tan \theta$.

$$\text{LHS} = \frac{1}{\cos \theta} - \cos \theta = \frac{1 - \cos^2 \theta}{\cos \theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \tan \theta = \text{RHS}.$$

(c) Given $\tan A = \frac{1}{2}$ and $\tan B = \frac{1}{3}$ (A, B acute), find the exact value of $\tan(A + B)$.

$$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1, \text{ so } A + B = 45^\circ.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức cộng $\sin(A \pm B)$, $\cos(A \pm B)$ có thể chứng minh bằng hình học (đặt hai điểm trên đường tròn đơn vị ứng với góc A và B , tính khoảng cách giữa chúng theo hai cách). Khi **chứng minh đẳng thức lượng giác**, luôn biến đổi từ vế phức tạp hơn (thường là vế trái) về vế đơn giản hơn, dùng hằng đẳng thức Pythagoras ($\sin^2 + \cos^2 = 1$ hoặc các dạng mở rộng $\sec^2$, $\csc^2$) để quy về cùng một hàm lượng giác.

2.3.3 Double angle formulae and their uses

Setting $B = A$ in the compound angle formulae gives the double angle identities in the keyfact above. These are used to simplify expressions such as $\frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \sin^2 \theta$ and $\frac{1 + \cos 2\theta}{2} = \cos^2 \theta$ (obtained by rearranging $\cos 2A = 1 - 2 \sin^2 A$ and $\cos 2A = 2 \cos^2 A - 1$ respectively), which are indispensable later for integrating $\sin^2 x$ and $\cos^2 x$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Prove that $\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \equiv \sec \theta + \tan \theta$.

Multiply top and bottom of the LHS by $(1 + \sin \theta)$:

$$\frac{\cos \theta}{1 - \sin \theta} \cdot \frac{1 + \sin \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\cos \theta(1 + \sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta} = \frac{\cos \theta(1 + \sin \theta)}{\cos^2 \theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{1}{\cos \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sec \theta + \tan \theta = \text{RHS}.$$

(b) Solve $\cos 2\theta + \cos \theta = 0$ for $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Using $\cos 2\theta = 2 \cos^2 \theta - 1$: $2 \cos^2 \theta - 1 + \cos \theta = 0 \Rightarrow 2 \cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = 0 \Rightarrow (2 \cos \theta - 1)(\cos \theta + 1) = 0$. So $\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ, 300^\circ$, or $\cos \theta = -1 \Rightarrow \theta = 180^\circ$. Solutions: $\theta = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với đẳng thức có mẫu số dạng $1 \mp \sin \theta$ hoặc $1 \mp \cos \theta$, kỹ thuật hữu ích là **nhân cả tử và mẫu với biểu thức liên hợp** ($1 \pm \sin \theta$ hoặc $1 \pm \cos \theta$) để mẫu số trở thành $\cos^2 \theta$ hoặc $\sin^2 \theta$ nhờ hằng đẳng thức Pythagoras. Khi phương trình chứa cả $\cos 2\theta$ và $\cos \theta$, dùng công thức nhân đôi $\cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1$ để đưa toàn bộ phương trình về một ẩn $\cos \theta$ duy nhất, rồi giải như phương trình bậc hai bình thường.

2.3.4 The $R \sin(x \pm \alpha)$ and $R \cos(x \pm \alpha)$ technique

An expression $a \cos \theta + b \sin \theta$ (or $a \sin \theta + b \cos \theta$) can always be written as a single sinusoid $R \cos(\theta \mp \alpha)$ or $R \sin(\theta \pm \alpha)$, where $R = \sqrt{a^2 + b^2} > 0$ and α (usually taken with $0^\circ < \alpha < 90^\circ$) satisfies $\cos \alpha = a/R$, $\sin \alpha = b/R$. This single-term form immediately reveals the **maximum value** (R) and **minimum value** ($-R$) of the original expression, and turns equations of the form $a \cos \theta + b \sin \theta = c$ into a simple sinusoidal equation that is solved like any other trig equation.

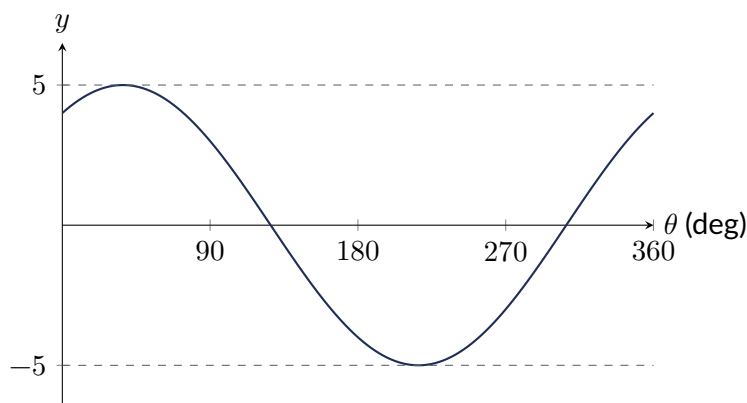
Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Express $3 \cos \theta - 4 \sin \theta$ as $R \cos(\theta + \alpha)$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, and find its maximum value and the $\theta \in [0^\circ, 360^\circ]$ at which it occurs.

$R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = 53.13^\circ$. So $3 \cos \theta - 4 \sin \theta = 5 \cos(\theta + 53.13^\circ)$. Maximum value 5, when $\theta + 53.13^\circ = 360^\circ \Rightarrow \theta = 306.9^\circ$.

(b) Hence solve $3 \cos \theta - 4 \sin \theta = 2$ for $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

$5 \cos(\theta + 53.13^\circ) = 2 \Rightarrow \cos(\theta + 53.13^\circ) = 0.4 \Rightarrow \theta + 53.13^\circ = 66.42^\circ$ or 293.58° (since $\theta + 53.13^\circ \in [53.13^\circ, 413.13^\circ]$, and $\cos$ is positive with reference angle 66.42° in the first and fourth quadrants). So $\theta = 13.3^\circ$ or $\theta = 240.4^\circ$ (1 d.p.).



$y = 5 \sin(\theta + 53.13^\circ)$: amplitude $R = 5$ gives maximum 5 and minimum -5 , and the graph is the standard sine wave shifted left by 53.13° .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Dạng $R \cos(\theta + \alpha)$ (hoặc $R \sin(\theta + \alpha)$) giúp tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất và giải phương trình lượng giác dạng $a \cos \theta + b \sin \theta = c$. Luôn tính $R = \sqrt{a^2 + b^2}$ trước, sau đó dùng $\cos \alpha = a/R$, $\sin \alpha = b/R$ để tìm α . Khi giải phương trình, nhớ đổi lại khoảng giá trị của $(\theta + \alpha)$ theo khoảng của θ đề bài cho trước khi tìm nghiệm tổng quát của $\cos$ hoặc $\sin$.

2.3.5 Proving trigonometric identities

To prove an identity, work from the more complicated side (often, but not always, the left-hand side), express everything in terms of $\sin$ and $\cos$ if reciprocal or quotient functions are present, and

apply Pythagorean or compound/double angle identities until the expression matches the other side exactly. Never “cross-multiply” or otherwise treat the identity as an equation to be solved for θ – transform one side (or both sides independently) until they visibly match, since an identity must hold for *all* valid θ . Watch signs carefully in double angle work: $\cos 2A$ has three equivalent forms ($\cos^2 A - \sin^2 A$, $2\cos^2 A - 1$, $1 - 2\sin^2 A$), and mixing up the sign in the last two is a common slip.

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Prove that $\frac{1}{\sec \theta - \tan \theta} \equiv \sec \theta + \tan \theta$.

Since $\sec^2 \theta = 1 + \tan^2 \theta$, we have $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$. Factorising the left side as a difference of two squares, $(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta) = 1$. Dividing both sides by $(\sec \theta - \tan \theta)$ gives $\sec \theta + \tan \theta = \frac{1}{\sec \theta - \tan \theta}$, which is the required identity.

(b) Prove that $\tan \theta + \cot \theta \equiv \frac{2}{\sin 2\theta}$.

$$\text{LHS} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{1}{\sin \theta \cos \theta} = \frac{2}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{2}{\sin 2\theta} = \text{RHS}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với đẳng thức có dạng $\sec \theta \mp \tan \theta$, dùng hằng đẳng thức $\sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$ rồi phân tích thành nhân tử hiệu hai bình phương $(\sec \theta - \tan \theta)(\sec \theta + \tan \theta) = 1$ để suy ra mối liên hệ nghịch đảo giữa hai biểu thức. Với $\tan \theta + \cot \theta$, quy về $\sin, \cos$ rồi dùng công thức nhân đôi $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ ở mẫu số để rút gọn về $\frac{2}{\sin 2\theta}$.

2.4 Further differentiation and integration

2.4.1 Derivatives of e^x , $\ln x$ and trigonometric functions; the chain rule

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x, \quad \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \quad \frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \quad \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \quad \frac{d}{dx} \tan x = \sec^2 x.$$

For a composite function $f(g(x))$, the **chain rule** gives $\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$. Applied to the standard derivatives above this yields, for example, $\frac{d}{dx} e^{g(x)} = g'(x)e^{g(x)}$, $\frac{d}{dx} \ln(g(x)) = \frac{g'(x)}{g(x)}$, and $\frac{d}{dx} \sin(g(x)) = g'(x) \cos(g(x))$.

2.4.2 Product and quotient rules

For products, $\frac{d}{dx} [u(x)v(x)] = u'v + uv'$. For quotients, $\frac{d}{dx} \left[\frac{u(x)}{v(x)} \right] = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. These combine with the chain rule whenever u or v is itself a composite function.

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Differentiate $y = \ln(3x^2 + 1)$. $\frac{dy}{dx} = \frac{6x}{3x^2 + 1}$ (chain rule).

(b) Differentiate $y = e^{2x} \sin x$. Product rule: $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x = e^{2x}(2 \sin x + \cos x)$.

(c) Differentiate $y = \frac{\ln x}{x^2}$. Quotient rule: $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc dây chuyền (chain rule): đạo hàm hàm hợp $f(g(x))$ bằng $f'(g(x)) \cdot g'(x)$ — luôn nhân thêm đạo hàm của biểu thức bên trong. Quy tắc tích (product rule): $(uv)' = u'v + uv'$. Quy tắc thương (quotient rule): $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ — chú ý thứ tự trừ ở tử số, đổi chỗ u, v sẽ sai dấu.

(!) **Lỗi thường gặp:** The most common chain-rule error is differentiating the “outer” function correctly but forgetting to multiply by the derivative of the “inner” function — e.g. writing $\frac{d}{dx} \ln(3x^2 + 1) = \frac{1}{3x^2 + 1}$ instead of $\frac{6x}{3x^2 + 1}$. Always ask: *what is inside, and what is its derivative?*

Ví dụ mẫu · Worked example

Differentiate $y = \frac{\sin x}{e^{2x}}$, giving your answer in the form $e^{-2x}(\dots)$.

Quotient rule with $u = \sin x$, $v = e^{2x}$: $u' = \cos x$, $v' = 2e^{2x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x \cdot e^{2x} - \sin x \cdot 2e^{2x}}{e^{4x}} = \frac{e^{2x}(\cos x - 2 \sin x)}{e^{4x}} = \frac{\cos x - 2 \sin x}{e^{2x}} = e^{-2x}(\cos x - 2 \sin x).$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi đạo hàm một thương có dạng lượng giác chia cho hàm mũ (hoặc ngược lại), áp dụng quy tắc thương như bình thường; sau khi rút gọn, lũy thừa mũ ở mẫu thường triệt tiêu bớt với lũy thừa mũ ở tử, đưa kết quả về dạng gọn $e^{-kx}(\dots)$.

2.4.3 Implicit differentiation

When y is defined implicitly by an equation connecting x and y (not solved explicitly for y), differentiate every term with respect to x , treating y as a function of x : by the chain rule, $\frac{d}{dx}[y^n] = ny^{n-1} \frac{dy}{dx}$, and terms containing both x and y (such as xy) require the product rule together with this chain-rule factor. Then collect all terms containing $\frac{dy}{dx}$ on one side and solve for it.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find $\frac{dy}{dx}$ in terms of x and y given that $x^3 + y^3 = 9$, and hence find the gradient of the curve at the point $(2, 1)$.

Differentiating: $3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$. At $(2, 1)$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{1} = -4$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm ẩn: khi y không được viết tường minh theo x , đạo hàm **từng số hạng** theo x ; mỗi lần đạo hàm một biểu thức chứa y , phải nhân thêm $\frac{dy}{dx}$ (quy tắc dây chuyền), ví dụ $\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2 \frac{dy}{dx}$. Sau đó gom tất cả số hạng chứa $\frac{dy}{dx}$ về một vế rồi giải ra $\frac{dy}{dx}$.

2.4.4 Parametric differentiation

When a curve is given parametrically by $x = x(t)$, $y = y(t)$, the gradient is found using the chain rule in the form

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt},$$

found by computing $\frac{dx}{dt}$ and $\frac{dy}{dt}$ separately and dividing (valid wherever $dx/dt \neq 0$).

Ví dụ mẫu · Worked example

A curve has parametric equations $x = t^2 + 1$, $y = 2t^3 - 3t$. Find $\frac{dy}{dx}$ in terms of t , and evaluate it at $t = 2$.

$\frac{dx}{dt} = 2t$, $\frac{dy}{dt} = 6t^2 - 3$, so $\frac{dy}{dx} = \frac{6t^2 - 3}{2t}$. At $t = 2$: $\frac{dy}{dt} = 21$, $\frac{dx}{dt} = 4$, so $\frac{dy}{dx} = \frac{21}{4} = 5.25$.

Hence find the equation of the tangent to the curve at $t = 2$.

At $t = 2$: $x = 2^2 + 1 = 5$, $y = 2(8) - 3(2) = 16 - 6 = 10$. Using gradient $\frac{21}{4}$ at $(5, 10)$:
 $y - 10 = \frac{21}{4}(x - 5) \Rightarrow y = \frac{21}{4}x - \frac{65}{4}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm tham số: khi đường cong cho theo tham số t (tức $x = x(t)$, $y = y(t)$), dùng công thức $\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$ – tính riêng $\frac{dx}{dt}$ và $\frac{dy}{dt}$ theo t rồi chia cho nhau (không đạo hàm y trực tiếp theo x).

2.4.5 Standard integrals and integration by substitution

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C, \quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln |ax+b| + C,$$

$$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C, \quad \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C, \quad \int \sec^2(ax+b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C.$$

For integrals that are not directly in a standard form but contain a function and (a multiple of) its derivative, **substitution** $u = g(x)$ converts the integral into one in terms of u alone, using $du = g'(x) dx$.

Function	Derivative and standard integral
e^{ax+b}	$\frac{d}{dx} = ae^{ax+b}; \quad \int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a}e^{ax+b} + C$
$\ln(ax+b)$	$\frac{d}{dx} = \frac{a}{ax+b}; \quad \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
$\sin(ax+b)$	$\frac{d}{dx} = a \cos(ax+b); \quad \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\cos(ax+b)$	$\frac{d}{dx} = -a \sin(ax+b); \quad \int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\tan(ax+b)$	$\frac{d}{dx} = a \sec^2(ax+b); \quad \int \sec^2(ax+b) dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Evaluate $\int_0^{\pi/6} \sin(2x) dx$.

$$\left[-\frac{1}{2} \cos 2x\right]_0^{\pi/6} = -\frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{1}{2} \cos 0\right) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(b) Evaluate $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx$ by substitution.

Let $u = x^2 + 1$, $du = 2x dx$; when $x = 0$, $u = 1$, when $x = \sqrt{3}$, $u = 4$.

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{1}{3} u^{3/2}.$$

$$\text{So } \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{3} (4^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{1}{3} (8 - 1) = \frac{7}{3}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tích phân đổi biến (substitution): nếu biểu thức dưới dấu tích phân chứa một hàm $g(x)$ và (bội số của) đạo hàm $g'(x)$ của nó, đặt $u = g(x)$, suy ra $du = g'(x)dx$, đổi luôn cả cận tích phân theo u nếu là tích phân xác định, rồi tính tích phân theo u .

Ví dụ mẫu · Worked example

Evaluate $\int_0^3 x\sqrt{x+1} dx$ using the substitution $u = x + 1$.

Let $u = x + 1$, so $x = u - 1$ and $dx = du$; when $x = 0$, $u = 1$, when $x = 3$, $u = 4$. Then $x\sqrt{x+1} = (u-1)\sqrt{u} = u^{3/2} - u^{1/2}$, which is not obviously related to the original integrand until this substitution is made.

$$\int x\sqrt{x+1} dx = \int (u^{3/2} - u^{1/2}) du = \frac{2}{5} u^{5/2} - \frac{2}{3} u^{3/2} = \frac{2}{5} (x+1)^{5/2} - \frac{2}{3} (x+1)^{3/2} + C.$$

$$\text{So } \int_0^3 x\sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{5} (x+1)^{5/2} - \frac{2}{3} (x+1)^{3/2}\right]_0^3 = \left(\frac{2}{5} (32) - \frac{2}{3} (8)\right) - \left(\frac{2}{5} - \frac{2}{3}\right) = \frac{112}{15} + \frac{4}{15} = \frac{116}{15} \approx 7.73.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi biểu thức dưới dấu tích phân là tích của một biểu thức bậc nhất theo x với căn bậc hai của một biểu thức khác x (chẳng hạn $\sqrt{x+1}$), phép đổi biến $u =$ biểu thức trong căn thường hiệu quả nhất: viết lại x theo u (ở đây $x = u - 1$), khai triển thành tổng các lũy thừa của u , rồi lấy nguyên hàm từng số hạng (nhớ đổi cả cận tích phân theo u).

2.4.6 Integration by parts

Integration by parts reverses the product rule:

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx.$$

The choice of which factor is u and which is $\frac{dv}{dx}$ matters: choose u to be the factor that *simplifies* on differentiation (e.g. $\ln x$ or x , whose derivatives are $\frac{1}{x}$ or 1), and $\frac{dv}{dx}$ to be the factor that is easy to integrate (e.g. e^{kx} or $\sin kx$). For $\ln x$ specifically, since it cannot be integrated by a standard rule, it is always chosen as u .

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Find $\int_0^1 x e^{2x} dx$.

Let $u = x$, $\frac{dv}{dx} = e^{2x}$, so $\frac{du}{dx} = 1$, $v = \frac{1}{2}e^{2x}$.

$$\int x e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} dx = \frac{1}{2} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C = \frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) + C.$$

$$\text{So } \int_0^1 x e^{2x} dx = \left[\frac{1}{4} e^{2x} (2x - 1) \right]_0^1 = \frac{1}{4} e^2 (1) - \frac{1}{4} (1)(-1) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2.10.$$

(b) Find $\int_1^e x \ln x dx$.

Let $u = \ln x$, $\frac{dv}{dx} = x$, so $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$, $v = \frac{1}{2}x^2$.

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \int \frac{1}{2} x^2 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

$$\text{So } \int_1^e x \ln x dx = \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 \right) - \left(0 - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2.10.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tích phân từng phần đảo ngược quy tắc tích: $\int u dv = uv - \int v du$. Chọn u là phần **đơn giản đi** khi đạo hàm (như x hay $\ln x$), chọn dv là phần **dễ lấy nguyên hàm** (như e^{kx} hay $\sin kx$, $\cos kx$). Với $\ln x$, vì không có công thức nguyên hàm trực tiếp, luôn chọn $u = \ln x$.

(!) Lỗi thường gặp: Choosing u and $\frac{dv}{dx}$ the wrong way round in integration by parts (e.g. letting $u = e^{2x}$ and $dv = x dx$) produces an integral that is no simpler, or even harder, than the original. Also remember the minus sign in the formula $\int u dv = uv - \int v du$ — dropping it is a very common slip, especially when a second application of by parts is needed.

Ví dụ mẫu · Worked example

Evaluate $\int_0^1 x^2 e^x dx$, applying integration by parts twice.

First application: let $u = x^2$, $\frac{dv}{dx} = e^x$, so $\frac{du}{dx} = 2x$, $v = e^x$.

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx.$$

Second application, on $\int 2xe^x dx$: let $u = 2x$, $\frac{dv}{dx} = e^x$, so $\frac{du}{dx} = 2$, $v = e^x$.

$$\int 2xe^x dx = 2xe^x - \int 2e^x dx = 2xe^x - 2e^x + C.$$

Combining, $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$ (which can be checked by differentiating back: $\frac{d}{dx}[e^x(x^2 - 2x + 2)] = e^x(x^2 - 2x + 2) + e^x(2x - 2) = e^x \cdot x^2$, as required).

$$\text{So } \int_0^1 x^2 e^x dx = \left[e^x(x^2 - 2x + 2) \right]_0^1 = e^1(1) - e^0(2) = e - 2 \approx 0.718.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi tích phân từng phần một lần chưa đưa về dạng tính được ngay (ví dụ tử số vẫn còn x bậc nhất nhân với e^x), áp dụng **tích phân từng phần lần thứ hai** cho tích phân còn lại, mỗi lần vẫn chọn u là phần đa thức (bậc giảm dần) và dv là phần hàm mũ hoặc lượng giác. Nên kiểm tra lại kết quả bằng cách đạo hàm nguyên hàm tìm được và so sánh với hàm ban đầu.

2.4.7 Integration using partial fractions

When the integrand is a rational function whose denominator factorises, first split it into partial fractions (as in Section 2.1–2.6), then integrate each simple term using $\int \frac{k}{x-a} dx = k \ln|x-a| + C$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Evaluate $\int_3^5 \frac{7x+1}{(x-2)(x+3)} dx$.

From the earlier partial fraction decomposition, $\frac{7x+1}{(x-2)(x+3)} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{x+3}$, so

$$\int \frac{7x+1}{(x-2)(x+3)} dx = 3 \ln|x-2| + 4 \ln|x+3| + C.$$

$$\left[3 \ln|x-2| + 4 \ln|x+3| \right]_3^5 = (3 \ln 3 + 4 \ln 8) - (3 \ln 1 + 4 \ln 6) = 3 \ln 3 + 4 \ln \frac{8}{6} = 3 \ln 3 + 4 \ln \frac{4}{3}.$$

$$\text{Simplifying, } 3 \ln 3 + 4 \ln 4 - 4 \ln 3 = 4 \ln 4 - \ln 3 = \ln \frac{256}{3} \approx 4.45.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Evaluate $\int_2^3 \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} dx$, using the improper-fraction decomposition found earlier.

Recall $\frac{2x^3 + 3x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = 2x + 3 + \frac{2}{x-1} - \frac{3}{x+1}$, so

$$\int \frac{2x^3 + 3x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} dx = x^2 + 3x + 2 \ln|x-1| - 3 \ln|x+1| + C.$$

$$\left[x^2 + 3x + 2 \ln|x-1| - 3 \ln|x+1| \right]_2^3 = (18 + 2 \ln 2 - 3 \ln 4) - (10 + 2 \ln 1 - 3 \ln 3) = 8 + 3 \ln 3 - 4 \ln 2 = 8 + \ln \frac{27}{16} \approx 8.523.$$

2.4.8 Integration using trigonometric identities

Some trigonometric integrands are not standard forms until a suitable identity is applied. In particular, since there is no direct rule for $\int \sin^2 x \, dx$ or $\int \cos^2 x \, dx$, the double angle formulae are rearranged first:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

after which each term integrates using the standard rules above.

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx$.

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \text{ so } \int \sin^2 x \, dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$\left[\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi/2} = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin \pi}{4} \right) - 0 = \frac{\pi}{4}.$$

(b) Evaluate $\int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx$.

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \text{ so } \int \cos^2 x \, dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

$$\left[\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} \right]_0^{\pi} = \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - 0 = \frac{\pi}{2}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Không có công thức nguyên hàm trực tiếp cho $\sin^2 x$ hay $\cos^2 x$; phải dùng công thức nhân đôi biến đổi trước: $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, rồi lấy nguyên hàm từng số hạng. Với tích phân chứa phân thức hữu tỉ, tách phân thức tối giản trước rồi mới lấy nguyên hàm từng số hạng dạng $k \ln |x - a|$.

2.5 Numerical solution of equations

2.5.1 Locating roots by a change of sign

If f is continuous on $[a, b]$ and $f(a), f(b)$ have opposite signs, the Intermediate Value Theorem guarantees at least one root of $f(x) = 0$ lies in (a, b) . This **sign-change test** only proves *existence* of a root in the interval – it gives no information about how many roots there are (if f is not monotonic) nor their precise value; it is typically used to justify the starting interval before an iterative method is applied.

Intermediate Value Theorem: if f is continuous on $[a, b]$ and k lies between $f(a)$ and $f(b)$, then $f(x) = k$ for at least one $x \in (a, b)$. Taking $k = 0$ gives the sign-change test used to locate a root.

Ví dụ mẫu · Worked example

Show that the equation $x - \cos x = 0$ (with x in radians) has a root between $x = 0$ and $x = 1$. Let $f(x) = x - \cos x$. Then $f(0) = 0 - \cos 0 = 0 - 1 = -1 < 0$, and $f(1) = 1 - \cos 1 = 1 - 0.5403 = 0.4597 > 0$. Since f is continuous and changes sign on $[0, 1]$, the Intermediate Value Theorem confirms a root lies in $(0, 1)$.

(!) Lỗi thường gặp: A sign change over $[a, b]$ proves that *at least one* root lies in the interval; it does not rule out three, five, or more roots there if f is not monotonic on $[a, b]$, and it can fail to detect a repeated root where the curve touches the x -axis without crossing it (there, $f(a)$ and $f(b)$ can have the *same* sign even though a root lies between them). Always support the sign-change test with a sketch or a table of further values of f .

2.5.2 Iteration $x_{n+1} = g(x_n)$

An equation $f(x) = 0$ can be rearranged algebraically into the form $x = g(x)$ in more than one way. Starting from an initial value x_0 (usually inside the bracketing interval found above) and repeatedly computing $x_{n+1} = g(x_n)$ generates a sequence that, *for a suitable rearrangement and starting value*, converges to a root α of the original equation (since if $x_n \rightarrow \alpha$ then $\alpha = g(\alpha)$, i.e. α satisfies $f(\alpha) = 0$). Iteration continues until two consecutive terms agree to the required number of decimal places.

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Show that $x^3 - 4x - 2 = 0$ has a root between $x = 2$ and $x = 2.5$, and use $x_{n+1} = (4x_n + 2)^{1/3}$ with $x_0 = 2.2$ to find it to 3 d.p.

$f(2) = 8 - 8 - 2 = -2 < 0$, $f(2.5) = 15.625 - 10 - 2 = 3.625 > 0$: sign change confirms a root in $(2, 2.5)$.

$$x_0 = 2.200, \quad x_1 = 2.2104, \quad x_2 = 2.2137, \quad x_3 = 2.2140, \quad x_4 = 2.214 \text{ (converged)}.$$

Root ≈ 2.214 (3 d.p.).

(b) Show that a different rearrangement of the same equation, $x_{n+1} = \frac{x_n^3 - 2}{4}$ (from $4x = x^3 - 2$), fails to converge to this root when started at $x_0 = 2.2$.

$$x_0 = 2.200, \quad x_1 = 2.162, \quad x_2 = 2.026, \quad x_3 = 1.579, \quad x_4 = 0.484, \quad x_5 = -0.472, \dots$$

The terms move steadily away from 2.214 instead of towards it. This is explained by $g'(x) = \frac{3}{4}x^2$, so $g'(2.214) \approx 3.68$; since $|g'(\alpha)| > 1$, the iteration diverges near the root, whereas for (a),

$$g'(x) = \frac{4}{3(4x + 2)^{2/3}} \text{ gives } g'(2.214) \approx 0.27, \text{ and } |g'(\alpha)| < 1 \text{ guarantees convergence.}$$

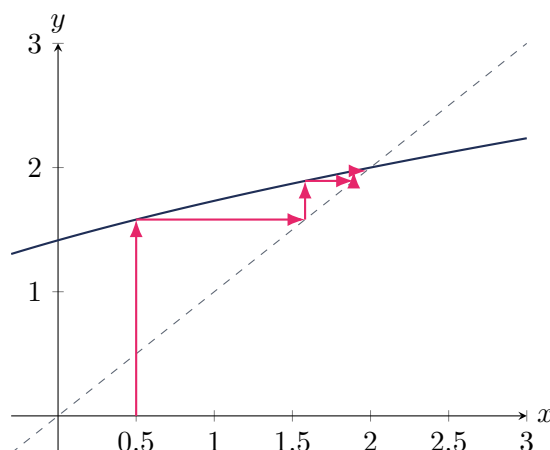
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kiểm tra dấu ($f(a)$ và $f(b)$ trái dấu) chỉ chứng minh **tồn tại** nghiệm trong (a, b) , không tìm ra giá trị nghiệm. Phép lặp $x_{n+1} = g(x_n)$ hội tụ về nghiệm nếu chọn điểm xuất phát đủ gần và cách sắp xếp $x = g(x)$ phù hợp (cụ thể là $|g'(x)| < 1$ gần nghiệm); lặp cho đến khi hai giá trị liên tiếp làm tròn giống nhau ở số chữ số yêu cầu. **Cùng một phương trình có thể cho nhiều cách sắp xếp $x = g(x)$ khác nhau** – có cách hội tụ nhanh, có cách phân kỳ hoàn toàn, dù xuất phát từ cùng một điểm.

2.5.3 Convergence, divergence and staircase/cobweb diagrams

The behaviour of the iteration $x_{n+1} = g(x_n)$ can be visualised by drawing $y = g(x)$ together with the line $y = x$: starting at x_0 on the x -axis, move vertically to the curve $y = g(x)$ (this height is x_1), then horizontally to the line $y = x$ (giving the point (x_1, x_1)), then vertically again to the curve, and so on. If $g'(x) > 0$ near the root, the resulting path is a **staircase** that steps monotonically towards the intersection point; if $g'(x) < 0$, the path is a **cobweb** that spirals in (if $|g'(\alpha)| < 1$) or spirals out (if $|g'(\alpha)| > 1$) around the root.



Staircase diagram for $x_{n+1} = \sqrt{x_n + 2}$ (root of $x = \sqrt{x+2}$ at $x = 2$), starting from $x_0 = 0.5$: since $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}} > 0$ and $|g'(2)| = 0.25 < 1$, the sequence climbs monotonically towards the root.

Ví dụ mẫu · Worked example

The equation $x^2 - 2x - 1 = 0$ has a root between $x = 2$ and $x = 3$ (since $f(2) = -1 < 0$ and $f(3) = 2 > 0$), namely $x = 1 + \sqrt{2} = 2.414$ (3 d.p.).

(a) Rearranging as $x = \sqrt{2x+1}$ and iterating $x_{n+1} = \sqrt{2x_n+1}$ from $x_0 = 2.400$:

$$x_0 = 2.400, x_1 = 2.408, x_2 = 2.412, x_3 = 2.413, x_4 = 2.414, x_5 = 2.414 \text{ (converged).}$$

Here $g(x) = \sqrt{2x+1}$, so $g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ and $g'(2.414) \approx 0.414$; since $|g'(\alpha)| < 1$, the iteration converges.

(b) Rearranging instead as $x = \frac{x^2 - 1}{2}$ and iterating $x_{n+1} = \frac{x_n^2 - 1}{2}$ from the same starting value $x_0 = 2.400$:

$$x_0 = 2.400, x_1 = 2.380, x_2 = 2.332, x_3 = 2.220, x_4 = 1.963, x_5 = 1.427, x_6 = 0.518, \dots$$

The terms move steadily away from the root instead of towards it. Here $g(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$, so $g'(x) = x$ and $g'(2.414) \approx 2.414$; since $|g'(\alpha)| > 1$, this rearrangement diverges near the root, even though it comes from the same original equation and the same starting value as (a).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cùng một phương trình $x^2 - 2x - 1 = 0$ có thể sắp xếp lại thành $x = g(x)$ theo nhiều cách khác nhau; cách (a) cho $|g'(\alpha)| < 1$ nên hội tụ, còn cách (b) cho $|g'(\alpha)| > 1$ nên phân kỳ, dù xuất phát từ cùng một điểm ban đầu. Trước khi lập, nên ước lượng $g'(x)$ gần nghiệm để dự đoán cách sắp xếp nào sẽ hội tụ trước khi tính toán nhiều bước.

n	x_n : converging, $x = \sqrt{2x+1}$	x_n : diverging, $x = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$
0	2.400	2.400
1	2.408	2.380
2	2.412	2.332
3	2.413	2.220
4	2.414	1.963
5	2.414	1.427

Both rearrangements come from the same equation $x^2 - 2x - 1 = 0$ and start from the same $x_0 = 2.400$: one column settles onto the root $x = 2.414$, the other runs away from it, depending on whether $|g'(x)| < 1$ or $|g'(x)| > 1$ near the root.

Bài tập luyện tập

$\frac{5x+7}{(x-1)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+3}$. Which is correct?

(A) $\frac{3}{x-1} + \frac{2}{x+3}$

(C) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+3}$

(B) $\frac{2}{x-1} + \frac{3}{x+3}$

(D) $\frac{5}{x-1} - \frac{2}{x+3}$

Lời giải chi tiết

$5x + 7 = A(x + 3) + B(x - 1)$. $x = 1$: $12 = 4A \Rightarrow A = 3$. $x = -3$: $-8 = -4B \Rightarrow B = 2$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Find the remainder when $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 6$ is divided by $(x + 2)$, using the remainder theorem.

Lời giải chi tiết

Remainder $= f(-2) = (-8) + 2(4) - 5(-2) + 6 = -8 + 8 + 10 + 6 = 16$.

Bài tập luyện tập

Given that $(x - 3)$ is a factor of $f(x) = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$, factorise $f(x)$ completely.

(A) $(x - 3)(x - 2)(x + 3)$

(C) $(x - 3)(x - 6)(x + 1)$

(B) $(x - 3)(x + 2)(x - 3)$

(D) $(x - 3)^2(x + 2)$

Lời giải chi tiết

$f(3) = 27 - 18 - 27 + 18 = 0$, confirming the factor. Dividing: $f(x) = (x - 3)(x^2 + x - 6) = (x - 3)(x + 3)(x - 2)$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Express $\frac{4x-1}{(x-1)^2}$ in partial fractions.

Lời giải chi tiết

$\frac{4x-1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$, so $4x - 1 = A(x - 1) + B$. Comparing coefficients of x : $A = 4$. Constant term: $-A + B = -1 \Rightarrow B = 3$.

$$\frac{4x-1}{(x-1)^2} = \frac{4}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}.$$

Bài tập luyện tập

Express $\frac{3x^2 + x + 1}{(x+1)(x^2+2)}$ in partial fractions.

(A) $\frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2+2}$

(C) $\frac{2}{x+1} + \frac{x-1}{x^2+2}$

(B) $\frac{1}{x+1} - \frac{2x-1}{x^2+2}$

(D) $\frac{1}{x+1} + \frac{2x+1}{x^2+2}$

Lời giải chi tiết

$3x^2 + x + 1 = A(x^2 + 2) + (Bx + C)(x + 1)$. $x = -1$: $3 = 3A \Rightarrow A = 1$. Comparing x^2 : $3 = A + B \Rightarrow B = 2$. Constants: $1 = 2A + C \Rightarrow C = -1$. (A).

Bài tập luyện tập

Express $\frac{x^3 - 3x + 5}{x^2 - 4}$ in the form (linear) + (partial fractions).

Lời giải chi tiết

Dividing: $x^3 - 3x + 5 = x(x^2 - 4) + (x + 5)$, so $\frac{x^3 - 3x + 5}{x^2 - 4} = x + \frac{x + 5}{(x - 2)(x + 2)}$. Writing $\frac{x + 5}{(x - 2)(x + 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2}$: $x = 2$ gives $7 = 4A \Rightarrow A = \frac{7}{4}$; $x = -2$ gives $3 = -4B \Rightarrow B = -\frac{3}{4}$.

$$\frac{x^3 - 3x + 5}{x^2 - 4} = x + \frac{7}{4(x - 2)} - \frac{3}{4(x + 2)}.$$

Bài tập luyện tập

Given $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 6$ has factor $(x - 1)$ and leaves remainder 4 when divided by $(x + 1)$, find a and b .

(A) $a = 8, b = -4$

(C) $a = 8, b = 4$

(B) $a = 4, b = 0$

(D) $a = -8, b = 4$

Lời giải chi tiết

$f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 4$. $f(-1) = 4 \Rightarrow -2 + a - b - 6 = 4 \Rightarrow a - b = 12$. Adding: $2a = 16 \Rightarrow a = 8$, then $b = -4$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $2^x \cdot 4^{x-1} = 8^2$ for x .

(A) $\frac{8}{3}$

(C) 3

(B) 2

(D) $\frac{10}{3}$

Lời giải chi tiết

All as powers of 2: $2^x \cdot 2^{2(x-1)} = 2^6 \Rightarrow x + 2x - 2 = 6 \Rightarrow 3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $\log_3(x+2) - \log_3(x-1) = 2$.

Lời giải chi tiết

$\log_3\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 2 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = 9 \Rightarrow x+2 = 9x-9 \Rightarrow 11 = 8x \Rightarrow x = \frac{11}{8}$. (Domain check: $x > 1$, and $\frac{11}{8} = 1.375 > 1$, valid.)

Bài tập luyện tập

Solve $\lg x + \lg(x-3) = 1$.

(A) $x = 5$

(C) $x = 5$ or $x = -2$

(B) $x = -2$

(D) $x = 2$

Lời giải chi tiết

$\lg[x(x-3)] = 1 \Rightarrow x(x-3) = 10 \Rightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+2) = 0$. Since $x > 3$ is required, reject $x = -2$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve simultaneously for $x, y > 0$: $2\lg x - \lg y = 1$ and $\lg x + \lg y = 5$.

Lời giải chi tiết

Let $a = \lg x$, $b = \lg y$: $2a - b = 1$, $a + b = 5$. Adding: $3a = 6 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow x = 100$. Then $b = 5 - 2 = 3 \Rightarrow y = 1000$.

Bài tập luyện tập

Solve $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$.

(A) $x = \ln 2$ or $\ln 3$

(C) $x = \ln 2$ only

(B) $x = 2$ or 3

(D) $x = \ln 6$

Lời giải chi tiết

Let $u = e^x$: $u^2 - 5u + 6 = 0 \Rightarrow (u-2)(u-3) = 0 \Rightarrow u = 2$ or 3 . So $x = \ln 2$ or $x = \ln 3$. (A).

Bài tập luyện tập

The line of best fit for $\lg y$ against x is $\lg y = 0.301x + 0.699$, where $y = Ab^x$. Find A and b to the nearest integer.

Lời giải chi tiết

Comparing with $\lg y = (\lg b)x + \lg A$: $\lg b = 0.301 \Rightarrow b = 10^{0.301} \approx 2$; $\lg A = 0.699 \Rightarrow A = 10^{0.699} \approx 5$. So $y = 5(2)^x$.

Bài tập luyện tập

Solve $4 \sin \theta \cos \theta = 1$ for $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$.

Lời giải chi tiết

$4 \sin \theta \cos \theta = 2 \sin 2\theta = 1 \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2}$. For $2\theta \in [0^\circ, 360^\circ]$: $2\theta = 30^\circ, 150^\circ$, so $\theta = 15^\circ, 75^\circ$.

Bài tập luyện tập

Simplify $\frac{\sec^2 \theta - 1}{\tan^2 \theta}$.

(A) 1

(C) 0

(B) $\tan \theta$

(D) $\operatorname{cosec}^2 \theta$

Lời giải chi tiết

Since $\sec^2 \theta - 1 = \tan^2 \theta$, the expression equals $\frac{\tan^2 \theta}{\tan^2 \theta} = 1$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $\operatorname{cosec}^2 \theta - 3 \operatorname{cosec} \theta + 2 = 0$ for $0^\circ < \theta < 360^\circ$.

Lời giải chi tiết

Let $u = \operatorname{cosec} \theta$: $u^2 - 3u + 2 = 0 \Rightarrow (u - 1)(u - 2) = 0 \Rightarrow u = 1$ or 2 . $\operatorname{cosec} \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta = 1 \Rightarrow \theta = 90^\circ$. $\operatorname{cosec} \theta = 2 \Rightarrow \sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ, 150^\circ$. Solutions: $\theta = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$.

Bài tập luyện tập

Express $\sin \theta - \cos \theta$ in the form $R \sin(\theta - \alpha)$, $R > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, and state its minimum value.

(A) $\sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ)$, min $-\sqrt{2}$

(C) $2 \sin(\theta - 45^\circ)$, min -2

(B) $\sqrt{2} \sin(\theta + 45^\circ)$, min $-\sqrt{2}$

(D) $\sqrt{2} \cos(\theta - 45^\circ)$, min $-\sqrt{2}$

Lời giải chi tiết

$R = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$, and $\sqrt{2} \sin(\theta - 45^\circ) = \sqrt{2}(\sin \theta \cos 45^\circ - \cos \theta \sin 45^\circ) = \sin \theta - \cos \theta$. Minimum value $-\sqrt{2}$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $\cos 2\theta + \sin \theta = 1$ for $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Lời giải chi tiết

Using $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta$: $1 - 2\sin^2 \theta + \sin \theta = 1 \Rightarrow \sin \theta(1 - 2\sin \theta) = 0$. So $\sin \theta = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ, 180^\circ, 360^\circ$, or $\sin \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 30^\circ, 150^\circ$. Full solution set: $\theta = 0^\circ, 30^\circ, 150^\circ, 180^\circ, 360^\circ$.

Bài tập luyện tập

Given $\tan \theta = 2$, find the exact value of $\tan 2\theta$.

(A) $-\frac{4}{3}$

(C) $-\frac{3}{4}$

(B) $\frac{4}{3}$

(D) 4

Lời giải chi tiết

$$\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{4}{1 - 4} = \frac{4}{-3} = -\frac{4}{3}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find the equation of the tangent to $y = e^{2x-1}$ at $x = \frac{1}{2}$.

(A) $y = 2x$

(C) $y = x + 0.5$

(B) $y = 2x - 1$

(D) $y = 2x + 1$

Lời giải chi tiết

At $x = \frac{1}{2}$: $y = e^0 = 1$. $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x-1}$, at $x = \frac{1}{2}$: gradient = 2. Tangent: $y - 1 = 2(x - \frac{1}{2}) \Rightarrow y = 2x$. (A).

Bài tập luyện tập

Find $\frac{dy}{dx}$ given that $x^2y + y^3 = 9$, at the point where $x = 2$, $y = 1$ (check this point lies on the curve first)...

Lời giải chi tiết

Check: $x^2y + y^3 = 4(1) + 1 = 5 \neq 9$, so this point does *not* lie on the curve – instead use $x^3 + y^3 = 9$: differentiating, $3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$. At $(2, 1)$: $\frac{dy}{dx} = -4$.

Bài tập luyện tập

A curve has parametric equations $x = 3t^2$, $y = 2t^3$. Find $\frac{dy}{dx}$ in terms of t , and its value at $t = 1$.

(A) $\frac{dy}{dx} = t$, value 1

(C) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$, value 1

(B) $\frac{dy}{dx} = t^2$, value 1

(D) $\frac{dy}{dx} = 2t$, value 2

Lời giải chi tiết

$\frac{dx}{dt} = 6t$, $\frac{dy}{dt} = 6t^2$, so $\frac{dy}{dx} = \frac{6t^2}{6t} = t$. At $t = 1$: $\frac{dy}{dx} = 1$. (A).

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = \tan(3x^2 + 1)$.

- (A) $6x \sec^2(3x^2 + 1)$ (C) $3 \sec^2(3x^2 + 1)$
(B) $6x \tan^2(3x^2 + 1)$ (D) $6x \sec(3x^2 + 1)$

Lời giải chi tiết

By the chain rule, $\frac{dy}{dx} = \sec^2(3x^2 + 1) \cdot 6x = 6x \sec^2(3x^2 + 1)$. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_1^4 \frac{3}{2x+1} dx$.

- (A) $\frac{3}{2} \ln 3$ (C) $\frac{3}{2} \ln 9$
(B) $3 \ln 3$ (D) $\ln 3$

Lời giải chi tiết

$\left[\frac{3}{2} \ln |2x+1| \right]_1^4 = \frac{3}{2} \ln 9 - \frac{3}{2} \ln 3 = \frac{3}{2} \ln \frac{9}{3} = \frac{3}{2} \ln 3$. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_0^1 2x(x^2 + 3)^4 dx$ using the substitution $u = x^2 + 3$.

- (A) 156.2 (C) 124.6
(B) 195.2 (D) 781

Lời giải chi tiết

$u = x^2 + 3$, $du = 2x dx$; limits $u = 3$ to $u = 4$. $\int_3^4 u^4 du = \left[\frac{u^5}{5} \right]_3^4 = \frac{1024 - 243}{5} = \frac{781}{5} = 156.2$. (A).

Bài tập luyện tập

Find $\int_1^e x \ln x dx$.

Lời giải chi tiết

By parts with $u = \ln x$, $dv = x dx$: $v = \frac{1}{2}x^2$, $du = \frac{1}{x}dx$.

$$\int x \ln x dx = \frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C.$$

$$\int_1^e x \ln x dx = \left(\frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{4}e^2\right) - \left(0 - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2 + 1}{4} \approx 2.10.$$

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_0^\pi \cos^2 x dx$.

(A) $\frac{\pi}{2}$

(C) 0

(B) π

(D) $\frac{\pi}{4}$

Lời giải chi tiết

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$, so $\int \cos^2 x dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C$. Evaluating from 0 to π : $\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) - 0 = \frac{\pi}{2}$.
(A).

Bài tập luyện tập

Show $x^3 - x - 3 = 0$ has a root between $x = 1$ and $x = 2$, and use $x_{n+1} = (x_n + 3)^{1/3}$, $x_0 = 1.5$, to find it to 3 d.p.

Lời giải chi tiết

$f(1) = 1 - 1 - 3 = -3 < 0$, $f(2) = 8 - 2 - 3 = 3 > 0$: sign change confirms a root in $(1, 2)$.

$$x_0 = 1.500, x_1 = 1.651, x_2 = 1.669, x_3 = 1.671, x_4 = 1.672 \text{ (converged)}.$$

Root ≈ 1.672 (3 d.p.).

Bài tập luyện tập

Show that $x^3 + x - 5 = 0$ has a root between $x = 1$ and $x = 2$, and use $x_{n+1} = (5 - x_n)^{1/3}$ with $x_0 = 1.5$ to find it to 3 d.p.

Lời giải chi tiết

$f(1) = 1 + 1 - 5 = -3 < 0$, $f(2) = 8 + 2 - 5 = 5 > 0$: sign change confirms a root in $(1, 2)$.

$$x_0 = 1.500, x_1 = 1.518, x_2 = 1.516, x_3 = 1.516 \text{ (converged)}.$$

Root ≈ 1.516 (3 d.p.). Check: $1.516^3 + 1.516 - 5 \approx 3.484 + 1.516 - 5 = 0.000$.

Bài tập luyện tập

For the iteration $x_{n+1} = g(x_n)$ converging to a root α , which condition on g near $x = \alpha$ guarantees convergence for x_0 sufficiently close to α ?

(A) $|g'(\alpha)| < 1$

(C) $g'(\alpha) = 0$ exactly

(B) $|g'(\alpha)| > 1$

(D) $g(\alpha) < \alpha$

Lời giải chi tiết

Convergence of the iteration for a starting value close to the root requires $|g'(\alpha)| < 1$; if $|g'(\alpha)| > 1$ the sequence diverges away from α instead. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Show that $e^{-x} = x^2$ has a root between $x = 0$ and $x = 1$, and use the iteration $x_{n+1} = e^{-x_n/2}$ with $x_0 = 0.7$ to find the root to 3 d.p.

Lời giải chi tiết

Let $f(x) = e^{-x} - x^2$. $f(0) = 1 - 0 = 1 > 0$, $f(1) = e^{-1} - 1 \approx -0.632 < 0$: sign change confirms a root in $(0, 1)$.

$$x_0 = 0.700, x_1 = 0.705, x_2 = 0.703, x_3 = 0.704, x_4 = 0.703 \text{ (converged)}.$$

Root ≈ 0.703 (3 d.p.).

Bài tập luyện tập

The polynomial $f(x) = x^3 + ax^2 + bx - 4$ has $(x - 2)$ as a factor, and leaves a remainder of 6 when divided by $(x + 1)$. Find a and b .

(A) $a = 3, b = -8$

(C) $a = 8, b = 3$

(B) $a = -3, b = 8$

(D) $a = 3, b = 8$

Lời giải chi tiết

$f(2) = 0$: $8 + 4a + 2b - 4 = 0 \Rightarrow 4a + 2b = -4 \Rightarrow 2a + b = -2$. $f(-1) = 6$: $-1 + a - b - 4 = 6 \Rightarrow a - b = 11$. Adding $2a + b = -2$ and $a - b = 11$: $3a = 9 \Rightarrow a = 3$, then $b = a - 11 = -8$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Express $\frac{x^2 + 5x - 3}{(x - 1)^2(x + 2)}$ in partial fractions.

Lời giải chi tiết

Write $\frac{x^2 + 5x - 3}{(x - 1)^2(x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{x + 2}$, so $x^2 + 5x - 3 = A(x - 1)(x + 2) + B(x + 2) + C(x - 1)^2$. $x = 1$: $3 = 3B \Rightarrow B = 1$. $x = -2$: $-9 = 9C \Rightarrow C = -1$. Comparing x^2 coefficients: $1 = A + C \Rightarrow A = 2$.

$$\frac{x^2 + 5x - 3}{(x - 1)^2(x + 2)} = \frac{2}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2} - \frac{1}{x + 2}.$$

Bài tập luyện tập

Express $\frac{2x^2 - x + 3}{(x+1)(x^2+1)}$ in partial fractions.

(A) $\frac{3}{x+1} - \frac{x}{x^2+1}$

(C) $\frac{2}{x+1} - \frac{x}{x^2+1}$

(B) $\frac{3}{x+1} + \frac{x}{x^2+1}$

(D) $\frac{3}{x+1} - \frac{x}{x^2+2}$

Lời giải chi tiết

$2x^2 - x + 3 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 1)$. $x = -1$: $6 = 2A \Rightarrow A = 3$. Comparing x^2 : $2 = A + B \Rightarrow B = -1$. Comparing constants: $3 = A + C \Rightarrow C = 0$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $(\log_2 x)^2 - 3 \log_2 x - 4 = 0$.

Lời giải chi tiết

Let $y = \log_2 x$: $y^2 - 3y - 4 = 0 \Rightarrow (y - 4)(y + 1) = 0 \Rightarrow y = 4$ or $y = -1$. So $x = 2^4 = 16$ or $x = 2^{-1} = \frac{1}{2}$.

Bài tập luyện tập

Solve $5^{x+1} = 3^{2x}$, giving x to 3 s.f.

(A) 2.74

(C) 3.42

(B) 1.85

(D) 2.20

Lời giải chi tiết

Taking logs: $(x+1) \ln 5 = 2x \ln 3 \Rightarrow x(\ln 5 - 2 \ln 3) = -\ln 5 \Rightarrow x = \frac{-\ln 5}{\ln 5 - 2 \ln 3} = \frac{-1.6094}{1.6094 - 2.1972} = \frac{-1.6094}{-0.5878} = 2.74$. (A).

Bài tập luyện tập

Variables x and y satisfy $y = Ab^x$. When $\lg y$ is plotted against x , the line of best fit passes through $(0, 1)$ and $(3, 1.903)$. Find A and b .

Lời giải chi tiết

Gradient $= \frac{1.903 - 1}{3 - 0} = \frac{0.903}{3} = 0.301 = \lg b \Rightarrow b = 10^{0.301} = 2.00$. The intercept (at $x = 0$) is $1 = \lg A \Rightarrow A = 10^1 = 10$. So $y = 10(2)^x$.

Bài tập luyện tập

Simplify $(1 + \cot^2 \theta) \sin^2 \theta$.

(A) 1

(C) $\cot^2 \theta$ (B) $\cos^2 \theta$ (D) $\sin^2 \theta$ **Lời giải chi tiết**

Since $1 + \cot^2 \theta = \operatorname{cosec}^2 \theta = \frac{1}{\sin^2 \theta}$, the expression equals $\frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \sin^2 \theta = 1$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Solve $\cos 2\theta - 3 \sin \theta = 2$ for $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

Lời giải chi tiết

Using $\cos 2\theta = 1 - 2 \sin^2 \theta$: $1 - 2 \sin^2 \theta - 3 \sin \theta = 2 \Rightarrow 2 \sin^2 \theta + 3 \sin \theta + 1 = 0 \Rightarrow (2 \sin \theta + 1)(\sin \theta + 1) = 0$. So $\sin \theta = -\frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 210^\circ, 330^\circ$, or $\sin \theta = -1 \Rightarrow \theta = 270^\circ$. Solutions: $\theta = 210^\circ, 270^\circ, 330^\circ$.

Bài tập luyện tập

Express $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta$ as $R \sin(\theta + \alpha)$, $R > 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, and hence solve $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 1$ for $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$.

(A) $\theta = 0^\circ, 120^\circ, 360^\circ$ (C) $\theta = 0^\circ, 120^\circ$ (B) $\theta = 30^\circ, 150^\circ$ (D) $\theta = 60^\circ, 180^\circ, 300^\circ$ **Lời giải chi tiết**

$R = \sqrt{3+1} = 2$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$, so $\sqrt{3} \sin \theta + \cos \theta = 2 \sin(\theta + 30^\circ)$. $2 \sin(\theta + 30^\circ) = 1 \Rightarrow \sin(\theta + 30^\circ) = \frac{1}{2}$. For $\theta + 30^\circ \in [30^\circ, 390^\circ]$: $\theta + 30^\circ = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ$, giving $\theta = 0^\circ, 120^\circ, 360^\circ$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Find the value of $\frac{dy}{dx}$ at $x = 1$ for $y = x^3 \ln x$.

(A) 1

(C) 0

(B) 3

(D) e **Lời giải chi tiết**

Product rule: $\frac{dy}{dx} = 3x^2 \ln x + x^3 \cdot \frac{1}{x} = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2(3 \ln x + 1)$. At $x = 1$: $\ln 1 = 0$, so $\frac{dy}{dx} = 1 \cdot (0 + 1) = 1$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = \frac{\cos x}{e^{3x}}$, giving your answer in the form $e^{-3x}(\dots)$.

Lời giải chi tiết

Quotient rule with $u = \cos x$, $v = e^{3x}$: $u' = -\sin x$, $v' = 3e^{3x}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\sin x \cdot e^{3x} - \cos x \cdot 3e^{3x}}{e^{6x}} = \frac{-e^{3x}(\sin x + 3 \cos x)}{e^{6x}} = -e^{-3x}(\sin x + 3 \cos x).$$

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_1^3 x\sqrt{x-1} dx$ using the substitution $u = x - 1$.

Lời giải chi tiết

Let $u = x - 1$, so $x = u + 1$, $dx = du$; when $x = 1$, $u = 0$, when $x = 3$, $u = 2$. Then $x\sqrt{x-1} = (u+1)\sqrt{u} = u^{3/2} + u^{1/2}$.

$$\int_0^2 (u^{3/2} + u^{1/2}) du = \left[\frac{2}{5} u^{5/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} \right]_0^2 = \frac{2}{5} (4\sqrt{2}) + \frac{2}{3} (2\sqrt{2}) = \frac{8\sqrt{2}}{5} + \frac{4\sqrt{2}}{3} = \frac{24\sqrt{2} + 20\sqrt{2}}{15} = \frac{44\sqrt{2}}{15} \approx 4.15.$$

Bài tập luyện tập

Show that $x^3 - 6x + 2 = 0$ has a root between $x = 0$ and $x = 1$, and use the iteration $x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 2}{6}$ with $x_0 = 0.3$ to find the root to 3 d.p.

Lời giải chi tiết

$f(0) = 2 > 0$, $f(1) = 1 - 6 + 2 = -3 < 0$: sign change confirms a root in $(0, 1)$.

$$x_0 = 0.300, x_1 = 0.338, x_2 = 0.340, x_3 = 0.340 \text{ (converged)}.$$

Root ≈ 0.340 (3 d.p.). Check: $0.340^3 - 6(0.340) + 2 \approx 0.039 - 2.040 + 2 = -0.001 \approx 0$.

Bài tập luyện tập

A cobweb diagram for the iteration $x_{n+1} = g(x_n)$ spirals around the root (rather than stepping monotonically towards it, as in a staircase diagram). What does this indicate about $g'(x)$ near the root?

(A) $g'(\alpha)$ is negative

(C) $g'(\alpha) = 0$

(B) $g'(\alpha)$ is positive

(D) $g'(\alpha)$ is undefined

Lời giải chi tiết

A staircase pattern (monotonic approach) occurs when $g'(x) > 0$ near the root; a cobweb pattern (spiralling, alternating sides of the root) occurs when $g'(x) < 0$ near the root. (A).

Vectors and Differential Equations

Mục tiêu Unit: Vector 3 chiều: độ dài, vector đơn vị, tích vô hướng, góc giữa hai vector, điều kiện vuông góc; phương trình đường thẳng dạng vector, giao điểm của hai đường thẳng, đường thẳng chéo nhau (skew), góc giữa hai đường thẳng, chân đường vuông góc và khoảng cách ngắn nhất từ một điểm đến đường thẳng; dùng vector giải các bài toán hình học (trung điểm, tỉ lệ chia đoạn thẳng, thẳng hàng, chứng minh hình học); phương trình vi phân: lập phương trình từ mô tả bằng lời, tách biến, nghiệm tổng quát/nghiệm riêng, mô hình tăng trưởng–phân rã mũ và các mô hình tách biến khác trong bối cảnh thực tế (mức A Level, Paper 3).

3.1 Vectors: magnitude, unit vectors and the scalar product

3.1.1 Magnitude and unit vectors

A vector in three dimensions is written $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, or as a column/ordered triple (a_1, a_2, a_3) . Its **magnitude** (length) is

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.$$

The **unit vector** in the direction of $\mathbf{a}$ is $\hat{\mathbf{a}} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ – it points the same way as $\mathbf{a}$ but has magnitude exactly 1. If A and B have position vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, then the vector from A to B is $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

Magnitude: $|\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$. **Unit vector:** $\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{a}/|\mathbf{a}|$, and $|\hat{\mathbf{a}}| = 1$. $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ (position vector of B minus position vector of A).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vector $\overrightarrow{AB}$ luôn tính bằng **vector đích trừ vector gốc**: $\mathbf{b} - \mathbf{a}$, không phải $\mathbf{a} - \mathbf{b}$. Độ dài dùng định lý Pythagoras mở rộng cho 3 chiều. Vector đơn vị = vector chia cho chính độ dài của nó – luôn kiểm tra lại rằng vector đơn vị thu được có độ dài đúng bằng 1.

3.1.2 The scalar (dot) product

For $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ and $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$, the **scalar (dot) product** is defined algebraically and geometrically by

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta,$$

where θ is the angle between $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ (measured so that $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$). The result of a dot product is always a **scalar** (a single real number), never a vector. Rearranging gives the angle between two vectors:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}\right).$$

The dot product obeys the same algebraic rules as ordinary multiplication of numbers: it is **commutative** ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$) and **distributive over addition** ($\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$). A particularly useful special case is the dot product of a vector with itself: since $\theta = 0$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ – this identity is the link between the scalar product and magnitude, and it is exactly what is used later, when squaring distances in the perpendicular-distance formula.

3.1.3 Angle between two vectors and the perpendicularity test

Two (non-zero) vectors are **perpendicular** exactly when their scalar product is zero:

$$\mathbf{a} \perp \mathbf{b} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

This is one of the most heavily examined facts in Paper 3 vector questions – it converts a geometric condition (a right angle) into a simple algebraic equation.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3. \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}. \quad \text{Perpendicular} \iff \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the angle between $\mathbf{a} = (1, 2, 2)$ and $\mathbf{b} = (2, -1, 2)$.

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (1)(2) + (2)(-1) + (2)(2) = 2 - 2 + 4 = 4. \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

$$\cos \theta = \frac{4}{9} \Rightarrow \theta = \arccos(0.4444) = 63.6^\circ \text{ (1 d.p.)}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Tích vô hướng $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ dùng để tìm góc giữa hai vector hoặc kiểm tra vuông góc ($\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$). Luôn nhân **từng cặp tọa độ tương ứng** rồi cộng lại – kết quả là một số (vô hướng), không phải vector. Lưu ý: vector product (tích có hướng) **không nằm trong chương trình 9709** – chỉ dùng tích vô hướng ở mức A Level.

Ví dụ mẫu · Worked example

Triangle ABC has position vectors $\overrightarrow{OA} = (1, 1, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (3, 5, 2)$ and $\overrightarrow{OC} = (-1, 5, 6)$. Find the angle BAC (the angle of the triangle at vertex A), correct to 1 decimal place.

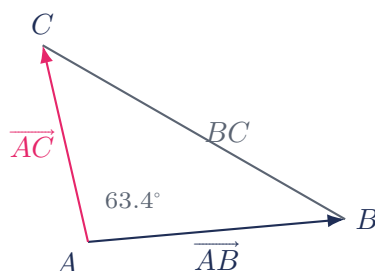
The angle at A is the angle between the two vectors that start *at* A and run along the two sides meeting there, $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$. $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 4, 0)$, $\overrightarrow{AC} = C - A = (-2, 4, 4)$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (2)(-2) + (4)(4) + (0)(4) = -4 + 16 + 0 = 12$. $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 16 + 0} = \sqrt{20}$, $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 16 + 16} = \sqrt{36} = 6$.

$$\cos(\angle BAC) = \frac{12}{\sqrt{20} \times 6} = \frac{2}{\sqrt{20}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = 0.4472 \Rightarrow \angle BAC = \arccos(0.4472) = 63.4^\circ \text{ (1 d.p.)}.$$

Check (cosine rule). $\overrightarrow{BC} = C - B = (-4, 0, 4)$, so $|BC|^2 = 16 + 0 + 16 = 32$. Then

$$\cos A = \frac{|AB|^2 + |AC|^2 - |BC|^2}{2|AB||AC|} = \frac{20 + 36 - 32}{2\sqrt{20} \times 6} = \frac{24}{12\sqrt{20}} = \frac{2}{\sqrt{20}} = 0.4472,$$

the same value as before, confirming $\angle BAC = 63.4^\circ$.



The angle at A is found from $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$ using the scalar product; the cosine rule gives an independent check.

3.2 The vector equation of a line

3.2.1 Setting up the equation of a line

A line through the point A (position vector $\mathbf{a}$) with direction vector $\mathbf{d}$ consists of all points $\mathbf{r}$ satisfying

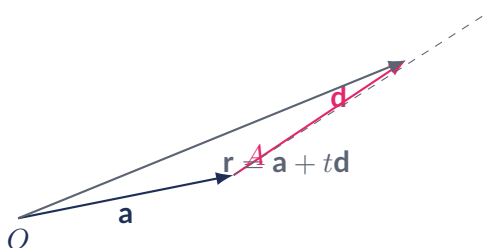
$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

If instead a line passes through two known points A and B , take $\mathbf{a}$ as the position vector of A and $\mathbf{d} = \overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ as the direction vector: $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$. Any non-zero scalar multiple of a direction vector describes the same line, so direction vectors are never unique.

Writing $\mathbf{r} = (x, y, z)$ and matching components with $\mathbf{r} = (a_1, a_2, a_3) + t(d_1, d_2, d_3)$ gives $x = a_1 + td_1$, $y = a_2 + td_2$, $z = a_3 + td_3$; eliminating t (provided none of d_1, d_2, d_3 is zero) gives the equivalent **Cartesian (symmetric) form**

$$\frac{x - a_1}{d_1} = \frac{y - a_2}{d_2} = \frac{z - a_3}{d_3}.$$

This form is rarely required for its own sake, but it is a useful check: reading the denominators straight off gives the direction vector, and setting all three fractions equal to t recovers the parametric vector equation.



A general point on the line has position vector $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$.

3.2.2 Intersection of two lines and skew lines

Given two lines $l_1 : \mathbf{r} = \mathbf{a}_1 + s\mathbf{d}_1$ and $l_2 : \mathbf{r} = \mathbf{a}_2 + t\mathbf{d}_2$, first compare the direction vectors $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2$:

- If $\mathbf{d}_2 = k\mathbf{d}_1$ for some scalar k , the lines are **parallel** – check whether a point of l_2 satisfies l_1 's equation to decide if they are the *same* line or two *distinct* parallel lines.
- If the directions are not parallel, equate the x -, y - and z -components to get three equations in s and t . Solve any two of them for s, t , then **substitute into the third** equation: if it is also satisfied, the lines **intersect** at the corresponding point; if the third equation fails, the lines are **skew** – they never meet, even though they are not parallel (this is only possible in three or more dimensions).

Ví dụ mẫu · Worked example

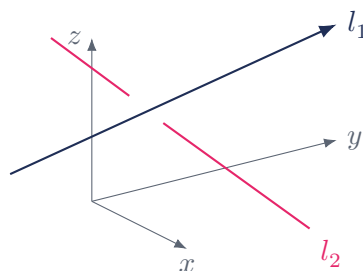
$l_1 : \mathbf{r} = (1, 0, 2) + s(1, 1, 1)$, $l_2 : \mathbf{r} = (10, -3, 11) + t(-1, 1, -1)$. Show that l_1 and l_2 intersect, and find the point of intersection.

Directions $(1, 1, 1)$ and $(-1, 1, -1)$ are not scalar multiples of each other, so the lines are not parallel. Equating components: $x : 1 + s = 10 - t \Rightarrow s + t = 9$ (i) $y : s = -3 + t \Rightarrow s - t = -3$ (ii) $z : 2 + s = 11 - t \Rightarrow s + t = 9$ (iii) Equations (i) and (iii) agree, so no contradiction yet. Adding (i) and (ii): $2s = 6 \Rightarrow s = 3$, and then $t = 9 - 3 = 6$. Check in (ii): $3 - 6 = -3 \checkmark$. Since all three component equations are consistent, the lines intersect. Substituting $s = 3$ into l_1 : point of intersection = $(1 + 3, 3, 2 + 3) = (4, 3, 5)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

$l_1 : \mathbf{r} = (1, 1, 0) + s(1, 2, -1)$, $l_2 : \mathbf{r} = (2, -1, 3) + t(-1, 1, 1)$. Show they do not intersect.

Equating components: $x: 1 + s = 2 - t \Rightarrow s + t = 1$. $y: 1 + 2s = -1 + t \Rightarrow 2s - t = -2$. $z: -s = 3 + t \Rightarrow s + t = -3$. The x - and z -equations give $s + t = 1$ and $s + t = -3$ – contradictory. Since the direction vectors are not parallel, the lines are **skew**.



l_1 and l_2 appear to cross in this flat projection, but in three dimensions they pass at different heights and never actually meet: they are **skew**.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi hai đường thẳng **không song song**, cứ giải hai trong ba phương trình thành phần để tìm s, t , rồi **bắt buộc phải thay vào phương trình còn lại để kiểm tra**. Nếu thỏa mãn cả ba $\Rightarrow$ cắt nhau; nếu phương trình thứ ba vô lý $\Rightarrow$ chéo nhau (skew) – hiện tượng chỉ xảy ra trong không gian 3 chiều trở lên, không có ở hình học phẳng.

(!) Lỗi thường gặp: Đừng nhầm lẫn giữa **song song** (parallel) và **chéo nhau** (skew). Hai khái niệm này khác nhau hoàn toàn: song song là khi **vector chỉ phương** tỉ lệ với nhau ($\mathbf{d}_2 = k\mathbf{d}_1$) – cần kiểm tra **trước khi** giải hệ phương trình. Chéo nhau chỉ xảy ra khi vector chỉ phương **không** tỉ lệ với nhau nhưng hệ ba phương trình vẫn vô nghiệm. Một lỗi phổ biến khác: chỉ giải hai phương trình rồi kết luận "cắt nhau" mà quên kiểm tra phương trình thứ ba – kết luận này có thể sai.

Ví dụ mẫu · Worked example

$l_1 : \mathbf{r} = (2, -1, 3) + s(1, 3, -1)$, $l_2 : \mathbf{r} = (4, 5, 2) + t(2, 1, 3)$. Determine whether l_1 and l_2 intersect.

Directions $(1, 3, -1)$ and $(2, 1, 3)$ are not scalar multiples of each other (the ratios of corresponding components, $2, \frac{1}{3}, -3$, are all different), so the lines are not parallel. Equating components: $x: 2 + s = 4 + 2t \Rightarrow s - 2t = 2$ (i) $y: -1 + 3s = 5 + t \Rightarrow 3s - t = 6$ (ii) $z: 3 - s = 2 + 3t \Rightarrow s + 3t = 1$ (iii) From (i), $s = 2 + 2t$. Substituting into (ii): $3(2 + 2t) - t = 6 \Rightarrow 6 + 5t = 6 \Rightarrow t = 0$, so $s = 2$. Checking in (iii): $s + 3t = 2 + 0 = 2$, but (iii) requires this to equal 1 – a **contradiction**. Since the direction vectors are not parallel yet the three component equations cannot all be satisfied simultaneously, l_1 and l_2 are **skew**.

3.2.3 The angle between two lines

The angle between two lines is defined as the (acute, or right) angle between their direction vectors – the position of the lines in space is irrelevant, only their directions matter. Because the angle between two *lines* is conventionally taken to lie between 0° and 90° , take the modulus of the cosine:

$$\cos \theta = \frac{|\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2|}{|\mathbf{d}_1||\mathbf{d}_2|}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the acute angle between the lines with direction vectors $\mathbf{d}_1 = (3, 0, 4)$ and $\mathbf{d}_2 = (4, 3, 0)$.

$$\mathbf{d}_1 \cdot \mathbf{d}_2 = (3)(4) + (0)(3) + (4)(0) = 12. |\mathbf{d}_1| = \sqrt{9 + 16} = 5, |\mathbf{d}_2| = \sqrt{16 + 9} = 5. \cos \theta = \frac{12}{25} = 0.48 \Rightarrow \theta = \arccos(0.48) = 61.3^\circ \text{ (1 d.p.)}$$

A coordinate axis (the x -, y - or z -axis) can be treated as a line through the origin with direction vector $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ or $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ respectively, so the angle between a line and an axis is found by exactly the same formula as the angle between two lines.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the acute angle between the line $l: \mathbf{r} = (1, 2, -3) + t(2, -2, 1)$ and the z -axis.

The z -axis has direction $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. With $\mathbf{d} = (2, -2, 1)$: $\mathbf{d} \cdot \mathbf{k} = (2)(0) + (-2)(0) + (1)(1) = 1$.
 $|\mathbf{d}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3, |\mathbf{k}| = 1. \cos \theta = \frac{|1|}{3 \times 1} = \frac{1}{3} = 0.3333 \Rightarrow \theta = \arccos(0.3333) = 70.5^\circ \text{ (1 d.p.)}$

3.2.4 Where a line meets the coordinate planes and axes

Setting one coordinate of $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$ equal to zero and solving for t gives the point (if any) where the line crosses the corresponding coordinate plane: $z = 0$ gives the point on the xy -plane, $y = 0$ gives the point on the xz -plane, and $x = 0$ gives the point on the yz -plane. To find where a line meets a coordinate axis (rather than a plane), **two** coordinates must be zero *simultaneously* — exactly as with the intersection of two lines, this requires solving for t from one equation and then **checking** that the second equation is also satisfied by that same value of t .

Ví dụ mẫu · Worked example

Line $l: \mathbf{r} = (2, -1, 4) + t(1, 3, -2)$. Find where l crosses (a) the plane $z = 0$, and (b) the x -axis (if it does).

(a) Set $z = 0$: $4 - 2t = 0 \Rightarrow t = 2$. Point: $(2 + 2, -1 + 6, 4 - 4) = (4, 5, 0)$.

(b) The x -axis requires *both* $y = 0$ and $z = 0$ for the *same* value of t . From $y = 0$: $-1 + 3t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3}$. From $z = 0$ (part (a)): $t = 2$. Since $\frac{1}{3} \neq 2$, there is no single value of t making both y and z zero together, so l does **not** cross the x -axis — it only crosses each coordinate plane at a different point (in particular, it meets the xz -plane at $t = \frac{1}{3}$, i.e. at $(2 + \frac{1}{3}, 0, 4 - \frac{2}{3}) = (\frac{7}{3}, 0, \frac{10}{3})$, a different point altogether).

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Tìm giao điểm của đường thẳng với một **mặt phẳng tọa độ** (như $z = 0$) chỉ cần cho tọa độ tương ứng bằng 0 rồi giải ra t — đơn giản hơn nhiều so với việc tìm giao điểm của hai đường thẳng. Nhưng để đường thẳng cắt một **trục tọa độ** (ví dụ trục x), cần **hai** tọa độ cùng bằng 0 tại **cùng một** giá trị t — về bản chất đây là một phép kiểm tra tính nhất quán giống hệt như khi xét hai đường thẳng cắt nhau hay chéo nhau.

3.3 The foot of the perpendicular and the shortest distance from a point to a line

3.3.1 Projecting onto the direction vector

The vector product is not used on this syllabus, so the foot of the perpendicular and the shortest distance are found using the **scalar product only**. Let line $l: \mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$ and let P (position vector $\mathbf{p}$)

be a point not on l . The foot of the perpendicular N is the point on l closest to P ; it is the unique point on l such that $\overrightarrow{PN}$ is perpendicular to $\mathbf{d}$.

Write $N = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$ for the (unknown) value of t we need. Then $\overrightarrow{PN} = N - \mathbf{p} = (\mathbf{a} - \mathbf{p}) + t\mathbf{d}$. Perpendicularity requires

$$\overrightarrow{PN} \cdot \mathbf{d} = 0 \implies [(\mathbf{a} - \mathbf{p}) + t\mathbf{d}] \cdot \mathbf{d} = 0 \implies t = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}.$$

This value of t gives the foot of the perpendicular $N = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$, and the shortest distance from P to l is simply $|PN| = |N - \mathbf{p}|$.

As an independent check, the same value of t can be found using calculus, by minimising the squared distance $D(t) = |\mathbf{a} + t\mathbf{d} - \mathbf{p}|^2$ directly (squaring avoids differentiating a square root). Writing $D(t) = (\mathbf{a} - \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) + 2t\mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) + t^2\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}$ and setting $D'(t) = 0$ gives

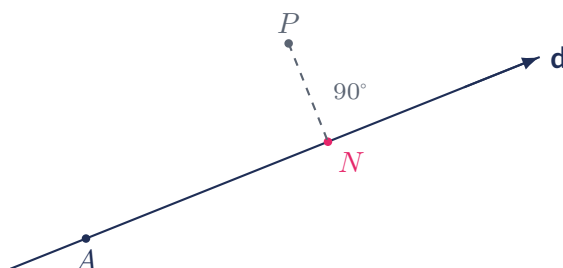
$$2\mathbf{d} \cdot (\mathbf{a} - \mathbf{p}) + 2t\mathbf{d} \cdot \mathbf{d} = 0 \implies t = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}},$$

exactly the same formula as before. This confirms that "projecting onto $\mathbf{d}$ " and "minimising distance by calculus" are two routes to the identical result.

With $\overrightarrow{AP} = \mathbf{p} - \mathbf{a}$ and $\hat{\mathbf{d}} = \mathbf{d}/|\mathbf{d}|$:

$$t = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}, \quad N = \mathbf{a} + t\mathbf{d}, \quad \text{shortest distance} = |\overrightarrow{AP} - (\overrightarrow{AP} \cdot \hat{\mathbf{d}})\hat{\mathbf{d}}|.$$

The last formula subtracts the component of $\overrightarrow{AP}$ along the line from $\overrightarrow{AP}$ itself, leaving only the perpendicular component – its magnitude is the shortest distance, found without any vector (cross) product.



N is the foot of the perpendicular from P to the line; the shortest distance from P to the line is the length PN .

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Line $l : \mathbf{r} = (0, 0, 0) + t(1, 2, 2)$. Point $P(4, 5, 2)$. Find the foot of the perpendicular from P to l , and the shortest distance from P to l .

$A = (0, 0, 0)$, $\mathbf{d} = (1, 2, 2)$, $|\mathbf{d}|^2 = 1 + 4 + 4 = 9$. $\overrightarrow{AP} = (4, 5, 2)$. $t = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2} = \frac{(4)(1) + (5)(2) + (2)(2)}{9} = \frac{4 + 10 + 4}{9} = \frac{18}{9} = 2$. Foot of perpendicular: $N = \mathbf{a} + 2\mathbf{d} = (2, 4, 4)$. Shortest distance: $|N - P| = |(2 - 4, 4 - 5, 4 - 2)| = |(-2, -1, 2)| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.

(b) Line $l : \mathbf{r} = (1, 1, 0) + t(2, -2, 1)$. Point $P(4, 1, 3)$. Use the direct projection formula (without finding the foot first) to find the shortest distance from P to l .

$\mathbf{d} = (2, -2, 1)$, $|\mathbf{d}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$, so $\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{3}(2, -2, 1)$. $\overrightarrow{AP} = P - A = (4 - 1, 1 - 1, 3 - 0) =$

$(3, 0, 3) \cdot \overrightarrow{AP} \cdot \hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{3}[(3)(2) + (0)(-2) + (3)(1)] = \frac{1}{3}(9) = 3$, so $(\overrightarrow{AP} \cdot \hat{\mathbf{d}})\hat{\mathbf{d}} = 3 \cdot \frac{1}{3}(2, -2, 1) = (2, -2, 1)$. Perpendicular component: $\overrightarrow{AP} - (\overrightarrow{AP} \cdot \hat{\mathbf{d}})\hat{\mathbf{d}} = (3, 0, 3) - (2, -2, 1) = (1, 2, 2)$, of magnitude $\sqrt{1+4+4} = 3$. Shortest distance = 3.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vì chương trình 9709 **không** có tích có hướng (vector product), khoảng cách từ điểm đến đường thẳng phải tính bằng **phép chiếu** với tích vô hướng: tìm tham số t tại chân đường vuông góc (bằng cách cho $\overrightarrow{PN} \cdot \mathbf{d} = 0$), rồi tính độ dài PN . Cách thứ hai (trừ thành phần dọc theo $\mathbf{d}$ ra khỏi $\overrightarrow{AP}$) cho cùng kết quả và không cần tìm chân đường vuông góc trước.

(!) Lỗi thường gặp: Công thức $t = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}$ dùng $\overrightarrow{AP} = \mathbf{p} - \mathbf{a}$ (từ điểm trên đường thẳng đến điểm ngoài đường thẳng), **không phải** $\mathbf{a} - \mathbf{p}$. Đảo dấu vector này sẽ làm đổi dấu t và cho sai điểm chân đường vuông góc. Luôn thử lại bằng cách kiểm tra $\overrightarrow{PN} \cdot \mathbf{d} = 0$ sau khi tính xong.

Ví dụ mẫu · Worked example

Line $l: \mathbf{r} = (3, -1, 2) + t(2, 2, 1)$. Point $P(9, 2, 2)$. Find the foot of the perpendicular from P to l and the shortest distance from P to l , checking the answer two different ways.

Method 1 (projection formula). $A = (3, -1, 2)$, $\mathbf{d} = (2, 2, 1)$, $|\mathbf{d}|^2 = 4 + 4 + 1 = 9$. $\overrightarrow{AP} = P - A = (6, 3, 0)$. $t = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2} = \frac{(6)(2) + (3)(2) + (0)(1)}{9} = \frac{18}{9} = 2$. Foot of perpendicular: $N = \mathbf{a} + t\mathbf{d} = (3+4, -1+4, 2+2) = (7, 3, 4)$. Shortest distance: $|N - P| = |(7-9, 3-2, 4-2)| = |(-2, 1, 2)| = \sqrt{4+1+4} = 3$.

Method 2 (perpendicular-component check). $|\mathbf{d}| = 3$, so $\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$. $\overrightarrow{AP} \cdot \hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{3}[(6)(2) + (3)(2) + (0)(1)] = \frac{1}{3}(18) = 6$, so the component of $\overrightarrow{AP}$ along $\mathbf{d}$ is $6 \cdot \frac{1}{3}(2, 2, 1) = (4, 4, 2)$. The perpendicular component is $\overrightarrow{AP} - (4, 4, 2) = (6, 3, 0) - (4, 4, 2) = (2, -1, -2)$, of magnitude $\sqrt{4+1+4} = 3$ – matching Method 1. **Direct check:** $\overrightarrow{PN} = N - P = (-2, 1, 2)$, and $\overrightarrow{PN} \cdot \mathbf{d} = (-2)(2) + (1)(2) + (2)(1) = -4 + 2 + 2 = 0$ ✓, confirming $PN \perp l$.

3.4 Using vectors to solve geometric problems

3.4.1 Midpoints and dividing a line segment in a given ratio

If M is the midpoint of AB , then $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. More generally, if P divides AB so that $AP : PB = m : n$, then

$$\mathbf{p} = \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m + n}.$$

(This is easiest to remember as a weighted average: P is "pulled towards" whichever endpoint is closer, so that endpoint's coefficient in the numerator is the *larger* of m, n .)

$$\text{Midpoint of } AB: \mathbf{m} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}. \quad P \text{ divides } AB \text{ with } AP : PB = m : n: \mathbf{p} = \frac{n\mathbf{a} + m\mathbf{b}}{m + n}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

$A(1, -2, 5)$, $B(9, 6, -3)$. Find the position vector of the point P on AB with $AP : PB = 3 : 1$.
 Here $m = 3$, $n = 1$: $\mathbf{p} = \frac{1 \cdot \mathbf{a} + 3 \cdot \mathbf{b}}{4} = \frac{(1, -2, 5) + 3(9, 6, -3)}{4} = \frac{(1, -2, 5) + (27, 18, -9)}{4} = \frac{(28, 16, -4)}{4} = (7, 4, -1)$. Check: $\overrightarrow{AP} = (6, 6, -6)$, $\overrightarrow{PB} = (2, 2, -2)$, and indeed $\overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{PB}$, confirming the ratio $3 : 1$.

The midpoint formula also gives a quick proof of the classic **midpoint theorem**: if M and N are the midpoints of sides AB and AC of a triangle, then $\overrightarrow{MN}$ is parallel to $\overrightarrow{BC}$ and exactly half its length. Indeed, with $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ and $\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$,

$$\overrightarrow{MN} = \mathbf{n} - \mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC},$$

so $\overrightarrow{MN}$ is a scalar multiple ($\frac{1}{2}$) of $\overrightarrow{BC}$: parallel, and half the length.

3.4.2 Proving collinearity

Points A , B , C are **collinear** (lie on one straight line) if and only if $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$ for some scalar k – that is, the two vectors are parallel and they share the common point A .

Ví dụ mẫu · Worked example

Show that $A(2, 1, -1)$, $B(5, 4, 2)$ and $C(11, 10, 8)$ are collinear.
 $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 3, 3)$. $\overrightarrow{AC} = C - A = (9, 9, 9) = 3(3, 3, 3) = 3\overrightarrow{AB}$. Since $\overrightarrow{AC}$ is a scalar multiple of $\overrightarrow{AB}$ and both vectors start at A , the points A , B , C are **collinear**, with C three times as far from A as B is.

3.4.3 Geometric proofs with position vectors

Many Paper 3 questions ask for a general proof (using letters, not numbers) rather than a numerical calculation. The key technique is to write every relevant point as a combination of a small number of position vectors, then compare.

Ví dụ mẫu · Worked example

$OABC$ is a parallelogram (vertices labelled in order), with O the origin, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$ and $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Prove that the diagonals OB and AC bisect each other.

Since $OABC$ is a parallelogram, side OA is equal and parallel to side CB , so $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}$, i.e. $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, where $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$. Midpoint of diagonal OB : $\frac{1}{2}(\mathbf{0} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\mathbf{b}$. Midpoint of diagonal AC : $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}\mathbf{b}$. Both diagonals have the same midpoint, $\frac{1}{2}\mathbf{b}$, so OB and AC bisect each other. ■

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán chứng minh hình học bằng vector, hãy chọn **một điểm gốc chung** (thường là một đỉnh, ví dụ O) và biểu diễn **mọi** điểm còn lại theo vector vị trí xuất phát từ điểm gốc đó. Muốn chứng minh ba điểm thẳng hàng: chỉ ra hai vector nối chúng tỉ lệ với nhau. Muốn chứng minh hai đoạn thẳng có chung trung điểm: tính trung điểm của cả hai đoạn theo cùng một hệ vector và so sánh kết quả.

Ví dụ mẫu · Worked example

Points A, B, C have position vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ relative to an origin O . Let M be the midpoint of BC , and let G be the point on AM with $AG : GM = 2 : 1$. Show that $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$, and that G is also the point dividing the median from B in the same $2 : 1$ ratio.

Midpoint of BC : $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$. Since G divides AM with $AG : GM = 2 : 1$, apply the ratio formula with $m = 2, n = 1$:

$$\mathbf{g} = \frac{1 \cdot \mathbf{a} + 2 \cdot \mathbf{m}}{1 + 2} = \frac{\mathbf{a} + 2 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})}{3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3}.$$

Now let N be the midpoint of AC , so $\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})$, and let G' divide the median BN with $BG' : G'N = 2 : 1$:

$$\mathbf{g}' = \frac{1 \cdot \mathbf{b} + 2 \cdot \mathbf{n}}{3} = \frac{\mathbf{b} + 2 \cdot \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c})}{3} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \mathbf{g}.$$

Since $\mathbf{g}' = \mathbf{g}$, the point dividing median BN in ratio $2 : 1$ from B is the same point G . The identical argument with the third median (from C to the midpoint of AB) shows all three medians pass through $G = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ — the **centroid** of the triangle. ■

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trọng tâm (centroid) của tam giác ABC luôn có vector vị trí $\mathbf{g} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ — trung bình cộng của ba vector vị trí các đỉnh. Đây là một công thức đáng nhớ: thay vì lặp lại phép chia tỉ lệ $2 : 1$ cho từng trung tuyến, chỉ cần cộng ba vector vị trí rồi chia 3.

Ví dụ mẫu · Worked example

A, B, C, D (position vectors $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$) are the vertices, taken in order, of any quadrilateral (not necessarily planar or convex). P, Q, R, S are the midpoints of AB, BC, CD, DA respectively. Prove that $PQRS$ is a parallelogram.

By the midpoint formula, $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$, $\mathbf{q} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$, $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d})$, $\mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{a})$.

$$\overrightarrow{PQ} = \mathbf{q} - \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) - \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

$$\overrightarrow{SR} = \mathbf{r} - \mathbf{s} = \frac{1}{2}(\mathbf{c} + \mathbf{d}) - \frac{1}{2}(\mathbf{d} + \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a}).$$

Since $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, side PQ is equal in length and parallel to side SR (and points the same way). A quadrilateral with one pair of opposite sides equal and parallel is a **parallelogram**, so $PQRS$ is a parallelogram. ■ (This is known as **Varignon's theorem**; notice that it holds for *any* quadrilateral $ABCD$, however irregular, since no assumption was made about $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ beyond their being four position vectors taken in order.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý Varignon: trung điểm bốn cạnh của **bất kỳ** tứ giác nào (theo thứ tự) luôn tạo thành một hình bình hành. Kỹ thuật chứng minh giống hệt các bài chứng minh hình học bằng vector khác: viết mọi trung điểm theo vector vị trí gốc, rồi so sánh hai vector cạnh đối diện — nếu bằng nhau thì đó là hình bình hành.

3.5 Differential equations: formulating and separating variables

3.5.1 Translating rate-of-change statements into differential equations

A first-order differential equation records how fast a quantity is changing. The rate of change of y with respect to t is $\frac{dy}{dt}$, and Cambridge Paper 3 questions typically describe this rate in words that must be translated into symbols:

- "the rate of **increase** of y is proportional to y " $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky$ ($k > 0$).
- "the rate of **decrease** of y is proportional to y " $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -ky$ ($k > 0$) – the *decrease* is built into the negative sign, so k itself is still taken positive.
- "the rate of increase of y is proportional to $(L - y)$ " $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = k(L - y)$ (models a quantity approaching a limiting value L from below).
- "the rate of decrease of y is proportional to $\sqrt{y}$ " $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$.

3.5.2 Separating variables and integrating

An equation of the form $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ is **separable**: divide both sides by $h(y)$ and multiply by dx to gather all the y -terms on one side and all the x -terms on the other, then integrate both sides:

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx.$$

Only **one** arbitrary constant of integration is needed (it can be written on either side, or combined into a single constant C after both integrals are found). Once a solution has been found, it is always worth **checking it by differentiating back**: substitute the candidate solution into the original differential equation and confirm both sides agree – a quick, reliable safeguard against algebraic slips made while separating or integrating.

3.5.3 General solutions and particular solutions

Integrating a differential equation produces the **general solution** – a whole family of curves, one for each value of the constant C . Substituting given information (an initial condition, e.g. the value of y when $x = 0$, or a boundary condition at some other point) determines the specific value of C and gives the **particular solution** – the one curve from the family that satisfies the given data.

General solution: contains an arbitrary constant C (or $A = e^C$ after exponentiating) – represents infinitely many curves. **Particular solution:** C has been evaluated using given data – represents exactly one curve.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{4x^3}{y}$. Hence find the particular solution given that $y = 3$ when $x = 1$.

Separate variables: $y dy = 4x^3 dx$. Integrate: $\frac{y^2}{2} = x^4 + C_1 \Rightarrow y^2 = 2x^4 + C$ (relabelling $2C_1$ as C). This is the **general solution** – a family of curves, one for each C . Apply $x = 1, y = 3$: $9 = 2(1)^4 + C \Rightarrow C = 7$. **Particular solution:** $y^2 = 2x^4 + 7$, i.e. $y = \sqrt{2x^4 + 7}$ (taking the positive square root, since $y = 3 > 0$ at $x = 1$).

Ví dụ mẫu · Worked example

Water drains from a tank so that the rate of decrease of the volume $V \text{ cm}^3$ at time t seconds is proportional to $\sqrt{V}$. Initially $V = 900$; after 10 seconds, $V = 400$. Form and solve a differential equation for V , and find the time at which the tank is empty.

"Rate of decrease proportional to $\sqrt{V}$ " gives $\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{V}$ ($k > 0$). Separate: $V^{-1/2} dV = -k dt$. Integrate: $2\sqrt{V} = -kt + C$. At $t = 0, V = 900$: $2(30) = 60 = C$. So $2\sqrt{V} = 60 - kt$, i.e. $\sqrt{V} = 30 - \frac{k}{2}t$. At $t = 10, V = 400$: $\sqrt{400} = 20 = 30 - 5k \Rightarrow 5k = 10 \Rightarrow k = 2$. Then $\sqrt{V} = 30 - t$, so $V = (30 - t)^2$ for $0 \leq t \leq 30$. The tank is empty when $V = 0$, i.e. $30 - t = 0 \Rightarrow t = 30$ seconds.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi lập phương trình vi phân từ lời văn, hãy đọc kỹ xem đề bài nói **tăng** hay **giảm**: "tốc độ giảm tỉ lệ với..." nghĩa là đạo hàm âm, còn hằng số tỉ lệ k vẫn được coi là số dương. Sau khi tách biến và lấy tích phân, **đừng quên hằng số tích phân C** – thiếu nó sẽ không thể áp dụng điều kiện ban đầu để tìm nghiệm riêng.

(!) **Lỗi thường gặp**: Câu "tốc độ giảm của y tỉ lệ với y " rất dễ bị viết nhầm thành $\frac{dy}{dt} = ky$ (thiếu dấu trừ). Nếu quên dấu âm, mô hình sẽ mô tả một đại lượng **tăng** thay vì **giảm** – toàn bộ nghiệm sau đó sẽ sai, dù các bước tách biến và tích phân đều đúng kỹ thuật. Một lỗi khác thường gặp: quên hằng số tích phân C ngay sau bước lấy tích phân hai vế, khiến nghiệm tổng quát bị "mất" một bậc tự do và không thể tìm được nghiệm riêng chính xác.

Ví dụ mẫu · Worked example

The rate of decrease of a quantity x is proportional to x^2 . Initially $x = 10$, and after 5 seconds $x = 5$. Form a differential equation for x , solve it, and find x when $t = 15$.

"Rate of decrease proportional to x^2 " gives $\frac{dx}{dt} = -kx^2$ ($k > 0$). Separating variables: $\frac{1}{x^2} dx = -k dt$. Integrating: $-\frac{1}{x} = -kt + C_1$, i.e. $\frac{1}{x} = kt + C$ (writing $C = -C_1$). At $t = 0, x = 10$: $\frac{1}{10} = C$, so $\frac{1}{x} = kt + \frac{1}{10}$. At $t = 5, x = 5$: $\frac{1}{5} = 5k + \frac{1}{10} \Rightarrow 5k = \frac{1}{10} \Rightarrow k = \frac{1}{50} = 0.02$. So $\frac{1}{x} = 0.02t + 0.1$, giving $x = \frac{10}{1 + 0.2t}$. At $t = 15$: $x = \frac{10}{1 + 0.2(15)} = \frac{10}{1 + 3} = \frac{10}{4} = 2.5$. Notice that this solution has the shape $x = \frac{1}{(\text{linear in } t)}$, quite different from the exponential solution obtained from $\frac{dx}{dt} = -kx$ – a reminder that not every "decreasing" differential equation produces an exponential answer.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Không phải phương trình vi phân "giảm dần" nào cũng cho nghiệm dạng mũ. Khi vế phải tỉ lệ với x^2 (thay vì x), tách biến sẽ dẫn tới $\int x^{-2} dx = -\frac{1}{x}$, cho nghiệm dạng phân thức $x = \frac{1}{kt + C}$ chứ không phải $x = x_0 e^{-kt}$ – luôn xác định hằng số C từ điều kiện ban đầu trước khi dùng dữ kiện thứ hai để tìm k .

3.6 Exponential growth and decay

3.6.1 The model $dy/dt = ky$

The most important separable model on this syllabus is

$$\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int k dt \Rightarrow \ln y = kt + C \Rightarrow y = y_0 e^{kt},$$

where y_0 is the value of y at $t = 0$. Here $k > 0$ gives **exponential growth** (unbounded as $t \rightarrow \infty$) and $k < 0$ gives **exponential decay** (with $y \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$). The defining feature of this model is that the *rate of change* is always proportional to the *current amount* – the more there is, the faster it changes.

Exponential model: $\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow y = y_0 e^{kt}$ ($k > 0$: growth, $k < 0$: decay) – the rate of change is proportional to the current amount.

Ví dụ mẫu · Worked example

Water drains from a tank so that $\frac{dV}{dt} = -kV$. Given $V = 100$ at $t = 0$ and $V = 60$ at $t = 5$, find V at $t = 10$.

$V = 100e^{-kt}$. At $t = 5$: $e^{-5k} = 0.6$. At $t = 10$: $V = 100(e^{-5k})^2 = 100(0.6)^2 = 100(0.36) = 36$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Newton's law of cooling: $\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - 20)$. A drink starts at 90°C ; after 5 min it is 70°C . Find its temperature after 15 min.

Let $\varphi = \theta - 20$; $\varphi = \varphi_0 e^{-kt}$ with $\varphi_0 = 70$. At $t = 5$: $e^{-5k} = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}$. At $t = 15$: $e^{-15k} = \left(\frac{5}{7}\right)^3 = \frac{125}{343} = 0.3644$, so $\varphi(15) = 70(0.3644) = 25.5$, and $\theta(15) = 20 + 25.5 = 45.5^\circ\text{C}$.

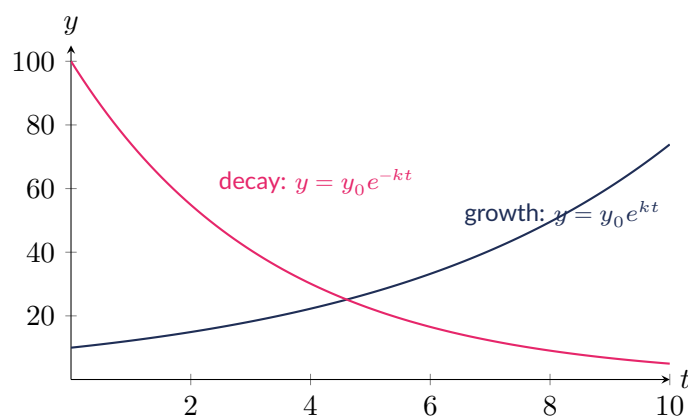
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với phương trình vi phân tách biến, đưa hết y về một vế, x (hoặc t) về vế kia rồi lấy tích phân hai vế. Trong các bài tăng trưởng/phân rã mũ, một mẹo hay là tính e^{-5k} (hoặc tương tự) từ dữ kiện đã cho rồi **lũy thừa** giá trị đó lên thay vì phải giải k tường minh – nhanh và ít sai số hơn.

3.6.2 Interpreting exponential models

Because $e^{-kt} \rightarrow 0$ as $t \rightarrow \infty$ (for $k > 0$), a decay model $y = L + (y_0 - L)e^{-kt}$ always tends to the constant L in the long run – this is why Newton's law of cooling above tends to the room temperature 20°C , never below it. Conversely, a pure growth model $y = y_0 e^{kt}$ has no upper bound and grows without limit – this is realistic only over a limited time frame (e.g. early population growth), which is why more refined separable models (see the next section) are also used.



Exponential growth and exponential decay curves ($k > 0$ in both cases), starting from different initial values y_0 .

3.7 Other separable models in context

3.7.1 Approach to a limit

Newton's law of cooling, $\frac{dy}{dt} = k(L - y)$, is one example of a very common family: a quantity y approaches (but never quite reaches) a fixed target value L . Solving as before (with $u = L - y$) gives the general result $y = L - (L - y_0)e^{-kt}$, so $y \rightarrow L$ as $t \rightarrow \infty$.

Ví dụ mẫu · Worked example

In a chemical reaction, the mass x grams of a product formed after t minutes satisfies $\frac{dx}{dt} = k(20 - x)$, with $x = 0$ at $t = 0$ and $x = 10$ at $t = 5$. Find x when $t = 10$, and state the limiting value of x .

Separate: $\frac{dx}{20 - x} = k dt \Rightarrow -\ln(20 - x) = kt + C_1$. At $t = 0, x = 0$: $-\ln 20 = C_1$, so $\ln(20 - x) = \ln 20 - kt$, i.e. $20 - x = 20e^{-kt}$, giving $x = 20(1 - e^{-kt})$. At $t = 5, x = 10$: $10 = 20(1 - e^{-5k}) \Rightarrow e^{-5k} = 0.5$. At $t = 10$: $e^{-10k} = (0.5)^2 = 0.25$, so $x = 20(1 - 0.25) = 20(0.75) = 15$ grams. As $t \rightarrow \infty$, $e^{-kt} \rightarrow 0$, so $x \rightarrow 20(1 - 0) = 20$ grams – the reaction approaches a maximum yield of 20 grams of product.

3.7.2 Logistic (bounded) growth

A population that grows quickly while small but slows as it nears an environmental capacity L is often modelled by

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{L}\right) = \frac{k}{L}P(L - P).$$

This is still separable. Using partial fractions, $\frac{1}{P(L - P)} = \frac{1}{L} \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{L - P} \right)$, so

$$\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{L - P} \right) dP = \int k dt \Rightarrow \ln \frac{P}{L - P} = kt + C \Rightarrow \frac{P}{L - P} = Ae^{kt}.$$

Solving for P gives the standard logistic solution

$$P(t) = \frac{L}{1 + Be^{-kt}}, \quad B = \frac{L - P_0}{P_0}.$$

As $t \rightarrow \infty$, $Be^{-kt} \rightarrow 0$, so $P \rightarrow L$: the population approaches (but never exceeds) the capacity L .

Ví dụ mẫu · Worked example

A population is modelled by logistic growth with capacity $L = 1000$. Initially ($t = 0$) the population is $P_0 = 100$, and after 5 years the population is 500. Find the population after 10 years, and state its long-term value.

$B = \frac{L - P_0}{P_0} = \frac{1000 - 100}{100} = 9$, so $P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-kt}}$. At $t = 5$, $P = 500$: $500 = \frac{1000}{1 + 9e^{-5k}} \Rightarrow 1 + 9e^{-5k} = 2 \Rightarrow e^{-5k} = \frac{1}{9}$. At $t = 10$: $e^{-10k} = (e^{-5k})^2 = \frac{1}{81}$, so $P(10) = \frac{1000}{1 + 9 \cdot \frac{1}{81}} = \frac{1000}{1 + \frac{1}{9}} = \frac{1000}{\frac{10}{9}} = 900$. As $t \rightarrow \infty$, $P \rightarrow \frac{1000}{1 + 0} = 1000 = L$: the population approaches the capacity of 1000.

3.7.3 Models leading to a finite end time

Not every separable model runs forever: the draining-tank model $\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$ reaches $y = 0$ in a **finite** time, $t = \frac{2\sqrt{y_0}}{k}$ (found by setting $\sqrt{y} = 0$ in $\sqrt{y} = \sqrt{y_0} - \frac{k}{2}t$) – very different long-term behaviour from the exponential and logistic models, which only approach their limits as $t \rightarrow \infty$ without ever quite reaching them.

Model (in words)	Differential equation	General solution	Long-term behaviour
Exponential growth/decay	$\frac{dy}{dt} = ky$	$y = y_0 e^{kt}$	unbounded ($k > 0$) or $y \rightarrow 0$ ($k < 0$)
Approach to a limit	$\frac{dy}{dt} = k(L - y)$	$y = L - (L - y_0)e^{-kt}$	$y \rightarrow L$ as $t \rightarrow \infty$
Logistic (bounded) growth	$\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right)$	$y = \frac{L}{1 + Be^{-kt}}$, $B = \frac{L - y_0}{y_0}$	$y \rightarrow L$ as $t \rightarrow \infty$
Square-root out-flow	$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y}$	$\sqrt{y} = \sqrt{y_0} - \frac{kt}{2}$	$y = 0$ at $t = \frac{2\sqrt{y_0}}{k}$

Four common separable models in Paper 3 differential-equation questions ($k > 0$ throughout).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ba loại mô hình hay gặp trong đề Paper 3: (1) tăng/giảm mũ không giới hạn ($dy/dt = ky$); (2) tiến dần đến một giá trị giới hạn nhưng **không bao giờ chạm tới** ($dy/dt = k(L - y)$ hoặc mô hình logistic); (3) đạt tới 0 (hoặc một giá trị cụ thể) sau một **khoảng thời gian hữu hạn**, như mô hình bể nước cạn theo $\sqrt{y}$. Khi đọc đề, hãy xác định xem đại lượng có "cạn hẳn" tại một thời điểm cụ thể hay chỉ tiệm cận một giới hạn khi $t \rightarrow \infty$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A tank contains 100 litres of brine holding 20 kg of dissolved salt. Pure water is pumped in, and the well-mixed brine is pumped out, both at 5 litres per minute, so the volume in the tank stays constant at 100 litres. Let y kg be the mass of salt in the tank after t minutes. Form a differential equation for y , solve it, and find how long it takes for the mass of salt to fall to 5 kg.

Forming the equation. Pure water enters, so no salt flows in. Salt flows out at a rate equal to

the concentration of salt, $\frac{y}{100}$ kg per litre, multiplied by the outflow rate of 5 litres per minute:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{100} \times 5 = -\frac{y}{20}.$$

Solving. This is the exponential model $\frac{dy}{dt} = -ky$ with $k = \frac{1}{20}$. Separating and integrating:

$$\frac{dy}{y} = -\frac{1}{20} dt \Rightarrow \ln y = -\frac{t}{20} + C. \text{ At } t = 0, y = 20: C = \ln 20, \text{ so } \ln y = \ln 20 - \frac{t}{20}, \text{ giving}$$

$$y = 20e^{-t/20}.$$

Time to reach 5 kg. Set $y = 5$: $5 = 20e^{-t/20} \Rightarrow e^{-t/20} = \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{t}{20} = -\ln 4 \Rightarrow t = 20 \ln 4 = 20(1.3863) = 27.7$ minutes (1 d.p.). As $t \rightarrow \infty$, $e^{-t/20} \rightarrow 0$, so $y \rightarrow 0$: in the long run the tank is flushed almost entirely free of salt (though, strictly, this model never reaches exactly zero in finite time).

3.8 Practice problems

Practice: vectors, magnitude and the scalar product

Bài tập luyện tập

$\mathbf{a} = (3, -4, 0)$, $\mathbf{b} = (1, 2, 2)$. Find the angle between $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$ (1 d.p.).

(A) 109.5°

(C) 19.5°

(B) 70.5°

(D) 90°

Lời giải chi tiết

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3 - 8 + 0 = -5. |\mathbf{a}| = 5, |\mathbf{b}| = 3. \cos \theta = -\frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 109.5^\circ. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find p so that $\mathbf{a} = (2, p, -1)$ and $\mathbf{b} = (4, -2, 6)$ are perpendicular.

(A) 1

(C) 2

(B) -1

(D) 4

Lời giải chi tiết

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 8 - 2p - 6 = 2 - 2p = 0 \Rightarrow p = 1. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find $|\mathbf{a}|$ for $\mathbf{a} = (6, -2, 3)$.

(A) 7

(C) 5

(B) 11

(D) 6.4

Lời giải chi tiết

$$|a| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find the unit vector in the direction of $(3, -4, 12)$.

(A) $(\frac{3}{13}, -\frac{4}{13}, \frac{12}{13})$

(C) $(3, -4, 12)$

(B) $(\frac{3}{19}, -\frac{4}{19}, \frac{12}{19})$

(D) $(\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{12})$

Lời giải chi tiết

$$\text{Magnitude} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13. \text{ Unit vector} = \frac{1}{13}(3, -4, 12). \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find q such that $(2, q, 3)$ and $(1, -1, q)$ are perpendicular.

Lời giải chi tiết

$$\text{Dot product: } 2(1) + q(-1) + 3(q) = 2 - q + 3q = 2 + 2q = 0 \Rightarrow q = -1. \text{ Check: } (2, -1, 3) \cdot (1, -1, -1) = 2 + 1 - 3 = 0 \checkmark.$$

Practice: lines, intersections, skew lines and angles

Bài tập luyện tập

Line $l : \mathbf{r} = (4, 1, -2) + t(1, -1, 3)$. Find the point on l where the x - and z -coordinates are equal.

Lời giải chi tiết

$$x = z: 4 + t = -2 + 3t \Rightarrow 6 = 2t \Rightarrow t = 3. \text{ Point: } (4 + 3, 1 - 3, -2 + 9) = (7, -2, 7).$$

Bài tập luyện tập

$l_1 : \mathbf{r} = (1, 2, 0) + s(1, -1, 2)$, $l_2 : \mathbf{r} = (0, 5, -2) + t(2, -2, 4)$. Describe the relationship between l_1 and l_2 .

(A) Parallel, distinct lines

(C) Skew

(B) The same line

(D) Intersecting at one point

Lời giải chi tiết

$\mathbf{d}_2 = (2, -2, 4) = 2(1, -1, 2) = 2\mathbf{d}_1$, so the lines are parallel. Test whether $(0, 5, -2)$ lies on l_1 : $x: 1 + s = 0 \Rightarrow s = -1$; then y should be $2 - (-1) = 3$, but the point has $y = 5 \neq 3$ – contradiction. So the lines are parallel but **distinct**. (A).

Bài tập luyện tập

$l_1 : \mathbf{r} = (1, 1, 1) + s(1, 1, 1), l_2 : \mathbf{r} = (2, 8, -1) + t(1, -1, 2)$. Find their point of intersection.

Lời giải chi tiết

$x : 1 + s = 2 + t \Rightarrow s - t = 1$ (i). $y : 1 + s = 8 - t \Rightarrow s + t = 7$ (ii). $z : 1 + s = -1 + 2t \Rightarrow s - 2t = -2$ (iii). (i)+(ii): $2s = 8 \Rightarrow s = 4$; then $t = 3$. Check (iii): $4 - 6 = -2$ ✓. Point: $(1 + 4, 1 + 4, 1 + 4) = (5, 5, 5)$.

Bài tập luyện tập

$l_1 : \mathbf{r} = (0, 0, 0) + s(1, 2, 3), l_2 : \mathbf{r} = (1, 1, 0) + t(2, 1, 0)$. Show that l_1 and l_2 are skew.

Lời giải chi tiết

Directions $(1, 2, 3)$ and $(2, 1, 0)$ are not parallel. $z : 3s = 0 \Rightarrow s = 0$. Then $x : 0 = 1 + 2t \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$; but $y : 0 = 1 + t \Rightarrow t = -1$. Since $t = -\frac{1}{2}$ and $t = -1$ contradict each other, there is no consistent solution: the lines are **skew**.

Bài tập luyện tập

Find the acute angle between lines with direction vectors $(1, 2, 2)$ and $(2, 2, 1)$.

(A) 27.3° (C) 48.2° (B) 62.7° (D) 90° **Lời giải chi tiết**

Dot product $= 2 + 4 + 2 = 8$. $|\mathbf{d}_1| = |\mathbf{d}_2| = 3$. $\cos \theta = \frac{8}{9} = 0.8889 \Rightarrow \theta = 27.3^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

$l_1 : \mathbf{r} = (1, -4, 4) + s(1, 1, 1), l_2 : \mathbf{r} = (1, -1, 3) + t(2, -1, 3)$. Find their point of intersection.

Lời giải chi tiết

$x : 1 + s = 1 + 2t \Rightarrow s = 2t$ (i). $y : -4 + s = -1 - t \Rightarrow s + t = 3$ (ii). $z : 4 + s = 3 + 3t \Rightarrow s - 3t = -1$ (iii). From (i), $s = 2t$; substitute into (ii): $3t = 3 \Rightarrow t = 1, s = 2$. Check (iii): $2 - 3 = -1$ ✓. Point: $(1 + 2, -4 + 2, 4 + 2) = (3, -2, 6)$.

Practice: foot of the perpendicular and shortest distance**Bài tập luyện tập**

Line $l : \mathbf{r} = (0, 0, 0) + t(2, 1, 2)$. Point $P(7, 5, 4)$. Find the foot of the perpendicular from P to l and the shortest distance from P to l .

Lời giải chi tiết

$|\mathbf{d}|^2 = 4 + 1 + 4 = 9$. $\overrightarrow{AP} = (7, 5, 4)$. $t = \frac{(7)(2) + (5)(1) + (4)(2)}{9} = \frac{14 + 5 + 8}{9} = \frac{27}{9} = 3$.

Foot: $N = 3(2, 1, 2) = (6, 3, 6)$. Distance: $|N - P| = |(-1, -2, 2)| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$.

Bài tập luyện tập

Line $\mathbf{r} = (1, 0, 0) + t(0, 3, 4)$. Point $P(6, 6, 8)$. Find the shortest distance from P to the line.

(A) 5

(C) 3

(B) 4

(D) 25

Lời giải chi tiết

$\overrightarrow{AP} = (5, 6, 8)$, $|\mathbf{d}|^2 = 9 + 16 = 25$. $t = \frac{(5)(0) + (6)(3) + (8)(4)}{25} = \frac{18 + 32}{25} = \frac{50}{25} = 2$. Foot: $N = (1, 0, 0) + 2(0, 3, 4) = (1, 6, 8)$. Distance = $|N - P| = |(-5, 0, 0)| = 5$. (A).

Bài tập luyện tập

Line $\mathbf{r} = (0, 0, 0) + t(1, 0, 0)$ (the x -axis). Point $P(3, 4, 0)$. Find the shortest distance from P to the line.

Lời giải chi tiết

$\overrightarrow{AP} = (3, 4, 0)$, $|\mathbf{d}|^2 = 1$. $t = \frac{(3)(1)}{1} = 3$. Foot: $N = (3, 0, 0)$. Distance = $|N - P| = |(0, -4, 0)| = 4$.

Bài tập luyện tập

For a line $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$ and an external point P (position vector $\mathbf{p}$), which expression correctly gives the parameter t at the foot of the perpendicular from P ?

(A) $\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}$

(C) $\frac{|\mathbf{p} - \mathbf{a}|}{|\mathbf{d}|}$

(B) $(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}$

(D) $\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|}$

Lời giải chi tiết

Setting $\overrightarrow{PN} \cdot \mathbf{d} = 0$ with $N = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$ gives $t = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}}{\mathbf{d} \cdot \mathbf{d}} = \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}$. (A).

Practice: vector geometry – ratios, collinearity, proofs

Bài tập luyện tập

$A(2, -1, 4)$, $B(8, 5, -2)$. Find the position vector of the point P on AB with $AP : PB = 1 : 2$.

Lời giải chi tiết

$\mathbf{p} = \frac{2\mathbf{a} + 1 \cdot \mathbf{b}}{3} = \frac{2(2, -1, 4) + (8, 5, -2)}{3} = \frac{(4, -2, 8) + (8, 5, -2)}{3} = \frac{(12, 3, 6)}{3} = (4, 1, 2)$.
Check: $\overrightarrow{AP} = (2, 2, -2)$, $\overrightarrow{PB} = (4, 4, -4) = 2\overrightarrow{AP}$, confirming ratio 1 : 2.

Bài tập luyện tập

Determine whether $A(1, 1, 1)$, $B(3, 5, 7)$, $C(6, 11, 16)$ are collinear.

(A) Collinear, with $\overrightarrow{AC} = 2.5 \overrightarrow{AB}$

(C) Not collinear

(B) Collinear, with $\overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{AB}$

(D) Collinear, with $\overrightarrow{AC} = 3 \overrightarrow{AB}$

Lời giải chi tiết

$\overrightarrow{AB} = (2, 4, 6)$. $\overrightarrow{AC} = (5, 10, 15)$. Since $\frac{5}{2} = \frac{10}{4} = \frac{15}{6} = 2.5$, $\overrightarrow{AC} = 2.5 \overrightarrow{AB}$, so A, B, C are collinear. (A).

Bài tập luyện tập

$A(1, 2, 3)$, $B(9, -2, 11)$. Point $P(5, 0, 7)$ lies on line AB . Find the ratio $AP : PB$.

Lời giải chi tiết

$\overrightarrow{AP} = (4, -2, 4)$. $\overrightarrow{PB} = (4, -2, 4)$. Since $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$, P is the midpoint of AB , so $AP : PB = 1 : 1$. (Check: $\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2}(10, 0, 14) = (5, 0, 7) = P$ ✓.)

Bài tập luyện tập

$OABC$ is a parallelogram with O the origin, $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$. Let M be the midpoint of OB and N the midpoint of AC . Prove $M = N$.

Lời giải chi tiết

As $OABC$ is a parallelogram, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. $\mathbf{m} = \frac{1}{2}(\mathbf{0} + \mathbf{b}) = \frac{1}{2}\mathbf{b}$. $\mathbf{n} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{c}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}\mathbf{b}$. Since $\mathbf{m} = \mathbf{n}$, M and N are the same point: the diagonals bisect each other.

Bài tập luyện tập

$A(0, 0, 0)$, $B(3, 4, 0)$, $C(4, -3, 0)$. Show that triangle ABC has a right angle at A .

Lời giải chi tiết

$\overrightarrow{AB} = (3, 4, 0)$, $\overrightarrow{AC} = (4, -3, 0)$. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 12 - 12 + 0 = 0$, so $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$: the triangle has a right angle at A (and, since $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 5$, it is also isosceles).

Bài tập luyện tập

Triangle ABC has $A(0, 0, 0)$, $B(6, 0, 0)$, $C(2, 8, 0)$. M and N are the midpoints of AB and AC . Verify that $\overrightarrow{MN}$ is parallel to $\overrightarrow{BC}$ and half its length.

Lời giải chi tiết

$M = \frac{1}{2}(A + B) = (3, 0, 0)$, $N = \frac{1}{2}(A + C) = (1, 4, 0)$. $\overrightarrow{MN} = N - M = (-2, 4, 0)$. $\overrightarrow{BC} = C - B = (-4, 8, 0) = 2(-2, 4, 0)$. So $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$, i.e. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$: parallel, and exactly half the length, confirming the midpoint theorem.

Practice: forming, solving and interpreting differential equations

Bài tập luyện tập

A radioactive mass satisfies $\frac{dm}{dt} = -km$; $m = 200\text{g}$ initially and $m = 160\text{g}$ after 10 years. Find the time (nearest year) for m to reach 50g.

(A) 62 years

(C) 31 years

(B) 50 years

(D) 80 years

Lời giải chi tiết

$m = 200e^{-kt}$. $e^{-10k} = 0.8 \Rightarrow k = \frac{\ln 0.8}{-10} = 0.02231$. For $m = 50$: $e^{-kt} = 0.25 \Rightarrow t = \frac{\ln 0.25}{-0.02231} = 62.1 \approx 62$ years. (A).

Bài tập luyện tập

Verify, by differentiating and substituting back, that $y = Ce^{3x}$ (for any constant C) satisfies $\frac{dy}{dx} = 3y$.

Lời giải chi tiết

Differentiating: $\frac{dy}{dx} = 3Ce^{3x}$. Comparing with $3y = 3(Ce^{3x}) = 3Ce^{3x}$, the two sides are identical, so $y = Ce^{3x}$ does indeed satisfy $\frac{dy}{dx} = 3y$ for every value of C – confirming it is the general solution.

Bài tập luyện tập

Solve $\frac{dy}{dx} = 6x^2y$, given $y = 2$ when $x = 0$.

(A) $y = 2e^{2x^3}$ (C) $y = e^{2x^3} + 1$ (B) $y = 2e^{6x^3}$ (D) $y = 2e^{3x^2}$

Lời giải chi tiết

$\frac{dy}{y} = 6x^2 dx \Rightarrow \ln y = 2x^3 + C \Rightarrow y = Ae^{2x^3}$. At $x = 0, y = 2$: $A = 2$, so $y = 2e^{2x^3}$. (A).

Bài tập luyện tập

The number of bacteria N in a culture increases at a rate proportional to N . Initially $N = 500$; after 3 hours $N = 2000$. Form a differential equation and find N after 6 hours.

Lời giải chi tiết

$\frac{dN}{dt} = kN \Rightarrow N = 500e^{kt}$. At $t = 3$: $e^{3k} = \frac{2000}{500} = 4$. At $t = 6$: $e^{6k} = (e^{3k})^2 = 16$, so

$$N(6) = 500 \times 16 = 8000.$$

Bài tập luyện tập

Find the general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ($x, y > 0$). Hence find the particular solution given $y = 6$ when $x = 2$.

Lời giải chi tiết

Separate: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x + C \Rightarrow y = Ax$ – the **general solution** (a family of straight lines through the origin). At $x = 2, y = 6$: $A = 3$. **Particular solution**: $y = 3x$.

Bài tập luyện tập

A liquid cools according to $\theta = 20 + 70e^{-kt}$ ($k > 0, \theta$ in $^{\circ}\text{C}$). What is the temperature as $t \rightarrow \infty$?

(A) 20°C

(C) 70°C

(B) 0°C

(D) 90°C

Lời giải chi tiết

As $t \rightarrow \infty, e^{-kt} \rightarrow 0$, so $\theta \rightarrow 20 + 0 = 20^{\circ}\text{C}$ – the ambient (room) temperature. **(A)**.

Practice: growth, decay and modelling in context

Bài tập luyện tập

A population grows exponentially from $P_0 = 2000$ and doubles every 8 years. Find the population after 20 years (nearest whole number).

(A) 11314

(C) 16000

(B) 8000

(D) 10000

Lời giải chi tiết

$P = 2000e^{kt}$ with $e^{8k} = 2$. After 20 years: $e^{20k} = 2^{20/8} = 2^{2.5} = \sqrt{32} = 5.657$. $P = 2000 \times 5.657 = 11314$ (nearest whole number). **(A)**.

Bài tập luyện tập

A tank drains so that $\frac{dh}{dt} = -k\sqrt{h}$, where h is the height of liquid. Initially $h = 25$ and $\frac{dh}{dt} = -2$. Find k , find h in terms of t , and find the time at which the tank is empty.

Lời giải chi tiết

At $t = 0$: $-2 = -k\sqrt{25} = -5k \Rightarrow k = 0.4$. **Separating**: $h^{-1/2} dh = -k dt \Rightarrow 2\sqrt{h} = -kt + C$. At $t = 0$: $2(5) = 10 = C$, so $\sqrt{h} = 5 - 0.2t$, i.e. $h = (5 - 0.2t)^2$. The tank is empty when $\sqrt{h} = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{0.2} = 25$ seconds.

Bài tập luyện tập

A population follows logistic growth $P(t) = \frac{L}{1 + 9e^{-kt}}$ ($k > 0$). What is P as $t \rightarrow \infty$?

- (A) L (C) $L/9$
(B) 0 (D) $L/10$

Lời giải chi tiết

As $t \rightarrow \infty$, $e^{-kt} \rightarrow 0$, so $P \rightarrow \frac{L}{1+0} = L$: the population tends to the carrying capacity L . (A).

Bài tập luyện tập

A dye is dissolving in a beaker so that the mass x grams dissolved after t minutes satisfies $\frac{dx}{dt} = k(15 - x)$, with $x = 0$ at $t = 0$ and $x = 9$ at $t = 4$. Find x when $t = 8$, and state the limiting value of x .

Lời giải chi tiết

Separating as for the approach-to-a-limit model gives $x = 15(1 - e^{-kt})$. At $t = 4$: $9 = 15(1 - e^{-4k}) \Rightarrow e^{-4k} = 1 - 0.6 = 0.4$. At $t = 8$: $e^{-8k} = (0.4)^2 = 0.16$, so $x = 15(1 - 0.16) = 15(0.84) = 12.6$ grams. As $t \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 15$ grams – the maximum amount of dye that can dissolve.

Bài tập luyện tập

Using the tank model $V = 100e^{-kt}$ with $e^{-5k} = 0.6$ (as in the worked example), find the time (1 d.p.) at which V first equals half its initial value.

- (A) 6.8 min (C) 5.0 min
(B) 10.0 min (D) 3.4 min

Lời giải chi tiết

$k = \frac{-\ln 0.6}{5} = 0.1022$. Need $e^{-kt} = 0.5 \Rightarrow t = \frac{\ln 2}{k} = \frac{0.6931}{0.1022} = 6.8$ minutes. (A).

Practice: further vectors, lines and angles

Bài tập luyện tập

Find the angle between $\mathbf{a} = (1, -1, 1)$ and $\mathbf{b} = (2, 2, 1)$ (1 d.p.).

- (A) 78.9° (C) 101.1°
(B) 11.1° (D) 90°

Lời giải chi tiết

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2 - 2 + 1 = 1$. $|\mathbf{a}| = \sqrt{3}$, $|\mathbf{b}| = 3$. $\cos \theta = \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0.1925 \Rightarrow \theta = 78.9^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

Find p so that $\mathbf{a} = (3, p, -4)$ and $\mathbf{b} = (p, 2, 5)$ are perpendicular.

Lời giải chi tiết

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3p + 2p - 20 = 5p - 20 = 0 \Rightarrow p = 4$. Check: $(3, 4, -4) \cdot (4, 2, 5) = 12 + 8 - 20 = 0 \checkmark$.

Bài tập luyện tập

Find $|\mathbf{a}|$ and the unit vector in the direction of $\mathbf{a} = (8, -6, 0)$.

Lời giải chi tiết

$|\mathbf{a}| = \sqrt{64 + 36 + 0} = \sqrt{100} = 10$. Unit vector $= \frac{1}{10}(8, -6, 0) = (0.8, -0.6, 0)$.

Bài tập luyện tập

$l_1 : \mathbf{r} = (3, 2, 1) + s(1, -1, 2)$, $l_2 : \mathbf{r} = (0, 5, 7) + t(1, -2, 3)$. Show that l_1 and l_2 are skew.

Lời giải chi tiết

Directions $(1, -1, 2)$ and $(1, -2, 3)$ are not parallel. $x : s - t = -3$ (i). $y : 2t - s = 3$ (ii). $z : 2s - 3t = 6$ (iii). From (i), $s = t - 3$. Substituting into (ii): $2t - (t - 3) = 3 \Rightarrow t = 0$, $s = -3$. Checking (iii): $2(-3) - 3(0) = -6 \neq 6$ — contradiction, so the lines are **skew**.

Bài tập luyện tập

Find the acute angle between lines with direction vectors $(1, 0, 1)$ and $(0, 1, 1)$.

(A) 60°

(C) 30°

(B) 45°

(D) 90°

Lời giải chi tiết

Dot product $= 0 + 0 + 1 = 1$. $|\mathbf{d}_1| = |\mathbf{d}_2| = \sqrt{2}$. $\cos \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

$l_1 : \mathbf{r} = (1, 0, 2) + s(2, 4, -2)$, $l_2 : \mathbf{r} = (5, 8, -2) + t(3, 6, -3)$. Show that l_1 and l_2 are in fact the same line.

Lời giải chi tiết

$\mathbf{d}_2 = (3, 6, -3) = 1.5(2, 4, -2) = 1.5\mathbf{d}_1$, so the lines are parallel. Testing the point $(5, 8, -2)$ in l_1 : $x : 1 + 2s = 5 \Rightarrow s = 2$; $y : 4s = 8 \Rightarrow s = 2 \checkmark$; $z : 2 - 2s = 2 - 4 = -2 \checkmark$. All three components agree at $s = 2$, so $(5, 8, -2)$ lies on l_1 : the two equations describe the **same line**.

Practice: further perpendicular distance and vector geometry

Bài tập luyện tập

Line $l: \mathbf{r} = (1, 2, -1) + t(1, -2, 2)$. Point $P(4, 2, 2)$. Find the foot of the perpendicular from P to l and the shortest distance from P to l .

Lời giải chi tiết

$|\mathbf{d}|^2 = 1 + 4 + 4 = 9$. $\overrightarrow{AP} = (3, 0, 3)$. $t = \frac{(3)(1) + (0)(-2) + (3)(2)}{9} = \frac{9}{9} = 1$. Foot: $N = \mathbf{a} + \mathbf{d} = (2, 0, 1)$. Distance: $|N - P| = |(-2, -2, -1)| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$.

Bài tập luyện tập

Line $\mathbf{r} = (0, 0, 0) + t(3, 4, 0)$. Point $P(0, 0, 5)$. Find the shortest distance from P to the line.

- (A) 5 (C) 3
(B) 4 (D) 0

Lời giải chi tiết

$\overrightarrow{AP} = (0, 0, 5)$, and $\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{d} = 0 + 0 + 0 = 0$ already, so $t = 0$ and the foot is $A = (0, 0, 0)$ itself. Distance $= |A - P| = \sqrt{0 + 0 + 25} = 5$. (A).

Bài tập luyện tập

Line $\mathbf{r} = (1, 1, 1) + t(0, 0, 1)$. Point $P(4, 5, 10)$. Find the shortest distance from P to the line.

- (A) 5 (C) 3
(B) 9 (D) 4

Lời giải chi tiết

$|\mathbf{d}|^2 = 1$. $\overrightarrow{AP} = (3, 4, 9)$. $t = \frac{(3)(0) + (4)(0) + (9)(1)}{1} = 9$. Foot: $N = (1, 1, 10)$. Distance $= |(-3, -4, 0)| = \sqrt{9 + 16} = 5$. (A).

Bài tập luyện tập

$A(3, -2, 7)$, $B(13, 8, -8)$. Find the position vector of the point P on AB with $AP : PB = 2 : 3$.

Lời giải chi tiết

$\mathbf{p} = \frac{3\mathbf{a} + 2\mathbf{b}}{5} = \frac{3(3, -2, 7) + 2(13, 8, -8)}{5} = \frac{(9, -6, 21) + (26, 16, -16)}{5} = \frac{(35, 10, 5)}{5} = (7, 2, 1)$. Check: $\overrightarrow{AP} = (4, 4, -6)$, $\overrightarrow{PB} = (6, 6, -9) = 1.5 \overrightarrow{AP}$, confirming ratio 2 : 3.

Bài tập luyện tập

Show that $A(1, -1, 2)$, $B(4, 1, 5)$ and $C(13, 7, 14)$ are collinear.

Lời giải chi tiết

$\overrightarrow{AB} = (3, 2, 3)$. $\overrightarrow{AC} = (12, 8, 12) = 4(3, 2, 3) = 4\overrightarrow{AB}$. Since $\overrightarrow{AC}$ is a scalar multiple of $\overrightarrow{AB}$ sharing the point A , the three points are **collinear**, with C four times as far from A as B is.

Bài tập luyện tập

Triangle ABC has $A(0, 0, 0)$, $B(6, 0, 0)$, $C(0, 9, 0)$. Find the position vector of the centroid G of the triangle.

Lời giải chi tiết

$$\mathbf{g} = \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{3} = \frac{(0, 0, 0) + (6, 0, 0) + (0, 9, 0)}{3} = \frac{(6, 9, 0)}{3} = (2, 3, 0).$$

Practice: further differential equations

Bài tập luyện tập

The rate of decrease of y is proportional to y^2 . Initially $y = 8$; after 4 seconds $y = 2$. Find y when $t = 10$.

Lời giải chi tiết

$$\frac{dy}{dt} = -ky^2 \Rightarrow \frac{1}{y} = kt + \frac{1}{8} \text{ (using } y = 8 \text{ at } t = 0). \text{ At } t = 4, y = 2: \frac{1}{2} = 4k + \frac{1}{8} \Rightarrow 4k = \frac{3}{8} \Rightarrow k = \frac{3}{32}. \text{ So } \frac{1}{y} = \frac{3}{32}t + \frac{1}{8}. \text{ At } t = 10: \frac{1}{y} = \frac{30}{32} + \frac{4}{32} = \frac{34}{32} = \frac{17}{16} \Rightarrow y = \frac{16}{17} \approx 0.941.$$

Bài tập luyện tập

Solve $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$, given $y = 1$ when $x = 0$.

(A) $y = \frac{1}{1-x^2}$

(C) $y = 1 - x^2$

(B) $y = \frac{1}{1+x^2}$

(D) $y = 1 + x^2$

Lời giải chi tiết

Separate: $\frac{dy}{y^2} = 2x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C$. At $x = 0, y = 1$: $C = -1$, so $-\frac{1}{y} = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 - x^2 \Rightarrow y = \frac{1}{1-x^2}$. (A).

Bài tập luyện tập

A tank contains 200 litres of brine holding 40 kg of dissolved salt. Pure water enters and well-mixed brine leaves, both at 8 litres per minute. Find the mass y of salt after t minutes, and the time (1 d.p.) for the mass of salt to fall to 5 kg.

Lời giải chi tiết

$\frac{dy}{dt} = -\frac{y}{200} \times 8 = -\frac{y}{25}$, so $y = 40e^{-t/25}$. Setting $y = 5$: $e^{-t/25} = \frac{1}{8} \Rightarrow t = 25 \ln 8 = 25(2.0794) = 52.0$ minutes (1 d.p.).

Bài tập luyện tập

An object at 5°C is placed in a room at 25°C , so its temperature θ satisfies $\frac{d\theta}{dt} = k(25 - \theta)$. Which of the following is the correct general solution?

(A) $\theta = 25 - 20e^{-kt}$

(C) $\theta = 5e^{-kt}$

(B) $\theta = 25 + 20e^{-kt}$

(D) $\theta = 20e^{-kt} + 5$

Lời giải chi tiết

The solution has the form $\theta = 25 - (25 - \theta_0)e^{-kt}$ with $\theta_0 = 5$: $\theta = 25 - 20e^{-kt}$. Check at $t = 0$: $25 - 20 = 5$ ✓, and as $t \rightarrow \infty$, $\theta \rightarrow 25^\circ\text{C}$, the room temperature, as expected for warming towards ambient. (A).

Practice: lines, planes and axes

Bài tập luyện tập

Find the acute angle between the line $\mathbf{r} = (1, 0, 2) + t(2, 1, -2)$ and the x -axis.

(A) 48.2°

(C) 60°

(B) 41.8°

(D) 70.5°

Lời giải chi tiết

Direction $\mathbf{d} = (2, 1, -2)$, $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$. $\mathbf{d} \cdot \mathbf{i} = 2$. $|\mathbf{d}| = \sqrt{4+1+4} = 3$, $|\mathbf{i}| = 1$. $\cos \theta = \frac{2}{3} = 0.6667 \Rightarrow \theta = 48.2^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

Line $\mathbf{r} = (3, 1, -1) + t(1, -1, 1)$. Find the point where it crosses the plane $y = 0$.

Lời giải chi tiết

$y = 0$: $1 - t = 0 \Rightarrow t = 1$. Point: $(3 + 1, 0, -1 + 1) = (4, 0, 0)$.

Bài tập luyện tập

Does the line $\mathbf{r} = (1, 2, 3) + t(1, 1, 1)$ cross the y -axis?

Lời giải chi tiết

The y -axis needs $x = 0$ and $z = 0$ at the same t . From $x = 0$: $1 + t = 0 \Rightarrow t = -1$. From $z = 0$: $3 + t = 0 \Rightarrow t = -3$. Since $-1 \neq -3$, there is no common value of t : the line does **not** cross the y -axis.

Bài tập luyện tập

Show that the line $\mathbf{r} = (4, -3, 2) + t(1, -2, 2)$ passes through the point $(7, -9, 8)$.

Lời giải chi tiết

Try $t = 3$: $(4 + 3, -3 - 6, 2 + 6) = (7, -9, 8) \checkmark$. Since this value of t reproduces the given point exactly, the line does pass through $(7, -9, 8)$.

Bài tập luyện tập

$l_1 : \mathbf{r} = (1, 1, 1) + s(3, -1, 2)$, $l_2 : \mathbf{r} = (4, 0, 3) + t(-3, 1, -2)$. Describe the relationship between l_1 and l_2 .

(A) The same line

(C) Skew

(B) Parallel, distinct lines

(D) Intersecting at a single point

Lời giải chi tiết

$\mathbf{d}_2 = (-3, 1, -2) = -1 \cdot (3, -1, 2) = -\mathbf{d}_1$, so the lines are parallel. Testing $(4, 0, 3)$ in l_1 : $x : 1 + 3s = 4 \Rightarrow s = 1$; $y : 1 - s = 0 \checkmark$; $z : 1 + 2s = 3 \checkmark$. All three agree at $s = 1$, so $(4, 0, 3)$ lies on l_1 : the lines are the **same line**. (A).

Bài tập luyện tập

Line $\mathbf{r} = (6, 5, -1) + t(3, -4, 0)$. Find the point where it crosses the plane $x = 0$.

Lời giải chi tiết

$x = 0$: $6 + 3t = 0 \Rightarrow t = -2$. Point: $(0, 5 - 4(-2), -1) = (0, 13, -1)$.

Practice: vector geometry – Varignon’s theorem and ratios**Bài tập luyện tập**

Quadrilateral $ABCD$ has $A(0, 0, 0)$, $B(4, 0, 0)$, $C(6, 4, 0)$, $D(0, 6, 0)$. P, Q, R, S are the midpoints of AB, BC, CD, DA . Find P, Q, R, S and verify that $PQRS$ is a parallelogram.

Lời giải chi tiết

$P = (2, 0, 0)$, $Q = (5, 2, 0)$, $R = (3, 5, 0)$, $S = (0, 3, 0)$. $\overrightarrow{PQ} = (3, 2, 0)$, $\overrightarrow{SR} = R - S = (3, 2, 0)$. Since $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}$, side PQ is equal and parallel to side SR , so $PQRS$ is a parallelogram, confirming Varignon’s theorem.

Bài tập luyện tập

For the quadrilateral and midpoints P, Q, R, S of the previous question, find the midpoint of PR and the midpoint of QS , and comment on the result.

Lời giải chi tiết

Midpoint of PR : $\frac{1}{2}(P + R) = \frac{1}{2}((2, 0, 0) + (3, 5, 0)) = (2.5, 2.5, 0)$. Midpoint of QS : $\frac{1}{2}(Q + S) = \frac{1}{2}((5, 2, 0) + (0, 3, 0)) = (2.5, 2.5, 0)$. The two diagonals PR and QS of the Varignon parallelogram have the **same** midpoint (as they must, since it is a parallelogram); this common point is also $\frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$, the average of all four original vertices.

Bài tập luyện tập

Find k such that $A(1, 2, 3)$, $B(4, 8, k)$ and $C(7, 14, 15)$ are collinear.

- (A) 9 (C) 12
(B) 6 (D) 8

Lời giải chi tiết

$\overrightarrow{AB} = (3, 6, k - 3)$, $\overrightarrow{AC} = (6, 12, 12)$. Matching the x - and y -components, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$, so the z -components must also satisfy $12 = 2(k - 3) \Rightarrow k - 3 = 6 \Rightarrow k = 9$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

$\mathbf{a} = (1, 2, 2)$, $\mathbf{b} = (2, -1, 2)$. Find $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|$ and $|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$.

Lời giải chi tiết

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (3, 1, 4)$, so $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| = \sqrt{9 + 1 + 16} = \sqrt{26} = 5.10$ (3 s.f.). $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (-1, 3, 0)$, so $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| = \sqrt{1 + 9 + 0} = \sqrt{10} = 3.16$ (3 s.f.).

Bài tập luyện tập

Which pair of vectors below is **not** perpendicular?

- (A) $(1, 0, 0)$ and $(0, 1, 0)$ (C) $(1, 2, 3)$ and $(3, -3, 1)$
(B) $(2, 3, -1)$ and $(1, -1, -1)$ (D) $(1, 1, 1)$ and $(1, 1, -1)$

Lời giải chi tiết

(A): 0. (B): $2 - 3 + 1 = 0$. (C): $3 - 6 + 3 = 0$. (D): $1 + 1 - 1 = 1 \neq 0$ — **not** perpendicular. **(D)**.

Practice: further mixed vectors and differential equations

Bài tập luyện tập

$l_1 : \mathbf{r} = (1, 1, 0) + s(2, 0, 1)$, $l_2 : \mathbf{r} = (3, -1, 0) + t(1, 1, 1)$. Find their point of intersection.

Lời giải chi tiết

y : $1 = -1 + t \Rightarrow t = 2$. z : $s = t \Rightarrow s = 2$. Check x : $1 + 2(2) = 5$ and $3 + 2 = 5$ ✓. Point of intersection: $(5, 1, 2)$.

Bài tập luyện tập

Find the acute angle between the direction vectors of the two lines in the previous question.

- (A) 39.2° (C) 60°
(B) 50.8° (D) 25.8°

Lời giải chi tiết

$(2, 0, 1) \cdot (1, 1, 1) = 2 + 0 + 1 = 3$. $|(2, 0, 1)| = \sqrt{5}$, $|(1, 1, 1)| = \sqrt{3}$. $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{15}} = 0.7746 \Rightarrow \theta = 39.2^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x}$ (for $x, y > 0$), given $y = 1$ when $x = 1$.

Lời giải chi tiết

Separate: $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln(y+1) = \ln x + C \Rightarrow y+1 = Ax$. At $x = 1, y = 1$: $A = 2$. **Particular solution:** $y = 2x - 1$. Check: $\frac{dy}{dx} = 2$, and $\frac{y+1}{x} = \frac{2x}{x} = 2 \checkmark$.

Bài tập luyện tập

A cup of coffee cools according to $\frac{d\theta}{dt} = -k(\theta - 18)$. Initially $\theta = 82^\circ\text{C}$; after 10 minutes $\theta = 50^\circ\text{C}$. Find θ after 20 minutes (nearest degree).

- (A) 34°C (C) 36°C
(B) 32°C (D) 40°C

Lời giải chi tiết

Let $\varphi = \theta - 18$, $\varphi_0 = 64$. At $t = 10$: $e^{-10k} = \frac{50 - 18}{64} = \frac{32}{64} = 0.5$. At $t = 20$: $e^{-20k} = (0.5)^2 = 0.25$, so $\varphi(20) = 64(0.25) = 16$, giving $\theta(20) = 18 + 16 = 34^\circ\text{C}$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the shortest distance from the origin to the line $\mathbf{r} = (4, 0, 3) + t(0, 1, 0)$.

- (A) 5 (C) 3
(B) 4 (D) 7

Lời giải chi tiết

$\mathbf{d} = (0, 1, 0)$, $|\mathbf{d}|^2 = 1$. $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 0) - (4, 0, 3) = (-4, 0, -3)$. $t = \frac{(-4)(0) + (0)(1) + (-3)(0)}{1} = 0$, so the foot is $A = (4, 0, 3)$ itself. Distance = $|A - O| = \sqrt{16 + 0 + 9} = 5$. (A).

Practice: additional quick review

Bài tập luyện tập

Find t such that $\mathbf{r} = (1, -2, 3) + t(2, 1, -1)$ passes through the point $(7, 1, 0)$.

Lời giải chi tiết

$x: 1 + 2t = 7 \Rightarrow t = 3$. Check $y: -2 + 3 = 1 \checkmark$; $z: 3 - 3 = 0 \checkmark$. All three components agree at $t = 3$, so the line does pass through $(7, 1, 0)$.

Bài tập luyện tập

A radioactive isotope has a half-life of 8 days. What fraction of the original mass remains after 24 days?

(A) $\frac{1}{8}$

(C) $\frac{1}{24}$

(B) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{3}{8}$

Lời giải chi tiết

24 days is exactly 3 half-lives ($24 = 3 \times 8$), and each half-life halves the mass: $(\frac{1}{2})^3 = \frac{1}{8}$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $\frac{dy}{dx} = y \cos x$, given $y = 2$ when $x = 0$.

Lời giải chi tiết

Separate: $\frac{dy}{y} = \cos x \, dx \Rightarrow \ln y = \sin x + C$. At $x = 0, y = 2$: $C = \ln 2$, so $\ln y = \sin x + \ln 2 \Rightarrow y = 2e^{\sin x}$. Check: $\frac{dy}{dx} = 2e^{\sin x} \cos x = y \cos x \checkmark$.

Bài tập luyện tập

A population satisfies the logistic equation $\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{500}\right)$ with $k > 0$ and $0 < P_0 < 500$. What is the long-term population, regardless of the exact starting value P_0 ?

(A) 500

(C) 250

(B) 0

(D) It grows without bound

Lời giải chi tiết

This is the logistic model with capacity $L = 500$; for any starting value $0 < P_0 < 500$, $P \rightarrow L = 500$ as $t \rightarrow \infty$. (A).

Bài tập luyện tập

Find $|\mathbf{a}|$ and the unit vector in the direction of $\mathbf{a} = (0, 5, 12)$.

Lời giải chi tiết

$|\mathbf{a}| = \sqrt{0 + 25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. Unit vector $= \frac{1}{13}(0, 5, 12) = (0, \frac{5}{13}, \frac{12}{13})$.

Bài tập luyện tập

Show that $\mathbf{a} = (2, -3, 6)$ and $\mathbf{b} = (3, 2, 0)$ are perpendicular.

Lời giải chi tiết

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (2)(3) + (-3)(2) + (6)(0) = 6 - 6 + 0 = 0$, so $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$.

Complex Numbers

Mục tiêu Unit: Số phức dạng đại số (Cartesian) và các phép toán cộng/trừ/nhân/chia, liên hợp phức; phương trình bậc hai, bậc ba, bậc bốn có nghiệm phức (định lý nghiệm liên hợp với hệ số thực); dạng lượng giác (modulus–argument), biểu đồ Argand, phép nhân/chia dạng cực; và quỹ tích (loci) trên mặt phẳng phức, bao gồm bài toán giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của $|z|$ và $\arg z$ (mức A Level, Paper 3).

4.1 Cartesian Form and Algebraic Operations

4.1.1 The imaginary unit and Cartesian form

The equation $x^2 + 1 = 0$ has no real solution, since $x^2 \geq 0$ for every real x . To solve it we introduce the **imaginary unit** i , defined by

$$i^2 = -1.$$

A **complex number** is then any expression of the form

$$z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R},$$

written in **Cartesian form** (also called algebraic form). The real number x is the **real part**, written $x = \operatorname{Re}(z)$, and the real number y is the **imaginary part**, written $y = \operatorname{Im}(z)$ (note that $\operatorname{Im}(z)$ is itself real – it is the *coefficient* of i , not iy itself). The set of all complex numbers is denoted $\mathbb{C}$, and $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ since every real number x is the complex number $x + 0i$.

Powers of i cycle with period 4: $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, and then the pattern repeats. To simplify i^n , write $n = 4q + r$ with $0 \leq r < 4$ and use $i^n = i^r$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Số phức $z = x + iy$ có phần thực x và phần ảo y (chú ý: phần ảo là hệ số y , **không phải** iy). Đơn vị ảo i thoả $i^2 = -1$. Các lũy thừa của i lặp lại theo chu kỳ 4: $i, -1, -i, 1, i, -1, \dots$

4.1.2 Addition and subtraction

Complex numbers are added and subtracted by combining real parts together and imaginary parts together, exactly as with two-dimensional vectors:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d), \quad (a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d).$$

4.1.3 Multiplication

Complex numbers are multiplied by expanding brackets as with ordinary polynomials, then using $i^2 = -1$ to simplify:

$$(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Let $z_1 = 3 + 2i$ and $z_2 = 1 - 4i$. Find $z_1 z_2$ and $\frac{z_1}{z_2}$.

$$z_1 z_2 = (3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = 3 - 10i + 8 = 11 - 10i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(3 + 2i)(1 + 4i)}{(1 - 4i)(1 + 4i)} = \frac{3 + 12i + 2i + 8i^2}{1 + 16} = \frac{3 + 14i - 8}{17} = -\frac{5}{17} + \frac{14}{17}i.$$

4.1.4 The complex conjugate

The **conjugate** of $z = x + iy$ is

$$z^* = x - iy$$

(also written $\bar{z}$). Geometrically, conjugation reflects the point representing z in the real axis. Two key identities follow directly from expanding the product:

$$z + z^* = 2x = 2 \operatorname{Re}(z) \quad (\text{always real}),$$

$$zz^* = (x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2 \quad (\text{always real and non-negative}).$$

The quantity $zz^* = x^2 + y^2$ defines the **modulus** of z , written $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, so that $zz^* = |z|^2$. Conjugation also distributes over the arithmetic operations: $(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$, $(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^*$, and $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$.

4.1.5 Division

Because zz^* is always real, division of complex numbers is carried out by multiplying numerator and denominator by the **conjugate of the denominator**, which converts the denominator into a real number:

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nhân/chia số phức: khai triển như đa thức bình thường rồi thay $i^2 = -1$. Khi chia, luôn nhân cả tử và mẫu với **liên hợp của mẫu** để mẫu trở thành số thực, vì $zz^* = |z|^2 = x^2 + y^2$ luôn là số thực không âm. Liên hợp của $z = x + iy$ là $z^* = x - iy$ (đối xứng qua trục thực trên biểu đồ Argand).

4.1.6 Equality of complex numbers

Two complex numbers are equal exactly when their real parts are equal *and* their imaginary parts are equal:

$$a + ib = c + id \iff a = c \text{ and } b = d \quad (a, b, c, d \in \mathbb{R}).$$

This single fact — that one complex equation is really **two** real equations — is the standard tool for finding unknown real numbers hidden inside a complex-number statement: expand everything into the form $(\text{real}) + i(\text{real})$, then equate real parts and equate imaginary parts separately.

Summary of Cartesian-form arithmetic. For $z = x + iy$:

- $\operatorname{Re}(z) = x$, $\operatorname{Im}(z) = y$ (a real number); $z^* = x - iy$; $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $z + z^* = 2 \operatorname{Re}(z)$; $zz^* = |z|^2$.
- Addition/subtraction: combine real and imaginary parts separately.
- Multiplication: expand brackets, use $i^2 = -1$.
- Division: multiply numerator and denominator by the conjugate of the denominator.
- Equality: $a + ib = c + id \iff a = c, b = d$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find real numbers x and y such that $x(2 + i) + y(1 - 3i) = 4 - 5i$.

Expanding: $(2x + y) + i(x - 3y) = 4 - 5i$. Equating real and imaginary parts:

$$2x + y = 4, \quad x - 3y = -5.$$

From the first equation $y = 4 - 2x$. Substituting: $x - 3(4 - 2x) = -5 \Rightarrow x - 12 + 6x = -5 \Rightarrow 7x = 7 \Rightarrow x = 1$, so $y = 4 - 2(1) = 2$.

Check: $1(2 + i) + 2(1 - 3i) = 2 + i + 2 - 6i = 4 - 5i$. $\therefore x = 1, y = 2$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai số phức bằng nhau khi và chỉ khi phần thực bằng phần thực và phần ảo bằng phần ảo. Đây là công cụ chính để tìm ẩn số thực giấu trong một phương trình phức: khai triển về dạng (số thực) + i ·(số thực), rồi tách thành hai phương trình thực và giải hệ.

Equality of complex numbers also lets us find **square roots** of a complex number algebraically: to solve $(a + ib)^2 = p + iq$ for real a, b , expand the left side, equate real and imaginary parts, and solve the resulting simultaneous equations.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the square roots of $5 + 12i$.

Let $\sqrt{5 + 12i} = a + ib$ with $a, b \in \mathbb{R}$. Squaring: $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi = 5 + 12i$. Equating parts:

$$a^2 - b^2 = 5, \quad 2ab = 12 \Rightarrow b = \frac{6}{a} \quad (a \neq 0).$$

Substitute into the first equation: $a^2 - \frac{36}{a^2} = 5 \Rightarrow a^4 - 5a^2 - 36 = 0$. Let $u = a^2$:

$$u^2 - 5u - 36 = 0 \Rightarrow u = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 144}}{2} = \frac{5 \pm 13}{2} \Rightarrow u = 9 \text{ or } u = -4.$$

Since $u = a^2 \geq 0$, reject $u = -4$; so $a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$. If $a = 3$, $b = 6/3 = 2$; if $a = -3$, $b = 6/(-3) = -2$.

$$\therefore \sqrt{5 + 12i} = \pm(3 + 2i).$$

Check: $(3 + 2i)^2 = 9 + 12i - 4 = 5 + 12i$. ✓

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Muốn tìm căn bậc hai của một số phức $p + iq$, đặt $\sqrt{p + iq} = a + ib$, bình phương hai vế, rồi tách phần thực/phần ảo để lập hệ phương trình với a, b . Luôn có **hai** căn bậc hai (đối nhau $\pm(a + ib)$), giống như số thực dương luôn có hai căn bậc hai đối nhau.

Equating real and imaginary parts also solves **simultaneous equations in two complex unknowns**, and equations mixing a complex unknown z with its own conjugate z^* .

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve the simultaneous equations $z + w = 6 - 2i$ and $2z - w = 6 + 5i$ for the complex numbers z and w .

Adding the two equations eliminates w :

$$3z = (6 - 2i) + (6 + 5i) = 12 + 3i \Rightarrow z = 4 + i.$$

Substituting into the first equation: $w = (6 - 2i) - z = (6 - 2i) - (4 + i) = 2 - 3i$.

Check in the second equation: $2z - w = (8 + 2i) - (2 - 3i) = 6 + 5i$. ✓ $\therefore z = 4 + i, w = 2 - 3i$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the complex number z such that $z + 2z^* = 9 - 4i$.

Let $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$), so $z^* = x - iy$. Then

$$z + 2z^* = (x + iy) + 2(x - iy) = 3x - iy.$$

Equating this to $9 - 4i$: $3x = 9$ and $-y = -4$, so $x = 3$ and $y = 4$, giving $z = 3 + 4i$.

Check: $z^* = 3 - 4i$, so $z + 2z^* = (3 + 4i) + 2(3 - 4i) = (3 + 4i) + (6 - 8i) = 9 - 4i$. ✓

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hệ phương trình có **hai ẩn phức** z, w , có thể giải bằng cách cộng/trừ để khử một ẩn, hoàn toàn giống hệ phương trình thực thông thường (vì cộng/trừ số phức tuân theo các quy tắc đại số bình thường). Với phương trình chỉ chứa **một ẩn** z nhưng có cả z và z^* (như $z + 2z^* = 9 - 4i$), đặt $z = x + iy$, khai triển $z^* = x - iy$, rút gọn về dạng (số thực) + i ·(số thực), rồi tách phần thực/phần ảo để tìm x, y .

4.2 Quadratic, Cubic and Quartic Equations with Complex Roots

4.2.1 Quadratics with real coefficients and negative discriminant

For the quadratic $az^2 + bz + c = 0$ with real coefficients a, b, c ($a \neq 0$), the quadratic formula gives

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

When the discriminant $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, the number under the square root is negative, so we write $\sqrt{\Delta} = \sqrt{-|\Delta|} = i\sqrt{|\Delta|}$ and obtain two **non-real, complex conjugate** roots $p \pm qi$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $z^2 - 6z + 13 = 0$.

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(13) = 36 - 52 = -16 < 0.$$

$$z = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i.$$

4.2.2 The conjugate root theorem

Conjugate root theorem. If a polynomial equation has *real* coefficients, then its non-real roots occur in **conjugate pairs**: whenever $p + iq$ ($q \neq 0$) is a root, so is $p - iq$. Equivalently, complex roots of a real polynomial always come in matching pairs z and z^* , each pair contributing a real quadratic factor

$$(x - (p + iq))(x - (p - iq)) = x^2 - 2px + (p^2 + q^2)$$

with sum of roots $2p$ and product of roots $p^2 + q^2 = |z|^2$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với đa thức có **hệ số thực**, nếu $p + qi$ là nghiệm thì $p - qi$ (liên hợp của nó) **chắc chắn** cũng là nghiệm. Hai nghiệm liên hợp này tạo ra một nhân tử bậc hai với hệ số thực: $z^2 - 2pz + (p^2 + q^2)$, trong đó $2p$ là tổng và $p^2 + q^2$ là tích hai nghiệm. Đây là công cụ cốt lõi để dựng lại đa thức hoặc tìm các nghiệm còn lại.

(!) Lỗi thường gặp: The conjugate root theorem applies **only when every coefficient of the polynomial is real**. If a polynomial has a non-real coefficient (e.g. $z^2 - (3+i)z + 7 = 0$), a complex root does **not** guarantee that its conjugate is also a root. Always check the coefficients are real before using this shortcut.

Ví dụ mẫu · Worked example

Given that $2 + 3i$ is a root of a quadratic with real coefficients, find the quadratic.

By the conjugate root theorem, the other root is $2 - 3i$. Sum = $(2 + 3i) + (2 - 3i) = 4$; product = $(2 + 3i)(2 - 3i) = 4 + 9 = 13$. Using $z^2 - (\text{sum})z + (\text{product}) = 0$:

$$z^2 - 4z + 13 = 0.$$

4.2.3 Using one complex root to solve a cubic or quartic

If a cubic (or quartic) equation with real coefficients has a given non-real root, the conjugate root theorem immediately supplies a second root, and hence a real quadratic factor. Dividing the cubic/quartic by this quadratic factor (by inspection, or by polynomial long division) reduces the problem to a linear (or quadratic) equation, giving the remaining root(s).

Ví dụ mẫu · Worked example

Given that $z^3 - 4z^2 + 9z - 10 = 0$ has root $1 + 2i$, find the other two roots.

Since the coefficients are real, $1 - 2i$ is also a root. This conjugate pair gives the quadratic factor

$$(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i)) = z^2 - 2z + (1 + 4) = z^2 - 2z + 5.$$

Divide the cubic by this factor:

$$z^3 - 4z^2 + 9z - 10 = (z^2 - 2z + 5)(z + a)$$

for some real constant a . Comparing constant terms: $5a = -10 \Rightarrow a = -2$, so the linear factor is $(z - 2)$. (Check by comparing z^2 coefficients: $-2 + a = -4 \Rightarrow a = -2$. ✓)

$$z^3 - 4z^2 + 9z - 10 = (z^2 - 2z + 5)(z - 2).$$

The three roots are $1 + 2i$, $1 - 2i$, 2 .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy trình giải phương trình bậc ba/bốn khi biết một nghiệm phức $p + qi$ (hệ số thực): (1) suy ra nghiệm liên hợp $p - qi$ cũng là nghiệm; (2) nhân hai nhân tử tuyến tính tương ứng để được nhân tử bậc hai thực $z^2 - 2pz + (p^2 + q^2)$; (3) chia đa thức ban đầu cho nhân tử bậc hai này (so sánh hệ số hoặc chia đa thức) để tìm (các) nghiệm còn lại.

4.2.4 Finding unknown real coefficients

If a polynomial with unknown real coefficients is known to have a particular non-real root, we can find the unknown coefficients by using the sum and product of the conjugate pair together with the remaining (real) root, comparing coefficients of the reconstructed polynomial with the given one.

Ví dụ mẫu · Worked example

The cubic equation $z^3 + pz^2 + qz + 65 = 0$, where $p, q \in \mathbb{R}$, has root $z = 2 + 3i$. Find p , q , and the third root.

The conjugate $2 - 3i$ is also a root, giving the real quadratic factor $z^2 - 4z + 13$ (sum = 4, product = $4 + 9 = 13$). Let the third (real) root be r :

$$z^3 + pz^2 + qz + 65 = (z^2 - 4z + 13)(z - r).$$

Expand the right-hand side: $(z^2 - 4z + 13)(z - r) = z^3 - (r + 4)z^2 + (4r + 13)z - 13r$. Comparing constant terms: $-13r = 65 \Rightarrow r = -5$. Comparing z^2 coefficients: $p = -(r + 4) = -(-5 + 4) = 1$. Comparing z coefficients: $q = 4r + 13 = 4(-5) + 13 = -7$.

$$\therefore p = 1, q = -7, \text{ third root} = -5.$$

Check: at $z = 2 + 3i$: $(2 + 3i)^2 = -5 + 12i$, $(2 + 3i)^3 = (2 + 3i)(-5 + 12i) = -46 + 9i$; then $z^3 + z^2 - 7z + 65 = (-46 + 9i) + (-5 + 12i) - 7(2 + 3i) + 65 = 0 + 0i$. ✓

4.2.5 Constructing a polynomial from given roots

Conversely, given a list of roots (with any non-real ones listed as a full conjugate pair, so that the final polynomial has real coefficients), the polynomial can be reconstructed by multiplying the corresponding real quadratic and/or linear factors together.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find, in expanded form, a quartic equation with real coefficients having roots $1 + i$, $1 - i$, $3 + 2i$, $3 - 2i$.

Pair $1 \pm i$: sum 2, product $1 + 1 = 2 \Rightarrow z^2 - 2z + 2$. Pair $3 \pm 2i$: sum 6, product $9 + 4 = 13 \Rightarrow z^2 - 6z + 13$. Multiply the two quadratic factors:

$$\begin{aligned}(z^2 - 2z + 2)(z^2 - 6z + 13) &= z^2(z^2 - 6z + 13) - 2z(z^2 - 6z + 13) + 2(z^2 - 6z + 13) \\&= (z^4 - 6z^3 + 13z^2) + (-2z^3 + 12z^2 - 26z) + (2z^2 - 12z + 26) \\&= z^4 - 8z^3 + 27z^2 - 38z + 26. \\ \therefore z^4 - 8z^3 + 27z^2 - 38z + 26 &= 0.\end{aligned}$$

Ví dụ mẫu · Worked example

The quartic equation $z^4 - 2z^3 + 14z^2 + pz + q = 0$, where $p, q \in \mathbb{R}$, has roots $1 + 2i$ and $3i$. Find p and q , and state all four roots.

Since the coefficients are real, the conjugates $1 - 2i$ and $-3i$ are also roots. This gives two real quadratic factors:

$$(z - (1 + 2i))(z - (1 - 2i)) = z^2 - 2z + (1 + 4) = z^2 - 2z + 5, \quad (z - 3i)(z + 3i) = z^2 + 9.$$

Multiplying these factors:

$$\begin{aligned}(z^2 - 2z + 5)(z^2 + 9) &= z^2(z^2 + 9) - 2z(z^2 + 9) + 5(z^2 + 9) \\&= (z^4 + 9z^2) + (-2z^3 - 18z) + (5z^2 + 45) \\&= z^4 - 2z^3 + 14z^2 - 18z + 45.\end{aligned}$$

Comparing with $z^4 - 2z^3 + 14z^2 + pz + q$ gives $p = -18$ and $q = 45$.

$$\therefore p = -18, q = 45, \text{ and the four roots are } 1 + 2i, 1 - 2i, 3i, -3i.$$

Check at $z = 3i$: $(3i)^4 - 2(3i)^3 + 14(3i)^2 - 18(3i) + 45 = 81 - 2(-27i) + 14(-9) - 54i + 45 = 81 + 54i - 126 - 54i + 45 = 0$. ✓

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi một đa thức bậc bốn hệ số thực có **hai cặp nghiệm liên hợp** (ví dụ $1 \pm 2i$ và $\pm 3i$), mỗi cặp cho một nhân tử bậc hai thực $z^2 - 2pz + (p^2 + q^2)$; nhân hai nhân tử bậc hai này với nhau rồi so sánh hệ số với đa thức đã cho để tìm các hệ số thực chưa biết.

A quartic may also have a conjugate pair *together with* a repeated real root, rather than two conjugate pairs; the same division method used for a cubic (dividing by the known real quadratic factor) extends naturally.

Repeated roots. If $(z - k)^2$ is a factor of a polynomial, then $z = k$ is called a **repeated root** (multiplicity 2). Whatever the mixture of real and non-real roots, the total number of roots of a degree- n polynomial, counted with multiplicity, is always exactly n .

Ví dụ mẫu · Worked example

The quartic equation $z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 16z + 8 = 0$ has real coefficients. Given that $1 + i$ is a root, find all four roots (stating any repeated root and its multiplicity).

Since the coefficients are real, $1 - i$ is also a root, giving the real quadratic factor $z^2 - 2z + 2$

(sum 2, product $1 + 1 = 2$). Let the quotient on dividing the quartic by this factor be $z^2 + az + b$:

$$z^4 - 6z^3 + 14z^2 - 16z + 8 = (z^2 - 2z + 2)(z^2 + az + b).$$

Expanding the right-hand side: $(z^2 - 2z + 2)(z^2 + az + b) = z^4 + (a - 2)z^3 + (b - 2a + 2)z^2 + (2a - 2b)z + 2b$. Comparing z^3 coefficients: $a - 2 = -6 \Rightarrow a = -4$. Comparing constant terms: $2b = 8 \Rightarrow b = 4$. Check z^2 coefficient: $b - 2a + 2 = 4 + 8 + 2 = 14$. ✓ Check z coefficient: $2a - 2b = -8 - 8 = -16$. ✓ So the quotient is $z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$, giving the repeated root $z = 2$ (multiplicity 2).

∴ roots: $1 + i$, $1 - i$, 2 , 2 (i.e. 2 repeated).

Check at $z = 2$: $2^4 - 6(2)^3 + 14(2)^2 - 16(2) + 8 = 16 - 48 + 56 - 32 + 8 = 0$. ✓

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đa thức bậc bốn hệ số thực cũng có thể có một cặp nghiệm liên hợp cùng với một nghiệm thực lặp (bội 2), thay vì hai cặp liên hợp. Cách làm giống hệt với phương trình bậc ba: chia đa thức cho nhân tử bậc hai thực (từ cặp liên hợp), rồi giải nhân tử bậc hai còn lại (thương số) để tìm hai nghiệm thực còn lại – nếu nhân tử đó là bình phương đúng $(z - k)^2$ thì đó chính là nghiệm lặp.

4.3 Modulus-Argument (Polar) Form

4.3.1 Modulus and argument; the principal value

Represent $z = x + iy$ as the point (x, y) on an **Argand diagram** (a Cartesian plane with horizontal axis $\text{Re}(z)$ and vertical axis $\text{Im}(z)$). Two further quantities describe this point using polar coordinates:

- the **modulus** $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, the distance from the origin to z ;
- the **argument** $\theta = \arg z$, the angle (measured anticlockwise as positive) between the positive real axis and the line from the origin to z .

The argument is not unique (adding any multiple of 360° , or 2π , gives the same direction), so by convention we quote the **principal argument**, the unique value satisfying

$$-180^\circ < \theta \leq 180^\circ \quad (\text{equivalently } -\pi < \theta \leq \pi).$$

To find θ , first plot the point (x, y) to identify its quadrant, compute the **reference (acute) angle** $\alpha = \arctan \left| \frac{y}{x} \right|$, and then adjust the sign/quadrant: $\theta = \alpha$ (first quadrant), $\theta = 180^\circ - \alpha$ (second), $\theta = -(180^\circ - \alpha)$ (third), $\theta = -\alpha$ (fourth).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Modulus $r = |z|$ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm z ; argument $\theta = \arg z$ là góc (dương khi ngược chiều kim đồng hồ) từ trục thực dương đến đoạn nối gốc tọa độ với z . Quy ước lấy **argument chính** trong khoảng $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$. Luôn vẽ điểm (x, y) trước để xác định đúng góc phần tư, rồi tính góc tham chiếu (góc nhọn) bằng $\arctan |y/x|$, sau đó điều chỉnh dấu/góc phần tư – **không** bấm máy tính $\arctan(y/x)$ rồi lấy luôn kết quả.

(!) **Lỗi thường gặp**: A calculator's $\arctan$ (or $\tan^{-1}$) button always returns a value in $(-90^\circ, 90^\circ)$, regardless of which quadrant z is actually in. For z in the second or third quadrant, you **must** adjust by $\pm 180^\circ$ after finding the reference angle – otherwise the argument will be off by 180° (pointing in exactly the opposite direction).

4.3.2 Conversion between Cartesian and polar form

In polar (modulus-argument) form,

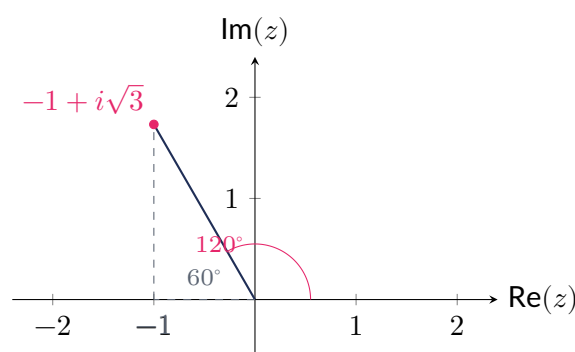
$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = r \operatorname{cis} \theta, \quad \text{where } x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Express $z = -1 + i\sqrt{3}$ in modulus-argument form.

$r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = 2$. The point $(-1, \sqrt{3})$ lies in the second quadrant. Reference angle: $\arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ$, so $\theta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

$$z = 2(\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ) = 2 \operatorname{cis} \frac{2\pi}{3}.$$



Argand diagram for $z = -1 + i\sqrt{3} = 2 \operatorname{cis} 120^\circ$: the reference angle 60° is measured from the negative real axis.

Conversely, to convert from polar back to Cartesian form, simply evaluate $r \cos \theta$ and $r \sin \theta$: for instance $4 \operatorname{cis}(-120^\circ) = 4\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -2 - 2\sqrt{3}i$, using $\cos(-120^\circ) = \cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$ and $\sin(-120^\circ) = -\sin 120^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

4.3.3 The Argand diagram

On the Argand diagram, $z = x + iy$ is plotted as the point (x, y) , or equivalently as the position vector from the origin to (x, y) . Addition of complex numbers corresponds to vector addition (parallelogram rule); the conjugate z^* is the reflection of z in the real axis; and $-z$ is the reflection of z through the origin. The modulus $|z|$ is the length of this vector, and $\arg z$ is the angle it makes with the positive real axis.

Polar form summary. For $z = x + iy = r \operatorname{cis} \theta$:

- $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} (\geq 0)$; $\theta = \arg z$, principal value $-180^\circ < \theta \leq 180^\circ$.
- $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$.
- Multiplication: $r_1 \operatorname{cis} \theta_1 \cdot r_2 \operatorname{cis} \theta_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2)$ — **moduli multiply, arguments add.**
- Division: $\frac{r_1 \operatorname{cis} \theta_1}{r_2 \operatorname{cis} \theta_2} = \frac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2)$ — **moduli divide, arguments subtract.**
- After adding/subtracting arguments, add or subtract 360° (or 2π) if necessary to return the result to the principal range.

4.3.4 Multiplication and division in polar form

The multiplication and division rules above follow from the compound-angle identities for cos and sin. Geometrically, multiplying z by $r_2 \operatorname{cis} \theta_2$ **scales** $|z|$ by the factor r_2 and **rotates** z anticlockwise about the origin by angle θ_2 ; dividing scales by $1/r_2$ and rotates by $-\theta_2$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Let $z_1 = 6 \operatorname{cis} 80^\circ$ and $z_2 = 3 \operatorname{cis}(-50^\circ)$. Find $z_1 z_2$ in polar form and convert it to exact Cartesian form, and find $\frac{z_1}{z_2}$ in polar form.

$$z_1 z_2 = (6 \times 3) \operatorname{cis}(80^\circ + (-50^\circ)) = 18 \operatorname{cis} 30^\circ = 18 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 9\sqrt{3} + 9i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{3} \operatorname{cis}(80^\circ - (-50^\circ)) = 2 \operatorname{cis} 130^\circ.$$

Geometrically, multiplying z_1 by z_2 scales its length by 3 and rotates it anticlockwise by 50° clockwise (since -50° is a clockwise rotation) about the origin.

Ví dụ mẫu · Worked example

Express $z = -3 - 3\sqrt{3}i$ in modulus-argument form.

$r = \sqrt{(-3)^2 + (-3\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 27} = \sqrt{36} = 6$. The point $(-3, -3\sqrt{3})$ lies in the **third** quadrant (both coordinates negative). Reference angle: $\arctan \frac{3\sqrt{3}}{3} = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ$, so

$$\theta = -(180^\circ - 60^\circ) = -120^\circ.$$

$$\therefore z = 6 \operatorname{cis}(-120^\circ).$$

Check: $6 \cos(-120^\circ) = 6 \left(-\frac{1}{2}\right) = -3$ and $6 \sin(-120^\circ) = 6 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3}$. ✓

Ví dụ mẫu · Worked example

The point P_0 represents $z_0 = 4$. Each successive point P_{n+1} represents $z_{n+1} = z_n(1+i)$. Find z_1, z_2, z_3, z_4 , and describe the geometric transformation that takes each point P_n to the next point P_{n+1} .

Note $1+i = \sqrt{2} \operatorname{cis} 45^\circ$, so multiplying by $1+i$ scales the modulus by $\sqrt{2}$ and rotates anticlockwise about the origin by 45° .

$$z_1 = 4(1+i) = 4+4i,$$

$$z_2 = z_1(1+i) = (4+4i)(1+i) = 4+4i+4i+4i^2 = 8i,$$

$$z_3 = z_2(1+i) = 8i(1+i) = 8i+8i^2 = -8+8i,$$

$$z_4 = z_3(1+i) = (-8+8i)(1+i) = -8-8i+8i+8i^2 = -16.$$

Each step multiplies the modulus by $\sqrt{2}$ and rotates the point 45° anticlockwise about the origin; after four steps the total rotation is $4 \times 45^\circ = 180^\circ$ and the total scale factor is $(\sqrt{2})^4 = 4$, consistent with $z_4 = -16$: $|z_4| = 4|z_0| = 16$ and $\arg z_4 = \arg z_0 + 180^\circ = 180^\circ$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

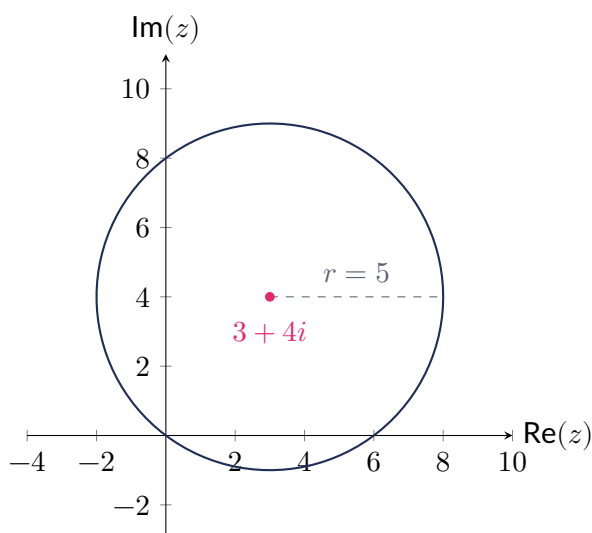
Với số phức ở góc phần tư thứ ba (cả x, y đều âm), argument chính luôn nằm trong khoảng $(-180^\circ, -90^\circ)$: tính góc tham chiếu $\arctan |y/x|$ rồi lấy $\theta = -(180^\circ - \text{góc tham chiếu})$. Khi nhân liên tiếp một điểm với một số phức cố định $w = r \operatorname{cis} \theta$, mỗi lần nhân sẽ phóng to (hoặc thu nhỏ) độ dài theo hệ số r và quay điểm quanh gốc tọa độ một góc θ (ngược chiều kim đồng hồ nếu $\theta > 0$).

4.4 Loci in the Argand Diagram

A **locus** is the set of all points z satisfying a given condition. Four standard loci appear repeatedly in Paper 3: circles, perpendicular bisectors, half-lines, and combinations/regions built from these.

4.4.1 $|z - a| = r$: circles

Since $|z - a|$ is the distance between the points representing z and a , the equation $|z - a| = r$ describes all points at a fixed distance r from a – a **circle** of centre a and radius r .



The locus $|z - 3 - 4i| = 5$ is a circle of radius 5 centred at $3 + 4i$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$|z - a| = r$ nghĩa là khoảng cách từ z đến điểm cố định a luôn bằng $r \Rightarrow$ quỹ tích là đường tròn tâm a , bán kính r . Chú ý dấu: nếu đề bài viết $|z + 3 - 2i|$, hãy viết lại thành $|z - (-3 + 2i)|$ trước khi đọc ra tâm.

(!) Lỗi thường gặp: When reading off the centre of $|z - a| = r$, watch the **sign**. For example $|z + 3 - 2i| = |z - (-3 + 2i)|$ has centre $-3 + 2i$, *not* $3 - 2i$. Always rewrite the expression inside the modulus as $z - (\text{centre})$ before identifying the centre.

4.4.2 $|z - a| = |z - b|$: perpendicular bisectors

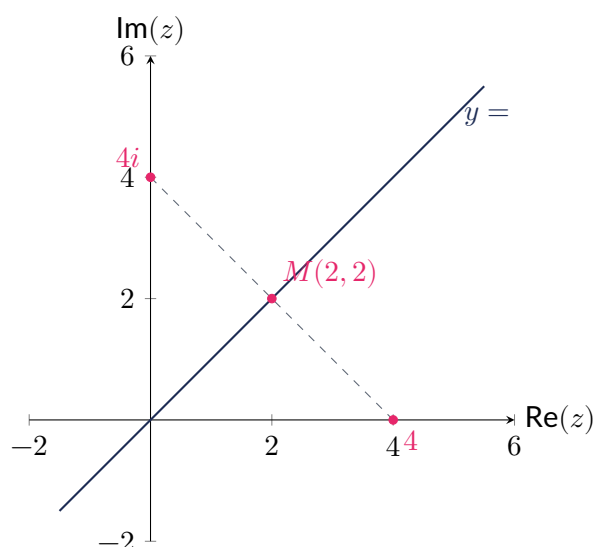
The equation $|z - a| = |z - b|$ says that z is **equidistant** from the fixed points a and b . The set of points equidistant from two fixed points is the **perpendicular bisector** of the segment joining them – a straight line through the midpoint of a and b , perpendicular to that segment.

Ví dụ mẫu · Worked example

Describe the locus $|z + 1 - 2i| = |z - 3 + 2i|$.

Rewrite: $|z - (-1 + 2i)| = |z - (3 - 2i)|$, so this is the set of points equidistant from $A(-1, 2)$ and $B(3, -2)$ – the perpendicular bisector of AB . Midpoint of AB : $\left(\frac{-1+3}{2}, \frac{2-2}{2}\right) = (1, 0)$.

Gradient of AB : $\frac{-2-2}{3-(-1)} = \frac{-4}{4} = -1$, so the perpendicular bisector has gradient 1. Equation: $y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow \boxed{y = x - 1}$.



The locus $|z - 4| = |z - 4i|$ is the perpendicular bisector of the segment joining 4 and $4i$: the line $y = x$.

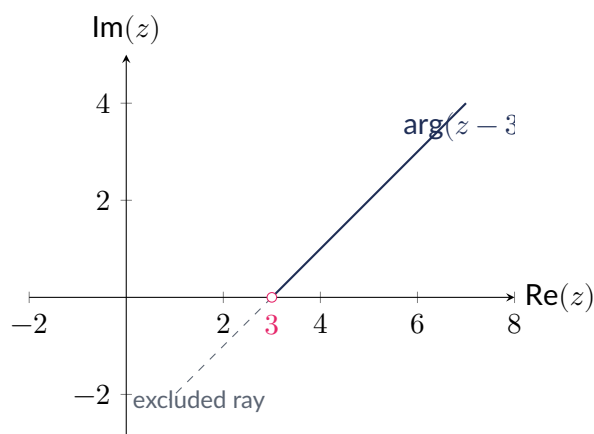
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$|z - a| = |z - b|$ nghĩa là z cách đều hai điểm cố định a và $b \Rightarrow$ quỹ tích là **đường trung trực** của đoạn nối a, b : đường thẳng đi qua trung điểm, vuông góc với đoạn đó.

4.4.3 $\arg(z - a) = \theta$: half-lines

The vector from a to z is represented by $z - a$. The condition $\arg(z - a) = \theta$ fixes the *direction* of this vector (angle θ from the positive real direction) but not its length, so the locus is a **half-line** (ray) starting at a and going in direction θ – it does **not** include the point a itself (since $\arg 0$ is undefined), and it does **not** extend in the opposite direction.



The locus $\arg(z - 3) = 45^\circ$ is the half-line from 3 (open circle, excluded) in direction 45° ; the opposite ray (dashed) is not part of the locus.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$\arg(z - a) = \theta$ nghĩa là vector từ a đến z luôn tạo góc θ với trục thực dương $\Rightarrow$ quỹ tích là một nửa đường thẳng (tia) xuất phát từ a , không lấy điểm a và không kéo dài về phía ngược lại.

(!) **Lỗi thường gặp:** $\arg(z - a) = \theta$ describes only a **half-line**, not a full line. Students often sketch the entire line through a in direction θ ; but the opposite ray has argument $\theta \pm 180^\circ$, not θ , so it must be excluded (usually drawn dashed, with an open circle at a).

4.4.4 Combined loci and inequality regions

Loci summary.

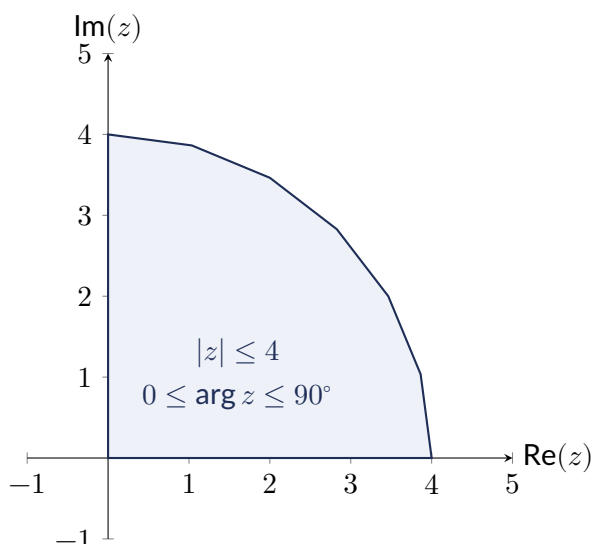
- $|z - a| = r$: circle, centre a , radius r .
- $|z - a| < r$ (or $\leq r$): the **interior** (open/closed disc) of that circle; $|z - a| > r$ is the exterior.
- $|z - a| = |z - b|$: perpendicular bisector of the segment ab .
- $\arg(z - a) = \theta$: half-line from a in direction θ (excluding a).
- Combined conditions (e.g. two inequalities, or an equation and an inequality) describe the **intersection** of the individual loci/regions.

When a question combines two conditions with "and", the required region or set of points is the **overlap** (intersection) of the two individual loci. A strict inequality ($<$) is usually drawn with a dashed boundary (not included); a non-strict inequality ($\leq$) is drawn with a solid boundary (included). Occasionally two conditions are joined by "or" instead, in which case the required set is the **union** of the two loci; the method is unchanged – sketch each locus separately first, then read off the overlap or union as required.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi đề bài nối hai điều kiện bằng "và" (and), miền cần tìm là **phần giao** (overlap) của hai quỹ tích; khi nối bằng "hoặc" (or), miền cần tìm là **phần hợp** (union). Trong cả hai trường hợp, luôn vẽ từng quỹ tích riêng lẻ trước, rồi mới xác định phần giao hay phần hợp theo yêu cầu đề bài. Đường biên vẽ nét đứt nếu bất đẳng thức nghiêm ngặt ($<$, không lấy biên) và nét liền nếu không nghiêm ngặt ($\leq$, có lấy biên).



The shaded region satisfies both $|z| \leq 4$ and $0 \leq \arg z \leq 90^\circ$ simultaneously: a quarter-disc.

Ví dụ mẫu · Worked example

The locus L_1 is $|z - 4| = |z - 4i|$ and the locus L_2 is $|z| = 4$. Find the points where L_1 meets L_2 .

L_1 is the perpendicular bisector of the segment joining 4 and $4i$; by symmetry (or by direct algebra: $(x - 4)^2 + y^2 = x^2 + (y - 4)^2 \Rightarrow -8x + 16 = -8y + 16 \Rightarrow x = y$), L_1 is the line $y = x$. L_2 is the circle $x^2 + y^2 = 16$. Substituting $y = x$: $2x^2 = 16 \Rightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$.

$$\therefore z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i \quad \text{or} \quad z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Shade the region R defined by $|z - 2 - 3i| < 4$ and $30^\circ < \arg(z - 2 - 3i) < 120^\circ$, and find the exact area of R .

The condition $|z - 2 - 3i| < 4$ describes the open disc of centre $a = 2 + 3i$ and radius 4. The condition $30^\circ < \arg(z - 2 - 3i) < 120^\circ$ restricts z to the region between the two half-lines from a at 30° and 120° . Together, R is the (open) **sector** of this disc between those two angles, with vertex at a . The angle swept by the sector is $120^\circ - 30^\circ = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ radians. The area of a sector of radius r and angle ϕ (in radians) is $\frac{1}{2}r^2\phi$, so

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(4)^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \frac{\pi}{2} = 4\pi.$$

Area of a circular sector. For a sector of a circle with radius r and angle ϕ (in radians) between two bounding radii, $\text{Area} = \frac{1}{2}r^2\phi$. A combined locus of the form $|z - a| < r$ together with $\theta_1 < \arg(z - a) < \theta_2$ always describes such a sector, of radius r and angle $\phi = \theta_2 - \theta_1$ (converted to radians), with vertex at a .

Ví dụ mẫu · Worked example

Describe the region satisfying $2 < |z - 3 - 2i| \leq 5$, and find its exact area.

Both conditions concern distance from the fixed centre $a = 3 + 2i$: the region consists of all

points strictly more than 2 from a , but at most 5 from a . This is an **annulus** (ring-shaped region) between the circle of radius 2 (excluded) and the circle of radius 5 (included), both centred at $3 + 2i$. The area of an annulus between radii $r_1 < r_2$ is the difference of the two disc areas:

$$\text{Area} = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(5^2 - 2^2) = \pi(25 - 4) = 21\pi.$$

Since the inner boundary ($|z - 3 - 2i| = 2$) is strictly excluded but the outer boundary ($|z - 3 - 2i| = 5$) is included, only the outer circle forms part of R itself; the inner circle is drawn dashed and is not part of R .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi hai điều kiện $|z - a| < r$ và $\theta_1 < \arg(z - a) < \theta_2$ xuất hiện cùng lúc, miền thoả mãn cả hai là một **hình quạt** của hình tròn tâm a bán kính r , giới hạn bởi hai nửa đường thẳng xuất phát từ a ở các góc θ_1, θ_2 . Diện tích hình quạt tính theo công thức $\frac{1}{2}r^2\phi$ với $\phi = \theta_2 - \theta_1$ đổi sang **radian**. Khi hai điều kiện là $r_1 < |z - a| \leq r_2$ (hai bán kính khác nhau, cùng tâm), miền thoả mãn là một **hình vành khăn**, diện tích $= \pi r_2^2 - \pi r_1^2$.

4.4.5 Greatest and least values of $|z|$ and $\arg z$

A very common exam question gives a locus (typically a circle $|z - a| = r$) and asks for the greatest or least possible value of $|z|$ (distance from the origin) or of $\arg z$ for points z on that locus. Both are solved by pure geometry, not algebra.

Greatest/least $|z|$: the point on the circle closest to (respectively farthest from) the origin O lies on the straight line through O and the centre $C = a$. If O is outside the circle (i.e. $|a| > r$),

$$|z|_{\min} = |a| - r, \quad |z|_{\max} = |a| + r.$$

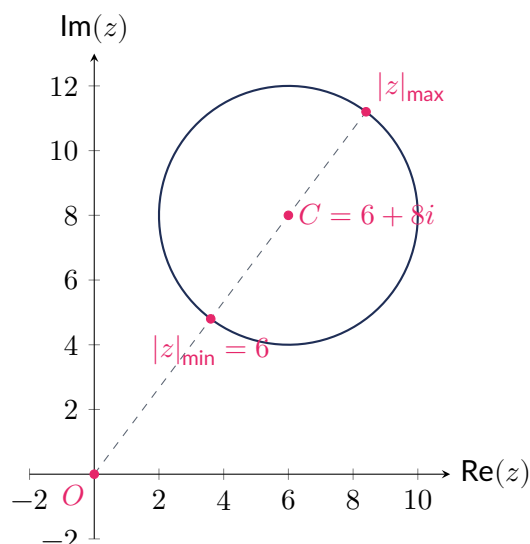
Greatest/least $\arg z$: if the circle does not contain the origin, the extreme values of $\arg z$ occur where the two tangent lines from O touch the circle. In the right-angled triangle formed by O , the centre C , and a point of tangency T (with the right angle at T , since a radius is perpendicular to a tangent), $\sin \alpha = \frac{r}{|a|}$ where α is the angle $\angle TOC$; the extreme arguments are then $\arg a \pm \alpha$.

Ví dụ mẫu · Worked example

For points z satisfying $|z - 6 - 8i| = 4$, find the greatest and least possible values of $|z|$.

Centre $a = 6 + 8i$, so $|a| = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$; radius $r = 4$. Since $|a| = 10 > r = 4$, the origin lies outside the circle, so:

$$|z|_{\max} = |a| + r = 10 + 4 = 14, \quad |z|_{\min} = |a| - r = 10 - 4 = 6.$$



The extreme values of $|z|$ on the circle $|z - 6 - 8i| = 4$ occur where the line OC meets the circle.

Ví dụ mẫu · Worked example

Points z satisfy $|z - 8| = 4$. Find the greatest and least values of $\arg z$, in degrees.

Centre $a = 8$ (on the positive real axis, so $\arg a = 0^\circ$), radius $r = 4$; $|a| = 8 > 4$, so the origin is outside the circle. Let T be a point of tangency from O ; in right triangle OCT (right angle at T),

$$\sin \alpha = \frac{CT}{OC} = \frac{r}{|a|} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

By symmetry about the real axis, the greatest value of $\arg z$ is $0^\circ + 30^\circ = 30^\circ$ and the least value is $0^\circ - 30^\circ = -30^\circ$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với quỹ tích là đường tròn không chứa gốc tọa độ: (1) $|z|$ lớn nhất/nhỏ nhất đạt được tại giao điểm của đường thẳng nối O và tâm C với đường tròn – giá trị là $|a| \pm r$; (2) $\arg z$ lớn nhất/nhỏ nhất đạt được tại tiếp điểm của hai tiếp tuyến kẻ từ O đến đường tròn, dùng tam giác vuông (góc vuông tại tiếp điểm) với $\sin \alpha = r/|a|$, rồi giá trị cực trị là $\arg a \pm \alpha$.

4.4.6 Least distance from a fixed point to a half-line or perpendicular-bisector locus

When the locus itself is a straight line (a perpendicular bisector) or a half-line ($\arg(z - a) = \theta$) rather than a circle, the least distance from a fixed external point B to a point z on that locus is found using **perpendicular distance**: it is the shortest distance from B to the line containing the locus, *provided* the foot of the perpendicular actually lies on the included part of the locus (the ray itself, not the excluded opposite ray).

Perpendicular (shortest) distance from a point to a line. For a line with Cartesian equation $ax + by + c = 0$, the shortest distance from the point (x_0, y_0) to that line is

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

This formula applies directly to a perpendicular-bisector locus (already a full line). For a half-line locus $\arg(z - a) = \theta$, apply the formula to the underlying full line, then check that the foot of the perpendicular lies on the included ray before accepting the result as the true minimum.

Ví dụ mẫu · Worked example

Points z satisfy $\arg(z - 1) = 45^\circ$. Find the least possible value of $|z - 4|$, and state the complex number at which this least value occurs.

The locus is the half-line from $A(1, 0)$ in direction 45° , i.e. the ray $y = x - 1$ with $x \geq 1$ (equivalently $x - y - 1 = 0$, $x \geq 1$), excluding A itself. We want the least distance from the fixed point $B(4, 0)$ to a point on this ray. The perpendicular distance from B to the full line $x - y - 1 = 0$ is

$$d = \frac{|4 - 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

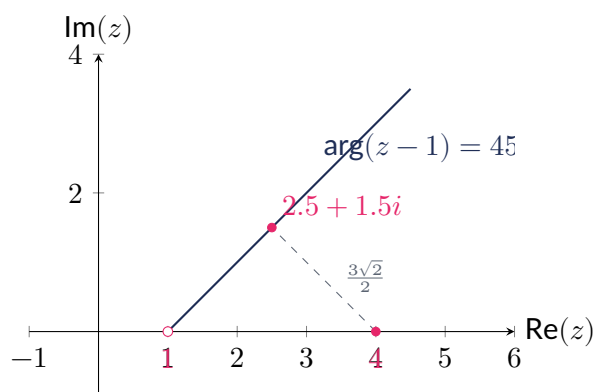
To confirm this minimum is attained on the half-line, find the foot of the perpendicular. Using the unit direction vector of the ray, $(\cos 45^\circ, \sin 45^\circ) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$, and $\overrightarrow{AB} = (3, 0)$, the projection of $\overrightarrow{AB}$ onto this direction is

$$t = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} > 0,$$

so the foot lies in the direction of increasing t from A – i.e. on the included ray. The foot is

$$A + t \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (1, 0) + \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

$$\therefore |z - 4|_{\min} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \text{occurring at } z = \frac{5}{2} + \frac{3}{2}i.$$



The least value of $|z - 4|$ on the half-line $\arg(z - 1) = 45^\circ$ occurs at the foot of the perpendicular from 4, at $z = 2.5 + 1.5i$.

(!) Lỗi thường gặp: The perpendicular-distance shortcut only gives the correct minimum when the foot of the perpendicular lies on the **included** part of the locus. If the projection parameter t (measured from the vertex a , in the direction of the half-line) comes out **negative**, the foot lies on the excluded opposite ray, and the minimum distance must instead be investigated near the vertex a (approached but not necessarily attained, since a itself is excluded) or by comparing points directly.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi quỹ tích là một **đường thẳng** (trung trực) hoặc **nửa đường thẳng** (tia từ $\arg(z - a) = \theta$) chứ không phải đường tròn, khoảng cách ngắn nhất từ một điểm cố định B đến quỹ tích chính là khoảng cách vuông góc từ B đến đường thẳng chứa quỹ tích đó – với điều kiện chân đường vuông góc thực sự nằm trên phần tia được lấy (kiểm tra bằng dấu của tham số chiếu t).

Ví dụ mẫu · Worked example

Points z lie on the perpendicular bisector of the segment joining 6 and $2i$. Find the least possible value of $|z|$.

The bisector is equidistant from $(6, 0)$ and $(0, 2)$: midpoint $\left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+2}{2}\right) = (3, 1)$; gradient of the segment $= \frac{2-0}{0-6} = -\frac{1}{3}$, so the bisector has gradient 3 (negative reciprocal). Equation: $y - 1 = 3(x - 3) \Rightarrow y = 3x - 8$, i.e. $3x - y - 8 = 0$. Since this locus is a full line (not merely a half-line), the least value of $|z|$ for z on it is simply the perpendicular distance from the origin $O(0, 0)$ to the line:

$$|z|_{\min} = \frac{|3(0) - 0 - 8|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{10}} = \frac{8\sqrt{10}}{10} = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$$

In every extremal-distance question, first sketch the locus to decide which method applies: pure circle geometry (line through the centre, or tangents from the fixed point) when the locus is a circle, or the perpendicular-distance formula when the locus is a straight line or half-line.

4.5 Chapter Practice Problems

A. Cartesian form and arithmetic

Bài tập luyện tập

Simplify $(2 - i)^2 - (1 + i)(1 - i)$.

(A) $1 - 4i$ (C) $1 + 4i$ (B) $3 - 4i$ (D) $-1 - 4i$

Lời giải chi tiết

$(2 - i)^2 = 4 - 4i + i^2 = 4 - 4i - 1 = 3 - 4i$. $(1 + i)(1 - i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$. Result: $(3 - 4i) - 2 = 1 - 4i$. (A).

Bài tập luyện tập

If $z = 2 - 3i$, find zz^* .

(A) 13

(C) 5

(B) -13 (D) $13i$

Lời giải chi tiết

$zz^* = |z|^2 = 2^2 + (-3)^2 = 4 + 9 = 13$. (A).

Bài tập luyện tập

Express $\frac{4 + 3i}{1 - 2i}$ in the form $a + bi$.

Lời giải chi tiết

Multiply by the conjugate: $\frac{(4+3i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{4+8i+3i+6i^2}{1+4} = \frac{4+11i-6}{5} = \frac{-2+11i}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$.

Bài tập luyện tập

Find real numbers x and y such that $(x+yi)(2-i) = 8+i$.

Lời giải chi tiết

Expand: $(x+yi)(2-i) = (2x+y) + i(2y-x)$. Equate: $2x+y=8$, $2y-x=1 \Rightarrow x=2y-1$. Substitute: $2(2y-1)+y=8 \Rightarrow 5y=10 \Rightarrow y=2$, $x=3$. Check: $(3+2i)(2-i) = 6-3i+4i+2 = 8+i$. $\therefore x=3$, $y=2$.

Bài tập luyện tập

Simplify i^{15} .

(A) $-i$

(C) 1

(B) i

(D) -1

Lời giải chi tiết

Powers of i cycle with period 4: $15 = 4(3) + 3$, so $i^{15} = i^3 = -i$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the square roots of $-5+12i$.

Lời giải chi tiết

Let $a+ib$ be a square root, $a, b \in \mathbb{R}$. Then $a^2-b^2 = -5$ and $2ab = 12 \Rightarrow b = 6/a$. Substituting: $a^2 - 36/a^2 = -5 \Rightarrow a^4 + 5a^2 - 36 = 0$. Let $u = a^2$: $u^2 + 5u - 36 = 0 \Rightarrow u = \frac{-5 \pm \sqrt{25+144}}{2} = \frac{-5 \pm 13}{2} \Rightarrow u = 4$ or $u = -9$ (rejected, as $u \geq 0$). So $a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$; if $a = 2$, $b = 3$; if $a = -2$, $b = -3$. Square roots: $\pm(2+3i)$. Check: $(2+3i)^2 = 4+12i-9 = -5+12i$. ✓

Bài tập luyện tập

Express $(1-i)^4$ in the form $a+bi$.

(A) -4

(C) $4i$

(B) 4

(D) $-4i$

Lời giải chi tiết

$(1-i)^2 = 1-2i+i^2 = -2i$. $(1-i)^4 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$. (A).

Bài tập luyện tập

Simplify $(3 + i)^2 - (2 - i)(2 + i)$.

(A) $3 + 6i$

(C) $-3 + 6i$

(B) $3 - 6i$

(D) $13 + 6i$

Lời giải chi tiết

$(3 + i)^2 = 9 + 6i + i^2 = 8 + 6i$. $(2 - i)(2 + i) = 4 - i^2 = 5$. Result: $(8 + 6i) - 5 = 3 + 6i$. (A).

Bài tập luyện tập

Express $\frac{5 - 2i}{3 + 4i}$ in the form $a + bi$.

Lời giải chi tiết

Multiply by the conjugate: $\frac{(5 - 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{15 - 20i - 6i + 8i^2}{9 + 16} = \frac{15 - 26i - 8}{25} = \frac{7 - 26i}{25} = \frac{7}{25} - \frac{26}{25}i$.

Bài tập luyện tập

Solve the simultaneous equations $z + w = 5 + 3i$ and $2z - w = 1 + 9i$ for the complex numbers z and w .

Lời giải chi tiết

Adding the equations: $3z = (5 + 3i) + (1 + 9i) = 6 + 12i \Rightarrow z = 2 + 4i$. Substituting: $w = (5 + 3i) - z = (5 + 3i) - (2 + 4i) = 3 - i$. Check: $2z - w = (4 + 8i) - (3 - i) = 1 + 9i$. ✓
∴ $z = 2 + 4i$, $w = 3 - i$.

B. Complex roots of polynomials**Bài tập luyện tập**

Solve $z^2 + 2z + 5 = 0$.

(A) $-1 \pm 2i$

(C) $-2 \pm i$

(B) $1 \pm 2i$

(D) $2 \pm i$

Lời giải chi tiết

$\Delta = 4 - 20 = -16$. $z = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $z^2 + 4z + 13 = 0$.

Lời giải chi tiết

$$\Delta = 16 - 52 = -36. z = \frac{-4 \pm 6i}{2} = -2 \pm 3i.$$

Bài tập luyện tập

One root of $2z^2 + pz + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) is $3 - i$. Find p and q .

(A) $p = -12, q = 20$

(C) $p = -12, q = 10$

(B) $p = 12, q = 20$

(D) $p = 6, q = 10$

Lời giải chi tiết

Other root $3 + i$. Sum $= 6 = -\frac{p}{2} \Rightarrow p = -12$. Product $= (3 - i)(3 + i) = 9 + 1 = 10 = \frac{q}{2} \Rightarrow q = 20$. (A).

Bài tập luyện tập

Given that $z^3 - 6z^2 + 21z - 26 = 0$ has root $2 + 3i$, find the other two roots.

Lời giải chi tiết

Since coefficients are real, $2 - 3i$ is also a root, giving quadratic factor $z^2 - 4z + 13$ (sum 4, product $4 + 9 = 13$). Let the third root be r : comparing constant terms, $(z^2 - 4z + 13)(z - r)$ has constant term $-13r$, so $-13r = -26 \Rightarrow r = 2$. Check z^2 coefficient: $-(r + 4) = -6 \Rightarrow r = 2$. ✓ Roots: $2 + 3i, 2 - 3i, 2$.

Bài tập luyện tập

A cubic equation with real coefficients has roots 5 and $1 + 2i$ (and its conjugate). Which of the following is the cubic, in expanded form?

(A) $z^3 - 7z^2 + 15z - 25 = 0$

(C) $z^3 - 7z^2 - 15z - 25 = 0$

(B) $z^3 + 7z^2 + 15z - 25 = 0$

(D) $z^3 - 7z^2 + 15z + 25 = 0$

Lời giải chi tiết

Pair $1 \pm 2i$: sum 2, product $1 + 4 = 5 \Rightarrow z^2 - 2z + 5$. Cubic $= (z - 5)(z^2 - 2z + 5) = z^3 - 2z^2 + 5z - 5z^2 + 10z - 25 = z^3 - 7z^2 + 15z - 25$. (A).

Bài tập luyện tập

The cubic $z^3 + pz^2 + qz + 50 = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) has root $1 + 3i$. Find p, q , and the third root.

Lời giải chi tiết

Conjugate $1 - 3i$ is also a root: sum 2, product $1 + 9 = 10$, giving factor $z^2 - 2z + 10$. Let third root $= r$: $(z^2 - 2z + 10)(z - r) = z^3 - (r + 2)z^2 + (2r + 10)z - 10r$. Constant term: $-10r = 50 \Rightarrow r = -5$. Then $p = -(r + 2) = -(-5 + 2) = 3$, and $q = 2r + 10 = 2(-5) + 10 = 0$.
 $\therefore p = 3, q = 0$, third root $= -5$.

Bài tập luyện tập

Find, in expanded form, a quartic equation with real coefficients having roots $2+i$, $2-i$, $-1+3i$, $-1-3i$.

Lời giải chi tiết

Pair $2 \pm i$: sum 4, product $4 + 1 = 5 \Rightarrow z^2 - 4z + 5$. Pair $-1 \pm 3i$: sum -2 , product $1 + 9 = 10 \Rightarrow z^2 + 2z + 10$. Multiply:

$$\begin{aligned}(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 2z + 10) &= z^4 + 2z^3 + 10z^2 - 4z^3 - 8z^2 - 40z + 5z^2 + 10z + 50 \\ &= z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 30z + 50.\end{aligned}$$

So $z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 30z + 50 = 0$.

Bài tập luyện tập

Solve $z^2 - 8z + 25 = 0$.

(A) $4 \pm 3i$

(C) $4 \pm 5i$

(B) $-4 \pm 3i$

(D) $8 \pm 3i$

Lời giải chi tiết

$$\Delta = 64 - 100 = -36. \quad z = \frac{8 \pm 6i}{2} = 4 \pm 3i. \quad \text{(A).}$$

Bài tập luyện tập

One root of $z^2 + pz + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) is $5 + 2i$. Find p and q .

Lời giải chi tiết

Other root $5 - 2i$. Sum $= 10 = -p \Rightarrow p = -10$. Product $= (5 + 2i)(5 - 2i) = 25 + 4 = 29 = q$.
 $\therefore p = -10, q = 29$.

Bài tập luyện tập

Given that $z^3 - 5z^2 + 11z - 15 = 0$ has root $1 + 2i$, find the other two roots.

Lời giải chi tiết

Since coefficients are real, $1 - 2i$ is also a root, giving quadratic factor $z^2 - 2z + 5$ (sum 2, product $1 + 4 = 5$). Let the third root be r : $(z^2 - 2z + 5)(z - r) = z^3 - (r + 2)z^2 + (2r + 5)z - 5r$. Comparing constant terms: $-5r = -15 \Rightarrow r = 3$. Check z^2 coefficient: $-(r + 2) = -5 \Rightarrow r = 3$. ✓ Check z coefficient: $2r + 5 = 11 \Rightarrow r = 3$. ✓ Roots: $1 + 2i$, $1 - 2i$, 3 .

Bài tập luyện tập

A quartic equation with real coefficients has roots 3 , -2 , and the conjugate pair $1 \pm i$. Which of the following is the equation in expanded form?

(A) $z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 10z - 12 = 0$

(C) $z^4 - 3z^3 + 2z^2 + 10z - 12 = 0$

(B) $z^4 + 3z^3 - 2z^2 + 10z - 12 = 0$

(D) $z^4 - 3z^3 - 2z^2 - 10z - 12 = 0$

Lời giải chi tiết

Pair $1 \pm i$: sum 2, product $1 + 1 = 2 \Rightarrow z^2 - 2z + 2$. Roots 3, -2: $(z - 3)(z + 2) = z^2 - z - 6$.
Multiplying:

$$(z^2 - 2z + 2)(z^2 - z - 6) = z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 10z - 12.$$

(A).

C. Modulus-argument (polar) form**Bài tập luyện tập**

Simplify $4 \operatorname{cis} \frac{5\pi}{6} \div 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{3}$, giving the answer in Cartesian form.

(A) $2i$

(C) 2

(B) $-2i$

(D) -2

Lời giải chi tiết

Modulus $\frac{4}{2} = 2$; argument $\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$. Result $= 2 \operatorname{cis} \frac{\pi}{2} = 2(0 + i) = 2i$. (A).

Bài tập luyện tập

Express $z = 1 - i\sqrt{3}$ in modulus-argument form, with the argument in the principal range (radians).

Lời giải chi tiết

$r = \sqrt{1 + 3} = 2$. Point $(1, -\sqrt{3})$ is in the fourth quadrant; reference angle $\arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = 60^\circ$, so
 $\theta = -60^\circ = -\frac{\pi}{3}$. $z = 2 \operatorname{cis} \left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

Bài tập luyện tập

Which of the following gives the modulus and principal argument of $z = -4$?

(A) $r = 4, \theta = \pi$

(C) $r = -4, \theta = \pi$

(B) $r = 4, \theta = 0$

(D) $r = 4, \theta = \frac{\pi}{2}$

Lời giải chi tiết

$z = -4$ lies on the negative real axis, distance 4 from O , so $r = 4$ and $\theta = 180^\circ = \pi$. (A).

Bài tập luyện tập

$z_1 = 6 \operatorname{cis} 80^\circ$, $z_2 = 3 \operatorname{cis}(-50^\circ)$. Find $z_1 z_2$ in exact Cartesian form.

Lời giải chi tiết

$$z_1 z_2 = 18 \operatorname{cis}(80^\circ - 50^\circ) = 18 \operatorname{cis} 30^\circ = 18 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 9\sqrt{3} + 9i.$$

Bài tập luyện tập

The complex number z has modulus 3 and argument $\frac{5\pi}{6}$. Express z in Cartesian form.

(A) $-\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

(C) $-\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

(B) $\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

(D) $\frac{3}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}i$

Lời giải chi tiết

$$\cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 150^\circ = \frac{1}{2}. \quad z = 3 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i. \quad \text{(A)}$$

Bài tập luyện tập

Express $z = 5 \operatorname{cis}(-90^\circ)$ in Cartesian form.

(A) $-5i$

(C) 5

(B) $5i$

(D) -5

Lời giải chi tiết

$$\cos(-90^\circ) = 0, \sin(-90^\circ) = -1. \quad z = 5(0 - i) = -5i. \quad \text{(A)}$$

Bài tập luyện tập

If $z_1 = 8 \operatorname{cis} 160^\circ$ and $z_2 = 2 \operatorname{cis}(-95^\circ)$, find $\frac{z_1}{z_2}$ in modulus-argument form, with argument in the principal range.

Lời giải chi tiết

Modulus: $8/2 = 4$. Argument: $160^\circ - (-95^\circ) = 255^\circ$, which exceeds 180° , so subtract 360° : $255^\circ - 360^\circ = -105^\circ$. $\frac{z_1}{z_2} = 4 \operatorname{cis}(-105^\circ)$.

Bài tập luyện tập

Simplify $5 \operatorname{cis} 100^\circ \times 4 \operatorname{cis}(-40^\circ)$, giving the answer in Cartesian form.

(A) $10 + 10\sqrt{3}i$

(C) $20 + 20i$

(B) $10 - 10\sqrt{3}i$

(D) $-10 + 10\sqrt{3}i$

Lời giải chi tiết

Modulus $5 \times 4 = 20$; argument $100^\circ + (-40^\circ) = 60^\circ$. Result $= 20 \operatorname{cis} 60^\circ = 20 \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 10 + 10\sqrt{3}i$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Express $z = -4 - 4i$ in modulus-argument form, with the argument in degrees.

Lời giải chi tiết

$r = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$. The point $(-4, -4)$ is in the third quadrant; reference angle $\arctan \frac{4}{4} = 45^\circ$, so $\theta = -(180^\circ - 45^\circ) = -135^\circ$. $z = 4\sqrt{2} \operatorname{cis}(-135^\circ)$.

Bài tập luyện tập

Express $z = -5 - 12i$ in modulus-argument form, giving the argument in degrees correct to 1 decimal place.

Lời giải chi tiết

$r = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13$. The point $(-5, -12)$ is in the third quadrant; reference angle $\arctan \frac{12}{5} \approx 67.4^\circ$, so $\theta \approx -(180^\circ - 67.4^\circ) = -112.6^\circ$. $z \approx 13 \operatorname{cis}(-112.6^\circ)$.

Bài tập luyện tập

If $z_1 = 2 \operatorname{cis}(-160^\circ)$ and $z_2 = 5 \operatorname{cis} 70^\circ$, find $\frac{z_1}{z_2}$ in modulus-argument form, with argument in the principal range.

(A) $0.4 \operatorname{cis} 130^\circ$ **(C)** $2.5 \operatorname{cis} 130^\circ$ **(B)** $0.4 \operatorname{cis}(-230^\circ)$ **(D)** $0.4 \operatorname{cis}(-130^\circ)$ **Lời giải chi tiết**

Modulus $= 2/5 = 0.4$. Argument $= -160^\circ - 70^\circ = -230^\circ$, which is below -180° , so add 360° : $-230^\circ + 360^\circ = 130^\circ$. $\frac{z_1}{z_2} = 0.4 \operatorname{cis} 130^\circ$. **(A)**.

D. Loci in the Argand diagram**Bài tập luyện tập**

Describe the locus $|z - 3 - 4i| = |z + 1 - 2i|$.

Lời giải chi tiết

This is the set of points equidistant from $3 + 4i$ and $-1 + 2i$, i.e. the perpendicular bisector of the segment joining $A(3, 4)$ and $B(-1, 2)$. Midpoint $= \left(\frac{3-1}{2}, \frac{4+2}{2} \right) = (1, 3)$; gradient of

$$AB = \frac{2-4}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}, \text{ so the bisector has gradient } -2. \text{ Equation: } y-3 = -2(x-1) \Rightarrow y = -2x+5.$$

Bài tập luyện tập

Describe fully the locus $|z+2-i|=3$.

Lời giải chi tiết

Rewrite as $|z-(-2+i)|=3$: a circle, centre $(-2, 1)$, radius 3.

Bài tập luyện tập

Sketch and describe the region $|z-1-i|\leq 2$.

Lời giải chi tiết

Rewrite as $|z-(1+i)|\leq 2$: this is the closed disc (interior together with the boundary circle) of centre $(1, 1)$ and radius 2 – all points whose distance from $(1, 1)$ is at most 2.

Bài tập luyện tập

Which statement correctly describes the locus $\arg(z-3) = \frac{\pi}{4}$?

- (A) Half-line from $(3, 0)$ at 45° to the positive real direction, excluding $(3, 0)$ (C) Half-line from the origin at 45°
 (B) The full circle centre $(3, 0)$ (D) The perpendicular bisector of 0 and 3

Lời giải chi tiết

$\arg(z-3) = \pi/4$ fixes the direction of the vector from 3 to z at 45° ; the point 3 itself is excluded and the locus does not extend backwards. (A).

Bài tập luyện tập

Find the Cartesian equation, in the form $y = mx + c$, of the perpendicular bisector locus $|z-4| = |z+2i|$.

Lời giải chi tiết

$|z-4| = |z-(-2i)|$: equidistant from $(4, 0)$ and $(0, -2)$. Algebraically: $(x-4)^2 + y^2 = x^2 + (y+2)^2 \Rightarrow -8x + 16 = 4y + 4 \Rightarrow y = -2x + 3$.

Bài tập luyện tập

For points z on the locus $|z|=6$, find the greatest and least possible values of $|z-8|$.

- (A) max 14, min 2 (C) max 8, min 2
 (B) max 14, min 6 (D) max 2, min 14

Lời giải chi tiết

The fixed point 8 is at distance 8 from O ; the circle has radius 6 centred at O . Since $8 > 6$, the point 8 lies outside the circle, so $\max |z - 8| = 8 + 6 = 14$ and $\min |z - 8| = 8 - 6 = 2$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

For points z satisfying $|z - 5| = 3$, find the greatest and least possible values of $\arg z$, correct to one decimal place.

Lời giải chi tiết

Centre $a = 5$ (so $\arg a = 0^\circ$), radius 3; $|a| = 5 > 3$. Tangent half-angle: $\sin \alpha = \frac{3}{5} = 0.6 \Rightarrow \alpha = 36.87^\circ$. Greatest $\arg z \approx 36.9^\circ$; least $\arg z \approx -36.9^\circ$.

Bài tập luyện tập

The locus L_1 is $|z - 4| = |z - 4i|$ and the locus L_2 is $|z| = 4$. Find the points of intersection of L_1 and L_2 .

Lời giải chi tiết

L_1 : equidistant from 4 and $4i \Rightarrow y = x$. L_2 : $x^2 + y^2 = 16$. Substituting: $2x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$. Intersection points: $z = 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$ and $z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$.

Bài tập luyện tập

Describe the locus $|z - 2| = |z + 2|$, and hence state which axis it coincides with.

Lời giải chi tiết

Equidistant from 2 and -2 : the perpendicular bisector of the segment joining $(2, 0)$ and $(-2, 0)$, which passes through the origin $(0, 0)$ perpendicular to the real axis. This is exactly the **imaginary axis**, $x = 0$.

Bài tập luyện tập

Describe the locus $|z - 3 + 4i| = 6$.

(A) Circle, centre $(3, -4)$, radius 6

(C) Circle, centre $(3, 4)$, radius 6

(B) Circle, centre $(-3, 4)$, radius 6

(D) Perpendicular bisector of $3 - 4i$ and the origin

Lời giải chi tiết

Rewrite as $|z - (3 - 4i)| = 6$: a circle, centre $(3, -4)$, radius 6. **(A)**.

Bài tập luyện tập

For points z satisfying $|z - (2 + 5i)| = 3$, find the greatest and least possible values of $|z|$.

Lời giải chi tiết

Centre $a = 2 + 5i$, so $|a| = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$; radius $r = 3$. Since $\sqrt{29} \approx 5.39 > 3$, the origin lies outside the circle, so $|z|_{\max} = \sqrt{29} + 3$ and $|z|_{\min} = \sqrt{29} - 3$.

Bài tập luyện tập

Points z satisfy $\arg(z - 2) = 60^\circ$. Find the least possible value of $|z - 7|$, and state the complex number at which this least value occurs.

Lời giải chi tiết

The locus is the half-line from $A(2, 0)$ in direction 60° , i.e. the line $\sqrt{3}x - y - 2\sqrt{3} = 0$ with $x \geq 2$. The perpendicular distance from $B(7, 0)$ to this line is

$$d = \frac{|\sqrt{3}(7) - 0 - 2\sqrt{3}|}{\sqrt{3 + 1}} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Using the unit direction $(\cos 60^\circ, \sin 60^\circ) = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ and $\overline{AB} = (5, 0)$, the projection $t = 5 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2} > 0$, so the foot of the perpendicular lies on the included ray, at $A + t(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}) = (2 + \frac{5}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{4}) = (\frac{13}{4}, \frac{5\sqrt{3}}{4})$.

$$\therefore |z - 7|_{\min} = \frac{5\sqrt{3}}{2}, \quad \text{occurring at } z = \frac{13}{4} + \frac{5\sqrt{3}}{4}i.$$

Ôn tập nhanh. (1) $i^2 = -1$; nhân/chia số phức như đa thức, chia thì nhân với liên hợp của mẫu. (2) Đa thức hệ số **thực**: nghiệm phức luôn đi theo cặp liên hợp $p \pm qi$ — dùng tổng $2p$ và tích $p^2 + q^2$ để dựng nhân tử bậc hai. (3) Dạng cực $z = r \operatorname{cis} \theta$: nhân thì nhân môđun cộng argument, chia thì chia môđun trừ argument; luôn đưa argument về khoảng $(-180^\circ, 180^\circ]$. (4) Quỹ tích: $|z - a| = r$ là đường tròn, $|z - a| = |z - b|$ là trung trực, $\arg(z - a) = \theta$ là nửa đường thẳng; bài toán GTLN/GTNN của $|z|$ hay $\arg z$ luôn giải bằng hình học (đường thẳng qua tâm, hoặc tiếp tuyến từ gốc toạ độ), không phải đại số thuần túy.

Mechanics

Mục tiêu Unit: Động học chuyển động thẳng (suvat, đồ thị $v-t$, chuyển động với gia tốc biến thiên dùng đạo hàm/tích phân, hành trình nhiều giai đoạn); lực và cân bằng (sơ đồ lực, phân tích lực thành hai thành phần, mặt phẳng nghiêng, ma sát giới hạn); định luật Newton và hệ vật nối (ròng rọc, mặt phẳng nghiêng có ma sát, đoàn tàu nhiều toa, thang máy); động lượng, va chạm (kể cả va chạm dính vào nhau) và xung lượng; công, năng lượng và công suất (bao gồm công suất và tốc độ tối đa của xe khi lực kéo cân bằng lực cản). Trong toàn bộ chương này lấy $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ theo đúng quy ước Cambridge (mức A Level, Paper 4) – không dùng 9.81 hay 10.

5.1 Kinematics of Motion in a Straight Line

5.1.1 The suvat equations

For motion in a straight line with **constant** acceleration a , starting velocity u , velocity v at time t , and displacement s , the four standard equations (suvat equations) are derived from the definition of acceleration and the area under a velocity–time graph.

$$v = u + at, \quad s = ut + \frac{1}{2}at^2, \quad v^2 = u^2 + 2as, \quad s = \frac{1}{2}(u + v)t.$$

The first equation follows directly from $a = \frac{v-u}{t}$. Substituting $v = u + at$ into $s = \frac{1}{2}(u + v)t$ (the area of a trapezium under a $v-t$ graph) gives $s = ut + \frac{1}{2}at^2$; eliminating t between $v = u + at$ and $s = \frac{1}{2}(u + v)t$ gives $v^2 = u^2 + 2as$. In any problem, list the five quantities s, u, v, a, t , mark the three that are known and the one required, then choose the equation that does not involve the fifth (unused) quantity. For motion under gravity alone (free fall, projectile drop), take the acceleration to be $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ directed vertically downward.

(!) Lỗi thường gặp: Cambridge International A Level Mechanics (Paper 4) uses $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ throughout – not $g = 9.81$ (the more precise value used in some other syllabuses) and not the convenient approximation $g = 10$ used at IGCSE level. Using the wrong value of g will shift every numerical answer in a kinematics-with-gravity, connected-particle, or energy question, even when the method is entirely correct. Always substitute $g = 9.8$ unless a question explicitly states a different value.

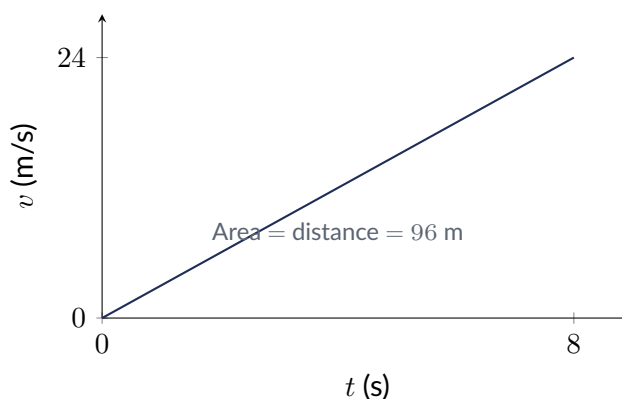
5.1.2 Velocity–time and displacement–time graphs

On a **velocity–time graph**, the **gradient** at any instant equals the acceleration at that instant, and the (signed) **area** between the graph and the t -axis over an interval equals the displacement over that interval; if the graph dips below the axis, the area there counts as negative displacement (but positive distance). On a **displacement–time graph**, the gradient at any instant equals the velocity at that instant.

Ví dụ mẫu · Worked example

A car accelerates uniformly from rest to 24 m/s in 8 s. Find the acceleration and the distance travelled.

$$a = \frac{24 - 0}{8} = 3 \text{ m/s}^2. \quad s = \frac{1}{2}(u + v)t = \frac{1}{2}(24)(8) = 96 \text{ m}.$$



Velocity-time graph: uniform acceleration from rest to 24 m/s in 8 s.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trên đồ thị $v-t$: **độ dốc (gradient)** chính là gia tốc; **diện tích** giữa đồ thị và trục t chính là quãng đường (hoặc độ dịch chuyển nếu tính có dấu). Trên đồ thị $s-t$: độ dốc chính là vận tốc. Nếu đồ thị $v-t$ đi xuống dưới trục t (vận tốc âm), diện tích phần đó tính là **độ dịch chuyển âm** nhưng vẫn cộng dương vào **quãng đường đi được**.

5.1.3 Motion with variable acceleration: calculus

When acceleration is not constant, the suvat equations no longer apply, and calculus must be used to relate displacement, velocity and acceleration, each defined as a rate of change of the previous quantity with respect to time t :

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad v = \frac{ds}{dt}, \quad v = \int a \, dt \text{ (using an initial condition to find } +C), \quad s = \int v \, dt \text{ (using an initial condition to find } +C).$$

A particle is **instantaneously at rest** when $v = 0$ (this does not require $a = 0$ at the same instant). The **distance** travelled over an interval equals $\int |v| \, dt$; if v does not change sign on the interval, this is simply $\left| \int v \, dt \right|$, but if v changes sign, the interval must be split at each root of $v(t)$ and the absolute value of each piece added, since a net displacement of zero over a there-and-back journey is not the same as zero distance travelled.

Ví dụ mẫu · Worked example

A particle moves so that $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (m). Find its velocity and acceleration at $t = 2$ s, and when it is at rest.

$$v = 3t^2 - 12t + 9; \text{ at } t = 2: v = 12 - 24 + 9 = -3 \text{ m/s. } a = 6t - 12; \text{ at } t = 2: a = 0. \text{ At rest: } 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Rightarrow (t - 1)(t - 3) = 0 \Rightarrow t = 1, 3 \text{ s}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A particle starts at the origin with velocity 4 m/s and has acceleration $a = (12 - 6t) \text{ m/s}^2$ at time t seconds. Find $v(t)$ and $s(t)$, the maximum velocity attained, and the displacement after the first 4 seconds.

$$v = \int (12 - 6t) dt = 12t - 3t^2 + C; \text{ since } v = 4 \text{ at } t = 0, C = 4, \text{ so } v(t) = 12t - 3t^2 + 4.$$

$$s = \int v dt = 6t^2 - t^3 + 4t + C_2; \text{ since } s = 0 \text{ at } t = 0, C_2 = 0, \text{ so } s(t) = 6t^2 - t^3 + 4t.$$

Maximum velocity occurs when $a = 0$: $12 - 6t = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$, giving $v(2) = 24 - 12 + 4 = 16 \text{ m/s}$ (a maximum, since a changes from positive to negative here). Solving $v(t) = 0$ gives

$$t = \frac{12 \pm \sqrt{192}}{6} \approx -0.31 \text{ or } 4.31 \text{ s, both outside } [0, 4], \text{ so } v(t) > 0 \text{ throughout the first 4 seconds}$$

and displacement equals distance: $s(4) = 6(16) - 64 + 16 = 48 \text{ m}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

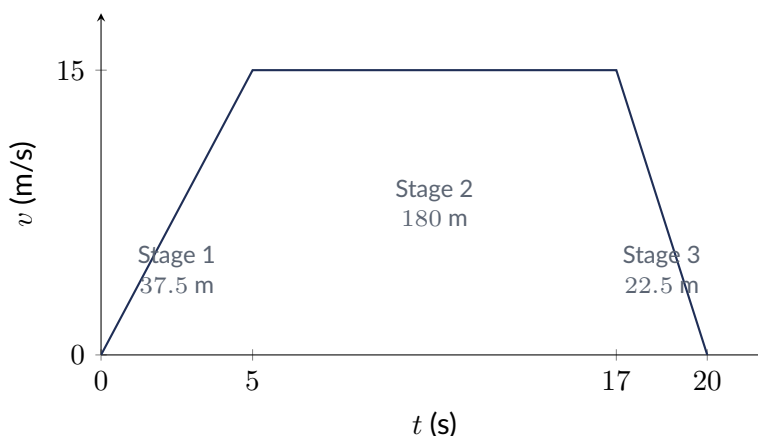
VN

Gia tốc là đạo hàm của vận tốc theo thời gian ($a = dv/dt$); vận tốc là đạo hàm của độ dịch chuyển ($v = ds/dt$). Khi gia tốc thay đổi theo thời gian, ta phải **tích phân** $a(t)$ để ra $v(t)$ (nhớ cộng hằng số C và dùng điều kiện ban đầu để tìm C), rồi tích phân tiếp $v(t)$ để ra $s(t)$. Vật đứng yên tức thời khi $v = 0$, không nhất thiết $a = 0$ cùng lúc. Khi tính **quãng đường** (distance) chứ không phải độ dịch chuyển (displacement), phải kiểm tra xem v có đổi dấu trong khoảng thời gian xét hay không – nếu có, phải tách khoảng tại từng điểm $v = 0$ và cộng trị tuyệt đối từng đoạn.

5.1.4 Multi-stage journeys

Many real journeys consist of several stages, each with its own (constant) acceleration – for example accelerating from rest, travelling at a steady speed, then decelerating to rest. Each stage is treated separately using the suvat equations (matching the final velocity of one stage to the initial velocity of the next), and the total displacement is the sum of the displacements of each stage, which is also the total area under the composite velocity–time graph. The **average speed** for the whole journey is

$\frac{\text{total distance}}{\text{total time}}$ – this is generally *not* the same as the average of the individual stage speeds unless the stages take equal time.



Multi-stage journey: accelerate from rest to 15 m/s in 5 s, travel at constant 15 m/s for 12 s, then decelerate to rest in 3 s. Total distance = $37.5 + 180 + 22.5 = 240 \text{ m}$ over 20 s, so average speed = $240/20 = 12 \text{ m/s}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hành trình nhiều giai đoạn, giải **từng đoạn riêng biệt** bằng công thức suvat, lấy vận tốc cuối đoạn này làm vận tốc đầu đoạn sau. Tổng quãng đường là tổng diện tích các hình (tam giác, hình chữ nhật, hình thang) dưới đồ thị $v-t$. **Tốc độ trung bình** của cả hành trình luôn được tính bằng $\frac{\text{tổng quãng đường}}{\text{tổng thời gian}}$, chứ *không* phải trung bình cộng đơn giản của các tốc độ từng giai đoạn.

5.1.5 Relative motion: when do two particles meet?

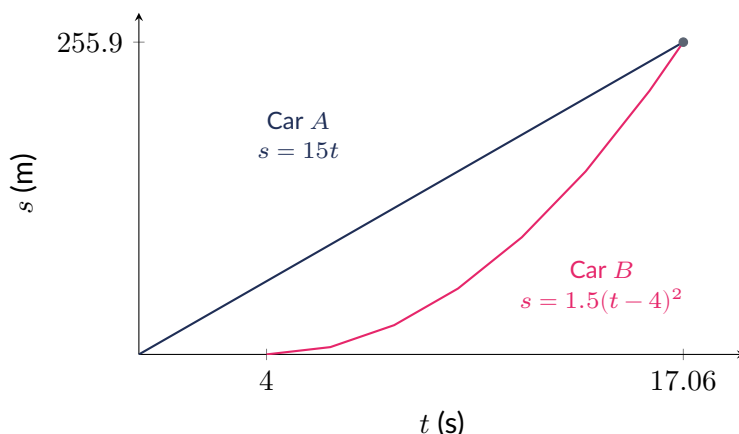
When two particles move along the same straight line, a common question asks for the time (and position) at which they meet, or the time at which one catches up with the other. The standard method is to write a separate expression for the displacement of *each* particle, measured from a common fixed origin using a common clock (time t); a particle that starts moving later than $t = 0$ must have its own suvat equation written in terms of t minus its own starting time, not in terms of t itself. The particles meet at the instant their displacements from the common origin are equal.

Meeting condition: $s_1(t) = s_2(t)$, using one common origin and one common clock t for both particles. If a particle starts at $t = t_0 > 0$, substitute $\tau = t - t_0$ into *its own* suvat (or calculus) equations, valid only for $t \geq t_0$; reject any solution of the meeting equation with $t < t_0$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Car A passes a fixed point O with constant speed 15 m/s and continues at this speed. Car B starts from rest at O , 4 seconds after A passes O , with constant acceleration 3 m/s^2 . Find the time (measured from the instant A passes O) at which B catches up with A , and the distance from O at which this happens.

Measuring t in seconds from the instant A passes O : A 's displacement is $s_A = 15t$. B starts 4 s later, so for $t \geq 4$, writing $\tau = t - 4$ for the time B has been moving, B 's displacement is $s_B = \frac{1}{2}(3)\tau^2 = 1.5(t - 4)^2$. They meet when $s_A = s_B$: $15t = 1.5(t - 4)^2 \Rightarrow 10t = (t - 4)^2 = t^2 - 8t + 16 \Rightarrow t^2 - 18t + 16 = 0$. $t = \frac{18 \pm \sqrt{324 - 64}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{260}}{2} = \frac{18 \pm 16.12}{2}$, giving $t = 17.06 \text{ s}$ or $t = 0.94 \text{ s}$. Since B has not even started moving at $t = 0.94 \text{ s}$ (this is before B 's start time of 4 s), only $t = 17.06 \text{ s}$ is a valid meeting time. Distance from O : $s_A = 15(17.06) = 255.9 \text{ m}$ (check: $s_B = 1.5(17.06 - 4)^2 = 1.5(13.06)^2 = 255.8 \text{ m}$ ✓).



Displacement-time graph: car B starts 4 s after car A passes O , and catches up at $t \approx 17.06 \text{ s}$, $s \approx 255.9 \text{ m}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi hai vật chuyển động trên cùng một đường thẳng và đề bài hỏi **thời điểm gặp nhau** (hoặc thời điểm vật này đuổi kịp vật kia), luôn chọn **một mốc thời gian chung** và **một gốc tọa độ chung**, viết độ dịch chuyển của mỗi vật theo cùng biến t đó. Nếu một vật xuất phát trễ hơn (ví dụ trễ 4 giây), phải dùng $\tau = t - 4$ (thời gian riêng của vật đó) trong công thức suvat của vật này, không phải t trực tiếp. Hai vật gặp nhau khi độ dịch chuyển của chúng (tính từ cùng gốc) bằng nhau; nếu phương trình cho ra nhiều nghiệm t , phải loại nghiệm không hợp lệ (ví dụ nhỏ hơn thời điểm vật thứ hai bắt đầu chuyển động).

5.2 Forces and Equilibrium

5.2.1 Force diagrams and resolving forces into components

The first step in any statics or dynamics problem is to draw a clear **force diagram** (free-body diagram) showing every force acting on the particle: weight $W = mg$ (always vertically down), normal reaction R (perpendicular to the contact surface), applied forces, tension in strings, and friction. A force F acting at angle θ to a chosen reference direction has components $F \cos \theta$ along that direction and $F \sin \theta$ perpendicular to it. For a particle in equilibrium under several coplanar forces, resolving in two perpendicular directions (usually horizontal/vertical, or along/perpendicular to a slope) gives two independent equations, $\sum F_x = 0$ and $\sum F_y = 0$, which is the standard 9709 method (equivalent to the geometric *triangle of forces*, in which three concurrent forces in equilibrium can be represented by the three sides of a closed triangle taken in order).

Ví dụ mẫu · Worked example

A particle of weight 45 N hangs in equilibrium, held by two light strings attached to fixed points; one string makes 25° with the horizontal ceiling and the other makes 50° with the horizontal ceiling, on opposite sides of the vertical through the particle. Find the tensions T_1 (in the 25° string) and T_2 (in the 50° string).

Resolve horizontally (the two horizontal components must balance): $T_1 \cos 25^\circ = T_2 \cos 50^\circ$.

Resolve vertically (the two vertical components support the weight): $T_1 \sin 25^\circ + T_2 \sin 50^\circ = 45$.

From the first equation, $T_1 = T_2 \frac{\cos 50^\circ}{\cos 25^\circ} = 0.7089 T_2$. Substituting: $0.7089 T_2 (0.4226) + T_2 (0.7660) = 45 \Rightarrow 1.0656 T_2 = 45 \Rightarrow T_2 = 42.2 \text{ N}$, so $T_1 = 0.7089(42.2) = 29.9 \text{ N}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán 3 lực đồng phẳng cân bằng (ví dụ vật treo bởi hai sợi dây), luôn **phân tích mỗi lực thành hai thành phần vuông góc** (thường là phương ngang và phương thẳng đứng), sau đó lập hai phương trình $\sum F_x = 0$ và $\sum F_y = 0$ rồi giải hệ. Đây là phương pháp chính dùng trong 9709 (thay cho định lý hình tam giác lực dùng hình học thuần túy).

5.2.2 Equilibrium of a particle under coplanar forces

A particle is in **equilibrium** when the resultant of all forces acting on it is zero, so it remains at rest or moves with constant velocity (Newton's first law). For a particle acted on by exactly three coplanar forces in equilibrium, an alternative (equivalent) approach is to represent the forces as a closed vector triangle: draw the three force vectors head-to-tail, in order; if they form a closed triangle, the particle is in equilibrium, and unknown magnitudes/angles can be found using the sine and cosine rules. In examinations, resolving into perpendicular components is normally faster and less error-prone, especially with more than three forces, and is the method used throughout this chapter.

Lami's theorem (an equivalent, purely geometric alternative to resolving): for three concurrent coplanar forces P , Q , R in equilibrium, $\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}$, where α is the angle between Q and R (i.e. opposite P), and similarly for β (opposite Q) and γ (opposite R); the three angles sum to 360° .

As a check, Lami's theorem reproduces the two-string example above without resolving into components at all: measuring angles between each pair of force directions gives 140° (between the 50° string and the weight), 115° (between the weight and the 25° string), and 105° (between the two strings), which sum to 360° . Then $T_1 = \frac{45 \sin 140^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{45(0.6428)}{0.9659} = 29.9 \text{ N}$ and $T_2 = \frac{45 \sin 115^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{45(0.9063)}{0.9659} = 42.2 \text{ N}$ – identical to the component method, confirming both approaches are equivalent; resolving remains the preferred method here because it extends directly to four or more forces, whereas Lami's theorem only applies to exactly three.

5.2.3 Particles on an inclined plane

For a particle of mass m resting on a plane inclined at angle θ to the horizontal, the weight mg (vertically down) must be resolved into a component **along the slope**, $mg \sin \theta$ (down the slope), and a component **perpendicular to the slope**, $mg \cos \theta$ (into the surface). On a **smooth** (frictionless) incline, the normal reaction balances the perpendicular component exactly, $R = mg \cos \theta$, and any force needed to hold the particle in equilibrium along the slope must balance $mg \sin \theta$.

On an incline at angle θ : component of weight along the slope = $mg \sin \theta$; component of weight perpendicular to the slope = $mg \cos \theta$; on a smooth incline with no other forces along the slope, $R = mg \cos \theta$.

5.2.4 Friction

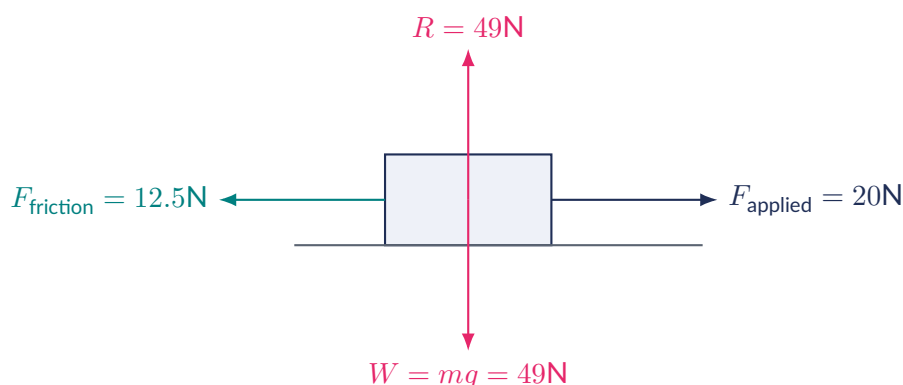
When two surfaces in contact are rough, the contact force has a component along the surface (**friction**, F) as well as the normal component R . Friction always opposes the direction of *relative sliding* (or the tendency to slide) between the surfaces. Provided the particle is not sliding, friction can take any value up to a maximum, $F \leq \mu R$, where μ is the **coefficient of friction** between the two surfaces; when the particle is on the point of sliding (**limiting equilibrium**) or is actually sliding, friction takes its maximum (limiting) value, $F = \mu R$.

$F \leq \mu R$ in general; $F = \mu R$ at limiting equilibrium or while sliding, where R is the normal reaction and μ the coefficient of friction. Friction acts to oppose relative sliding (or the tendency to slide).

Ví dụ mẫu · Worked example

A 5 kg box on a rough horizontal surface accelerates at 1.5 m/s^2 under a horizontal force of 20 N. Find the friction force and μ .

$$20 - F = ma = 5(1.5) = 7.5 \Rightarrow F = 12.5 \text{ N. } R = mg = 5(9.8) = 49 \text{ N. } \mu = \frac{12.5}{49} = 0.255.$$



Free-body diagram for the 5 kg box on a rough horizontal surface.

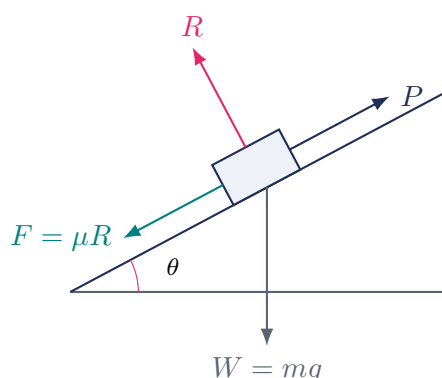
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vẽ **sơ đồ lực tự do** (free-body diagram) là bước bắt buộc: liệt kê đủ trọng lực $W = mg$ (luôn thẳng đứng xuống), phản lực R (vuông góc mặt tiếp xúc), lực kéo/đẩy, và ma sát (luôn **ngược chiều chuyển động** hoặc xu hướng chuyển động). Ma sát chỉ đạt giá trị lớn nhất μR khi vật **trượt** hoặc **sắp trượt** (cân bằng giới hạn); nếu vật đứng yên và chưa sắp trượt, ma sát có thể nhỏ hơn μR , đủ để giữ cân bằng. Sau đó áp dụng $F_{\text{hợp lực}} = ma$ theo từng phương.

5.2.5 Inclined planes with friction

On a **rough** incline, the normal reaction is still $R = mg \cos \theta$ (provided all other forces act along the slope or are perpendicular to it), but friction $F \leq \mu R$ now also acts along the slope, opposing the direction of sliding or impending sliding. Whether a particle remains at rest, slides down, or needs an applied force to stay in place depends on comparing $mg \sin \theta$ (the driving component down the slope) with the **maximum available friction** $\mu mg \cos \theta$. If a force P acts up the slope to hold the particle in equilibrium, then at the **minimum** value of P the particle is on the point of sliding down (friction acts up the slope, at its maximum): $P_{\min} = mg \sin \theta - \mu mg \cos \theta$. At the **maximum** value of P before the particle is on the point of sliding up, friction acts down the slope, at its maximum: $P_{\max} = mg \sin \theta + \mu mg \cos \theta$.

Free-body diagram on a rough inclined plane: weight W resolves into $mg \sin \theta$ (down the slope) and $mg \cos \theta$ (into the surface, balanced by R); friction F opposes sliding; P is an applied force up the slope.**Ví dụ mẫu · Worked example**

A parcel of mass 8 kg rests on a rough plane inclined at 30° to the horizontal, where $\mu = 0.2$ between the parcel and the plane. Find the minimum force P , acting up the line of greatest slope, needed to keep the parcel in equilibrium.

$mg \sin 30^\circ = 8(9.8)(0.5) = 39.2 \text{ N}$. $R = mg \cos 30^\circ = 8(9.8)(0.8660) = 67.90 \text{ N}$, so maximum friction $= \mu R = 0.2(67.90) = 13.58 \text{ N}$. Since $39.2 > 13.58$, the parcel would slide without support; at the minimum P , friction acts at its maximum value up the slope, assisting P :

$$P_{\min} + \mu mg \cos 30^\circ = mg \sin 30^\circ \Rightarrow P_{\min} = 39.2 - 13.58 = 25.6 \text{ N}.$$

(!) Lỗi thường gặp: On an inclined plane, always resolve the weight mg into **two** components relative to the slope — $mg \sin \theta$ *along* the slope and $mg \cos \theta$ *perpendicular* to the slope — and never resolve horizontally/vertically instead when other forces (friction, an applied force along the slope) are naturally along/perpendicular to the incline. A very common error is swapping $\sin \theta$ and $\cos \theta$: the component along the slope uses $\sin \theta$ (it vanishes as $\theta \rightarrow 0$, correctly matching a flat, horizontal surface), while the component perpendicular to the slope uses $\cos \theta$ (it equals mg , correctly matching a flat surface, as $\theta \rightarrow 0$). Also remember that on an incline the normal reaction $R = mg \cos \theta$ is *less* than mg (unless another force also has a component perpendicular to the slope), so friction μR must be computed using $mg \cos \theta$, not mg .

5.2.6 A force applied at an angle to the slope

An applied force does not always act exactly along the line of greatest slope. If a force P acts at angle α *above* the slope (tilted away from the surface, not purely up the slope), it has a component $P \cos \alpha$ up the slope and a component $P \sin \alpha$ *away from* the surface — which **reduces** the normal reaction, since it partly “lifts” the particle off the plane: $R = mg \cos \theta - P \sin \alpha$. This reduced normal reaction in turn reduces the maximum available friction μR , so both effects of P (driving the particle along the slope, and changing the friction resisting it) must be included.

Ví dụ mẫu · Worked example

A block of mass 6 kg rests on a rough plane inclined at 20° to the horizontal, where $\mu = 0.3$. A force P acts on the block at 15° above the line of the slope (i.e. between the slope direction and the outward normal), pulling the block up the slope. Find the value of P for which the block is in limiting equilibrium, on the point of sliding up the slope.

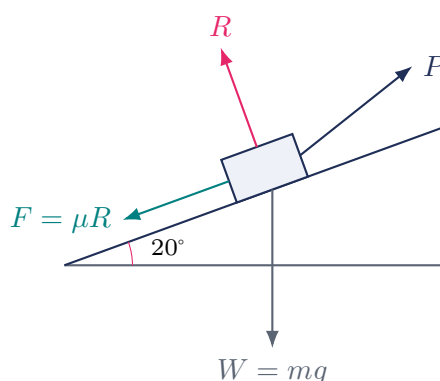
On the point of sliding up, friction acts at its maximum value, down the slope. Resolving perpendicular to the slope: $R = mg \cos 20^\circ - P \sin 15^\circ$. Resolving along the slope: $P \cos 15^\circ = mg \sin 20^\circ + \mu R = mg \sin 20^\circ + \mu(mg \cos 20^\circ - P \sin 15^\circ)$. Rearranging: $P(\cos 15^\circ + \mu \sin 15^\circ) = mg(\sin 20^\circ + \mu \cos 20^\circ)$. With $mg = 6(9.8) = 58.8 \text{ N}$: $mg(\sin 20^\circ + \mu \cos 20^\circ) = 58.8(0.3420 + 0.3 \times 0.9397) = 58.8(0.6239) = 36.69$. $\cos 15^\circ + \mu \sin 15^\circ = 0.9659 + 0.3(0.2588) = 1.0436$. $P = \frac{36.69}{1.0436} = 35.2 \text{ N}$. (Check: $R = 58.8(0.9397) - 35.2(0.2588) = 55.25 - 9.11 = 46.15 \text{ N}$, and $P \cos 15^\circ = 35.2(0.9659) = 34.0 \approx mg \sin 20^\circ + \mu R = 20.11 + 13.85 = 34.0 \checkmark$.)

(!) Lỗi thường gặp: When a force applied to a body on an incline is **not** parallel to the slope, it still has a component perpendicular to the slope, and this component changes the normal reaction R — and hence the maximum friction μR — even though the force may not seem to be obviously “pushing into” or “pulling away from” the plane. A force directed *above* the slope (away from the surface) **reduces** R ; a force directed *into* the slope (below the line of greatest slope, angled into the surface) **increases** R . Always resolve the applied force into its two components relative to the slope before writing the perpendicular equation for R .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi lực kéo/đẩy P không nằm dọc theo mặt phẳng nghiêng mà lệch một góc so với mặt nghiêng, lực này có **hai thành phần**: một thành phần dọc theo mặt nghiêng (góp phần kéo vật lên hoặc xuống dốc) và một thành phần **vuông góc** với mặt nghiêng (làm **thay đổi phản lực** R). Nếu P hướng ra xa mặt phẳng (lên trên so với mặt nghiêng), phản lực R sẽ **giảm** (vì một phần lực P “nâng” vật lên), kéo theo ma sát tối đa μR cũng giảm. Phải luôn viết lại phương trình cân bằng vuông góc với mặt nghiêng để tìm R chính xác *trước* khi tính ma sát.



Free-body diagram: force P applied at 15° above the line of the slope (itself inclined at 20° to the horizontal), so that P 's perpendicular component reduces the normal reaction R .

Resolving forces	Inclined planes & friction
$F_x = F \cos \theta$, $F_y = F \sin \theta$	Along the slope: $mg \sin \theta$
Equilibrium: $\sum F_x = 0$, $\sum F_y = 0$	Perpendicular to the slope: $mg \cos \theta$
Lami's theorem: $\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}$	Smooth incline (no other forces): $R = mg \cos \theta$
	Friction: $F \leq \mu R$; $F = \mu R$ limiting/sliding

Quick-reference summary: resolving forces, inclined planes, and friction.

5.3 Newton's Laws of Motion

5.3.1 Newton's second law: $F = ma$

Newton's first law states that a particle remains at rest or moves with constant velocity unless acted on by a resultant force. Newton's second law gives the relationship between the resultant force and the resulting acceleration: the **resultant force** F (the vector sum of all forces acting) on a particle of mass m produces an acceleration $a = F/m$ in the same direction as the resultant force, i.e. $F = ma$. Newton's third law states that if body A exerts a force on body B, then B exerts an equal and opposite force on A; this underlies the analysis of connected particles, since the tension pulling one particle forward is matched by an equal tension pulling the other particle back.

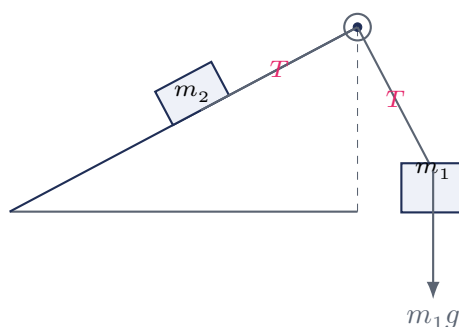
$F = ma$, where F is the resultant (net) force in the direction of motion. Weight $W = mg$ is a force (measured in newtons), not the same quantity as mass m (measured in kilograms).

(!) Lỗi thường gặp: Mass (m , in kg) is the amount of matter in a body and does not change; weight ($W = mg$, in N) is the force of gravity on that body and depends on g . A very common error is writing $F = ma$ but then substituting a “weight” value in kilograms, or conversely using m (in kg) directly as a force in newtons without multiplying by g . Always check units: forces are in newtons, masses in kilograms, and $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ is the conversion factor between an object's mass and its weight (on Earth's surface).

5.3.2 Connected particles: strings and pulleys

When two particles are joined by a light (massless), inextensible string, the string exerts equal tension T on both particles, and – provided the string remains taut and does not stretch – both particles have the **same magnitude of acceleration** a at all times. If the string passes over a smooth, light (massless) pulley, the tension is the same on both sides of the pulley (the pulley simply changes the direction of the string's action, doing no work and exerting no net resisting force of its own).

For two masses m_1 (lighter) and m_2 (heavier) connected by a string over a smooth pulley, hanging freely (an Atwood machine): $a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2}$, $T = \frac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2}$.



Connected particles: mass m_2 on a rough incline, joined by a light string over a smooth pulley at the top of the slope to a hanging mass m_1 .

5.3.3 Connected particles on an inclined plane

When one particle hangs vertically and the other lies on an inclined plane (connected by a string over a pulley fixed at the top of the incline, with the string running parallel to the slope), each particle's equation of motion is written separately, taking a consistent positive direction (the anticipated direction of motion) for each: the hanging particle's weight m_1g drives the system, opposed by the sliding particle's slope component $m_2g \sin \theta$ and any friction. Before assuming the system accelerates, it is essential to check whether the driving imbalance actually exceeds the maximum available friction – if not, the system remains in equilibrium.

Ví dụ mẫu · Worked example

Masses $m_1 = 3$ kg (hanging freely) and $m_2 = 5$ kg (on a rough plane inclined at 25° , with $\mu = 0.25$) are connected by a light inextensible string over a smooth pulley fixed at the top of the incline, with the string parallel to the slope. The system is released from rest. Show that the system remains in equilibrium, and find the tension in the string and the friction force on the 5 kg mass.

Without friction, $m_1g = 3(9.8) = 29.4$ N would tend to pull the system so that m_1 descends and m_2 moves up the slope, since $m_2g \sin 25^\circ = 5(9.8)(0.4226) = 20.71$ N is less than 29.4 N; the imbalance is $29.4 - 20.71 = 8.69$ N. The maximum available friction on m_2 is $\mu m_2g \cos 25^\circ = 0.25(5)(9.8)(0.9063) = 11.10$ N, acting down the slope to resist this tendency. Since the required friction, 8.69 N, is *less than* the maximum available, 11.10 N, the system does *not* accelerate: it stays in equilibrium. With $a = 0$: for m_1 , $m_1g - T = 0 \Rightarrow T = 29.4$ N. For m_2 (resolving along the slope), $T - m_2g \sin 25^\circ - f = 0 \Rightarrow f = 29.4 - 20.71 = 8.69$ N (acting down the slope on m_2).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán vật nối qua ròng rọc trên mặt phẳng nghiêng có ma sát, **không được vội giả sử hệ chuyển động**. Trước tiên tính "lực chênh lệch" khi bỏ qua ma sát (chênh lệch giữa trọng lượng vật treo và thành phần trọng lực dọc mặt nghiêng của vật kia); nếu chênh lệch này **nhỏ hơn** ma sát nghỉ cực đại μR , hệ **đứng yên** (cân bằng) – khi đó lực căng dây và lực ma sát tìm được từ phương trình cân bằng ($a = 0$), không phải từ $F = ma$ với $a \neq 0$.

5.3.4 Connected particles: one particle on a rough horizontal table

A common configuration has one particle on a horizontal table (or bench) connected by a string over a smooth pulley fixed at the edge of the table to a second particle hanging freely over the edge. If the table is rough, friction acts on the particle on the table, opposing its motion (which is toward the pulley, i.e. toward the edge), and must be included in that particle's equation of motion alongside the tension.

For m_1 hanging freely and m_2 on a rough table (coefficient of friction μ), joined by a string over a smooth pulley at the table's edge: $a = \frac{m_1 g - \mu m_2 g}{m_1 + m_2}$, $T = \frac{m_1 m_2 g (1 + \mu)}{m_1 + m_2}$ (setting $\mu = 0$ recovers the smooth-table result).

Ví dụ mẫu · Worked example

A block of mass 5 kg lies on a rough horizontal table, where $\mu = 0.3$ between the block and the table. It is connected by a light inextensible string, passing over a smooth pulley fixed at the edge of the table, to a mass of 3 kg hanging freely. The system is released from rest. Find the acceleration of the system and the tension in the string.

For the hanging mass ($m_1 = 3$ kg), taking the direction of motion as positive: $m_1 g - T = m_1 a \Rightarrow 29.4 - T = 3a$. For the block on the table ($m_2 = 5$ kg), friction opposes its motion toward the pulley: normal reaction $R = m_2 g = 5(9.8) = 49$ N, so friction $= \mu R = 0.3(49) = 14.7$ N, and $T - \mu R = m_2 a \Rightarrow T - 14.7 = 5a$. Adding the two equations (the tension T cancels): $29.4 - 14.7 = 8a \Rightarrow 14.7 = 8a \Rightarrow a = 1.84 \text{ m/s}^2$. $T = 5(1.84) + 14.7 = 9.19 + 14.7 = 23.9$ N (check via the hanging mass: $T = 29.4 - 3(1.84) = 29.4 - 5.51 = 23.9$ N ✓).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi một vật nằm trên bàn (có ma sát) nối qua ròng rọc ở mép bàn với một vật treo tự do, phương trình chuyển động của vật trên bàn phải có thêm **lực ma sát** μR (với $R = m_2 g$ vì bàn nằm ngang), lực này luôn **cản trở** chuyển động của vật (hướng ra mép bàn). Cộng hai phương trình chuyển động của hai vật lại (theo chiều dương đã chọn nhất quán) sẽ triệt tiêu lực căng dây T , cho phép tìm gia tốc a trước, rồi thay ngược lại để tìm T – và luôn nên **kiểm tra chéo** bằng phương trình của vật còn lại.

5.3.5 Multiple connected vehicles

For a train, truck, or convoy made of several coupled vehicles moving together with common acceleration a , first treat the **whole system** as a single particle (total mass = sum of all masses) to find a from the total driving force minus total resistance. Then, to find the tension (or thrust) in any individual coupling, apply $F = ma$ to just the vehicle(s) on one side of that coupling – most simply, to the vehicle(s) *beyond* the coupling, which experience only that one coupling force plus their own resistance.

Ví dụ mẫu · Worked example

An engine of mass 5000 kg pulls two trucks: truck *A* (mass 2000 kg, coupled directly behind the engine) and truck *B* (mass 1500 kg, coupled behind truck *A*), along a straight, level track. The engine's driving force is 9000 N; the resistances to motion are 1000 N (engine), 400 N (truck *A*), and 300 N (truck *B*). Find the acceleration of the train and the tension in each coupling.

Whole system (mass = 5000 + 2000 + 1500 = 8500 kg): $9000 - (1000 + 400 + 300) = 8500a \Rightarrow 7300 = 8500a \Rightarrow a = 0.859 \text{ m/s}^2$. Coupling between engine and truck *A* (T_1): consider trucks *A* + *B* together (mass 3500 kg): $T_1 - (400 + 300) = 3500(0.859) \Rightarrow T_1 = 3006 + 700 = 3706 \text{ N}$. Coupling between truck *A* and truck *B* (T_2): consider truck *B* alone (mass 1500 kg): $T_2 - 300 = 1500(0.859) \Rightarrow T_2 = 1288 + 300 = 1588 \text{ N}$. (Check using the engine alone: $9000 - 1000 - T_1 = 5000(0.859) \Rightarrow T_1 = 8000 - 4294 = 3706 \text{ N}$. ✓)

5.3.6 Apparent weight: lifts and elevators

A person of mass m standing on scales inside a lift (elevator) has a true weight mg , but the scales actually measure the **normal reaction** R between the person and the floor – the **apparent weight**. Applying $F = ma$ to the person, taking "upward" as positive:

$R - mg = ma \Rightarrow R = m(g + a)$ if the lift accelerates **upward** with magnitude a ; $R = m(g - a)$ if the lift accelerates **downward** with magnitude a ; $R = mg$ if the lift moves at constant velocity (or is stationary), since then $a = 0$.

The apparent weight is greater than the true weight while accelerating upward (or decelerating while moving downward), and less than the true weight while accelerating downward (or decelerating while moving upward) – matching the everyday sensation of feeling heavier or lighter in a lift.

Ví dụ mẫu · Worked example

A man of mass 70 kg stands on scales in a lift. Find the scale reading when the lift (a) accelerates upward at 2 m/s^2 ; (b) accelerates downward at 2 m/s^2 ; (c) moves at constant velocity.

(a) $R = m(g + a) = 70(9.8 + 2) = 70(11.8) = 826 \text{ N}$. (b) $R = m(g - a) = 70(9.8 - 2) = 70(7.8) = 546 \text{ N}$. (c) $R = mg = 70(9.8) = 686 \text{ N}$.

Kinematics (suvat)	Momentum & impulse
$v = u + at$	$p = mv$
$s = ut + \frac{1}{2}at^2$	$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$ (collision)
$v^2 = u^2 + 2as$	$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v$ (coalescence)
$s = \frac{1}{2}(u + v)t$	Impulse = $F\Delta t = \Delta p = m(v - u)$

Quick-reference summary: kinematics and momentum–impulse formulas.

5.4 Momentum and Impulse

5.4.1 Momentum and conservation of momentum

The **momentum** of a particle of mass m moving with velocity v is $p = mv$ (a vector, in the direction of motion, measured in kg m/s or, equivalently, newton-seconds). When two particles collide (or otherwise interact) with no external horizontal force acting on the system, the **total momentum is conserved**: the total momentum immediately before the collision equals the total momentum immediately after.

$m_1u_1 + m_2u_2 = m_1v_1 + m_2v_2$, where u_1, u_2 are velocities before collision and v_1, v_2 are velocities after. A single positive direction must be chosen and used consistently for every velocity in the equation.

Ví dụ mẫu · Worked example

A 0.5 kg ball moving at 6 m/s collides with a stationary 1 kg ball; after impact the first ball rebounds at -1 m/s. Find the second ball's velocity and the impulse on the first ball.

$0.5(6) = 0.5(-1) + 1(v_2) \Rightarrow v_2 = 3.5$ m/s. Impulse on ball 1 = $m(v - u) = 0.5(-1 - 6) = -3.5$ Ns.

(!) Lỗi thường gặp: Before writing a momentum conservation equation, fix *one* positive direction (for example, "rightward is positive") and use it for every velocity in the equation, including any that reverse direction after the collision — a rebounding object must be substituted with a *negative* velocity, not its magnitude. A sign error on just one velocity, or forgetting that momentum is a vector (not a speed), is one of the most common ways to get a momentum question wrong even when the conservation equation itself is set up correctly.

5.4.2 Coalescence

If two particles collide and **coalesce** (stick together and move on with a single common velocity, e.g. a bullet embedding in a block, or railway trucks coupling automatically on impact), the conservation equation simplifies since there is only one combined mass afterwards:

$m_1u_1 + m_2u_2 = (m_1 + m_2)v$, where v is the common velocity after coalescence.

Coalescence is always an **inelastic** collision: kinetic energy is conserved in momentum, but *not* in kinetic energy — some kinetic energy is converted to heat, sound, and deformation, so the total kinetic energy after coalescence is always less than before (except in the trivial case of no relative motion).

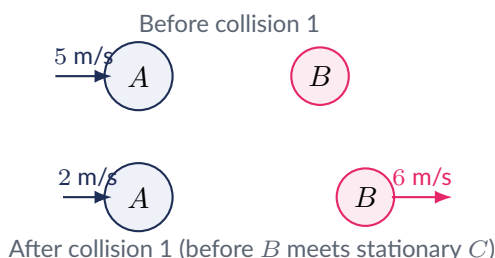
5.4.3 Two-stage collisions

Some problems involve a chain of collisions: one particle collides with a second, and the resulting motion of the second particle then causes it to collide with a third. Each collision is treated as a *separate* application of conservation of momentum, using the velocities immediately after the previous collision as the "before" velocities for the next.

Ví dụ mẫu · Worked example

A sphere A of mass 4 kg moving at 5 m/s collides directly with a stationary sphere B of mass 2 kg. Immediately after this collision, A continues moving in the same direction at 2 m/s. Sphere B then travels on and collides directly with a stationary sphere C of mass 1 kg, with which it coalesces. Find the common velocity of B and C after the second collision, and the total kinetic energy lost over both collisions.

Collision 1 (A and B): $4(5) + 2(0) = 4(2) + 2v_B \Rightarrow 20 = 8 + 2v_B \Rightarrow v_B = 6$ m/s. **Collision 2** (B and C , coalescing): $2(6) + 1(0) = (2+1)v \Rightarrow 12 = 3v \Rightarrow v = 4$ m/s. **Kinetic energy:** initially only A moves: $E_{k, \text{initial}} = \frac{1}{2}(4)(5^2) = 50$ J. **After collision 1:** $E_k = \frac{1}{2}(4)(2^2) + \frac{1}{2}(2)(6^2) = 8 + 36 = 44$ J (a loss of 6 J in collision 1). **After collision 2:** A still has 8 J; the coalesced $B+C$ has $\frac{1}{2}(3)(4^2) = 24$ J, giving a total of 32 J (a further loss of $36 - 24 = 12$ J in collision 2). Total kinetic energy lost over both collisions: $50 - 32 = 18$ J (matching $6 + 12 = 18$ J ✓).



Schematic: sphere A strikes stationary sphere B ; B then moves off to collide with, and coalesce with, stationary sphere C .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Với bài toán **va chạm hai giai đoạn** (vật A va vào B , rồi B tiếp tục va vào C), phải giải **lần lượt từng va chạm**: áp dụng bảo toàn động lượng cho va chạm thứ nhất để tìm vận tốc của B ngay sau va chạm đó, rồi dùng chính vận tốc này làm vận tốc "trước va chạm" của B trong phương trình bảo toàn động lượng của va chạm thứ hai. Khi tính **tổng động năng mất đi**, nên cộng phần mất ở từng va chạm riêng biệt để thể hiện rõ từng giai đoạn, dù kết quả cuối cùng phải khớp với (động năng ban đầu của toàn hệ) trừ (động năng cuối cùng của toàn hệ).

(!) Lỗi thường gặp: In a two-stage (or multi-stage) collision, use *exactly the same* positive direction convention throughout the whole process — do not restart the sign convention independently for each collision. As an overall check, the total momentum of *all* particles combined must be conserved from the very start to the very end of the whole process, even though kinetic energy is not: in the worked example above, $4(5) = 20$ before anything happens, and $4(2) + 3(4) = 8 + 12 = 20$ once both collisions are complete, confirming the arithmetic is self-consistent.

5.4.4 Impulse

The **impulse** of a constant force F acting for a time Δt is defined as $I = F\Delta t$, and by Newton's second law this equals the resulting **change in momentum** of the particle it acts on:

$I = F\Delta t = \Delta p = m(v - u)$, a vector quantity measured in newton-seconds (Ns), equivalent to kg m/s.

Impulse problems typically involve a large force acting for a very short time (an impact, a bat striking a ball, a wall stopping a ball) where only the constant (or average) force over the contact time is required — variable force over the impact is not required at this level.

Ví dụ mẫu · Worked example

A cricket ball of mass 0.16 kg travelling at 30 m/s is struck by a bat and rebounds at 20 m/s in the opposite direction. The bat is in contact with the ball for 0.01 s. Find the impulse exerted by the bat on the ball, and the average force exerted.

Taking the ball's original direction as positive: $u = 30$, $v = -20$. Impulse = $m(v - u) = 0.16(-20 - 30) = 0.16(-50) = -8$ Ns (magnitude 8 Ns, directed opposite to the ball's original motion). Average force = $\frac{\text{impulse}}{\text{time}} = \frac{-8}{0.01} = -800$ N (magnitude 800 N, opposing the ball's original motion).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Xung lượng (impulse) $I = F\Delta t$ luôn bằng **độ biến thiên động lượng** $\Delta p = m(v - u)$ — đây

chính là dạng tích phân của định luật II Newton theo thời gian. Khi vật **bật ngược lại** (rebound), phải lấy vận tốc sau va chạm là số **âm** (theo chiều dương đã chọn ban đầu) trước khi trừ, nếu không xung lượng tính ra sẽ sai cả độ lớn lẫn dấu. Ở mức 9709, lực trong va chạm luôn coi là **không đổi** (hằng số) trong suốt thời gian tiếp xúc – không cần tích phân lực biến thiên.

5.5 Work, Energy and Power

5.5.1 Work done by a constant force

The **work done** by a constant force F acting on a particle that moves a distance d in the direction of the force is $W = Fd$. If the force acts at an angle θ to the direction of motion, only the component of the force *along* the direction of motion does work:

$W = Fd \cos \theta$, measured in joules (J), where θ is the angle between the force and the direction of displacement. If $\theta = 90^\circ$ (force perpendicular to motion, e.g. the normal reaction on a surface, or the weight of a particle moving horizontally), the force does **no work**.

5.5.2 Kinetic and gravitational potential energy

The **kinetic energy** of a particle of mass m moving at speed v is $E_k = \frac{1}{2}mv^2$. The **gravitational potential energy** of a particle of mass m at height h above a fixed reference level is $E_p = mgh$. Both are measured in joules.

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$, $E_p = mgh$. **Work-energy principle:** the total work done by *all* forces acting on a particle equals its change in kinetic energy, $\sum W = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$.

5.5.3 Conservation of mechanical energy

If the *only* forces doing work on a particle are gravity and (possibly) a constant applied force, and there is no friction or resistance, then **mechanical energy** (kinetic + potential) is conserved: any loss in potential energy appears entirely as a gain in kinetic energy, and vice versa. When friction or resistance *does* act, mechanical energy is not conserved – some of it is converted (irreversibly) to heat, and this is described as energy "lost" to friction, equal to the work done against the resistive force (= friction force $\times$ distance moved). A full energy accounting must therefore include every force that does work: $E_{p,\text{lost}} = E_{k,\text{gained}} + (\text{work done against friction/resistance})$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A 2 kg block is released from rest and slides 6 m down a rough plane inclined at 25° to the horizontal. Its speed at the bottom is 4 m/s. Find the work done against friction, and the coefficient of friction μ .

Height dropped: $h = 6 \sin 25^\circ = 6(0.4226) = 2.536$ m. Loss in PE: $mgh = 2(9.8)(2.536) = 49.70$ J. Gain in KE: $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(2)(4^2) = 16$ J. Work done against friction = PE lost – KE gained

$= 49.70 - 16 = 33.70$ J. Friction force $F = \frac{\text{work}}{\text{distance}} = \frac{33.70}{6} = 5.617$ N. Normal reaction

$R = mg \cos 25^\circ = 2(9.8)(0.9063) = 17.76$ N. $\mu = \frac{F}{R} = \frac{5.617}{17.76} = 0.316$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi mặt phẳng có ma sát (hoặc có lực cản), **cơ năng không bảo toàn**: một phần thế năng mất đi biến thành **công thực hiện chống lại ma sát** (rồi thành nhiệt), phần còn lại mới chuyển thành động năng. Luôn viết đầy đủ: (thế năng mất đi) = (động năng tăng thêm) + (công chống lại

ma sát/lực cản). Nếu đề không có ma sát/lực cản, cơ năng bảo toàn hoàn toàn: thế năng mất đúng bằng động năng tăng.

5.5.4 Power

Power is the rate at which work is done (equivalently, the rate of transfer of energy), $P = \frac{W}{t}$, measured in watts (W) = J/s. For a force F acting on a particle moving at (instantaneous or constant) velocity v in the direction of the force:

$P = Fv$ (constant force, velocity in the direction of the force). For a vehicle moving at constant speed, the driving force from the engine exactly balances the total resistance (including any component of weight along an incline), so $P = (\text{driving force}) \times v = (\text{total resistance}) \times v$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A 40 kg crate is pulled at constant speed up a smooth 20° incline, a distance of 10 m, by a force parallel to the slope. Find the work done, and the average power if this takes 5 s.

Smooth incline, constant speed $\Rightarrow$ work done = $\Delta PE = mgh = mg(10 \sin 20^\circ) = 40(9.8)(3.420) = 1341$ J. Power = $\frac{1341}{5} = 268$ W.

5.5.5 Power, resistance and the maximum speed of a vehicle

A vehicle's engine typically works at a given **constant power** P . As the vehicle speeds up, the driving force it can exert, $F = P/v$, **decreases** with speed (for fixed power), while the resistance to motion (from friction, air resistance, and any incline) typically stays constant or increases. The vehicle reaches its **maximum speed** $v_{\max}$ when the driving force has fallen to exactly balance the total resistance – at this point the acceleration is zero:

At maximum speed: $\frac{P}{v_{\max}} = R_{\text{total}} \Rightarrow v_{\max} = \frac{P}{R_{\text{total}}}$, where R_{total} is the total resistance opposing motion, including $mg \sin \theta$ if travelling up an incline at angle θ .

Ví dụ mẫu · Worked example

A car of mass 1200 kg has an engine working at a constant power of 36 000 W. The resistance to motion is constant at 600 N. Find the maximum speed of the car (a) on a level road, and (b) up an incline for which $\sin \theta = 0.05$.

(a) On the level, the only resistance is 600 N, so $v_{\max} = \frac{P}{R} = \frac{36\,000}{600} = 60$ m/s. (b) Up the incline, total resistance = $600 + mg \sin \theta = 600 + 1200(9.8)(0.05) = 600 + 588 = 1188$ N.
 $v_{\max} = \frac{36\,000}{1188} = 30.3$ m/s.

5.5.6 Power and acceleration: combining $F = P/v$ with $F = ma$

When a vehicle's power is constant but its speed is *not* constant (the vehicle is still accelerating, not yet at its maximum speed), the driving force at any instant is still given by $F = P/v$, using the speed v at that instant. This instantaneous driving force can then be substituted into Newton's second law, $F - (\text{resistance}) = ma$, to find the acceleration at that particular instant – the acceleration will itself change as v changes, since $F = P/v$ changes with v even though P stays constant.

Ví dụ mẫu · Worked example

A car of mass 1000 kg moves up a slope inclined at angle θ to the horizontal, where $\sin \theta = 0.1$, against a constant resistance to motion of 400 N. The engine works at a constant power of 20 000 W. Find the acceleration of the car at the instant when its speed is 8 m/s.

Driving force at this instant: $F = \frac{P}{v} = \frac{20\,000}{8} = 2500$ N. Newton's second law along the slope:
 $F - R - mg \sin \theta = ma \Rightarrow 2500 - 400 - 1000(9.8)(0.1) = 1000a$. $2500 - 400 - 980 = 1120 = 1000a \Rightarrow a = 1.12 \text{ m/s}^2$.

(!) **Lỗi thường gặp:** Do not confuse this instantaneous-acceleration calculation with the **maximum speed** calculation: at maximum speed, $a = 0$ and $P/v_{\max}$ exactly balances the total resistance. At any *other* speed (while the vehicle is still speeding up or slowing down), $F = P/v$ still gives the correct driving force *at that instant*, but this force does *not* balance the resistance – the imbalance is precisely ma , the (non-zero) instantaneous acceleration. Always substitute the specific speed given in the question into $F = P/v$, not the (generally different) maximum speed.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi công suất động cơ không đổi nhưng xe **chưa đạt tốc độ tối đa** (nghĩa là vẫn còn đang tăng tốc), lực kéo tại một thời điểm bất kỳ vẫn tính bằng $F = P/v$, nhưng dùng **vận tốc tức thời** v tại thời điểm đó (không phải vận tốc tối đa). Sau đó thay F này vào định luật II Newton, $F - (\text{lực cản}) = ma$, để tìm gia tốc tại đúng thời điểm đó. Đây khác với bài toán tốc độ tối đa, nơi gia tốc bằng không và lực kéo cân bằng chính xác với tổng lực cản.

Work & energy

$$W = Fd \cos \theta$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2, \quad E_p = mgh$$

Work-energy principle: $\sum W = \Delta E_k$

Energy "lost" to friction = $F_{\text{friction}} \times d$

Power

$$P = \frac{W}{t} = Fv$$

At maximum speed: $\frac{P}{v_{\max}} = R_{\text{total}}$

Instantaneous: $F = \frac{P}{v}$, then $F - R = ma$

Constant speed: driving force = total resistance

Quick-reference summary: work, energy, and power formulas.

Bài tập luyện tập

A stone is thrown vertically upward at 14 m/s. Find the maximum height and the total time to return to the ground ($g = 9.8$).

(A) $h = 10\text{m}, t = 2.86\text{s}$

(C) $h = 10\text{m}, t = 1.43\text{s}$

(B) $h = 14\text{m}, t = 2.8\text{s}$

(D) $h = 9.8\text{m}, t = 2\text{s}$

Lời giải chi tiết

$v^2 = u^2 - 2gh \Rightarrow 0 = 196 - 19.6h \Rightarrow h = 10 \text{ m}$. Time up: $t = u/g = 14/9.8 = 1.4286\text{s}$; total (symmetric) = $2.857 \approx 2.86\text{s}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A particle decelerates uniformly from 30 m/s to rest, travelling a distance of 225 m. Find the deceleration and the time taken.

(A) 2 m/s^2 , 15 s

(C) 3 m/s^2 , 10 s

(B) 1.5 m/s^2 , 20 s

(D) 2 m/s^2 , 7.5 s

Lời giải chi tiết

$$v^2 = u^2 + 2as \Rightarrow 0 = 900 + 2a(225) \Rightarrow a = -\frac{900}{450} = -2 \text{ m/s}^2 \text{ (deceleration } 2 \text{ m/s}^2). \quad t = \frac{v - u}{a} = \frac{0 - 30}{-2} = 15 \text{ s. (A).}$$

Bài tập luyện tập

A cyclist accelerates uniformly from rest to 8 m/s in 4 s, travels at this constant speed for 20 s, then decelerates uniformly to rest in 5 s. Find the total distance travelled and the average speed for the whole journey.

Lời giải chi tiết

Stage 1: $s_1 = \frac{1}{2}(0+8)(4) = 16 \text{ m}$. Stage 2: $s_2 = 8(20) = 160 \text{ m}$. Stage 3: $s_3 = \frac{1}{2}(8+0)(5) = 20 \text{ m}$. Total distance = $16 + 160 + 20 = 196 \text{ m}$. Total time = $4 + 20 + 5 = 29 \text{ s}$. Average speed = $\frac{196}{29} = 6.76 \text{ m/s}$.

Bài tập luyện tập

A van accelerates uniformly from rest to 15 m/s in 5 s, travels at 15 m/s for 12 s, then decelerates uniformly to rest in 3 s. Find the total distance travelled and the average speed.

(A) 240m, 12m/s

(C) 240m, 15m/s

(B) 225m, 11.25m/s

(D) 180m, 9m/s

Lời giải chi tiết

Areas: $\frac{1}{2}(5)(15) + 12(15) + \frac{1}{2}(3)(15) = 37.5 + 180 + 22.5 = 240 \text{ m}$. Total time = $5 + 12 + 3 = 20 \text{ s}$. Average speed = $240/20 = 12 \text{ m/s}$. (A).

Bài tập luyện tập

A particle moves so that its velocity is $v = 3t^2 - 18t + 24 \text{ (m/s)}$ for $0 \leq t \leq 6$. Find (a) the times at which the particle is instantaneously at rest, (b) the acceleration at $t = 5$, (c) the total distance travelled in the first 6 seconds.

Lời giải chi tiết

(a) $3t^2 - 18t + 24 = 3(t-2)(t-4) = 0 \Rightarrow t = 2, 4 \text{ s}$. (b) $a = \frac{dv}{dt} = 6t - 18$; at $t = 5$: $a = 30 - 18 = 12 \text{ m/s}^2$. (c) $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (taking $s(0) = 0$). $s(0) = 0$, $s(2) = 8 - 36 + 48 =$

20, $s(4) = 64 - 144 + 96 = 16$, $s(6) = 216 - 324 + 144 = 36$. On $[0, 2]$, $v > 0$: distance = 20. On $[2, 4]$, $v < 0$: distance = $|16 - 20| = 4$. On $[4, 6]$, $v > 0$: distance = $36 - 16 = 20$. Total distance = $20 + 4 + 20 = 44$ m (net displacement is 36 m).

Bài tập luyện tập

A particle has velocity $v = 6t - t^2$ (m/s) for $0 \leq t \leq 6$. Find the distance travelled and the maximum speed.

(A) 36m, 9m/s

(C) 36m, 6m/s

(B) 72m, 9m/s

(D) 18m, 9m/s

Lời giải chi tiết

$v = t(6 - t) \geq 0$ throughout, so distance = $\int_0^6 (6t - t^2) dt = \left[3t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^6 = 108 - 72 = 36$ m.
 $\frac{dv}{dt} = 6 - 2t = 0 \Rightarrow t = 3$, $v(3) = 18 - 9 = 9$ m/s. (A).

Bài tập luyện tập

A ball is dropped from rest from a height of 45 m. Find the time taken to reach the ground and the speed of impact (ignore air resistance).

(A) $t = 3.03$ s, $v = 29.7$ m/s

(C) $t = 2.14$ s, $v = 21$ m/s

(B) $t = 3$ s, $v = 30$ m/s

(D) $t = 3.03$ s, $v = 45$ m/s

Lời giải chi tiết

$s = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow 45 = 4.9t^2 \Rightarrow t^2 = 9.184 \Rightarrow t = 3.03$ s. $v^2 = 2gs = 2(9.8)(45) = 882 \Rightarrow v = 29.7$ m/s. (A).

Bài tập luyện tập

Three coplanar forces act on a particle in equilibrium: 10 N due north, 10 N due east, and a third force **F**. Find the magnitude and direction of **F**.

(A) 14.1 N, S45°W

(C) 14.1 N, N45°E

(B) 20 N, S45°W

(D) 10 N, S45°W

Lời giải chi tiết

Resultant of the two given forces: magnitude = $\sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 14.1$ N, direction N45°E (bisecting north and east). For equilibrium, **F** must be equal in magnitude and exactly opposite in direction: 14.1 N, S45°W. (A).

Bài tập luyện tập

A 6 kg block rests in equilibrium on a smooth plane inclined at 25° to the horizontal, held by a force **P** acting parallel to the plane, up the slope. Find **P** and the normal reaction **R**.

Lời giải chi tiết

$$P = mg \sin 25^\circ = 6(9.8)(0.4226) = 24.8 \text{ N. } R = mg \cos 25^\circ = 6(9.8)(0.9063) = 53.3 \text{ N.}$$

Bài tập luyện tập

A horizontal force of 15 N just moves a 4 kg block at constant velocity across a rough horizontal surface. Find the coefficient of friction μ .

(A) 0.383

(C) 0.417

(B) 0.255

(D) 0.75

Lời giải chi tiết

Constant velocity $\Rightarrow$ equilibrium: applied force = friction $= \mu R = \mu mg$. $15 = \mu(4)(9.8) = 39.2\mu \Rightarrow \mu = \frac{15}{39.2} = 0.383$. (A).

Bài tập luyện tập

A block of mass 10 kg lies on a rough horizontal surface ($\mu = 0.25$). Find the least force P , applied at 30° above the horizontal, needed to make the block just start to move.

Lời giải chi tiết

At limiting equilibrium: horizontally, $P \cos 30^\circ = \mu R$; vertically, $R = mg - P \sin 30^\circ$ (the upward component of P reduces R). $P \cos 30^\circ = \mu(mg - P \sin 30^\circ) \Rightarrow P(\cos 30^\circ + \mu \sin 30^\circ) = \mu mg$.
$$P = \frac{0.25(10)(9.8)}{\cos 30^\circ + 0.25 \sin 30^\circ} = \frac{24.5}{0.8660 + 0.125} = \frac{24.5}{0.9910} = 24.7 \text{ N.}$$

Bài tập luyện tập

A 5 kg box on a rough plane inclined at 35° is in limiting equilibrium, on the point of sliding down. Find the coefficient of friction μ .

(A) 0.700

(C) 0.819

(B) 0.574

(D) 0.35

Lời giải chi tiết

On the point of sliding down, friction acts up the slope at its maximum: $mg \sin 35^\circ = \mu mg \cos 35^\circ \Rightarrow \mu = \tan 35^\circ = 0.700$. (A).

Bài tập luyện tập

A parcel of mass 12 kg rests on a rough plane inclined at 20° to the horizontal, where $\mu = 0.15$. A force P acts on the parcel up the line of greatest slope. Find the range of values of P for which the parcel remains in equilibrium.

Lời giải chi tiết

$mg \sin 20^\circ = 12(9.8)(0.3420) = 40.2 \text{ N}$. $\mu mg \cos 20^\circ = 0.15(12)(9.8)(0.9397) = 16.6 \text{ N}$. $P_{\min} = 40.2 - 16.6 = 23.6 \text{ N}$ (on the point of sliding down). $P_{\max} = 40.2 + 16.6 = 56.8 \text{ N}$ (on the point of sliding up). Range: $23.6 \text{ N} \leq P \leq 56.8 \text{ N}$.

Bài tập luyện tập

A particle of weight 30 N hangs in equilibrium, supported by two light strings inclined at 30° and 60° to the horizontal on opposite sides of the vertical (so the strings are perpendicular to each other). Find the tension in each string.

(A) 15N and 26.0N**(C)** 15N and 15N**(B)** 26.0N and 15N (reversed)**(D)** 30N and 17.3N**Lời giải chi tiết**

Let T_1 be the tension in the 30° string, T_2 in the 60° string. Horizontal: $T_1 \cos 30^\circ = T_2 \cos 60^\circ$. Vertical: $T_1 \sin 30^\circ + T_2 \sin 60^\circ = 30$. From the first equation, $T_1 = T_2 \frac{\cos 60^\circ}{\cos 30^\circ} = T_2(0.5774)$. Substituting: $0.5774T_2(0.5) + T_2(0.8660) = 30 \Rightarrow 1.1547T_2 = 30 \Rightarrow T_2 = 26.0 \text{ N}$, $T_1 = 15.0 \text{ N}$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Masses $A = 2\text{kg}$ and $B = 5\text{kg}$ hang from a light inextensible string over a smooth pulley (Atwood machine). Find the acceleration and the tension.

(A) $a = 4.2\text{m/s}^2$, $T = 28\text{N}$ **(C)** $a = 4.2$, $T = 49\text{N}$ **(B)** $a = 3.5$, $T = 25\text{N}$ **(D)** $a = 2.8$, $T = 28\text{N}$ **Lời giải chi tiết**

$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2} = \frac{3(9.8)}{7} = 4.2 \text{ m/s}^2$. $T = m_1(g + a) = 2(9.8 + 4.2) = 28\text{N}$ (check via B : $T = m_2(g - a) = 5(9.8 - 4.2) = 28\text{N}$). **(A).**

Bài tập luyện tập

A resultant force of 24 N acts on a particle of mass 3 kg, initially at rest. Find the distance travelled in the first 4 seconds.

(A) 64m**(C)** 96m**(B)** 48m**(D)** 32m**Lời giải chi tiết**

$a = \frac{F}{m} = \frac{24}{3} = 8 \text{ m/s}^2$. $s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}(8)(16) = 64 \text{ m}$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Blocks A (3 kg) and B (2 kg) are in contact on a smooth horizontal surface. A horizontal force of 20 N pushes A into B . Find the acceleration of the system and the contact force between A and B .

Lời giải chi tiết

Whole system: $a = \frac{20}{3+2} = 4 \text{ m/s}^2$. Considering B alone (only force on B is the contact force N from A): $N = m_B a = 2(4) = 8 \text{ N}$.

Bài tập luyện tập

A woman of mass 60 kg stands on scales in a lift that accelerates downward at 1.5 m/s^2 . Find the reading on the scales.

(A) 498N

(C) 678N

(B) 588N

(D) 498N, plus 90N less than her true weight

Lời giải chi tiết

$R = m(g - a) = 60(9.8 - 1.5) = 60(8.3) = 498 \text{ N}$. (A) (her true weight is 588N, so the reading is 90N less, but the requested value is 498N).

Bài tập luyện tập

A 4 kg block on a smooth horizontal table is connected by a light inextensible string, passing over a smooth pulley at the edge of the table, to a 6 kg mass hanging freely. Find the acceleration of the system and the tension in the string.

Lời giải chi tiết

Only the hanging mass's weight drives the (frictionless) system: $a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = \frac{6(9.8)}{10} = 5.88 \text{ m/s}^2$. $T = m_1 a = 4(5.88) = 23.5 \text{ N}$ (check via the hanging mass: $T = m_2(g - a) = 6(9.8 - 5.88) = 23.5 \text{ N}$ ✓).

Bài tập luyện tập

An engine of mass 8000 kg pulls a single truck of mass 2000 kg along a level track with acceleration 0.5 m/s^2 . The resistance to the engine's motion is 1000 N and to the truck's motion is 300 N. Find the engine's driving force and the tension in the coupling.

(A) 6300N, 1300N

(C) 6300N, 1000N

(B) 5000N, 1000N

(D) 5300N, 1300N

Lời giải chi tiết

Whole system (mass 10 000 kg): $F_{\text{drive}} - (1000 + 300) = 10\,000(0.5) = 5000 \Rightarrow F_{\text{drive}} = 6300 \text{ N}$.
Truck alone: $T - 300 = 2000(0.5) = 1000 \Rightarrow T = 1300 \text{ N}$. (A).

Bài tập luyện tập

Particles A (2 kg, hanging vertically) and B (3 kg, on a smooth plane inclined at 30°) are connected by a light string over a smooth pulley at the top of the incline. Find the acceleration of the system and the tension in the string.

Lời giải chi tiết

Check direction: $m_A g = 2(9.8) = 19.6$ N versus $m_B g \sin 30^\circ = 3(9.8)(0.5) = 14.7$ N; since $19.6 > 14.7$, A descends, pulling B up the slope. $(m_A + m_B)a = m_A g - m_B g \sin 30^\circ = 19.6 - 14.7 = 4.9 \Rightarrow a = \frac{4.9}{5} = 0.98$ m/s². $T = m_A(g - a) = 2(9.8 - 0.98) = 17.64$ N (check via B : $T = m_B g \sin 30^\circ + m_B a = 14.7 + 3(0.98) = 17.64$ N ✓).

Bài tập luyện tập

A 2000kg truck at 3 m/s couples with a stationary 3000kg truck. Find the common velocity and the KE lost.

(A) $v = 1.2$ m/s, loss = 5400J

(C) $v = 1.8$, loss = 3000J

(B) $v = 1.2$, loss = 9000J

(D) $v = 1.2$, loss = 3600J

Lời giải chi tiết

$2000(3) = 5000v \Rightarrow v = 1.2$ m/s. KE before = $\frac{1}{2}(2000)(9) = 9000$ J; KE after = $\frac{1}{2}(5000)(1.44) = 3600$ J. Loss = 5400J. (A).

Bài tập luyện tập

A ball of mass 2 kg moving at 5 m/s collides directly with a ball of mass 3 kg moving at 2 m/s in the opposite direction. After the collision the 2 kg ball moves at -1 m/s. Find the velocity of the 3 kg ball after the collision.

(A) 2m/s

(C) 3m/s

(B) 1m/s

(D) 0.5m/s

Lời giải chi tiết

Taking the 2kg ball's initial direction as positive, the 3kg ball's initial velocity is -2 m/s. Momentum before = $2(5) + 3(-2) = 10 - 6 = 4$. Momentum after = $2(-1) + 3v = 4 \Rightarrow -2 + 3v = 4 \Rightarrow v = 2$ m/s. (A).

Bài tập luyện tập

A constant force of 15 N acts on a 3 kg mass, initially at rest, for 4 seconds. Find the impulse given to the mass and its final velocity.

Lời giải chi tiết

Impulse = $F\Delta t = 15(4) = 60$ Ns. $\Delta v = \frac{\text{impulse}}{m} = \frac{60}{3} = 20$ m/s, so the final velocity is 20 m/s (from rest).

Bài tập luyện tập

A 0.3 kg ball moving at 8 m/s embeds itself in a stationary 0.9 kg block. Find the common velocity after impact and the kinetic energy lost.

(A) $v = 2\text{ m/s}$, loss = 7.2J

(C) $v = 6\text{ m/s}$, loss = 2.4J

(B) $v = 2\text{ m/s}$, loss = 9.6J

(D) $v = 2.67\text{ m/s}$, loss = 4.8J

Lời giải chi tiết

$0.3(8) = (0.3 + 0.9)v = 1.2v \Rightarrow v = 2\text{ m/s}$. KE before = $\frac{1}{2}(0.3)(64) = 9.6\text{J}$. KE after = $\frac{1}{2}(1.2)(4) = 2.4\text{J}$. Loss = $9.6 - 2.4 = 7.2\text{J}$. (A).

Bài tập luyện tập

A gun of mass 5 kg fires a bullet of mass 0.05 kg at 400 m/s. Find the recoil velocity of the gun.

Lời giải chi tiết

Total momentum before firing is zero (both at rest), so it remains zero after firing: $0 = 5V + 0.05(400) \Rightarrow V = -\frac{20}{5} = -4\text{ m/s}$, i.e. the gun recoils at 4 m/s in the direction opposite to the bullet.

Bài tập luyện tập

A tennis ball of mass 0.06 kg hits a wall at 25 m/s (perpendicular to the wall) and rebounds at 20 m/s. The impact lasts 0.05 s. Find the average force exerted by the wall on the ball.

(A) 54N

(C) 60N

(B) 30N

(D) 27N

Lời giải chi tiết

Taking the direction toward the wall as positive: $u = 25$, $v = -20$. Impulse = $m(v - u) = 0.06(-45) = -2.7\text{Ns}$. Force = $\frac{-2.7}{0.05} = -54\text{N}$, so the magnitude of the average force is 54N. (A).

Bài tập luyện tập

Particles A (mass 4kg, velocity 6 m/s) and B (mass 2kg, at rest) collide directly; after the collision A has velocity 2 m/s in the same direction. Find B's velocity after the collision, and determine whether kinetic energy is conserved in this collision.

Lời giải chi tiết

Momentum: $4(6) + 0 = 4(2) + 2v \Rightarrow 24 = 8 + 2v \Rightarrow v = 8\text{ m/s}$. KE before = $\frac{1}{2}(4)(36) = 72\text{J}$. KE after = $\frac{1}{2}(4)(4) + \frac{1}{2}(2)(64) = 8 + 64 = 72\text{J}$. Since KE before = KE after, kinetic energy is conserved – this is an elastic collision.

Bài tập luyện tập

A 900kg car travels at constant 20 m/s against 500N resistance. Find the engine power, then the power needed on a hill with $\sin(\text{incline}) = \frac{1}{20}$ at the same speed and resistance.

(A) 10kW then 18.8kW

(C) 18kW then 10kW

(B) 10kW then 9.41kW

(D) 10kW both

Lời giải chi tiết

Flat: $F = \text{resistance} = 500\text{N}$, $P = Fv = 10\,000\text{W} = 10\text{kW}$. Hill: $F' = 500 + mg \sin \theta = 500 + 900(9.8)(0.05) = 941\text{N}$, $P' = 941(20) = 18\,820\text{W} \approx 18.8\text{kW}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A force of 25 N, acting at 40° above the horizontal, pulls a box a distance of 8 m across a horizontal floor. Find the work done by the force.

(A) 153J

(C) 128J

(B) 200J

(D) 161J

Lời giải chi tiết

$W = Fd \cos \theta = 25(8) \cos 40^\circ = 200(0.7660) = 153\text{J}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A 1500kg car travelling at 20 m/s brakes and comes to rest after travelling 50 m. Find the (constant) braking force.

Lời giải chi tiết

Work-energy principle: $F \times d = \Delta E_k \Rightarrow F(50) = \frac{1}{2}(1500)(20^2) = 300\,000\text{J} \Rightarrow F = \frac{300\,000}{50} = 6000\text{N}$.

Bài tập luyện tập

A skier of mass 60kg slides from rest down a smooth slope of vertical height 40m. Find her speed at the bottom.

(A) 28m/s

(C) 40m/s

(B) 19.6m/s

(D) 8.85m/s

Lời giải chi tiết

Energy conservation (smooth $\Rightarrow$ no energy lost): $mgh = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9.8)(40)} = \sqrt{784} = 28\text{m/s}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A cyclist and bicycle of total mass 80kg travel up a slope for which $\sin \theta = 0.1$, at constant speed 5m/s, against a resistance of 30N. Find the power developed by the cyclist.

(A) 542W**(C)** 392W**(B)** 150W**(D)** 490W**Lời giải chi tiết**

At constant speed, driving force = resistance + $mg \sin \theta = 30 + 80(9.8)(0.1) = 30 + 78.4 = 108.4\text{N}$. $P = Fv = 108.4(5) = 542\text{W}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A van of mass 1500kg has an engine working at a constant power of 45kW against a constant resistance of 750N. Find the maximum speed on a level road, and the maximum speed up an incline for which $\sin \theta = \frac{1}{25}$ (same resistance).

Lời giải chi tiết

Level: $v_{\max} = \frac{P}{R} = \frac{45\,000}{750} = 60\text{ m/s}$. Incline: total resistance = $750 + 1500(9.8)(\frac{1}{25}) = 750 + 588 = 1338\text{N}$. $v_{\max} = \frac{45\,000}{1338} = 33.6\text{ m/s}$.

Bài tập luyện tập

A 3 kg block is released from rest and slides 4 m down a rough plane inclined at 20° to the horizontal, where $\mu = 0.2$. Find its speed at the bottom of the incline.

(A) 3.48m/s**(C)** 3.66m/s**(B)** 5.19m/s**(D)** 4.85m/s**Lời giải chi tiết**

Height dropped: $h = 4 \sin 20^\circ = 4(0.3420) = 1.368\text{ m}$. PE lost = $mgh = 3(9.8)(1.368) = 40.22\text{ J}$. Normal reaction $R = mg \cos 20^\circ = 3(9.8)(0.9397) = 27.63\text{ N}$, so friction $F = \mu R = 0.2(27.63) = 5.53\text{ N}$. Work done against friction = $F \times 4 = 5.53(4) = 22.10\text{ J}$. KE at the bottom = $40.22 - 22.10 = 18.12\text{ J}$. $v = \sqrt{\frac{2(18.12)}{3}} = \sqrt{12.08} = 3.48\text{ m/s}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A particle moves in a straight line so that its velocity is $v = 4t - t^2$ (m/s) for $0 \leq t \leq 5$. Find the total distance travelled and the displacement, both over the first 5 seconds.

(A) 13.0m, 8.33m**(C)** 13.0m, 10.7m**(B)** 10.7m, 8.33m**(D)** 8.33m, 13.0m

Lời giải chi tiết

$v = t(4 - t) = 0$ at $t = 0, 4$; $v \geq 0$ on $[0, 4]$ and $v < 0$ on $[4, 5]$. Taking $s(0) = 0$: $s(t) = 2t^2 - \frac{t^3}{3}$.
 $s(4) = 32 - \frac{64}{3} = 10.67\text{m}$, $s(5) = 50 - \frac{125}{3} = 8.33\text{m}$. Distance on $[0, 4]$ is 10.67m ; distance on $[4, 5]$ is $|8.33 - 10.67| = 2.33\text{m}$. Total distance = $10.67 + 2.33 = 13.0\text{m}$. Displacement over the first 5 seconds = $s(5) - s(0) = 8.33\text{m}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Particles P and Q start moving towards each other along a straight line, initially 200 m apart. P moves at a constant 12 m/s and Q moves at a constant 8 m/s . Find the time until they meet, and the distance from P 's starting point at which they meet.

Lời giải chi tiết

The distance between them closes at a combined rate of $12 + 8 = 20\text{ m/s}$, so the time to meet is $t = \frac{200}{20} = 10\text{ s}$. Distance from P 's start: $s = 12(10) = 120\text{ m}$ (check: Q travels $8(10) = 80\text{ m}$, and $120 + 80 = 200\text{ m}$ ✓).

Bài tập luyện tập

A particle of weight 60 N is held in equilibrium by a horizontal force H and a light string inclined at 40° to the vertical. Find the tension T in the string and the force H .

(A) $T = 78.3\text{N}$, $H = 50.3\text{N}$

(C) $T = 78.3\text{N}$, $H = 60\text{N}$

(B) $T = 60\text{N}$, $H = 50.3\text{N}$

(D) $T = 50.3\text{N}$, $H = 78.3\text{N}$

Lời giải chi tiết

Resolving vertically (the string's vertical component supports the weight): $T \cos 40^\circ = 60 \Rightarrow T = \frac{60}{\cos 40^\circ} = \frac{60}{0.7660} = 78.3\text{ N}$. Resolving horizontally: $H = T \sin 40^\circ = 78.3(0.6428) = 50.3\text{ N}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A block of mass 4 kg is placed on a rough plane inclined at 28° to the horizontal, where $\mu = 0.35$. Determine whether the block remains in equilibrium or slides down, and if it slides, find its acceleration.

Lời giải chi tiết

Driving component: $mg \sin 28^\circ = 4(9.8)(0.4695) = 18.40\text{ N}$. Maximum available friction: $\mu mg \cos 28^\circ = 0.35(4)(9.8)(0.8829) = 12.11\text{ N}$. Since $18.40 > 12.11$, the block **slides down** (friction cannot hold it in equilibrium). Net force down the slope = $18.40 - 12.11 = 6.29\text{ N}$.
 $a = \frac{6.29}{4} = 1.57\text{ m/s}^2$.

Bài tập luyện tập

A 3 kg block on a rough horizontal surface requires a horizontal force of 10 N to move it at constant velocity. Find the coefficient of friction μ .

(A) 0.340

(C) 0.408

(B) 0.294

(D) 0.255

Lời giải chi tiết

Constant velocity $\Rightarrow$ equilibrium: applied force = friction = μmg . $10 = \mu(3)(9.8) = 29.4\mu \Rightarrow \mu = \frac{10}{29.4} = 0.340$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A car of mass 900 kg tows a trailer of mass 300 kg on a level road. The driving force is 3000 N; resistances are 400 N (car) and 200 N (trailer). Find the acceleration of the car and trailer, and the tension in the tow-bar.

(A) $a = 2\text{m/s}^2$, $T = 800\text{N}$ (C) $a = 2\text{m/s}^2$, $T = 600\text{N}$ (B) $a = 2.5\text{m/s}^2$, $T = 750\text{N}$ (D) $a = 1.5\text{m/s}^2$, $T = 800\text{N}$ **Lời giải chi tiết**

Whole system (mass 1200 kg): $3000 - (400 + 200) = 1200a \Rightarrow 2400 = 1200a \Rightarrow a = 2\text{ m/s}^2$.
Trailer alone: $T - 200 = 300(2) = 600 \Rightarrow T = 800\text{ N}$ (check via the car: $3000 - 400 - T = 900(2) \Rightarrow T = 3000 - 400 - 1800 = 800\text{N}$ ✓). **(A)**.

Bài tập luyện tập

A man of mass 80 kg stands on scales in a lift that is moving upward but decelerating at 2.5 m/s^2 . Find the reading on the scales.

Lời giải chi tiết

Decelerating while moving upward means the acceleration is directed **downward**, magnitude 2.5 m/s^2 , so $R = m(g - a) = 80(9.8 - 2.5) = 80(7.3) = 584\text{ N}$.

Bài tập luyện tập

Masses $A = 4\text{kg}$ (hanging freely) and $B = 6\text{kg}$ (on a rough plane inclined at 20° , $\mu = 0.2$) are connected by a light string over a smooth pulley at the top of the incline. Show the system accelerates, and find the acceleration and the tension in the string.

Lời giải chi tiết

Without friction: $m_A g = 4(9.8) = 39.2\text{ N}$ versus $m_B g \sin 20^\circ = 6(9.8)(0.3420) = 20.11\text{ N}$; imbalance = $39.2 - 20.11 = 19.09\text{ N}$. Maximum friction: $\mu m_B g \cos 20^\circ = 0.2(6)(9.8)(0.9397) = 11.05\text{ N}$. Since $19.09 > 11.05$, the system **does** accelerate (A descends, B moves up the slope, friction acts down the slope on B). $(m_A + m_B)a = m_A g - m_B g \sin 20^\circ - \mu m_B g \cos 20^\circ = 39.2 - 20.11 - 11.05 = 8.04 \Rightarrow a = \frac{8.04}{10} = 0.804\text{ m/s}^2$. $T = m_A(g - a) = 4(9.8 - 0.804) = 36.0\text{ N}$ (check via B : $T = m_B g \sin 20^\circ + \mu m_B g \cos 20^\circ + m_B a = 20.11 + 11.05 + 6(0.804) = 36.0\text{N}$ ✓).

Bài tập luyện tập

Spheres A (mass 3kg, velocity 4 m/s) and B (mass 2kg, velocity 6 m/s in the *opposite* direction) collide directly. After the collision A has velocity 2 m/s in the direction opposite to its original motion. Find the velocity of B after the collision.

(A) 3m/s**(C)** 6m/s**(B)** -3m/s**(D)** 1.5m/s**Lời giải chi tiết**

Taking A 's original direction as positive, B 's initial velocity is -6 m/s and A 's final velocity is -2 m/s. Momentum before $= 3(4) + 2(-6) = 12 - 12 = 0$. Momentum after $= 3(-2) + 2v = 0 \Rightarrow -6 + 2v = 0 \Rightarrow v = 3$ m/s (in A 's original positive direction). **(A)**.

Bài tập luyện tập

A ball of mass 0.2 kg falls and strikes the ground at 14 m/s, rebounding vertically at 10 m/s. The ball is in contact with the ground for 0.02 s. Find the impulse exerted by the ground on the ball, and the average force exerted.

Lời giải chi tiết

Taking downward (the direction of approach) as positive: $u = 14$, $v = -10$. Impulse $= m(v - u) = 0.2(-10 - 14) = 0.2(-24) = -4.8$ Ns (magnitude 4.8 Ns, directed upward). Average force $= \frac{\text{impulse}}{\text{time}} = \frac{-4.8}{0.02} = -240$ N, so the ground exerts an average force of 240 N upward on the ball.

Bài tập luyện tập

A car of mass 1200 kg travelling at 25 m/s brakes with a constant braking force of 3000 N; in addition, a constant resistance of 500 N acts throughout. Find the distance travelled before the car comes to rest.

(A) 107m**(C)** 75m**(B)** 125m**(D)** 214m**Lời giải chi tiết**

Total retarding force $= 3000 + 500 = 3500$ N. Work-energy principle: $3500d = \frac{1}{2}(1200)(25^2) = 375\,000$ J $\Rightarrow d = \frac{375\,000}{3500} = 107$ m. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A lorry of mass 2500 kg moves up a slope inclined at angle θ , where $\sin \theta = 0.08$, against a constant resistance of 600 N. The engine works at a constant power of 45 000 W. Find the acceleration of the lorry at the instant its speed is 12 m/s.

Lời giải chi tiết

Driving force at this instant: $F = \frac{P}{v} = \frac{45\,000}{12} = 3750 \text{ N}$. $F - R - mg \sin \theta = ma \Rightarrow 3750 - 600 - 2500(9.8)(0.08) = 2500a \Rightarrow 3750 - 600 - 1960 = 1190 = 2500a \Rightarrow a = 0.476 \text{ m/s}^2$.

Bài tập luyện tập

A particle starts from rest at the origin with acceleration $a = (6 - 2t) \text{ m/s}^2$ at time t . Find its displacement after 5 seconds and the maximum velocity it attains.

(A) 33.3m, 9m/s

(C) 33.3m, 6m/s

(B) 41.7m, 9m/s

(D) 25m, 9m/s

Lời giải chi tiết

$v = \int (6 - 2t) dt = 6t - t^2 + C$; $v(0) = 0 \Rightarrow C = 0$, so $v = 6t - t^2 = t(6 - t)$, which is ≥ 0 for $0 \leq t \leq 6$ (no sign change on $[0, 5]$). $s = \int v dt = 3t^2 - \frac{t^3}{3} + C_2$; $s(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$. $s(5) = 3(25) - \frac{125}{3} = 75 - 41.67 = 33.3 \text{ m}$. Maximum velocity when $a = 0$: $6 - 2t = 0 \Rightarrow t = 3$, $v(3) = 18 - 9 = 9 \text{ m/s}$. (A).

Bài tập luyện tập

A block of mass 5 kg is projected up a rough plane inclined at 25° to the horizontal, with initial speed 6 m/s, where $\mu = 0.25$. Find the distance travelled up the slope before the block comes instantaneously to rest.

(A) 2.83m

(C) 2.20m

(B) 4.35m

(D) 3.67m

Lời giải chi tiết

Moving up the slope, both gravity's component and friction act down the slope (opposing the motion), so the total retarding force is $mg \sin 25^\circ + \mu mg \cos 25^\circ = mg(\sin 25^\circ + \mu \cos 25^\circ)$. $mg = 5(9.8) = 49 \text{ N}$. $\sin 25^\circ + \mu \cos 25^\circ = 0.4226 + 0.25(0.9063) = 0.4226 + 0.2266 = 0.6492$. Retarding force $= 49(0.6492) = 31.81 \text{ N}$. Work-energy principle: $\frac{1}{2}mv^2 = (\text{retarding force}) \times d \Rightarrow \frac{1}{2}(5)(6^2) = 90 = 31.81 d \Rightarrow d = \frac{90}{31.81} = 2.83 \text{ m}$. (A).

Probability & Statistics 1

Mục tiêu Unit: Biểu diễn dữ liệu (trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn, tứ phân vị, biểu đồ hộp, biểu đồ thân-lá, biểu đồ tần số tích lũy, mã hóa dữ liệu); chỉnh hợp – tổ hợp; xác suất (biến cố độc lập, xác suất có điều kiện, sơ đồ cây, sơ đồ Venn); biến ngẫu nhiên rời rạc và phân phối nhị thức; phân phối chuẩn và xấp xỉ chuẩn cho phân phối nhị thức (Cambridge 9709 Paper 5).

6.1 Representation of data

6.1.1 Measures of central tendency: mean, median and mode

Three single numbers are commonly used to describe the “centre” of a data set.

- The **mean** $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ uses every value and is the most commonly quoted average, but it is sensitive to extreme values.
- The **median** is the middle value when the data are arranged in order. For n values, it is the $\frac{n+1}{2}$ -th value; if n is even, it is the average of the two middle values. The median is not affected by extreme values (it is *resistant to outliers*).
- The **mode** (or modal value/class) is the value(s) occurring most frequently. It is the only average that can be used for non-numerical (categorical) data.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trung bình cộng (mean) dùng tất cả các giá trị nên nhạy với số liệu bất thường (outlier); trung vị (median) là giá trị ở giữa khi sắp xếp thứ tự, ít bị ảnh hưởng bởi outlier; mode là giá trị xuất hiện nhiều nhất. Khi dữ liệu có outlier mạnh, trung vị thường mô tả “trung tâm” tốt hơn trung bình.

6.1.2 Variance and standard deviation from raw data

$$\text{Mean } \bar{x} = \frac{\sum x}{n}; \quad \text{variance} = \frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}; \quad \text{standard deviation} = \sqrt{\text{variance}}.$$

The two forms of the variance formula are algebraically identical; the “sum of squares minus square of the mean” form ($\sum x^2/n - \bar{x}^2$) is almost always faster to compute by hand or calculator than expanding $\sum (x - \bar{x})^2$ directly.

Ví dụ mẫu • Worked example

Find the mean and standard deviation of 4, 7, 7, 9, 10, 13.

$$\sum x = 50 \Rightarrow \bar{x} = 8.333. \quad \sum x^2 = 16 + 49 + 49 + 81 + 100 + 169 = 464. \quad \text{Variance} = \frac{464}{6} - 8.333^2 = 77.333 - 69.444 = 7.889. \quad \text{SD} = \sqrt{7.889} = 2.809.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương sai (variance) đo độ phân tán của dữ liệu quanh giá trị trung bình; độ lệch chuẩn (SD) là căn bậc hai của phương sai, cùng đơn vị với dữ liệu gốc nên dễ so sánh hơn. Công thức nhanh: phương sai = $\overline{x^2} - \bar{x}^2$ (trung bình bình phương trừ bình phương trung bình).

(!) **Lỗi thường gặp:** Some calculators and statistics courses define variance/SD with a divisor of $n - 1$ (the “sample” variance, used to estimate an unknown population variance). Throughout Cambridge 9709 Paper 5, variance and standard deviation are defined with a divisor of n (or $\sum f$ for grouped data), exactly as in the formulas above — do not switch to $n - 1$ unless a question explicitly asks for an estimate of a population variance from a sample.

6.1.3 Mean, variance and standard deviation from a frequency table

When data are given as a frequency table (value x with frequency f), each value is effectively repeated f times, so $n = \sum f$ and:

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}; \quad \text{variance} = \frac{\sum fx^2}{\sum f} - \bar{x}^2; \quad \text{SD} = \sqrt{\text{variance}}.$$

For grouped (continuous) data, x is taken as the **mid-point** of each class interval; the formulas above then give *estimates* of the mean, variance and SD, since the exact values within each class are unknown.

Ví dụ mẫu · Worked example

The number of goals scored by a football team in each of 30 matches is summarised below. Find the mean and standard deviation of the number of goals scored.

Goals, x	0	1	2	3	4
Frequency, f	6	10	8	4	2

$$\begin{aligned} \sum f &= 30. \quad \sum fx = 0(6) + 1(10) + 2(8) + 3(4) + 4(2) = 10 + 16 + 12 + 8 = 46 \Rightarrow \bar{x} = \frac{46}{30} = 1.533. \\ \sum fx^2 &= 0^2(6) + 1^2(10) + 2^2(8) + 3^2(4) + 4^2(2) = 10 + 32 + 36 + 32 = 110. \quad \text{Variance} \\ &= \frac{110}{30} - 1.533^2 = 3.667 - 2.351 = 1.316. \quad \text{SD} = \sqrt{1.316} = 1.147 \text{ (3 s.f.)}. \end{aligned}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi dữ liệu cho theo bảng tần số, phải nhân mỗi giá trị với tần số tương ứng trước khi cộng: $\sum fx$ thay cho $\sum x$, và $\sum fx^2$ thay cho $\sum x^2$; $n = \sum f$ là tổng tần số (không phải số dòng trong bảng). Với dữ liệu ghép nhóm (khoảng lớp), dùng **giá trị đại diện** (mid-point) của mỗi lớp làm x .

6.1.4 Quartiles, interquartile range and outliers

The **quartiles** Q_1 , Q_2 (median), Q_3 divide ordered data into four equal parts. A common method (used throughout this unit): find the median Q_2 ; then Q_1 is the median of the values *below* Q_2 , and Q_3 is the median of the values *above* Q_2 (excluding the median itself when n is odd).

Interquartile range $\text{IQR} = Q_3 - Q_1$. A value is classified as an **outlier** if it lies

$$\text{below } Q_1 - 1.5 \times \text{IQR} \quad \text{or} \quad \text{above } Q_3 + 1.5 \times \text{IQR}.$$

A **box-and-whisker plot** displays the minimum, Q_1 , median, Q_3 and maximum as a box (from Q_1 to Q_3 , divided by the median) with whiskers extending to the smallest and largest values that are *not* outliers; outliers are plotted individually as separate points.

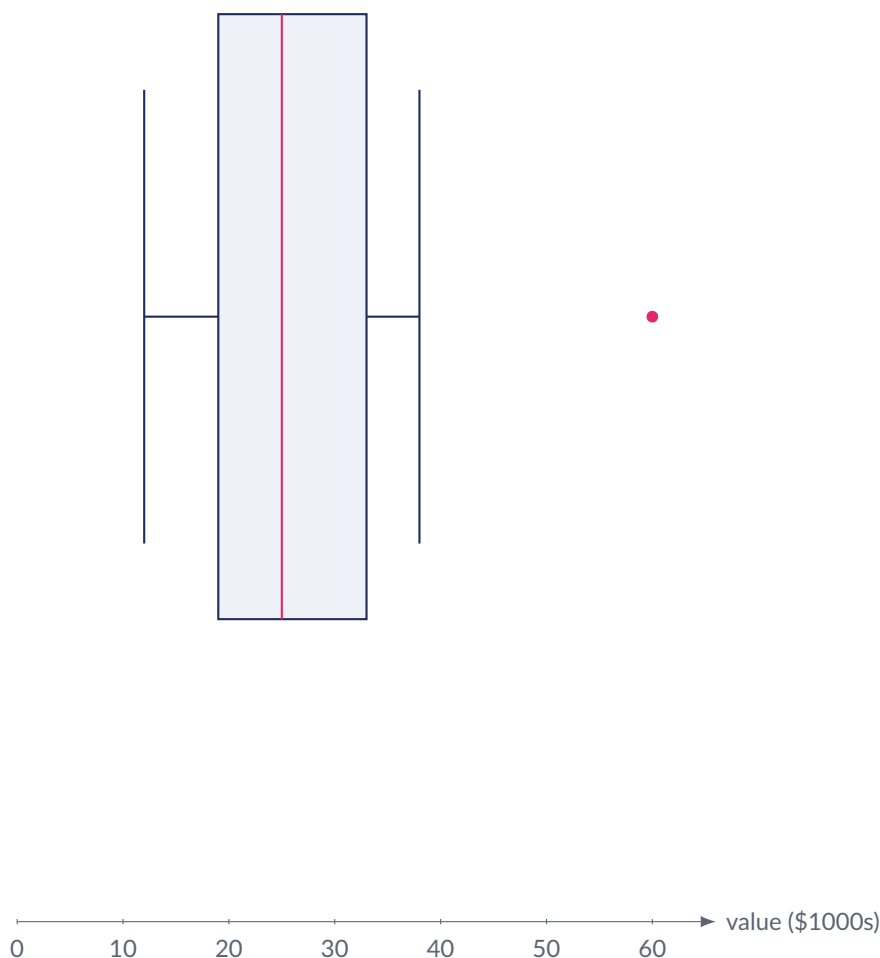
Ví dụ mẫu · Worked example

The following 15 values are house prices, in \$1000s, arranged in order:

12, 15, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 38, 60.

Find the median, quartiles, IQR, and determine whether 60 is an outlier.

$n = 15$, so the median is the 8th value: $Q_2 = 25$. Lower half (values 1–7): 12, 15, 18, 19, 21, 22, 24; the median of these 7 values is the 4th: $Q_1 = 19$. Upper half (values 9–15): 27, 29, 31, 33, 35, 38, 60; the median of these is the 4th: $Q_3 = 33$. $IQR = 33 - 19 = 14$. Upper fence = $Q_3 + 1.5(IQR) = 33 + 21 = 54$. Since $60 > 54$, the value 60 **is an outlier**; the whisker on the right should therefore stop at the largest non-outlier value, 38.



Box-and-whisker plot: $\min = 12$, $Q_1 = 19$, median = 25, $Q_3 = 33$, largest non-outlier = 38; the point at 60 lies beyond the upper fence 54 and is marked separately as an outlier.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tứ phân vị chia dữ liệu đã sắp xếp thành 4 phần bằng nhau; khoảng tứ phân vị $IQR = Q_3 - Q_1$ đo độ phân tán ở "50% giữa" của dữ liệu, ít bị ảnh hưởng bởi giá trị cực trị hơn so với khoảng biến thiên (range). Quy tắc "rào chắn" $Q_1 - 1.5 IQR$ và $Q_3 + 1.5 IQR$ giúp phát hiện outlier một cách khách quan; trên biểu đồ hộp, outlier được vẽ thành điểm riêng, còn râu (whisker) chỉ kéo

dài đến giá trị hợp lệ gần outlier nhất.

6.1.5 Stem-and-leaf diagrams

A **stem-and-leaf diagram** retains the actual data values (unlike a histogram) while showing the shape of the distribution. Each value is split into a “stem” (leading digit(s)) and a “leaf” (final digit); leaves are listed in increasing order on each stem row, and a key states how to read an entry.

For the data 12, 15, 18, 21, 23, 23, 27, 31, 34, 38, 42:

Stem	Leaf
1	2 5 8
2	1 3 3 7
3	1 4 8
4	2

Key: 1 | 2 means 12. Back-to-back stem-and-leaf diagrams (leaves for one data set to the left, another to the right of a shared central stem) are often used to compare two distributions directly.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

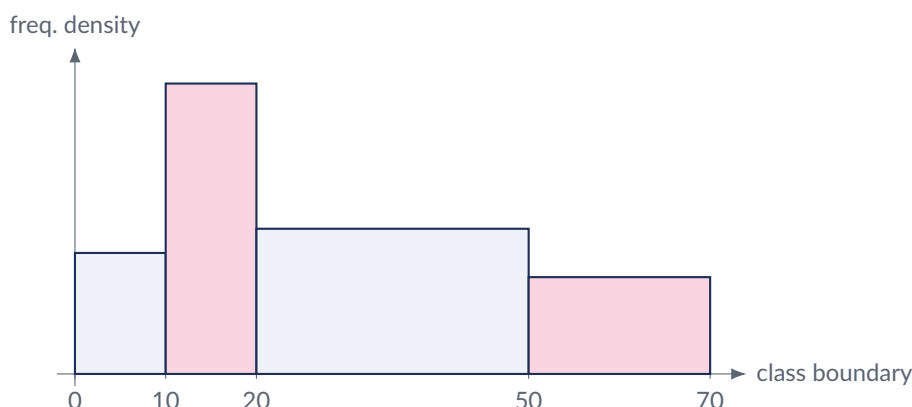
Biểu đồ thân-lá giữ nguyên từng giá trị dữ liệu gốc (khác với histogram chỉ cho biết tần số theo khoảng), đồng thời vẫn cho thấy hình dạng phân phối. “Thân” là (các) chữ số đầu, “lá” là chữ số cuối, sắp xếp tăng dần; luôn phải có **chú giải (key)** để người đọc biết cách diễn giải một mục.

6.1.6 Histograms with unequal class widths

For grouped data with class widths that are *not* all equal, a histogram must be drawn using **frequency density**, not frequency, on the vertical axis, so that the *area* of each bar (not its height) represents the frequency.

$$\text{Frequency density} = \frac{\text{frequency}}{\text{class width}}. \text{ Area of bar} = \text{frequency density} \times \text{class width} = \text{frequency}.$$

Bars are drawn with no gaps between them (the horizontal scale is continuous), positioned at the true class boundaries.



Histogram with unequal class widths: class [0, 10) has frequency 10 (FD = 1.0); [10, 20) has frequency 24 (FD = 2.4); [20, 50) has frequency 36 (FD = 1.2); [50, 70) has frequency 16 (FD = 0.8).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

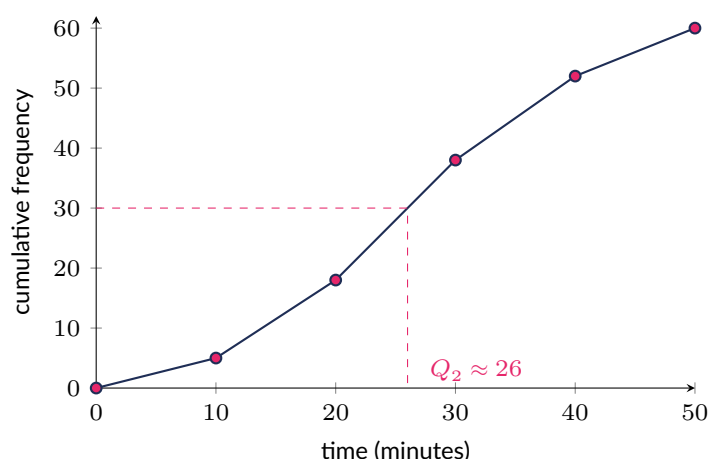
VN

Khi các khoảng lớp không bằng nhau, trục đứng của histogram **không** phải là tần số mà là **mật**

độ tần số = tần số ÷ độ rộng lớp, để **diện tích** mỗi cột (chứ không phải chiều cao) thể hiện đúng tần số của lớp đó. Đây là lỗi rất hay gặp: nếu vẽ trực tiếp tần số làm chiều cao khi độ rộng lớp khác nhau, hình sẽ sai lệch nghiêm trọng.

6.1.7 Cumulative frequency graphs

A **cumulative frequency graph** plots cumulative frequency (vertical axis) against the *upper class boundary* (horizontal axis) of each class, and the points are joined with a smooth curve (or ruled lines). It is used to estimate the median and quartiles of grouped data: the median is read at cumulative frequency $\frac{n}{2}$, Q_1 at $\frac{n}{4}$, and Q_3 at $\frac{3n}{4}$ (some syllabuses instead use $\frac{n+1}{2}$, $\frac{n+1}{4}$, $\frac{3(n+1)}{4}$ for grouped estimates; either convention is acceptable provided it is applied consistently).



Cumulative frequency curve for 60 students' completion times; the median is read where cumulative frequency $= n/2 = 30$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trên biểu đồ tần số tích lũy, luôn vẽ điểm tại **cận trên** của mỗi lớp (upper class boundary), không phải mid-point. Để ước lượng trung vị, giống ngang từ $n/2$ trên trục tung sang đường cong rồi giống xuống trục hoành; tương tự với Q_1 tại $n/4$ và Q_3 tại $3n/4$. Đọc sai trục (nhầm tần số với tần số tích lũy, hoặc đọc nhầm vạch chia) là lỗi rất phổ biến khi làm bài.

6.1.8 Comparing distributions

To compare two data sets, quote a measure of **location** (mean or median) together with a measure of **spread** (standard deviation, range, or IQR) for each, and interpret them in context:

- A larger mean/median indicates a data set with generally higher values.
- A larger SD or IQR indicates a data set that is more *variable* (spread out); a smaller SD or IQR indicates data that are more *consistent*.
- If a distribution is skewed or has outliers, the median and IQR are usually more appropriate (resistant) than the mean and SD.

Comparative statements should always be written in context, e.g. "On average, Class A scored higher than Class B (mean 72.4 vs. 68.1), but Class A's scores were more variable (SD 9.8 vs. 6.2)."

Ví dụ mẫu · Worked example

The test scores (out of 20) of two classes are given below.

Class A: 12, 14, 15, 16, 16, 17, 18, 20 Class B: 8, 10, 13, 15, 17, 18, 19, 20.

Find the mean and standard deviation for each class, and comment on the comparison.

Class A: $\sum x = 128 \Rightarrow \bar{x}_A = \frac{128}{8} = 16$. $\sum x^2 = 2090 \Rightarrow \text{variance} = \frac{2090}{8} - 16^2 = 261.25 - 256 = 5.25 \Rightarrow s_A = \sqrt{5.25} = 2.291$ (4 s.f.). **Class B:** $\sum x = 120 \Rightarrow \bar{x}_B = \frac{120}{8} = 15$. $\sum x^2 = 1932 \Rightarrow \text{variance} = \frac{1932}{8} - 15^2 = 241.5 - 225 = 16.5 \Rightarrow s_B = \sqrt{16.5} = 4.062$ (4 s.f.). **Comparison:** Class A had a slightly higher mean score (16 vs. 15), so on average Class A performed marginally better. However, Class B's standard deviation (4.06) is almost double Class A's (2.29), so Class B's scores were considerably more variable (more spread out), while Class A's scores were more consistently clustered around its mean.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi so sánh hai bộ dữ liệu, luôn nêu **cả hai loại đại lượng**: một đại lượng đo vị trí trung tâm (mean hoặc median) và một đại lượng đo độ phân tán (SD, range, hoặc IQR), và diễn giải theo đúng ngữ cảnh đề bài (ví dụ điểm thi, chiều cao, thời gian...). Không được chỉ so sánh mỗi giá trị trung bình mà bỏ qua độ phân tán.

6.1.9 Coding of data

Coding replaces each value x by $y = \frac{x - a}{b}$ (a linear transformation), typically to simplify arithmetic (e.g. large means, decimal data).

If $y = \frac{x - a}{b}$, then $\bar{y} = \frac{\bar{x} - a}{b}$ and $s_y = \frac{s_x}{b}$ (SD is unaffected by the subtraction of a constant a , but scales by $|b|$). Equivalently, $\bar{x} = a + b\bar{y}$ and $s_x = b s_y$.

Adding/subtracting a constant shifts the mean but leaves the SD unchanged; multiplying/dividing by a constant scales *both* the mean and the SD by that constant (in magnitude).

Ví dụ mẫu · Worked example

The times, in seconds, taken by a group of athletes to complete a race are coded using $y = \frac{x - 60}{5}$. The coded values have mean $\bar{y} = 4.2$ and standard deviation $s_y = 1.6$. Find the mean and standard deviation of the original times x .

Since $y = \frac{x - 60}{5}$, we have $x = 5y + 60$, so $a = 60$, $b = 5$. $\bar{x} = 5\bar{y} + 60 = 5(4.2) + 60 = 21 + 60 = 81$ seconds. $s_x = 5s_y = 5(1.6) = 8$ seconds.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Mã hóa dữ liệu (coding) là phép biến đổi tuyến tính $y = (x - a)/b$ nhằm đơn giản hóa tính toán. Quy tắc quan trọng: cộng/trừ hằng số a chỉ làm dịch chuyển trung bình, **không** thay đổi độ lệch chuẩn; nhân/chia cho hằng số b làm trung bình và độ lệch chuẩn cùng co giãn theo hệ số đó (SD luôn lấy giá trị dương của hệ số nhân). Khi đề cho $\bar{y}$, s_y và yêu cầu tìm $\bar{x}$, s_x , hãy đảo ngược công thức: $x = a + by$.

6.1.10 Combining two data sets

When two samples are combined into one larger data set, the combined mean and variance can be found directly from the totals $\sum x$ and $\sum x^2$ of each sample, without needing the original raw data.

If sample 1 has n_1 values with mean $\bar{x}_1$ and sample 2 has n_2 values with mean $\bar{x}_2$, the combined mean of all $n_1 + n_2$ values is

$$\bar{x} = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}.$$

The combined variance is found from the combined $\sum x^2$ (obtained by adding the two samples' totals) together with the combined mean: variance = $\frac{\sum x^2}{n_1 + n_2} - \bar{x}^2$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Sample A has $n_1 = 10$ values with mean 8 and $\sum x^2 = 760$. Sample B has $n_2 = 15$ values with mean 12 and $\sum x^2 = 2400$. Find the mean and standard deviation of all 25 values combined.
 $\sum x_A = n_1\bar{x}_1 = 10(8) = 80$. $\sum x_B = n_2\bar{x}_2 = 15(12) = 180$. Combined $\sum x = 80 + 180 = 260$, so the combined mean is $\frac{260}{25} = 10.4$. Combined $\sum x^2 = 760 + 2400 = 3160$. Combined variance = $\frac{3160}{25} - 10.4^2 = 126.4 - 108.16 = 18.24$. Combined SD = $\sqrt{18.24} = 4.271$ (4 s.f.).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi gộp hai mẫu dữ liệu thành một mẫu lớn hơn, không cần dữ liệu gốc: chỉ cần cộng $\sum x$ (tính từ $n\bar{x}$) và $\sum x^2$ của từng mẫu để có tổng của mẫu gộp, rồi áp dụng lại công thức $\bar{x} = \sum x/n$ và phương sai = $\sum x^2/n - \bar{x}^2$ như bình thường, với $n = n_1 + n_2$. Lưu ý quan trọng: trung bình gộp **không** đơn giản là trung bình cộng của $\bar{x}_1$ và $\bar{x}_2$, trừ khi $n_1 = n_2$ – phải nhân trọng số theo n_1, n_2 .

6.2 Permutations and combinations

6.2.1 Factorial notation and counting principles

For a positive integer n , $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$, with $0! = 1$ by convention. Two fundamental counting principles underpin this topic:

- **Multiplication principle:** if one task can be done in m ways and, independently, a second task can be done in n ways, the two tasks together can be done in $m \times n$ ways.
- **Addition principle:** if a task can be done in m ways or (mutually exclusively) in n different ways, it can be done in $m + n$ ways in total.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc nhân dùng khi các bước xảy ra **liên tiếp** (bước này rồi đến bước kia) – nhân số cách của từng bước; quy tắc cộng dùng khi các trường hợp **loại trừ nhau** (chỉ một trong các trường hợp xảy ra) – cộng số cách của từng trường hợp. Xác định đúng "và" (nhân) hay "hoặc" (cộng) là bước quan trọng nhất trước khi tính toán.

6.2.2 Permutations of n distinct objects

A **permutation** is an ordered arrangement. The number of ways to arrange r objects chosen from n distinct objects, where order matters, is

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}. \text{ In particular, } {}nP_n = n! \text{ (arrangements of all } n \text{ objects).}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

nP_r đếm số cách **sắp xếp có thứ tự** r vật khác nhau lấy từ n vật; đổi thứ tự cho ra một cách sắp xếp khác. Trường hợp đặc biệt ${}^nP_n = n!$ là số cách xếp tất cả n vật thành một hàng.

6.2.3 Permutations with repeated objects

If n objects are arranged in a row but some objects are identical (indistinguishable), the number of *distinct* arrangements is reduced, since swapping identical objects produces the same arrangement.

If n objects consist of groups of $p_1, p_2, \dots, p_k$ identical objects ($p_1 + \dots + p_k = n$), the number of distinct arrangements of all n objects is $\frac{n!}{p_1! p_2! \dots p_k!}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) In how many ways can 4 books be chosen from 9 different books? (b) How many arrangements are there of the letters of apple?

(a) ${}^9C_4 = \frac{9!}{4!5!} = 126$. (b) 5 letters with P repeated twice: $\frac{5!}{2!} = 60$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi có chữ cái hoặc vật lặp lại, phải **chia** cho giai thừa của số lần lặp mỗi loại để loại bỏ các hoán vị trùng nhau (đổi chỗ hai vật giống nhau không tạo ra cách sắp xếp mới). Nếu có nhiều loại lặp (ví dụ 2 chữ P và 3 chữ S), chia đồng thời cho giai thừa của **từng** loại.

6.2.4 Permutations with restrictions

Restricted arrangements are typically handled with one of these strategies:

- **Items together:** glue the required items into a single “block”. Arrange the block with the remaining items, then multiply by the number of internal arrangements of the block.
- **Items not together:** compute (total arrangements) – (arrangements with the items together).
- **Fixed positions:** fix the specified items in their required places first, then arrange the remaining items in the remaining positions.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the number of ways of arranging the 6 letters of the word marble if (a) A and E must be together, (b) A and E must *not* be together.

All 6 letters are distinct, so the total number of arrangements is $6! = 720$. (a) Treat A, E as one block: this gives 5 units to arrange ($5! = 120$ ways), and the block itself can be ordered $2! = 2$ ways (AE or EA). Together: $120 \times 2 = 240$. (b) Not together = $720 - 240 = 480$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với ràng buộc “phải đứng cạnh nhau”: gộp các vật đó thành **một khối**, xếp khối cùng các vật còn lại, rồi nhân với số cách sắp xếp **bên trong** khối. Với ràng buộc “không được đứng cạnh nhau”: lấy tổng số cách xếp **trừ đi** số cách mà chúng đứng cạnh nhau (phần bù). Với vị trí cố định: cố định vị trí đó trước, rồi xếp phần còn lại vào các vị trí còn trống.

6.2.5 Combinations

A **combination** is an unordered selection: the order in which the objects are chosen does not matter.

$${}^nC_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{{}^nP_r}{r!}. \text{ Symmetry: } {}^nC_r = {}^nC_{n-r}.$$

Since nP_r counts ordered selections and each unordered group of r objects can be internally ordered in $r!$ ways, dividing nP_r by $r!$ removes the ordering, giving nC_r .

(!) Lỗi thường gặp: Confusing nC_r with nP_r is one of the most common errors in this topic. Ask: *does the order of selection/arrangement matter?* If the question asks to **choose** a committee, team or subset (roles not distinguished), use nC_r . If it asks to **arrange**, seat in a row, or assign distinct roles (e.g. chairperson vs. secretary), use nP_r . Using nC_r when positions are distinguishable (or vice versa) silently gives an answer that is out by a factor of $r!$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

nC_r đếm số cách **chọn** (không quan tâm thứ tự), còn nP_r đếm số cách **chọn và sắp xếp** (có thứ tự). Vì mỗi nhóm r vật có thể sắp xếp theo $r!$ cách khác nhau, ta có ${}^nP_r = {}^nC_r \times r!$. Luôn tự hỏi: đề bài có phân biệt vai trò/thứ tự hay không, trước khi chọn công thức.

6.2.6 Combined permutation and combination problems

Many exam problems require **two stages**: first choose a subset (combination), then arrange or assign distinct roles within that subset (permutation). The multiplication principle links the two stages: multiply the number of ways to complete each stage.

Ví dụ mẫu · Worked example

A team of 4 is to be chosen from 7 boys and 5 girls, to include at least 2 girls. From the chosen team of 4, a captain and a vice-captain are then selected (the other two are ordinary members). In how many ways can the team be chosen and the two roles assigned?

Stage 1 – choose the team (combinations), splitting into cases by number of girls:

$$2 \text{ girls, } 2 \text{ boys : } {}^5C_2 \times {}^7C_2 = 10 \times 21 = 210$$

$$3 \text{ girls, } 1 \text{ boy : } {}^5C_3 \times {}^7C_1 = 10 \times 7 = 70$$

$$4 \text{ girls, } 0 \text{ boys : } {}^5C_4 \times {}^7C_0 = 5 \times 1 = 5$$

Total number of valid teams = $210 + 70 + 5 = 285$. *Stage 2 – assign captain and vice-captain (permutation) from the 4 chosen members:* ${}^4P_2 = 4 \times 3 = 12$. By the multiplication principle, total number of ways = $285 \times 12 = 3420$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán kết hợp cả tổ hợp và chỉnh hợp: trước tiên xác định **giai đoạn nào là "chọn"** (dùng nC_r , có thể phải chia thành nhiều trường hợp rồi cộng lại) và **giai đoạn nào là "sắp xếp/gán vai trò"** (dùng nP_r), sau đó nhân kết quả hai giai đoạn theo quy tắc nhân. Khi có nhiều trường hợp loại trừ nhau ở giai đoạn chọn, phải cộng chúng lại trước khi nhân với giai đoạn sắp xếp.

6.2.7 Circular permutations

When objects are arranged around a circle rather than in a row, arrangements that differ only by a rotation are considered the **same** arrangement (there is no fixed "starting point"), so the count is smaller than for a row of the same objects.

The number of ways to arrange n distinct objects in a circle, where rotations are regarded as identical, is $(n - 1)!$ (fix one object to remove the rotational symmetry, then arrange the remaining $n - 1$ objects, in order, in the remaining positions).

Ví dụ mẫu · Worked example

In how many ways can 8 people be seated at a round table (a) with no restriction, (b) if two particular people, Minh and Lan, must sit next to each other?

(a) Circular arrangements of 8 distinct people: $(8 - 1)! = 7! = 5040$. (b) Treat Minh and Lan as a single block; together with the other 6 people this gives 7 units to arrange around the table: $(7 - 1)! = 6! = 720$ circular arrangements of the units. The block itself can be internally ordered $2! = 2$ ways (Minh–Lan or Lan–Minh). Total = $720 \times 2 = 1440$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán xếp vòng tròn (circular arrangement), vì không có điểm "bắt đầu" cố định nên các cách xếp chỉ khác nhau do **xoay vòng** được xem là **giống nhau**; do đó số cách xếp n vật khác nhau quanh một vòng tròn là $(n - 1)!$ (ít hơn $n!$ của xếp hàng ngang, đúng bằng số vị trí có thể xoay tới). Khi có ràng buộc "phải ngồi cạnh nhau" quanh bàn tròn, vẫn gộp thành một khối như xếp hàng ngang, nhưng số đơn vị còn lại được xếp theo vòng tròn bằng $(k - 1)!$ chứ không phải $k!$.

6.3 Probability

For any event A , the **complement** A' ("not A ") is the event that A does not occur.

$P(A') = 1 - P(A)$, since A and A' together account for the whole sample space, and their probabilities must sum to 1.

This simple rule is often the fastest route to a probability that would otherwise require summing many separate cases (e.g. "at least one" events, handled by finding $1 - P(\text{none})$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Biến cố bù (complement) A' là biến cố " A không xảy ra"; vì A và A' luôn cùng lấp đầy toàn bộ không gian mẫu nên $P(A') = 1 - P(A)$. Quy tắc này đặc biệt hữu ích với các bài toán "ít nhất một" (at least one): thay vì cộng nhiều trường hợp, chỉ cần tính $1 - P(\text{không có trường hợp nào})$.

6.3.1 The addition rule and mutually exclusive events

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. If A and B are **mutually exclusive** (they cannot both occur, $A \cap B = \emptyset$), then $P(A \cap B) = 0$ and $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức cộng xác suất $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ trừ đi phần giao để tránh đếm lặp phần chung của A và B . Nếu A, B **xung khắc** (không thể cùng xảy ra), phần giao bằng 0 nên chỉ cần cộng trực tiếp $P(A) + P(B)$.

6.3.2 The multiplication rule and independent events

Events A and B are **independent** if and only if $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ (equivalently, $P(A | B) = P(A)$, i.e. knowing B has occurred does not change the probability of A).

For a sequence of independent events, the probability that all of them occur is the product of their individual probabilities.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai biến cố độc lập khi việc biết biến cố này xảy ra **không làm thay đổi** xác suất của biến cố kia: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. Đây khác với biến cố xung khắc (mutually exclusive) – hai khái niệm này thường bị nhầm lẫn: biến cố xung khắc **không thể** độc lập (trừ trường hợp xác suất bằng 0), vì biết một biến cố xảy ra sẽ loại trừ hoàn toàn biến cố còn lại.

6.3.3 Conditional probability

$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, read as “the probability of A given that B has occurred”. Rearranging: $P(A \cap B) = P(A | B) \times P(B)$.

In “without replacement” problems, conditional probability arises naturally: the sample space for the second draw is reduced by whatever was removed on the first draw.

Ví dụ mẫu · Worked example

A bag has 5 red and 3 blue balls. Two are drawn without replacement. Find $P(\text{both red})$ and $P(\text{exactly one red})$.

$$P(\text{both red}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}. \quad P(\text{exactly one red}) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{8} + \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{15}{28}.$$

(!) Lỗi thường gặp: $P(A | B)$ and $P(B | A)$ are generally *different* quantities – always identify which event is the “given” (conditioning) event before dividing. In “without replacement” problems, remember that both the numerator counts and the total change after each draw.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Xác suất có điều kiện $P(A | B)$ là xác suất của A **với điều kiện** B đã xảy ra – luôn xác định rõ biến cố nào là điều kiện (đứng sau dấu $|$) trước khi chia. Trong bài toán “không hoàn lại” (without replacement), tổng số phần tử và số phần tử thuận lợi đều thay đổi sau mỗi lần lấy, nên xác suất lần sau luôn phụ thuộc vào kết quả lần trước.

6.3.4 Tree diagrams

A **tree diagram** displays sequential events as branches, with probabilities labelled on each branch; probabilities on branches from the same node sum to 1. To find the probability of a particular outcome path, **multiply along the branches**; to find the probability of an event that can occur via several different paths, **add** the probabilities of those paths (multiplication rule along a path, addition rule across alternative paths).

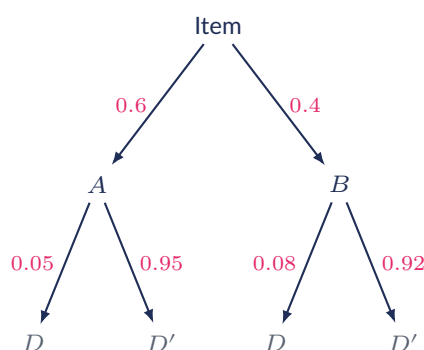
Ví dụ mẫu · Worked example

A factory has two machines. Machine A produces 60% of the items and machine B produces the remaining 40%. It is known that 5% of items from A are defective, while 8% of items from B are defective. An item is chosen at random and found to be defective. Find the probability that it came from machine B .

$$P(A) = 0.6, P(B) = 0.4, P(D | A) = 0.05, P(D | B) = 0.08.$$

$$P(D) = P(A)P(D | A) + P(B)P(D | B) = 0.6(0.05) + 0.4(0.08) = 0.03 + 0.032 = 0.062.$$

$$P(B | D) = \frac{P(B)P(D | B)}{P(D)} = \frac{0.032}{0.062} = \frac{16}{31} \approx 0.516.$$



Tree diagram for the machine/defective-item problem: $P(A) = 0.6, P(B) = 0.4; P(D | A) = 0.05, P(D | B) = 0.08$.

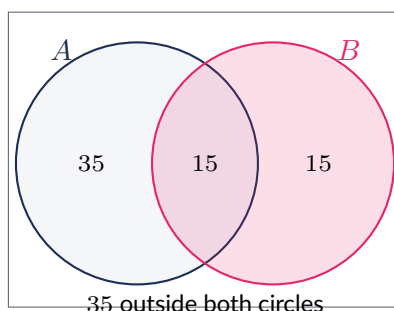
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Sơ đồ cây (tree diagram) thể hiện các biến cố xảy ra **tuần tự**: nhân xác suất **đọc theo một nhánh** để được xác suất của một kết quả cụ thể; cộng xác suất của các nhánh **khác nhau nhưng cùng dẫn đến kết quả cần tìm**. Bài toán "biết kết quả sau, tìm nguyên nhân trước" (như ví dụ trên) chính là định lý Bayes – luôn tính $P(D)$ bằng cách cộng tất cả các nhánh dẫn đến D trước, rồi mới lập tỉ số điều kiện.

6.3.5 Venn diagrams for probability

A **Venn diagram** represents events as regions inside a rectangle (the sample space); overlapping circles represent $A \cap B$. Venn diagrams are especially useful for organising probabilities involving unions, intersections and complements (e.g. " A but not B " is the region $A \cap B'$, with probability $P(A) - P(A \cap B)$).



Venn diagram: of 100 people surveyed, 50 like tea (A), 30 like coffee (B), 15 like both; so $n(A \cup B) = 65$ and 35 like neither.

From the diagram, $P(A) = 0.50$, $P(B) = 0.30$, $P(A \cap B) = 0.15$, so $P(A \cup B) = 0.50 + 0.30 - 0.15 = 0.65$, and $P(\text{neither}) = 1 - 0.65 = 0.35$, matching the 35 people outside both circles.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

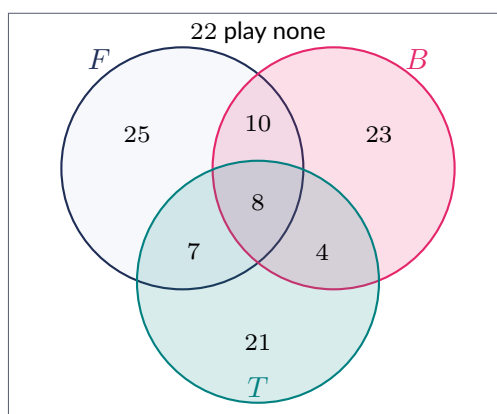
VN

Sơ đồ Venn giúp trực quan hóa các biến cố và phần giao của chúng: mỗi vùng trong hình chữ nhật (không gian mẫu) ứng với một trường hợp loại trừ nhau, nên có thể cộng trực tiếp các số trong từng vùng để kiểm tra tổng bằng n (hoặc bằng 1 nếu ghi xác suất). Vùng "chỉ A " (không có B) có xác suất $P(A) - P(A \cap B)$, còn vùng ngoài cả hai vòng tròn có xác suất $1 - P(A \cup B)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

In a survey of 120 students, 50 play football (F), 45 play basketball (B), and 40 play tennis (T). Of these, 18 play both football and basketball, 15 play both football and tennis, 12 play both basketball and tennis, and 8 play all three sports. (a) Find the number of students who play none of the three sports. (b) Given that a student plays football, find the probability that this student also plays tennis. (c) Given that a student plays at least two of the three sports, find the probability that the student plays all three.

Using inclusion-exclusion: $n(F \cup B \cup T) = 50 + 45 + 40 - 18 - 15 - 12 + 8 = 98$, so the number playing none is $120 - 98 = 22$. Splitting the pairwise overlaps into "exactly two" regions (subtracting the all-three region 8 from each): $F \cap B$ only = $18 - 8 = 10$; $F \cap T$ only = $15 - 8 = 7$; $B \cap T$ only = $12 - 8 = 4$. (Check: only $F = 50 - 10 - 7 - 8 = 25$, only $B = 45 - 10 - 4 - 8 = 23$, only $T = 40 - 7 - 4 - 8 = 21$; total $25 + 23 + 21 + 10 + 7 + 4 + 8 + 22 = 120$.) (b) $P(T | F) = \frac{n(F \cap T)}{n(F)} = \frac{15}{50} = 0.3$. (c) Students playing at least two sports = $10 + 7 + 4 + 8 = 29$; of these, 8 play all three. $P(\text{all three} | \text{at least two}) = \frac{8}{29} = 0.276$ (3 s.f.).



Venn diagram for the three-sport survey: only $F = 25$, only $B = 23$, only $T = 21$; $F \cap B$ only = 10, $F \cap T$ only = 7, $B \cap T$ only = 4; all three = 8; 22 play none.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với sơ đồ Venn có **ba biến cố**, trước tiên dùng công thức bao hàm-loại trừ để tìm $n(F \cup B \cup T)$, sau đó tách các vùng giao đôi thành phần "chỉ hai" bằng cách trừ đi phần giao ba; luôn kiểm tra tổng tất cả các vùng (kể cả vùng "không thuộc biến cố nào") phải bằng tổng số phần tử ban đầu. Xác suất có điều kiện từ sơ đồ Venn được tính bằng cách lấy số phần tử của vùng giao chia cho số phần tử của biến cố điều kiện (mẫu số là biến cố đứng sau "given"/"biết rằng").

6.3.6 Probability with permutations and combinations

Some probability problems require counting favourable and total outcomes using permutations or combinations, then dividing:

$$P(\text{event}) = \frac{\text{number of favourable arrangements/selections}}{\text{total number of arrangements/selections}}.$$

For example, if 3 cards are drawn at random (without replacement) from 10 cards numbered 1 to 10 and placed in a row, the probability that they appear in increasing order is $\frac{1}{3!} = \frac{1}{6}$, since exactly one of the $3! = 6$ equally likely orderings of any particular set of 3 cards is increasing. Likewise, if a committee of 4 is chosen at random from a group, the probability that it contains a particular composition (e.g. exactly 2 men and 2 women) is found by dividing the relevant combination count by the total number of ways to choose the committee.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi bài toán xác suất liên quan đến việc chọn hoặc sắp xếp, chiến lược chung là: đếm số cách **thuận lợi** (favourable) bằng chỉnh hợp/tổ hợp, đếm **tổng số cách** có thể xảy ra (cũng bằng chỉnh hợp/tổ hợp), rồi lấy tỉ số. Phải dùng **cùng một phương pháp đếm** (đều là chỉnh hợp hoặc đều là tổ hợp) cho cả tử số và mẫu số, nếu không tỉ số sẽ sai.

6.4 Discrete random variables

6.4.1 Probability distributions, $E(X)$ and $\text{Var}(X)$

A **discrete random variable** X takes a finite (or countable) set of values, each with an associated probability; the probabilities must satisfy $\sum P(X = x) = 1$.

$$E(X) = \sum xP(X = x); \quad \text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \text{ where } E(X^2) = \sum x^2P(X = x).$$

Ví dụ mẫu · Worked example

X : $P(X = 1) = 0.2, P(X = 2) = 0.5, P(X = 3) = 0.3$. Find $E(X)$ and $\text{Var}(X)$.

$E(X) = 0.2 + 1.0 + 0.9 = 2.1$. $E(X^2) = 0.2 + 2.0 + 2.7 = 4.9$. $\text{Var}(X) = 4.9 - 2.1^2 = 0.49$.

(!) Lỗi thường gặp: $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$ is not the same calculation as $E(X) - [E(X)]^2$ or $\sum x^2 - [\sum x]^2$. Compute $E(X^2) = \sum x^2P(X = x)$ (square each value *then* weight by probability and sum) as one number, compute $E(X)$ separately, square $E(X)$, and only then subtract. Forgetting to square $E(X)$ – or squaring x but not weighting by $P(X = x)$ – is a very common source of error.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$E(X)$ là giá trị "trung bình lý thuyết" của biến ngẫu nhiên, tính bằng cách nhân mỗi giá trị với xác suất tương ứng rồi cộng lại. $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$: phải tính $E(X^2)$ (trung bình của X^2) và $[E(X)]^2$ (bình phương của trung bình X) là hai đại lượng **khác nhau**, rồi mới trừ.

6.4.2 $E(aX + b)$ and $\text{Var}(aX + b)$

$$\text{For constants } a, b: E(aX + b) = aE(X) + b; \quad \text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X).$$

Adding a constant b shifts the mean but does not affect the variance (spread); multiplying by a constant a scales the mean by a and the variance by a^2 (since variance has "squared" units).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cộng thêm hằng số b chỉ dịch chuyển giá trị kỳ vọng, **không** ảnh hưởng đến phương sai (độ phân tán không đổi khi cộng cùng một số vào mọi giá trị). Nhân với hằng số a làm kỳ vọng nhân với a nhưng phương sai nhân với a^2 (vì đơn vị của phương sai là "bình phương" đơn vị gốc).

6.4.3 The discrete uniform distribution

If X takes each of the values $1, 2, \dots, n$ with equal probability $\frac{1}{n}$, then X follows a **discrete uniform distribution**.

For the discrete uniform distribution on $1, 2, \dots, n$: $E(X) = \frac{n+1}{2}$; $\text{Var}(X) = \frac{n^2-1}{12}$.

A fair die is the classic example ($n = 6$): each face has probability $\frac{1}{6}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phân phối đều rời rạc (discrete uniform) mô tả các biến ngẫu nhiên mà mọi giá trị có **cùng xác suất xảy ra** — ví dụ điển hình là một con xúc xắc cân đối, hoặc rút một lá số ngẫu nhiên từ 1 đến n . Hai công thức $E(X) = (n+1)/2$ và $\text{Var}(X) = (n^2-1)/12$ chỉ áp dụng khi các giá trị là $1, 2, \dots, n$ và xác suất bằng nhau.

6.4.4 Expectation and variance in decision problems

Expectation is often used to evaluate whether a game or decision is favourable. A game is called **fair** if the expected net gain (winnings minus cost/stake) is exactly 0; if the expected net gain is positive, the game favours the player, and if negative, it favours the organiser.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Một trò chơi được gọi là "công bằng" (fair game) khi kỳ vọng lợi nhuận ròng (tiền thắng trừ tiền đặt cược) bằng 0. Nếu kỳ vọng dương, người chơi có lợi về lâu dài; nếu âm, nhà tổ chức có lợi. Đây là ứng dụng thực tế quan trọng của $E(X)$ trong các bài toán ra quyết định.

6.4.5 The binomial distribution

The **binomial distribution** $B(n, p)$ models the number of successes X in n independent trials, each with the same probability p of success, provided:

- there is a **fixed number** n of trials;
- each trial has exactly **two outcomes** ("success" / "failure");
- the probability of success p is **constant** across trials;
- the trials are **independent** of one another.

If $X \sim B(n, p)$, then $P(X = r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$ for $r = 0, 1, \dots, n$; and $E(X) = np$, $\text{Var}(X) = np(1-p)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A biased coin has $P(\text{head}) = 0.3$. It is tossed 8 times, and X is the number of heads obtained. Find (a) $P(X = 3)$, (b) $E(X)$ and $\text{Var}(X)$.

$X \sim B(8, 0.3)$, so this satisfies the binomial conditions with $n = 8$, $p = 0.3$. (a) $P(X = 3) =$

$$\binom{8}{3}(0.3)^3(0.7)^5 = 56 \times 0.027 \times 0.16807 = 0.2541 \text{ (4 s.f.)}. \quad (b) E(X) = np = 8(0.3) = 2.4.$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p) = 8(0.3)(0.7) = 1.68.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phân phối nhị thức $B(n, p)$ áp dụng khi có **đúng** n **phép thử độc lập**, mỗi phép thử chỉ có 2 kết quả (thành công/thất bại) với xác suất thành công p **không đổi** qua các lần thử. Công thức $P(X = r) = \binom{n}{r}p^r(1-p)^{n-r}$: hệ số $\binom{n}{r}$ đếm số cách chọn vị trí của r lần thành công trong n phép thử. Kỳ vọng $E(X) = np$ và phương sai $\text{Var}(X) = np(1-p)$ nên nhớ ngay không cần chứng minh lại từ đầu.

Ví dụ mẫu · Worked example

$X \sim B(10, 0.4)$. Find $P(2 \leq X \leq 4)$.

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4). \quad P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.4)^2(0.6)^8 = 45(0.16)(0.01679616) = 0.12093 \text{ (5 s.f.)}. \quad P(X = 3) = \binom{10}{3}(0.4)^3(0.6)^7 = 120(0.064)(0.0279936) = 0.21499 \text{ (5 s.f.)}. \quad P(X = 4) = \binom{10}{4}(0.4)^4(0.6)^6 = 210(0.0256)(0.046656) = 0.25082 \text{ (5 s.f.)}. \quad \text{So } P(2 \leq X \leq 4) = 0.12093 + 0.21499 + 0.25082 = 0.58675 \approx 0.587 \text{ (3 s.f.)}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

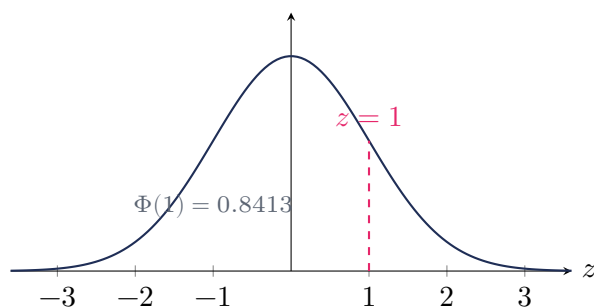
VN

Khi đề bài yêu cầu tính xác suất trên **một khoảng** giá trị (ví dụ $P(2 \leq X \leq 4)$) thay vì một giá trị đơn lẻ, phải **cộng** $P(X = r)$ cho **từng** giá trị r nguyên trong khoảng đó – không có công thức rút gọn, nên tính lần lượt từng số hạng rồi cộng lại, và giữ đủ chữ số thập phân ở các bước trung gian để tránh sai số làm tròn tích lũy.

6.5 The normal distribution**6.5.1 The normal distribution and standardisation**

The **normal distribution** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ is a continuous probability distribution with a symmetric, bell-shaped curve centred on the mean μ , with spread controlled by the standard deviation σ . Since areas under the general normal curve are not directly tabulated, we **standardise** using

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, where $Z \sim N(0, 1)$ is the **standard normal variable**. Probabilities are read from $\Phi(z) = P(Z < z)$ using standard normal tables (or a calculator).



Standard normal curve; shaded area is $\Phi(1) = P(Z < 1)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phân phối chuẩn $N(\mu, \sigma^2)$ có đồ thị hình chuông, đối xứng quanh μ . Vì mỗi giá trị μ, σ khác nhau cho một đường cong khác nhau, ta luôn phải **chuẩn hóa** (standardise) về phân phối chuẩn tắc $Z \sim N(0, 1)$ bằng công thức $Z = (X - \mu)/\sigma$ trước khi tra bảng $\Phi(z) = P(Z < z)$.

6.5.2 Finding probabilities using $\Phi(z)$

Because the standard normal curve is symmetric about 0: $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$, and $P(Z > z) = 1 - \Phi(z)$. For $P(z_1 < Z < z_2) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

$X \sim N(50, 64)$. Find $P(X < 58)$. Then, for $X \sim N(70, 100)$, find k with $P(X > k) = 0.10$.

$$Z = \frac{58 - 50}{8} = 1 \Rightarrow P(X < 58) = \Phi(1) = 0.8413. \quad P(X > k) = 0.10 \Rightarrow \Phi(z) = 0.90 \Rightarrow z = 1.2816 \Rightarrow k = 70 + 1.2816(10) = 82.8.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Luôn **chuẩn hóa** (standardise) trước khi tra bảng: $Z = (X - \mu)/\sigma$. $\Phi(z)$ là xác suất lũy tích bên trái $P(Z < z)$. Nếu cần $P(Z > z)$, lấy $1 - \Phi(z)$; nếu z âm, dùng tính đối xứng $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$.

6.5.3 Finding an unknown mean or standard deviation

When μ or σ is unknown, convert each given probability statement into a z -value (using Φ^{-1}), then solve the resulting linear equation(s) in μ and/or σ . If *both* μ and σ are unknown, two probability statements are needed, giving two simultaneous equations.

Ví dụ mẫu · Worked example

The heights of a certain species of plant are normally distributed. It is known that 20% of plants are taller than 150 cm, and 5% of plants are shorter than 90 cm. Find the mean μ and standard deviation σ of the height.

$$P(X > 150) = 0.20 \Rightarrow P(X < 150) = 0.80 \Rightarrow z_1 = \Phi^{-1}(0.80) = 0.8416, \text{ so}$$

$$\frac{150 - \mu}{\sigma} = 0.8416 \Rightarrow \mu = 150 - 0.8416\sigma. \quad (i)$$

$$P(X < 90) = 0.05 \Rightarrow z_2 = \Phi^{-1}(0.05) = -1.6449, \text{ so}$$

$$\frac{90 - \mu}{\sigma} = -1.6449 \Rightarrow \mu = 90 + 1.6449\sigma. \quad (ii)$$

Setting (i) = (ii): $150 - 0.8416\sigma = 90 + 1.6449\sigma \Rightarrow 60 = 2.4865\sigma \Rightarrow \sigma = 24.13$ (4 s.f.). Then $\mu = 90 + 1.6449(24.13) = 129.7$ (4 s.f.). So $\mu \approx 129.7$ cm, $\sigma \approx 24.1$ cm.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi μ hoặc σ chưa biết, đổi mỗi phát biểu xác suất thành một giá trị z (dùng Φ^{-1} , tức tra bảng ngược), từ đó lập phương trình bậc nhất theo μ và σ . Nếu **cả hai** đều chưa biết, cần **hai** phương trình từ hai dữ kiện xác suất khác nhau, rồi giải hệ phương trình đồng thời — đây là kỹ thuật quan trọng cần luyện tập thành thạo.

6.5.4 The normal approximation to the binomial distribution

When n is large, computing binomial probabilities directly can be impractical; if $np > 5$ and $n(1-p) > 5$, the binomial distribution $B(n, p)$ can be approximated by the normal distribution

$$X \sim N(np, np(1-p)).$$

Because the binomial distribution is discrete but the normal distribution is continuous, a **continuity correction** of ± 0.5 must be applied when converting a discrete inequality into a continuous one:

$$P(X \leq r) \approx P(Y < r + 0.5); \quad P(X \geq r) \approx P(Y > r - 0.5); \quad P(X < r) \approx P(Y < r - 0.5); \quad P(X > r) \approx P(Y > r + 0.5); \quad P(X = r) \approx P(r - 0.5 < Y < r + 0.5), \text{ where } Y \sim N(np, np(1-p)).$$

Ví dụ mẫu · Worked example

$X \sim B(100, 0.4)$. Use a normal approximation to estimate $P(X \leq 35)$.

$np = 100(0.4) = 40 > 5$ and $n(1-p) = 100(0.6) = 60 > 5$, so the approximation is valid. $Y \sim N(40, 24)$, since $np(1-p) = 100(0.4)(0.6) = 24$, so $\sigma = \sqrt{24} = 4.899$. Applying the continuity correction for $P(X \leq 35)$: $P(X \leq 35) \approx P(Y < 35.5)$.

$$z = \frac{35.5 - 40}{4.899} = -0.919 (\approx -0.92) \Rightarrow P(Y < 35.5) = \Phi(-0.92) = 1 - \Phi(0.92) = 1 - 0.8212 = 0.1788.$$

So $P(X \leq 35) \approx 0.179$ (3 s.f.).

(!) Lỗi thường gặp: Forgetting the continuity correction (or applying it in the wrong direction) is a very common error when approximating a binomial distribution by a normal one. Always translate the *exact* discrete inequality first (e.g. " $X \leq 35$ ", " $X < 35$ ", " $X \geq 35$ ", " $X > 35$ " are four *different* statements) and only then decide whether to add or subtract 0.5: for " $\leq$ " and " $<$ " the boundary moves *up* by 0.5 from the smaller of the two relevant integers, and for " $\geq$ " and " $>$ " it moves *down* by 0.5 – sketching the discrete values on a number line before applying the correction avoids sign errors.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Xấp xỉ chuẩn cho phân phối nhị thức chỉ hợp lệ khi $np > 5$ và $n(1-p) > 5$. Vì nhị thức là rời rạc còn chuẩn là liên tục, phải dùng **hiệu chỉnh liên tục** (continuity correction) ± 0.5 khi chuyển bất đẳng thức rời rạc sang liên tục – đây là lỗi cực kỳ hay bị bỏ sót. Luôn viết rõ bất đẳng thức gốc ($\leq, <, \geq, >$) trước khi cộng/trừ 0.5 để tránh nhầm chiều.

Ví dụ mẫu · Worked example

$X \sim B(120, 0.25)$. Use a normal approximation, with continuity correction, to estimate $P(25 \leq X \leq 35)$.

$np = 120(0.25) = 30 > 5$ and $n(1-p) = 120(0.75) = 90 > 5$, so the approximation is valid. $Y \sim N(30, 22.5)$, since $np(1-p) = 120(0.25)(0.75) = 22.5$, so $\sigma = \sqrt{22.5} = 4.743$ (4 s.f.). Applying the continuity correction to the two-sided inequality: $P(25 \leq X \leq 35) \approx P(24.5 < Y < 35.5)$.

$$z_1 = \frac{24.5 - 30}{4.743} = -1.160, \quad z_2 = \frac{35.5 - 30}{4.743} = 1.160.$$

By symmetry, $P(24.5 < Y < 35.5) = 2\Phi(1.16) - 1 = 2(0.8770) - 1 = 0.7540$. So $P(25 \leq X \leq 35) \approx 0.754$ (3 s.f.).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bất đẳng thức hai chiều $P(a \leq X \leq b)$, phải áp dụng hiệu chỉnh liên tục ở cả hai đầu: cận dưới trừ 0.5 và cận trên cộng 0.5, tức $P(a \leq X \leq b) \approx P(a - 0.5 < Y < b + 0.5)$. Khi khoảng cách từ hai cận đã hiệu chỉnh đến trung bình np bằng nhau (như ví dụ trên), có thể dùng tính đối xứng $2\Phi(z) - 1$ để rút ngắn phép tính.

6.6 Practice problems

6.6.1 Representation of data

Bài tập luyện tập

Find the standard deviation of 12, 15, 15, 18, 20.

- (A) 2.76 (C) 3.00
(B) 7.60 (D) 1.66

Lời giải chi tiết

$\bar{x} = 16$; $\sum x^2 = 1318$; variance = $\frac{1318}{5} - 256 = 7.6$; SD = $\sqrt{7.6} = 2.76$. (A).

Bài tập luyện tập

The number of children in each of 40 households is recorded: $x : 0, 1, 2, 3, 4$ with frequencies $f : 8, 14, 10, 6, 2$. Find $\sum fx$, the mean, and the variance.

- (A) $\sum fx = 60$, mean 1.5, variance 1.25 (C) $\sum fx = 60$, mean 1.5, variance 2.25
(B) $\sum fx = 40$, mean 1.5, variance 1.5 (D) $\sum fx = 60$, mean 1.0, variance 1.25

Lời giải chi tiết

$\sum fx = 0(8) + 1(14) + 2(10) + 3(6) + 4(2) = 14 + 20 + 18 + 8 = 60$. Mean = $60/40 = 1.5$.
 $\sum fx^2 = 0 + 14 + 40 + 54 + 32 = 140$. Variance = $140/40 - 1.5^2 = 3.5 - 2.25 = 1.25$. (A).

Bài tập luyện tập

The following 12 values, in order, are the marks (out of 30) of a class quiz: 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 15, 18, 20, 25. Find Q_1 , Q_3 and the interquartile range.

Lời giải chi tiết

$n = 12$ (even). Lower half (1st–6th): 3, 5, 7, 8, 9, 11 $\Rightarrow Q_1 = \frac{7+8}{2} = 7.5$. Upper half (7th–12th): 12, 14, 15, 18, 20, 25 $\Rightarrow Q_3 = \frac{15+18}{2} = 16.5$. IQR = $16.5 - 7.5 = 9$.

Bài tập luyện tập

The ordered house prices (\$1000s) of 11 properties are: 150, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 310. Which value is an outlier, using the $1.5 \times \text{IQR}$ rule?

(A) 310

(C) 150

(B) 200

(D) 195

Lời giải chi tiết

$n = 11$, median (6th value) = 180. Lower half: 150, 160, 165, 170, 175 $\Rightarrow Q_1 = 165$ (3rd value). Upper half: 185, 190, 195, 200, 310 $\Rightarrow Q_3 = 195$ (3rd value). $IQR = 195 - 165 = 30$. Upper fence = $195 + 1.5(30) = 240$. Since $310 > 240$, it is an outlier. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A histogram has the following classes: $[0, 10)$ frequency 10; $[10, 20)$ frequency 24; $[20, 50)$ frequency 36; $[50, 70)$ frequency density 0.8. (a) Find the frequency density of the class $[0, 10)$. (b) Find the frequency of the class $[50, 70)$.

Lời giải chi tiết

(a) Frequency density = $10/10 = 1.0$. (b) Frequency = $0.8 \times (70 - 50) = 0.8 \times 20 = 16$.

Bài tập luyện tập

The cumulative frequency table for the time (minutes) taken by 60 students to complete a task is: time < 10 : cf 5; < 20 : cf 18; < 30 : cf 38; < 40 : cf 52; < 50 : cf 60. Estimate the median and the interquartile range.

Lời giải chi tiết

Median position = $n/2 = 30$: this lies in class 20–30 (cf jumps from 18 to 38). Fraction = $(30 - 18)/(38 - 18) = 12/20 = 0.6$; median $\approx 20 + 0.6(10) = 26$. Q_1 position = 15: lies in class 10–20 (cf from 5 to 18). Fraction = $(15 - 5)/(18 - 5) = 10/13 = 0.769$; $Q_1 \approx 10 + 0.769(10) = 17.7$. Q_3 position = 45: lies in class 30–40 (cf from 38 to 52). Fraction = $(45 - 38)/(52 - 38) = 7/14 = 0.5$; $Q_3 \approx 30 + 0.5(10) = 35$. $IQR \approx 35 - 17.7 = 17.3$.

Bài tập luyện tập

Data coded using $y = \frac{x - 40}{2}$ has mean $\bar{y} = 6$ and standard deviation $s_y = 3$. Find the mean and standard deviation of x .

(A) $\bar{x} = 52, s_x = 6$ (C) $\bar{x} = 52, s_x = 3$ (B) $\bar{x} = 46, s_x = 3$ (D) $\bar{x} = 12, s_x = 6$ **Lời giải chi tiết**

$x = 2y + 40$, so $\bar{x} = 2(6) + 40 = 52$ and $s_x = 2(3) = 6$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Two data sets record the number of hours of sleep (per night) for two groups of 6 people:

Group P : 5, 6, 8, 9, 10, 12 Group Q : 2, 4, 7, 9, 13, 15.

Find the mean and standard deviation of each group, and compare the two groups.

Lời giải chi tiết

Group P : $\sum x = 50 \Rightarrow \bar{x}_P = \frac{50}{6} = 8.333$. $\sum x^2 = 25 + 36 + 64 + 81 + 100 + 144 = 450 \Rightarrow$ variance $= \frac{450}{6} - 8.333^2 = 75 - 69.444 = 5.556 \Rightarrow s_P = \sqrt{5.556} = 2.357$ (4 s.f.). Group Q : $\sum x = 50 \Rightarrow \bar{x}_Q = \frac{50}{6} = 8.333$. $\sum x^2 = 4 + 16 + 49 + 81 + 169 + 225 = 544 \Rightarrow$ variance $= \frac{544}{6} - 8.333^2 = 90.667 - 69.444 = 21.222 \Rightarrow s_Q = \sqrt{21.222} = 4.607$ (4 s.f.). The two groups have **identical means** (8.33 hours), but Group Q has a much larger standard deviation (4.61 vs. 2.36), so Group Q 's sleep hours are considerably more variable, while Group P 's are more consistent around the common mean.

Bài tập luyện tập

The cumulative frequency table below shows the weights (kg) of 80 parcels: weight < 20 : cf 5; < 40 : cf 22; < 60 : cf 50; < 80 : cf 72; < 100 : cf 80. Estimate the median, Q_1 , Q_3 and the interquartile range.

Lời giải chi tiết

Median position $= n/2 = 40$: lies in class 40–60 (cf 22 to 50). Fraction $= (40 - 22)/(50 - 22) = 18/28 = 0.643$; median $\approx 40 + 0.643(20) = 52.9$. Q_1 position $= 20$: lies in class 20–40 (cf 5 to 22). Fraction $= (20 - 5)/(22 - 5) = 15/17 = 0.882$; $Q_1 \approx 20 + 0.882(20) = 37.6$. Q_3 position $= 60$: lies in class 60–80 (cf 50 to 72). Fraction $= (60 - 50)/(72 - 50) = 10/22 = 0.455$; $Q_3 \approx 60 + 0.455(20) = 69.1$. IQR $\approx 69.1 - 37.6 = 31.5$.

6.6.2 Permutations and combinations

Bài tập luyện tập

A committee of 3 is chosen from 6 men and 4 women. In how many ways can it be chosen with *at least* one woman?

- | | |
|---------|--------|
| (A) 100 | (C) 60 |
| (B) 80 | (D) 24 |

Lời giải chi tiết

Total $^{10}C_3 = 120$; all-men $^6C_3 = 20$. At least one woman $= 120 - 20 = 100$. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\frac{7!}{4!3!}$.

- | | |
|---------|----------|
| (A) 35 | (C) 840 |
| (B) 210 | (D) 5040 |

Lời giải chi tiết

$$\frac{7!}{4!3!} = {}^7C_3 = \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 35. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find the number of distinct arrangements of the letters of the word statistics.

Lời giải chi tiết

statistics has 10 letters, with *S* repeated 3 times, *T* repeated 3 times, *I* repeated 2 times, *A* and *C* once each. Number of arrangements = $\frac{10!}{3!3!2!} = \frac{3\,628\,800}{72} = 50\,400$.

Bài tập luyện tập

In how many ways can 5 friends be seated in a row if two particular friends, Ann and Ben, refuse to sit next to each other?

- (A) 72 (C) 96
(B) 48 (D) 24

Lời giải chi tiết

Total arrangements = $5! = 120$. Arrangements with Ann and Ben together = $4! \times 2! = 48$. Not together = $120 - 48 = 72$. (A).

Bài tập luyện tập

How many ways can the letters of the word number be arranged if the arrangement must begin with *N* and end with *R*?

- (A) 24 (C) 720
(B) 120 (D) 48

Lời giải chi tiết

number has 6 distinct letters. Fixing *N* first and *R* last leaves 4 letters (*U*, *M*, *B*, *E*) to arrange in the middle 4 positions: $4! = 24$. (A).

Bài tập luyện tập

A quiz team of 5 is chosen from 8 students. In how many ways can the team be chosen if two particular students, Long and Mai, must both be included?

- (A) 20 (C) 336
(B) 56 (D) 15

Lời giải chi tiết

Long and Mai are already in the team; choose the remaining 3 members from the other 6 students: ${}^6C_3 = 20$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A school committee of 4 people is to be formed from 10 candidates. First 4 candidates are chosen from the 10; then a chairperson and a secretary are selected from these 4 (the other two become ordinary members). Find the total number of ways this can be done.

Lời giải chi tiết

Choosing the 4 candidates: ${}^{10}C_4 = 210$. Assigning chairperson and secretary (ordered) from the 4 chosen: ${}^4P_2 = 4 \times 3 = 12$. Total = $210 \times 12 = 2520$.

Bài tập luyện tập

In how many ways can 6 friends be seated around a circular table?

- (A) 120 (C) 360
(B) 720 (D) 24

Lời giải chi tiết

Circular arrangements of 6 distinct people = $(6 - 1)! = 5! = 120$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

The word square has 6 distinct letters: 3 vowels (U, A, E) and 3 consonants (S, Q, R). Find the number of arrangements of these 6 letters in which no two vowels are adjacent.

Lời giải chi tiết

Arrange the 3 consonants first: $3! = 6$ ways, creating 4 gaps (before, between and after them) in which vowels may be placed: $\square C \square C \square C \square$. Choose 3 of these 4 gaps for the 3 vowels (at most one vowel per gap, so no two vowels are adjacent): ${}^4C_3 = 4$ ways, and arrange the 3 vowels within the chosen gaps: $3! = 6$ ways. Total = $3! \times {}^4C_3 \times 3! = 6 \times 4 \times 6 = 144$.

Bài tập luyện tập

5 people are seated around a round table. Two particular people, X and Y, must *not* sit next to each other. Find the number of possible seating arrangements.

- (A) 12 (C) 18
(B) 6 (D) 24

Lời giải chi tiết

Total circular arrangements of 5 people = $(5 - 1)! = 4! = 24$. Treating X, Y as a block gives 4 units to arrange circularly: $(4 - 1)! = 3! = 6$, times $2! = 2$ for the internal order of the block, giving $6 \times 2 = 12$ arrangements with X, Y together. Not together = $24 - 12 = 12$. **(A)**.

6.6.3 Probability

Bài tập luyện tập

A box has 4 red and 6 blue pens. Two are drawn without replacement. Given the first is blue, find $P(\text{2nd blue} \mid \text{1st blue})$, then $P(\text{both blue})$.

(A) $\frac{5}{9}$ and $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{3}$ and $\frac{5}{9}$

(B) $\frac{6}{10}$ and $\frac{5}{9}$

(D) $\frac{2}{3}$ and $\frac{1}{3}$

Lời giải chi tiết

$$P(\text{2nd blue} \mid \text{1st blue}) = \frac{5}{9} \text{ (5 blue left of 9)}. P(\text{both blue}) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{9} = \frac{1}{3}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

A card is drawn at random from a standard deck of 52 playing cards. Find the probability that the card is a King or a Heart.

(A) $\frac{4}{13}$

(C) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{17}{52}$

(D) $\frac{3}{13}$

Lời giải chi tiết

$$P(\text{King}) = \frac{4}{52}, P(\text{Heart}) = \frac{13}{52}, P(\text{King of Hearts}) = \frac{1}{52} \text{ (not mutually exclusive)}. P(\text{King} \cup \text{Heart}) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Events A and B are independent with $P(A) = 0.4$ and $P(B) = 0.5$. Find $P(A \cap B)$, $P(A \cup B)$ and $P(A \mid B)$.

Lời giải chi tiết

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0.4(0.5) = 0.2. P(A \cup B) = 0.4 + 0.5 - 0.2 = 0.7. P(A \mid B) = P(A \cap B)/P(B) = 0.2/0.5 = 0.4 \text{ (equal to } P(A), \text{ confirming independence).}$$

Bài tập luyện tập

In a survey of 100 students, results are: Male-Pass 45, Male-Fail 15, Female-Pass 32, Female-Fail 8. Find $P(\text{Pass} \mid \text{Male})$ and $P(\text{Female} \mid \text{Pass})$.

Lời giải chi tiết

$$\text{Total male} = 60, \text{ total pass} = 45 + 32 = 77. P(\text{Pass} \mid \text{Male}) = 45/60 = 0.75. P(\text{Female} \mid \text{Pass}) = 32/77 = 0.416 \text{ (3 s.f.)}.$$

Bài tập luyện tập

Bag A contains 3 red and 2 blue balls; bag B contains 1 red and 4 blue balls. A bag is chosen at random (equally likely) and one ball is drawn from it. (a) Find $P(\text{red})$. (b) Given the ball drawn is red, find $P(\text{it came from bag } A)$.

Lời giải chi tiết

$P(A) = P(B) = 0.5$. $P(\text{Red} | A) = 3/5 = 0.6$, $P(\text{Red} | B) = 1/5 = 0.2$. (a) $P(\text{Red}) = 0.5(0.6) + 0.5(0.2) = 0.3 + 0.1 = 0.4$. (b) $P(A | \text{Red}) = \frac{0.5(0.6)}{0.4} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$.

Bài tập luyện tập

A committee of 4 is chosen at random from 6 men and 5 women. Find the probability that the committee contains exactly 2 men and 2 women.

(A) $\frac{5}{11}$

(C) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{3}{11}$

(D) $\frac{2}{5}$

Lời giải chi tiết

Total ways = ${}^{11}C_4 = 330$. Favourable ways = ${}^6C_2 \times {}^5C_2 = 15 \times 10 = 150$. $P = \frac{150}{330} = \frac{5}{11}$. (A).

Bài tập luyện tập

In a class of 30 students, 18 study French (F), 15 study Spanish (S), and 8 study both. A student is selected at random and is found to study French. Find the probability that this student also studies Spanish.

(A) $\frac{4}{9}$

(C) $\frac{8}{30}$

(B) $\frac{8}{15}$

(D) $\frac{15}{18}$

Lời giải chi tiết

$P(S | F) = \frac{n(F \cap S)}{n(F)} = \frac{8}{18} = \frac{4}{9} \approx 0.444$. (A).

Bài tập luyện tập

Of 150 people surveyed, 70 read newspaper A , 60 read B , 50 read C ; 25 read both A and B , 20 read both A and C , 15 read both B and C , and 10 read all three. Find (a) the number of people who read none of the three newspapers, (b) the probability that a randomly selected person reads exactly one newspaper.

Lời giải chi tiết

$n(A \cup B \cup C) = 70 + 60 + 50 - 25 - 20 - 15 + 10 = 130$, so the number reading none is $150 - 130 = 20$. Exactly-two regions: $A \cap B$ only $= 25 - 10 = 15$; $A \cap C$ only $= 20 - 10 = 10$; $B \cap C$ only $= 15 - 10 = 5$. Only $A = 70 - 15 - 10 - 10 = 35$; only $B = 60 - 15 - 5 - 10 = 30$; only $C = 50 - 10 - 5 - 10 = 25$ (check: $35 + 30 + 25 + 15 + 10 + 5 + 10 + 20 = 150$). Exactly one newspaper $= 35 + 30 + 25 = 90$, so $P(\text{exactly one}) = \frac{90}{150} = \frac{3}{5} = 0.6$.

Bài tập luyện tập

Two fair dice are rolled. Given that the first die shows a number greater than 4, find the probability that the sum of the two dice is 8.

(A) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{12}$

(B) $\frac{1}{9}$

(D) $\frac{1}{4}$

Lời giải chi tiết

Given the first die is 5 or 6, the reduced sample space has $2 \times 6 = 12$ equally likely outcomes. Sum = 8 occurs for (5, 3) and (6, 2): 2 outcomes. $P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$. (A).

6.6.4 Discrete random variables**Bài tập luyện tập**

$X: P(X = 0) = k, P(X = 1) = 2k, P(X = 2) = 3k, P(X = 3) = 4k$. Find k and $E(X)$.

(A) $k = 0.1, E(X) = 2.0$

(C) $k = 0.25, E(X) = 2$

(B) $k = 0.1, E(X) = 1.5$

(D) $k = 0.1, E(X) = 1.0$

Lời giải chi tiết

$10k = 1 \Rightarrow k = 0.1$. $E(X) = 0(0.1) + 1(0.2) + 2(0.3) + 3(0.4) = 2.0$. (A).

Bài tập luyện tập

For the distribution $P(X = 0) = 0.1, P(X = 1) = 0.2, P(X = 2) = 0.3, P(X = 3) = 0.4$ (as above, with $E(X) = 2.0$), find $\text{Var}(X)$.

(A) 1.0

(C) 0.5

(B) 2.0

(D) 4.0

Lời giải chi tiết

$E(X^2) = 0(0.1) + 1(0.2) + 4(0.3) + 9(0.4) = 0.2 + 1.2 + 3.6 = 5.0$. $\text{Var}(X) = 5.0 - 2.0^2 = 1.0$. (A).

Bài tập luyện tập

Given $E(X) = 3$ and $\text{Var}(X) = 2$, find $E(4X - 1)$ and $\text{Var}(4X - 1)$.

(A) 11 and 32

(C) 12 and 32

(B) 11 and 8

(D) 11 and 2

Lời giải chi tiết

$E(4X - 1) = 4(3) - 1 = 11$. $\text{Var}(4X - 1) = 4^2(2) = 32$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A fair die numbered 1 to 6 is rolled and X is the score obtained. Find $E(X)$ and $\text{Var}(X)$.

Lời giải chi tiết

Discrete uniform distribution on $1, \dots, 6$: $E(X) = \frac{6+1}{2} = 3.5$. $\text{Var}(X) = \frac{6^2-1}{12} = \frac{35}{12} = 2.917$ (4 s.f.). (Check: $\sum x^2 = 91$, $E(X^2) = 91/6 = 15.167$, $\text{Var}(X) = 15.167 - 3.5^2 = 2.917$.)

Bài tập luyện tập

In a game, a player pays \$5 to roll a fair die. If the score is 6, they win \$20; otherwise they win nothing. Find the player's expected profit, and state whether the game favours the player or the organiser.

(A) $-\$1.67$ (favours organiser)

(C) \$0 (fair game)

(B) $+\$1.67$ (favours player)

(D) $-\$5$ (favours organiser)

Lời giải chi tiết

$E(\text{winnings}) = 20\left(\frac{1}{6}\right) + 0\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{20}{6} = 3.333$. Expected profit $= 3.333 - 5 = -1.667 \approx -\1.67 ; the game favours the organiser. **(A)**.

Bài tập luyện tập

$X \sim B(10, 0.25)$. Find $P(X = 2)$.

(A) 0.282

(C) 0.250

(B) 0.300

(D) 0.188

Lời giải chi tiết

$P(X = 2) = \binom{10}{2}(0.25)^2(0.75)^8 = 45 \times 0.0625 \times 0.100113 = 0.2816 \approx 0.282$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

$X \sim B(20, 0.35)$. Find $E(X)$ and $\text{Var}(X)$.

Lời giải chi tiết

$$E(X) = np = 20(0.35) = 7. \text{Var}(X) = np(1-p) = 20(0.35)(0.65) = 4.55.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim B(6, p)$. Given that $P(X = 6) = 0.015625$, find p .

- | | |
|----------|---------|
| (A) 0.5 | (C) 0.6 |
| (B) 0.25 | (D) 0.4 |

Lời giải chi tiết

$$P(X = 6) = p^6 = 0.015625 \Rightarrow p = \sqrt[6]{0.015625} = 0.5 \text{ (since } 0.5^6 = 0.015625\text{)}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

$X \sim B(n, 0.2)$. Given that $P(X = 0) = 0.32768$, find n .

Lời giải chi tiết

$$P(X = 0) = (1 - 0.2)^n = 0.8^n = 0.32768. \text{ Since } 0.8^5 = 0.32768, \text{ we have } n = 5.$$

6.6.5 The normal distribution**Bài tập luyện tập**

Male heights $\sim N(175, 49)$. Find $P(165 < X < 185)$.

- | | |
|-----------|-----------|
| (A) 0.847 | (C) 0.5 |
| (B) 0.923 | (D) 0.929 |

Lời giải chi tiết

$$Z = \pm \frac{10}{7} = \pm 1.43. P = 2\Phi(1.43) - 1 = 2(0.9236) - 1 = 0.847. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

$X \sim N(30, 25)$. Find $P(X > 36)$.

- | | |
|-----------|-----------|
| (A) 0.115 | (C) 0.067 |
| (B) 0.885 | (D) 0.230 |

Lời giải chi tiết

$$\sigma = 5. Z = \frac{36 - 30}{5} = 1.2. P(X > 36) = 1 - \Phi(1.2) = 1 - 0.8849 = 0.1151 \approx 0.115. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

$X \sim N(40, 16)$. Find k such that $P(X < k) = 0.9505$.

- (A) 46.6 (C) 43.3
(B) 45.6 (D) 44.6

Lời giải chi tiết

$\sigma = 4$. $\Phi(z) = 0.9505 \Rightarrow z = 1.65$. $k = 40 + 1.65(4) = 46.6$. (A).

Bài tập luyện tập

The lifetime of a battery, in hours, is normally distributed with standard deviation 12. Given that 15% of batteries last longer than 250 hours, find the mean lifetime μ .

Lời giải chi tiết

$P(X > 250) = 0.15 \Rightarrow P(X < 250) = 0.85 \Rightarrow z = \Phi^{-1}(0.85) = 1.036$. $\frac{250 - \mu}{12} = 1.036 \Rightarrow 250 - \mu = 12.44 \Rightarrow \mu = 250 - 12.44 = 237.6$ (4 s.f.).

Bài tập luyện tập

The volume of drink in a bottle is normally distributed. Given that 2.5% of bottles contain less than 495 ml, and 1% of bottles contain more than 525 ml, find the mean and standard deviation of the volume.

Lời giải chi tiết

$P(X < 495) = 0.025 \Rightarrow z_1 = -1.96$, so $495 - \mu = -1.96\sigma \Rightarrow \mu = 495 + 1.96\sigma$. $P(X > 525) = 0.01 \Rightarrow P(X < 525) = 0.99 \Rightarrow z_2 = 2.3263$, so $525 - \mu = 2.3263\sigma \Rightarrow \mu = 525 - 2.3263\sigma$. Setting equal: $495 + 1.96\sigma = 525 - 2.3263\sigma \Rightarrow 4.2863\sigma = 30 \Rightarrow \sigma = 7.00$ (3 s.f.). $\mu = 495 + 1.96(7.00) = 495 + 13.72 = 508.7$ (4 s.f.). So $\mu \approx 508.7$ ml, $\sigma \approx 7.00$ ml.

Bài tập luyện tập

$X \sim B(150, 0.5)$. Use a normal approximation (with continuity correction) to find $P(X \geq 80)$.

- (A) 0.233 (C) 0.767
(B) 0.500 (D) 0.115

Lời giải chi tiết

$np = 75 > 5$, $n(1-p) = 75 > 5$. $Y \sim N(75, 37.5)$ since $np(1-p) = 150(0.5)(0.5) = 37.5$, $\sigma = \sqrt{37.5} = 6.124$. $P(X \geq 80) \approx P(Y > 79.5)$: $z = \frac{79.5 - 75}{6.124} = 0.735 \approx 0.73$. $P(Y > 79.5) = 1 - \Phi(0.73) = 1 - 0.7673 = 0.2327 \approx 0.233$. (A).

Bài tập luyện tập

Given $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ and $P(X < 70) = 0.7324$, find $P(X > 2\mu - 70)$.

(A) 0.7324

(C) 0.5

(B) 0.2676

(D) 0.8662

Lời giải chi tiết

The point $2\mu - 70$ is the reflection of 70 about μ : if 70 corresponds to $z_0 = (70 - \mu)/\sigma$, then $2\mu - 70$ corresponds to $z = (\mu - 70)/\sigma = -z_0$. By symmetry, $P(X > 2\mu - 70) = P(Z > -z_0) = P(Z < z_0) = P(X < 70) = 0.7324$. **(A).**

Bài tập luyện tập

$X \sim B(200, 0.3)$. Use a normal approximation, with continuity correction, to estimate $P(X \leq 50)$.

(A) 0.0708

(C) 0.5

(B) 0.9292

(D) 0.150

Lời giải chi tiết

$np = 60 > 5$, $n(1 - p) = 140 > 5$. Variance $= np(1 - p) = 200(0.3)(0.7) = 42$, so $\sigma = \sqrt{42} = 6.481$. $P(X \leq 50) \approx P(Y < 50.5)$: $z = \frac{50.5 - 60}{6.481} = -1.466 \approx -1.47$. $P(Y < 50.5) = \Phi(-1.47) = 1 - \Phi(1.47) = 1 - 0.9292 = 0.0708$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Test scores are normally distributed. It is known that 10% of students score above 84, and 30% of students score below 55. Find the mean μ and standard deviation σ of the scores.

Lời giải chi tiết

$P(X > 84) = 0.10 \Rightarrow P(X < 84) = 0.90 \Rightarrow z_1 = \Phi^{-1}(0.90) = 1.2816$, so $\mu = 84 - 1.2816\sigma$. $P(X < 55) = 0.30 \Rightarrow z_2 = \Phi^{-1}(0.30) = -0.5244$, so $\mu = 55 + 0.5244\sigma$. Setting equal: $84 - 1.2816\sigma = 55 + 0.5244\sigma \Rightarrow 29 = 1.806\sigma \Rightarrow \sigma = 16.06$ (4 s.f.). $\mu = 55 + 0.5244(16.06) = 55 + 8.42 = 63.42 \approx 63.4$ (4 s.f.). So $\mu \approx 63.4$, $\sigma \approx 16.1$.

Probability & Statistics --- Further

Mục tiêu Unit: Phân phối Poisson, tổ hợp tuyến tính của biến ngẫu nhiên (linear combinations of random variables), lấy mẫu và ước lượng (sampling & estimation) gồm ước lượng không chệch và khoảng tin cậy, kiểm định giả thuyết (hypothesis testing) cho trung bình và cho tham số Poisson, biến ngẫu nhiên liên tục (mức A Level, Paper 6). Cuối chương có phần ôn nhanh trước ngày thi.

7.1 The Poisson distribution

7.1.1 Conditions for a Poisson model

A random variable X can be modelled by a Poisson distribution when events occur in a fixed interval of time or space subject to four conditions: (i) events occur **singly**, i.e. not simultaneously; (ii) events occur **independently** of one another; (iii) events occur at a **constant average rate** over the interval; (iv) the interval considered is fixed in length (time, area, volume, or another continuous measure). When these hold, the number of events X in that interval satisfies $X \sim \text{Po}(\lambda)$, where λ is the mean number of events in the interval.

Typical Poisson contexts include: telephone calls arriving at a switchboard, misprints on a page of text, radioactive particle emissions in a fixed time, or vehicles passing a checkpoint. By contrast, events that *cluster* (e.g. buses arriving together after a delay, breaking independence) or whose rate changes noticeably within the interval (breaking the constant-rate condition) should *not* be modelled by a single Poisson distribution — this is exactly the kind of judgement a “state the conditions” exam question is testing.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Poisson mô tả số lần một sự kiện **hiếm, độc lập** xảy ra trong một khoảng thời gian/không gian cố định, với trung bình = phương sai = λ . Bốn điều kiện cần nhớ: xảy ra **đơn lẻ** (không hai sự kiện cùng lúc), **độc lập**, tốc độ trung bình **không đổi**, và khoảng xét là **cố định**. Khi đổi khoảng thời gian/không gian (ví dụ từ 1 phút sang 2 phút), λ phải **nhân theo tỉ lệ tương ứng**.

7.1.2 Poisson probabilities, mean and variance

If $X \sim \text{Po}(\lambda)$ then $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$ for $x = 0, 1, 2, \dots$, and $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$. The distribution is defined for every non-negative integer, so probabilities such as $P(X \geq k)$ are found using $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$.

Ví dụ mẫu • Worked example

Flaws in fabric occur as $\text{Po}(2)$ per 10m roll. Find $P(X = 3)$ and $P(X \geq 1)$.

$$P(X = 3) = \frac{e^{-2} 2^3}{3!} = e^{-2}(1.3333) = 0.135335 \times 1.3333 = 0.180. \quad P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - e^{-2} = 1 - 0.1353 = 0.8647.$$

7.1.3 Sum of independent Poisson variables

If $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$ and $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$ are **independent**, then $X + Y \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$. This extends to any number of independent Poisson variables: their sum is Poisson with mean equal to the sum of the individual means. This is why, when combining events from two independent sources over the same interval, the rates simply add. Equivalently, this is the same additive property used when scaling λ for a longer interval: n independent, identical intervals combine into one interval with mean $n\lambda$.

Note carefully that this additive property applies only to **sums**: the *difference* of two independent Poisson variables is *not* itself Poisson (a Poisson variable can never take negative values, but a difference can), so questions about a difference of counts must be handled directly rather than by claiming $X - Y \sim \text{Po}(\lambda_1 - \lambda_2)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Orders arrive at Counter A as $\text{Po}(2)$ per 10 minutes and at Counter B , independently, as $\text{Po}(3)$ per 10 minutes. Let T be the total number of orders at both counters in 10 minutes. Find $P(T = 4)$ and $P(T > 6)$.

Since A, B are independent Poisson, $T \sim \text{Po}(2 + 3) = \text{Po}(5)$. $P(T = 4) = \frac{e^{-5} 5^4}{4!} = \frac{0.0067379 \times 625}{24} = 0.1755$. Building up $P(T \leq 6)$ term by term: $P_0 = 0.0067, P_1 = 0.0337, P_2 = 0.0842, P_3 = 0.1404, P_4 = 0.1755, P_5 = 0.1755, P_6 = 0.1462$, giving $P(T \leq 6) = 0.7622$, so $P(T > 6) = 1 - 0.7622 = 0.2378$.

7.1.4 Poisson approximation to the Binomial distribution

When $X \sim B(n, p)$ with n **large** and p **small** (so the mean np stays moderate), the Poisson distribution with $\lambda = np$ gives a very close approximation: $X \approx \text{Po}(np)$. This is useful because Binomial probabilities with large n are awkward to compute directly, whereas Poisson probabilities are quick. A common working guideline is $n \geq 50$ together with $np < 5$; the larger n is and the smaller p is, the better the approximation. The approximation works because as $n \rightarrow \infty$ and $p \rightarrow 0$ with $np = \lambda$ held fixed, the Binomial pmf $\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$ converges term by term to $\frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A factory finds that 0.5% of components are defective, independently of each other. In a batch of 400 components, estimate the probability that more than 3 are defective.

$n = 400$ is large and $p = 0.005$ is small, so use $X \sim \text{Po}(\lambda)$ with $\lambda = np = 400 \times 0.005 = 2$. $P(X \leq 3) = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0.1353 + 0.2707 + 0.2707 + 0.1804 = 0.8571$. $P(X > 3) = 1 - 0.8571 = 0.1429$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc xấp xỉ: khi n lớn và p nhỏ (mỗi phép thử hiếm khi "thành công"), Nhị thức $B(n, p)$ được xấp xỉ bằng Poisson với $\lambda = np$. Đây là lý do vì sao đề bài Paper 6 hay cho n hàng trăm, p vài phần nghìn/phần trăm — tính trực tiếp Nhị thức sẽ rất cồng kềnh, trong khi Poisson tính nhanh và cho kết quả rất gần đúng.

Model	Describes	Mean	Variance	Related approximation
Binomial $B(n, p)$	count of successes in n independent trials, fixed p	np	$np(1 - p)$	→ $Po(np)$ if n large, p small
Poisson $Po(\lambda)$	count of rare independent events in a fixed interval	λ	λ	→ $N(\lambda, \lambda)$ if λ large
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	continuous, symmetric bell-shaped data	μ	σ^2	used to approximate the above for large parameters

Summary of when each of the three distributions models a situation, and how they connect through approximation.

Ví dụ mẫu · Worked example

A component manufacturer knows that 2% of components are oversized, independently of each other. In a random sample of 100 components, let X be the number that are oversized. Find $P(X = 2)$ (a) exactly, using the Binomial distribution, and (b) using a Poisson approximation, and compare the two answers.

(a) Exactly, $X \sim B(100, 0.02)$, so

$$P(X = 2) = \binom{100}{2} (0.02)^2 (0.98)^{98} = 4950 \times 0.0004 \times 0.98^{98}.$$

A calculator gives $0.98^{98} = 0.1381$ (4 s.f.), so $P(X = 2) = 4950 \times 0.0004 \times 0.1381 = 1.98 \times 0.1381 = 0.2734$ (4 s.f.). (b) Approximating: $n = 100$ is large and $p = 0.02$ is small, so use $X \approx Po(\lambda)$ with $\lambda = np = 100 \times 0.02 = 2$:

$$P(X = 2) \approx \frac{e^{-2} 2^2}{2!} = \frac{0.135335 \times 4}{2} = 0.2707 \text{ (4 s.f.)}.$$

(c) Comparing: the exact Binomial value 0.2734 and the Poisson approximation 0.2707 differ by only 0.0027, agreeing to 2 significant figures – confirming that the approximation is excellent here because n is large and p is small.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ví dụ trên cho thấy **độ chính xác thực tế** của việc xấp xỉ Nhị thức bằng Poisson: dù $P(X = 2)$ tính chính xác từ $B(100, 0.02)$ (0.2734) và tính xấp xỉ từ $Po(2)$ (0.2707) dùng hai công thức hoàn toàn khác nhau, kết quả chỉ lệch khoảng 0.003 – vì vậy trong phòng thi, khi n lớn và p nhỏ, ta luôn được phép dùng Poisson để tính nhanh mà không lo sai số đáng kể.

7.1.5 Normal approximation to a Poisson distribution

When $X \sim Po(\lambda)$ and λ is **large** (a common working guideline is $\lambda > 15$), the Poisson distribution can itself be approximated by a normal distribution, using the fact that its mean and variance are both λ : $X \approx N(\lambda, \lambda)$. Because X is discrete and the normal distribution is continuous, a **continuity correction** of ± 0.5 must be applied before standardising: $P(X \leq k)$ is approximated by $P(Y < k + 0.5)$, and $P(X \geq k)$ by $P(Y > k - 0.5)$, where $Y \sim N(\lambda, \lambda)$.

For $X \sim \text{Po}(\lambda)$ with λ large: $X \approx N(\lambda, \lambda)$, with continuity correction ± 0.5 applied to the discrete boundary before standardising: $z = \frac{(k \pm 0.5) - \lambda}{\sqrt{\lambda}}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A radioactive source emits particles at a mean rate of $\text{Po}(25)$ per minute. Use a normal approximation to estimate $P(X > 30)$ in a randomly chosen minute.

Since $\lambda = 25$ is large, use $Y \sim N(25, 25)$, $\text{SD} = 5$. With continuity correction, $P(X > 30) \approx P(Y > 30.5)$. $z = \frac{30.5 - 25}{5} = \frac{5.5}{5} = 1.1$. $P(Y > 30.5) = 1 - \Phi(1.1) = 1 - 0.8643 = 0.1357$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi λ đủ lớn (thường lấy mốc $\lambda > 15$), có thể xấp xỉ Poisson bằng phân phối chuẩn $N(\lambda, \lambda)$ – đúng như dòng thứ hai của bảng tổng kết ở trên. Vì X là biến rời rạc còn phân phối chuẩn là liên tục, bắt buộc phải dùng **hiệu chỉnh liên tục** (± 0.5) trước khi chuẩn hóa về z , nếu bỏ qua bước này kết quả sẽ lệch đáng kể so với giá trị Poisson thật.

Bài tập luyện tập

Accidents on a road follow $\text{Po}(1.5)$ per week. Find $P(X \geq 2)$.

(A) 0.442

(C) 0.223

(B) 0.557

(D) 0.335

Lời giải chi tiết

$P(X \geq 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - e^{-1.5} - 1.5e^{-1.5} = 1 - 0.2231 - 0.3347 = 0.442$. (A).

Bài tập luyện tập

Calls arrive at 3 per minute (Po). Find $P(\text{exactly 5 calls in 2 min})$.

(A) 0.161

(C) 0.175

(B) 0.146

(D) 0.061

Lời giải chi tiết

For 2 min, $\lambda = 6$. $P(X = 5) = \frac{e^{-6}6^5}{5!} = \frac{0.002479(7776)}{120} = 0.161$. (A).

Bài tập luyện tập

Text messages to a helpdesk arrive as $\text{Po}(2.5)$ per hour. Find $P(X = 0)$ in a randomly chosen hour.

(A) 0.0821

(C) 0.250

(B) 0.100

(D) 0.500

Lời giải chi tiết

$$P(X = 0) = e^{-2.5} = 0.0821. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

A shop receives orders as $Po(4)$ in the morning and, independently, $Po(3)$ in the afternoon. Find the probability that the shop receives at most 2 orders in total during the day.

Lời giải chi tiết

$$\text{Total} \sim Po(4 + 3) = Po(7). P(X \leq 2) = e^{-7} \left(1 + 7 + \frac{49}{2} \right) = e^{-7}(32.5) = 0.0009119 \times 32.5 = 0.0296.$$

Bài tập luyện tập

In a large population, 1% of items are faulty ($n = 300$). Using a Poisson approximation, find $P(X = 2)$.

(A) 0.224

(C) 0.161

(B) 0.199

(D) 0.184

Lời giải chi tiết

$$\lambda = np = 300 \times 0.01 = 3. P(X = 2) = \frac{e^{-3}3^2}{2!} = e^{-3}(4.5) = 0.049787 \times 4.5 = 0.224. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

For $X \sim Po(\lambda)$, which statement is always true?

(A) $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$ (C) $\text{Var}(X) = \sqrt{\lambda}$ (B) $E(X) = \lambda^2$ (D) $E(X) = 2\lambda$

Lời giải chi tiết

By definition of the Poisson distribution, mean and variance are both equal to λ . (A).

Bài tập luyện tập

$X \sim Po(3)$ and $Y \sim Po(4)$ are independent. Let $Z = X + Y$. Find $P(Z = 5)$.

Lời giải chi tiết

$$Z \sim Po(7). P(Z = 5) = \frac{e^{-7}7^5}{5!} = \frac{0.0009119 \times 16807}{120} = 0.1277.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim Po(4)$. Find $P(X = 2)$.

(A) 0.1465

(C) 0.1954

(B) 0.0733

(D) 0.0183

Lời giải chi tiết

$$P(X = 2) = \frac{e^{-4}4^2}{2!} = 8e^{-4} = 8(0.018316) = 0.1465. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Defects on Machine *A* occur as $\text{Po}(1.2)$ per hour and, independently, on Machine *B* as $\text{Po}(0.8)$ per hour. Find the probability that at most 1 defect occurs across both machines in one hour.

Lời giải chi tiết

$$\text{Total } T \sim \text{Po}(1.2 + 0.8) = \text{Po}(2). \quad P(T \leq 1) = e^{-2}(1 + 2) = 3e^{-2} = 3(0.135335) = 0.4060.$$

Bài tập luyện tập

In a factory, 1.2% of items are defective ($n = 250$). Using a Poisson approximation, find $P(X \leq 2)$.

(A) 0.4232

(C) 0.2231

(B) 0.6767

(D) 0.1494

Lời giải chi tiết

$$\lambda = np = 250 \times 0.012 = 3. \quad P(X \leq 2) = e^{-3} \left(1 + 3 + \frac{9}{2} \right) = 8.5e^{-3} = 8.5(0.049787) = 0.4232. \text{ (A).}$$

7.2 Linear combinations of random variables**7.2.1 Expectation and variance of $aX + b$**

For a random variable X and constants a, b : $E(aX + b) = aE(X) + b$ and $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$. Adding a constant b shifts the mean but leaves the spread unchanged; scaling by a scales the mean by a and the variance by a^2 (never by a itself).

Both results follow directly from the definitions of E and Var (writing the argument for a continuous X with pdf $f(x)$; the discrete case is identical with $\sum$ replacing $\int$):

$$E(aX + b) = \int (ax + b)f(x) dx = a \int xf(x) dx + b \int f(x) dx = aE(X) + b,$$

since $\int f(x) dx = 1$. For the variance, using $\text{Var}(Y) = E[(Y - E(Y))^2]$ with $Y = aX + b$ so that $Y - E(Y) = a(X - E(X))$:

$$\text{Var}(aX + b) = E[a^2(X - E(X))^2] = a^2E[(X - E(X))^2] = a^2\text{Var}(X).$$

$$E(aX + b) = aE(X) + b \quad ; \quad \text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X) \quad (\text{note: no } b \text{ term in the variance}).$$

Ví dụ mẫu · Worked example

X has $E(X) = 5$ and $\text{Var}(X) = 4$. Find $E(3X - 2)$, $\text{Var}(3X - 2)$ and the standard deviation of $3X - 2$.

$$E(3X - 2) = 3(5) - 2 = 13. \text{Var}(3X - 2) = 3^2(4) = 36. \text{SD} = \sqrt{36} = 6.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với biến đổi tuyến tính $aX + b$: kỳ vọng biến đổi **giống hệt** phép biến đổi ($aE(X) + b$), nhưng phương sai **chỉ nhân theo a^2** , hằng số b không ảnh hưởng đến phương sai (vì cộng một hằng số không làm dữ liệu phân tán thêm). Đây là lỗi sai phổ biến nhất của phần này: nhiều bạn quên bình phương a hoặc cộng nhầm b vào phương sai.

7.2.2 Expectation and variance of $aX + bY$

For two random variables X, Y and constants a, b : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ *always* (this identity does not require independence). However, $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y)$ only when X and Y are **independent** (so that any covariance term vanishes). Crucially, because the coefficients are **squared**, the variance of a *difference* $aX - bY$ is computed with exactly the same addition rule: $\text{Var}(aX - bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y)$.

More generally, for any X, Y (not necessarily independent), $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y) + 2ab \text{Cov}(X, Y)$, where $\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ measures how X and Y vary together. When X, Y are independent, $E(XY) = E(X)E(Y)$ so $\text{Cov}(X, Y) = 0$ and the covariance term disappears, leaving the simple addition rule above. The 9709 syllabus restricts to the independent case, so the covariance term should always be taken as zero unless a question states otherwise.

For independent X, Y : $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$; $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y)$ (variances **always add**, even for a difference, because the coefficients are squared).

(!) Lỗi thường gặp: $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y)$ requires X and Y to be **independent** – never apply it to dependent variables without a covariance term. Just as important: even when finding the variance of a *difference* such as $X - Y$, the variances still **add** (never subtract), because $(-1)^2 = 1$. Writing $\text{Var}(X - Y) = \text{Var}(X) - \text{Var}(Y)$ is one of the most common errors in this topic.

7.2.3 Linear combinations of independent normal variables

If $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ and $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ are independent, then any linear combination is also normal: $aX + bY \sim N(a\mu_1 + b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$. In particular, the sum of n independent copies of the *same* normal variable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ satisfies $X_1 + X_2 + \dots + X_n \sim N(n\mu, n\sigma^2)$ – note carefully that this is *not* the same as $nX \sim N(n\mu, n^2\sigma^2)$, since nX means one observation scaled by n , whereas $X_1 + \dots + X_n$ means n separate independent observations added together.

This "closure under linear combination" is a special property of the normal family: an arbitrary linear combination of independent normal variables is again exactly normal, with mean and variance found from the ordinary $E(aX + bY)$ and $\text{Var}(aX + bY)$ rules above. This applies to any number of independent normal variables, not just two: if $X_1, \dots, X_n$ are independent with $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, then $\sum a_i X_i \sim N(\sum a_i \mu_i, \sum a_i^2 \sigma_i^2)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Packets of flour have mass $X \sim N(500, 16)$ grams, independently of each other. Four packets are chosen at random and their total mass is $T = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$. Find $E(T)$, $\text{Var}(T)$, and hence $P(T > 2012)$ and $P(1990 < T < 2010)$.

$E(T) = 4(500) = 2000$. $\text{Var}(T) = 4(16) = 64$, so $T \sim N(2000, 64)$, $\text{SD} = 8$. $P(T > 2012)$: $z = \frac{2012 - 2000}{8} = 1.5 \Rightarrow P = 1 - \Phi(1.5) = 1 - 0.9332 = 0.0668$. $P(1990 < T < 2010)$: $z_1 = \frac{1990 - 2000}{8} = -1.25$, $z_2 = \frac{2010 - 2000}{8} = 1.25$. $P = 2\Phi(1.25) - 1 = 2(0.8944) - 1 = 0.7888$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Independently, $X \sim N(20, 9)$ and $Y \sim N(15, 4)$. Let $W = 2X - Y$. Find the distribution of W and $P(W > 30)$.

$E(W) = 2(20) - 15 = 25$. $\text{Var}(W) = 2^2(9) + (-1)^2(4) = 36 + 4 = 40 \Rightarrow W \sim N(25, 40)$, $\text{SD} = \sqrt{40} = 6.3246$. $z = \frac{30 - 25}{6.3246} = 0.79 \Rightarrow P(W > 30) = 1 - \Phi(0.79) = 1 - 0.7852 = 0.2148$.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Khi kết hợp các biến ngẫu nhiên **chuẩn độc lập** theo tổ hợp tuyến tính $aX + bY$, kết quả **vẫn là phân phối chuẩn**, với trung bình mới $= a\mu_1 + b\mu_2$ và phương sai mới $= a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2$ (luôn cộng, kể cả khi lấy hiệu). Phân biệt rõ: tổng của n biến độc lập cùng phân phối $(X_1 + \dots + X_n)$ có phương sai $n\sigma^2$, còn nX (một quan sát nhân n) có phương sai $n^2\sigma^2$ – hai đại lượng khác nhau hoàn toàn dù trông giống nhau.

Ví dụ mẫu · Worked example

Independently, X has $E(X) = 12$, $\text{Var}(X) = 5$ and Y has $E(Y) = 7$, $\text{Var}(Y) = 3$. Find $E(3X - 2Y + 1)$, $\text{Var}(3X - 2Y + 1)$, and the standard deviation of $3X - 2Y + 1$.

$E(3X - 2Y + 1) = 3(12) - 2(7) + 1 = 36 - 14 + 1 = 23$. Since X, Y are independent, $\text{Var}(3X - 2Y + 1) = 3^2(5) + (-2)^2(3) = 45 + 12 = 57$ (the constant $+1$ shifts the mean but leaves the variance unchanged). $\text{SD} = \sqrt{57} = 7.550$ (4 s.f.).

Bài tập luyện tập

X and Y are independent with $E(X) = 10$, $\text{Var}(X) = 5$, $E(Y) = 6$, $\text{Var}(Y) = 3$. Find $E(2X - 3Y)$ and $\text{Var}(2X - 3Y)$.

Lời giải chi tiết

$E(2X - 3Y) = 2(10) - 3(6) = 20 - 18 = 2$. $\text{Var}(2X - 3Y) = 2^2(5) + 3^2(3) = 20 + 27 = 47$.

Bài tập luyện tập

$E(X) = 8$. Find $E(5 - 2X)$.

(A) -11

(C) -6

(B) 11

(D) 21

Lời giải chi tiết

$$E(5 - 2X) = 5 - 2(8) = 5 - 16 = -11. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

$$\text{Var}(X) = 3. \text{ Find } \text{Var}(4X + 7).$$

(A) 48

(C) 55

(B) 19

(D) 12

Lời giải chi tiết

$$\text{Var}(4X + 7) = 4^2(3) = 16 \times 3 = 48. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

$$\text{Independently, } \text{Var}(X) = 6 \text{ and } \text{Var}(Y) = 10. \text{ Find } \text{Var}(3X - 2Y).$$

Lời giải chi tiết

$$\text{Var}(3X - 2Y) = 3^2(6) + 2^2(10) = 54 + 40 = 94.$$

Bài tập luyện tập

Two independent machines fill cans with volumes $X \sim N(330, 4)$ ml and $Y \sim N(330, 9)$ ml. Let $T = X + Y$. Find $P(T > 665)$.

Lời giải chi tiết

$$E(T) = 660, \text{Var}(T) = 4 + 9 = 13, \text{SD} = 3.6056. z = \frac{665 - 660}{3.6056} = 1.39 \Rightarrow P(T > 665) = 1 - \Phi(1.39) = 1 - 0.9177 = 0.0823.$$

Bài tập luyện tập

$$\text{Independently, } X \sim N(50, 4) \text{ and } Y \sim N(45, 9). \text{ Find } P(X > Y).$$

(A) 0.918

(C) 0.500

(B) 0.082

(D) 0.650

Lời giải chi tiết

$$\text{Let } D = X - Y. E(D) = 5, \text{Var}(D) = 4 + 9 = 13, \text{SD} = 3.6056. P(D > 0): z = \frac{0 - 5}{3.6056} = -1.39, \text{ so } P(D > 0) = \Phi(1.39) = 0.9177 \approx 0.918. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

For independent X, Y , $\text{Var}(X - Y)$ equals:

(A) $\text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$

(C) $[\text{Var}(X) - \text{Var}(Y)]^2$

(B) $\text{Var}(X) - \text{Var}(Y)$

(D) 0

Lời giải chi tiết

The coefficient of Y is -1 , squared to 1, so variances always add for independent variables regardless of $+$ or $-$. (A).

Bài tập luyện tập

Independently, $E(X) = 15$, $\text{Var}(X) = 8$, $E(Y) = 9$, $\text{Var}(Y) = 5$. Find $E(4X - 3Y + 2)$ and $\text{Var}(4X - 3Y + 2)$.

Lời giải chi tiết

$$E(4X - 3Y + 2) = 4(15) - 3(9) + 2 = 60 - 27 + 2 = 35. \text{Var}(4X - 3Y + 2) = 4^2(8) + 3^2(5) = 128 + 45 = 173.$$

Bài tập luyện tập

Independently, $X \sim N(40, 25)$ and $Y \sim N(30, 16)$. Let $W = X - Y$. Find $P(W > 5)$.

(A) 0.7823

(C) 0.5000

(B) 0.2177

(D) 0.9878

Lời giải chi tiết

$$E(W) = 10, \text{Var}(W) = 25 + 16 = 41, \text{SD} = 6.4031. z = \frac{5 - 10}{6.4031} = -0.78, \text{ so } P(W > 5) = \Phi(0.78) = 0.7823. \text{ (A).}$$

7.3 Sampling and estimation**7.3.1 Population and sample; unbiased estimators**

A **population** is the entire set of items of interest, with (usually unknown) mean μ and variance σ^2 . A **sample** is a subset of n items drawn from the population, used to estimate the population parameters. The **sample mean** $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ is an unbiased estimator of μ , meaning $E(\bar{X}) = \mu$. The population variance σ^2 is estimated *unbiasedly* not by dividing by n but by

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1} (\sum x^2 - n\bar{x}^2) = \frac{1}{n-1} \left(\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n} \right).$$

Dividing by $n - 1$ (rather than n) corrects for the fact that $\bar{x}$ is itself estimated from the same data, which would otherwise make the estimate of spread systematically too small.

To see why $\bar{X}$ is unbiased for μ , suppose $X_1, \dots, X_n$ are independent observations each with $E(X_i) = \mu$. Then

$$E(\bar{X}) = E\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}(E(X_1) + \dots + E(X_n)) = \frac{1}{n}(n\mu) = \mu,$$

using the linear combination rule $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ from the previous section, extended to n terms. An "unbiased estimator" is one whose expected value equals the true population

parameter it estimates — this is exactly the property $\bar{X}$ has for μ , and $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum (X - \bar{X})^2$ has for σ^2 .

(!) Lỗi thường gặp: The unbiased estimator of population variance divides by $n - 1$, *not* n . The formula $\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2$ (dividing by n) gives the variance of the *sample itself* — it is a slightly biased estimator of the population variance. Always check which formula a question requires: "variance of this data set" (divide by n) versus "unbiased estimate of the population variance" (divide by $n - 1$).

Ví dụ mẫu · Worked example

A sample of 8 measurements gives: 12, 15, 14, 11, 13, 16, 12, 15. Find the sample mean and an unbiased estimate of the population variance.

$$\sum x = 108 \Rightarrow \bar{x} = \frac{108}{8} = 13.5. \quad \sum x^2 = 144 + 225 + 196 + 121 + 169 + 256 + 144 + 225 = 1480.$$

$$s^2 = \frac{1}{7} (1480 - 8(13.5)^2) = \frac{1}{7} (1480 - 1458) = \frac{22}{7} = 3.14 \text{ (3 s.f.)}, \text{ so } s = 1.77.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$\bar{x}$ là ước lượng **không chệch** (unbiased) của trung bình tổng thể μ , nghĩa là kỳ vọng của $\bar{X}$ đúng bằng μ . Với phương sai tổng thể, phải chia cho $n - 1$ (không phải n) để bù trừ việc $\bar{x}$ đã "dùng mất" một bậc tự do từ chính dữ liệu mẫu — công thức $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2$ luôn cho kết quả lớn hơn một chút so với chia cho n .

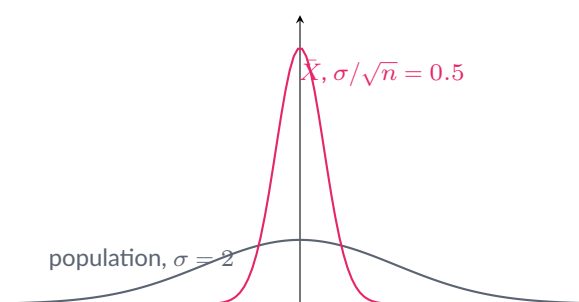
7.3.2 The Central Limit Theorem

The **Central Limit Theorem (CLT)** states that if $X_1, X_2, \dots, X_n$ are independent observations from any population with mean μ and variance σ^2 , then for sufficiently large n the sample mean $\bar{X}$ is approximately normally distributed:

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right),$$

regardless of the shape of the parent population's distribution. This is what allows normal-distribution methods (probabilities, confidence intervals, hypothesis tests) to be applied to sample means even when the underlying population is not normal, provided the sample is large (in practice $n \geq 30$ is a common working guideline). If the population itself is normal, $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2/n)$ *exactly*, for any n .

How large n needs to be for the approximation to be good depends on the shape of the parent population: a population that is already roughly symmetric needs a smaller n for $\bar{X}$ to look normal, whereas a heavily skewed population needs a larger n . In every case, note that $\text{Var}(\bar{X}) = \sigma^2/n$ decreases as n increases — averaging more observations always produces a less variable sample mean, which is also the intuitive reason why larger samples give narrower confidence intervals, as the next subsection shows directly.



CLT illustration: the sampling distribution of $\bar{X}$ (pink, $n = 16$) is centred at the same mean as the population (grey) but is much narrower, since its variance is σ^2/n .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý giới hạn trung tâm (CLT) khẳng định: dù tổng thể gốc có phân phối gì (không nhất thiết chuẩn), khi cỡ mẫu n đủ lớn, trung bình mẫu $\bar{X}$ sẽ **xấp xỉ phân phối chuẩn** $N(\mu, \sigma^2/n)$. Đây là công cụ mạnh nhất của Paper 6: nó cho phép dùng bảng $\Phi(z)$ để tính xác suất và làm khoảng tin cậy/kiểm định cho $\bar{X}$ ngay cả khi không biết tổng thể gốc có chuẩn hay không – miễn là mẫu đủ lớn.

7.3.3 Confidence intervals for a population mean

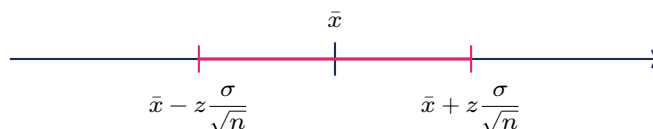
A confidence interval gives a range of plausible values for the unknown population mean μ , centred on the sample mean $\bar{x}$. When σ is **known**, a $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval for μ is

$$\bar{x} - z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{x} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

where z is the critical value cutting off area $\alpha/2$ in each tail of $N(0, 1)$: $z = 1.645$ (90%), $z = 1.960$ (95%), $z = 2.576$ (99%). When σ is **unknown** and the sample is large, the CLT justifies replacing σ by the unbiased sample estimate s , giving the large-sample confidence interval $\bar{x} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$ (the 9709 syllabus uses z , not t , throughout). Every confidence interval has the same general shape: *estimate* $\pm$ *margin of error*, where the margin of error = $z \times$ (standard error of $\bar{X}$) and the standard error is $\sigma/\sqrt{n}$ (or $s/\sqrt{n}$).

Confidence level	90%	95%	99%
Critical value z (two-tail)	1.645	1.960	2.576

Standard critical values of z for the most commonly required confidence levels.



A confidence interval is centred on $\bar{x}$ and extends $z \cdot \sigma/\sqrt{n}$ (or $z \cdot s/\sqrt{n}$ if σ is unknown) on either side.

Ví dụ mẫu · Worked example

A machine fills bags whose weight has known standard deviation $\sigma = 2.4\text{kg}$. A random sample of 50 bags gives $\bar{x} = 50.3\text{kg}$. Find a 95% confidence interval for the population mean weight.

$z = 1.960$. Margin = $1.960 \times \frac{2.4}{\sqrt{50}} = 1.960 \times 0.3394 = 0.665$. Confidence interval: $(50.3 - 0.665, 50.3 + 0.665) = (49.63, 50.97)\text{kg}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A random sample of 100 students' exam marks gives $\bar{x} = 64.8$ and an unbiased estimate of the population variance $s^2 = 138.7$. Find a 99% confidence interval for the population mean mark.

$s = \sqrt{138.7} = 11.777$. Since $n = 100$ is large, use the CLT with $z = 2.576$: margin = $2.576 \times \frac{11.777}{\sqrt{100}} = 2.576 \times 1.1777 = 3.034$. Confidence interval: $(64.8 - 3.034, 64.8 + 3.034) =$

(61.77, 67.83) marks.

Ví dụ mẫu · Worked example

A random sample of 50 components is measured, giving $\sum x = 610$ and $\sum x^2 = 7845$ (lengths in mm). (a) Find an unbiased estimate of the population variance. (b) Hence use the Central Limit Theorem to construct a 95% confidence interval for the population mean length.

(a) $\bar{x} = \frac{610}{50} = 12.2$. $s^2 = \frac{1}{49} \left(7845 - \frac{610^2}{50} \right) = \frac{1}{49} (7845 - 7442) = \frac{403}{49} = 8.224$ (4 s.f.), so

$s = \sqrt{8.224} = 2.869$. (b) Since $n = 50$ is large, the CLT justifies $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{s^2}{n}\right)$ with $z = 1.960$:

margin $= 1.960 \times \frac{2.869}{\sqrt{50}} = 1.960 \times 0.4057 = 0.795$. Confidence interval: $(12.2 - 0.795, 12.2 + 0.795) = (11.41, 13.00)$ mm (4 s.f.).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khoảng tin cậy 95% nghĩa là: nếu ta lặp lại việc lấy mẫu ngẫu nhiên nhiều lần và mỗi lần tính một khoảng tin cậy theo cùng công thức, thì **khoảng 95% trong số các khoảng đó** sẽ chứa giá trị μ thật của tổng thể — *không phải* "có 95% xác suất μ nằm trong khoảng này" (vì μ là một hằng số cố định, không phải biến ngẫu nhiên). Khi σ chưa biết và mẫu lớn, ta thay σ bằng ước lượng không chệch s nhờ CLT.

(!) Lỗi thường gặp: Do not confuse the **width of a confidence interval** with the **significance level of a test** — both use a critical z -value, but they answer different questions. A confidence interval estimates a plausible range for μ ; a hypothesis test decides whether to reject one specific claimed value of μ . Also, "95% confident" does *not* mean "95% probability that μ lies in this particular interval" — μ is fixed, not random; the 95% refers to the long-run proportion of such intervals (across repeated sampling) that would contain μ .

7.3.4 Choosing a sample size for a required margin of error

Before collecting data, it is often useful to work out how large a sample is needed so that a confidence interval has at most a specified width. Since the margin of error for a known- σ confidence interval is $E = z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, rearranging for n gives $n \geq \left(\frac{z\sigma}{E}\right)^2$. Because n must be a whole number of items sampled, the result of this calculation is always **rounded up** to the next integer, even when the raw value is only slightly above a whole number, since rounding down would give a wider interval than required.

Ví dụ mẫu · Worked example

A researcher wants a 95% confidence interval for a population mean to have a margin of error no more than 1.5, given that $\sigma = 8$. Find the minimum sample size required.

$z = 1.960$. Require $1.960 \times \frac{8}{\sqrt{n}} \leq 1.5 \Rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1.960 \times 8}{1.5} = \frac{15.68}{1.5} = 10.453 \Rightarrow n \geq 109.3$.

Since n must be a whole number and rounding down would give too wide an interval, the minimum sample size required is $n = 110$.

7.3.5 Confidence interval for a population proportion

When a random sample of n items from a large population contains x "successes" (items with some attribute of interest), the **sample proportion** $\hat{p} = \frac{x}{n}$ is an unbiased estimator of the population proportion p , since $E(\hat{p}) = p$. For large n (in practice, once $n\hat{p}$ and $n(1 - \hat{p})$ are both at least about 5), the CLT justifies treating $\hat{p}$ as approximately normal, with standard error $\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$ (using $\hat{p}$ in place of the unknown p). A $100(1 - \alpha)\%$ confidence interval for p is therefore

$$\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}} < p < \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}},$$

using the same critical values of z as for a confidence interval for a mean.

Sample proportion: $\hat{p} = \frac{x}{n}$, unbiased for p . Confidence interval: $\hat{p} \pm z\sqrt{\frac{\hat{p}(1 - \hat{p})}{n}}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

In a survey of 200 randomly chosen shoppers, 56 said they preferred Brand A. Find a 95% confidence interval for the population proportion who prefer Brand A.

$\hat{p} = \frac{56}{200} = 0.28$. Standard error = $\sqrt{\frac{0.28(0.72)}{200}} = \sqrt{0.001008} = 0.03175$. $z = 1.960$: margin = $1.960 \times 0.03175 = 0.0622$. Confidence interval: $(0.28 - 0.0622, 0.28 + 0.0622) = (0.218, 0.342)$ (3 s.f.).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tỉ lệ mẫu $\hat{p} = \frac{x}{n}$ là ước lượng không chệch của tỉ lệ tổng thể p , đóng vai trò tương tự $\bar{x}$ ước lượng μ . Sai số chuẩn (standard error) của $\hat{p}$ là $\sqrt{\hat{p}(1 - \hat{p})/n}$ – khác công thức $\sigma/\sqrt{n}$ dùng cho trung bình, vì phương sai của một biến nhị thức chuẩn hóa là $p(1 - p)$. Khoảng tin cậy vẫn giữ dạng quen thuộc: ước lượng $\pm z \times$ sai số chuẩn.

Bài tập luyện tập

In a random sample of 150 voters, 45 said they support a proposal. Find a 90% confidence interval for the population proportion in favour.

Lời giải chi tiết

$\hat{p} = \frac{45}{150} = 0.3$. SE = $\sqrt{\frac{0.3(0.7)}{150}} = \sqrt{0.0014} = 0.03742$. $z = 1.645$: margin = $1.645 \times 0.03742 = 0.0616$. Confidence interval: $(0.3 - 0.0616, 0.3 + 0.0616) = (0.238, 0.362)$ (3 s.f.).

Bài tập luyện tập

A sample of 10 values: 23, 25, 22, 28, 24, 26, 23, 27, 25, 24. Find $\bar{x}$ and an unbiased estimate of the population variance.

Lời giải chi tiết

$$\sum x = 247 \Rightarrow \bar{x} = 24.7. \sum x^2 = 529 + 625 + 484 + 784 + 576 + 676 + 529 + 729 + 625 + 576 = 6133.$$
$$s^2 = \frac{1}{9} (6133 - 10(24.7)^2) = \frac{1}{9} (6133 - 6100.9) = \frac{32.1}{9} = 3.57 \text{ (3 s.f.)}$$

Bài tập luyện tập

$\sigma = 5, n = 64, \bar{x} = 100$. Find the margin of error for a 90% confidence interval for μ .

- (A) 1.03 (C) 1.23
(B) 0.63 (D) 0.78

Lời giải chi tiết

$$z = 1.645. \text{ Margin} = 1.645 \times \frac{5}{\sqrt{64}} = 1.645 \times 0.625 = 1.028 \approx 1.03. \text{ (A)}$$

Bài tập luyện tập

A large sample of $n = 120$ delivery times gives $\bar{x} = 45.6$ and unbiased variance estimate $s^2 = 64$. Find a 95% confidence interval for μ .

Lời giải chi tiết

$$s = 8. \text{ Margin} = 1.960 \times \frac{8}{\sqrt{120}} = 1.960 \times 0.7303 = 1.431. \text{ CI} = (45.6 - 1.431, 45.6 + 1.431) = (44.17, 47.03).$$

Bài tập luyện tập

A 95% confidence interval for μ is correctly interpreted as:

- (A) if many random samples were taken and a 95% CI computed from each, about 95% of these intervals would contain μ (C) 95% of the population data lie inside this interval
(B) there is a 95% chance that μ equals $\bar{x}$ (D) the interval contains 95% of all possible sample means

Lời giải chi tiết

The correct frequentist interpretation refers to the long-run proportion of such intervals (from repeated sampling) that capture the fixed population mean μ . (A).

Bài tập luyện tập

If the sample size is quadrupled (with σ unchanged), the width of a confidence interval for μ (known σ) is:

- (A) halved (C) quartered
(B) doubled (D) unchanged

Lời giải chi tiết

Margin $\propto \frac{1}{\sqrt{n}}$; since $\sqrt{4} = 2$, quadrupling n divides the margin (and hence width) by 2: it is halved. (A).

Bài tập luyện tập

The Central Limit Theorem states that for large n , the sample mean $\bar{X}$:

- (A) is approximately $N(\mu, \sigma^2/n)$ regardless of the population's distribution
(B) is exactly normal only if the population is normal
(C) has the same distribution as a single observation
(D) has variance σ^2 regardless of n

Lời giải chi tiết

The CLT guarantees approximate normality of $\bar{X}$ with mean μ and variance σ^2/n for large n , whatever the shape of the parent population. (A).

Bài tập luyện tập

A sample of 12 measurements gives $\sum x = 180$ and $\sum x^2 = 2820$. Find an unbiased estimate of the population variance.

Lời giải chi tiết

$$\bar{x} = \frac{180}{12} = 15. \quad s^2 = \frac{1}{11} (2820 - 12(15)^2) = \frac{1}{11} (2820 - 2700) = \frac{120}{11} = 10.9 \text{ (3 s.f.)}$$

Bài tập luyện tập

$\sigma = 3$ (known), $n = 49$, $\bar{x} = 28.4$. Find the margin of error for a 99% confidence interval for μ .

- (A) 1.10
(B) 0.86
(C) 1.47
(D) 0.63

Lời giải chi tiết

$$z = 2.576. \text{ Margin} = 2.576 \times \frac{3}{\sqrt{49}} = 2.576 \times \frac{3}{7} = 2.576 \times 0.4286 = 1.104 \approx 1.10. \text{ (A)}$$

7.4 Hypothesis testing

7.4.1 Setting up a hypothesis test

A hypothesis test uses sample data to assess a claim about a population parameter. We state a **null hypothesis** H_0 (the assumed/status-quo value) and an **alternative hypothesis** H_1 (what we test for), choose a significance level (e.g. 5%, 1%), compute a test statistic from the sample, and compare it with a critical value. A **one-tail test** is used when H_1 specifies a direction ($\mu < \mu_0$ or $\mu > \mu_0$); a **two-tail test** is used when H_1 merely states $\mu \neq \mu_0$, splitting the significance level equally between both tails.

Wording in the question determines the tail: phrases like "has increased", "is greater than", "is more effective" point to a one-tail test in a specific direction, while "has changed" or "is different from" point to a two-tail test. There are two equivalent ways to reach a conclusion: (1) compare the test statistic with the critical value (the **critical region** method used throughout this chapter), or (2) compute the probability of a result at least as extreme as the one observed, and compare that probability directly with the significance level (the method used naturally for a Poisson mean below). Both methods always give the same decision.

Standard method for any hypothesis test: (1) state H_0 and H_1 in terms of the population parameter; (2) state the significance level and whether the test is one-tail or two-tail; (3) calculate the test statistic (or the relevant probability) from the sample data; (4) compare with the critical value (or with the significance level); (5) state the conclusion in the context of the original question, avoiding the word "prove".

7.4.2 Testing a population mean

When σ is known, the test statistic for a population mean, based on a sample of size n , is $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$. When σ is unknown but n is large, the CLT justifies the same statistic with σ replaced by the unbiased sample estimate s : $z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$. Reject H_0 if the test statistic falls in the critical region (beyond the critical value(s)); otherwise there is insufficient evidence to reject H_0 .

Common critical z -values: one-tail 5% → 1.645, one-tail 1% → 2.326; two-tail 5% → ± 1.960 , two-tail 1% → ± 2.576 .

Ví dụ mẫu · Worked example

Bottles claim mean volume 500ml, $\sigma = 8$ ml. A sample of 40 has $\bar{x} = 497$ ml. Test at 5% (one-tail) whether bottles are under-filled.

$H_0 : \mu = 500, H_1 : \mu < 500$. $z = \frac{497 - 500}{8/\sqrt{40}} = \frac{-3}{1.2649} = -2.372$. Critical value (5%, one-tail) = -1.645 . Since $-2.372 < -1.645$, **reject H_0** : significant evidence of under-filling.

Ví dụ mẫu · Worked example

A large company claims the mean commute time for its employees is 75 minutes. A random sample of 80 employees gives $\bar{x} = 76.8$ minutes and an unbiased estimate of the population variance $s^2 = 144$ minutes². Test at the 5% significance level whether the mean commute time differs from 75 minutes.

$H_0 : \mu = 75, H_1 : \mu \neq 75$ (two-tail, since "differs from" gives no direction). $s = \sqrt{144} = 12$. $z = \frac{76.8 - 75}{12/\sqrt{80}} = \frac{1.8}{1.3416} = 1.342$ (4 s.f.). Critical value (5%, two-tail) = ± 1.960 . Since $|1.342| < 1.960$, **do not reject H_0** : there is insufficient evidence at the 5% level that the mean commute time differs from 75 minutes.

(!) Lỗi thường gặp: "Reject H_0 " does not prove H_1 true — it means the sample evidence is unlikely under H_0 at the stated significance level. Always match the critical value to a **one-tail** or **two-tail** test as appropriate, and state the conclusion in context.

7.4.3 Testing a Poisson mean

When testing a claimed Poisson mean λ_0 (rather than a large-sample normal mean), the test statistic is not a z -value: instead, the Poisson probability of the observed count (or a more extreme count) is calculated directly from $P(X = x) = \frac{e^{-\lambda_0} \lambda_0^x}{x!}$ and compared with the significance level. Since a Poisson count is discrete, an exact critical region cannot always be chosen to give exactly 5% (or 1%) in the tail; the convention is to reject H_0 whenever the calculated tail probability is less than the significance level.

Ví dụ mẫu · Worked example

A website historically receives complaints at a mean rate of 6 per week, modelled as $Po(6)$. After a site redesign, one week produces only 1 complaint. Test at the 5% significance level whether the mean complaint rate has decreased.

$H_0 : \lambda = 6, H_1 : \lambda < 6$. Under H_0 : $P(X \leq 1) = P(0) + P(1) = e^{-6}(1 + 6) = 7e^{-6} = 7(0.0024788) = 0.01735$. Since $0.01735 < 0.05$, **reject H_0** : significant evidence at 5% that the complaint rate has decreased.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với tham số Poisson λ , ta **không** chuẩn hóa về z như với trung bình mẫu lớn — thay vào đó tính trực tiếp xác suất Poisson của giá trị quan sát được (hoặc cực đoan hơn) dưới H_0 , rồi so với mức ý nghĩa. Vì X là biến rời rạc, xác suất thực tế của việc bác bỏ H_0 đúng thường **nhỏ hơn** mức ý nghĩa danh nghĩa (ví dụ 5%) — đây là điểm khác biệt quan trọng so với kiểm định z liên tục.

7.4.4 Critical regions, critical values and Type I error

The **critical region** is the set of values of the test statistic (or of $\bar{x}$, or of the Poisson count) for which H_0 is rejected; its boundary is the **critical value**. A **Type I error** occurs when H_0 is rejected even though it is actually true; for a continuous test statistic, the probability of a Type I error is exactly the chosen **significance level**. For completeness: a **Type II error** is the opposite mistake — failing to reject H_0 when it is in fact false. Unlike the Type I error rate, the probability of a Type II error is not fixed by the significance level alone; it depends on the true (unknown) value of the parameter and on the sample size.

Ví dụ mẫu · Worked example

A factory sets $H_0 : \mu = 50$ against $H_1 : \mu \neq 50$ (two-tail, 5%), with $\sigma = 6$ known and $n = 36$. Find the critical region for $\bar{x}$, and state the probability of a Type I error.

$\sigma/\sqrt{n} = 6/6 = 1$. Critical $z = \pm 1.960$, so the critical region is $\bar{x} < 50 - 1.960(1) = 48.04$ or $\bar{x} > 50 + 1.960(1) = 51.96$. $P(\text{Type I error}) = \text{significance level} = 0.05$, by construction of the test.

7.4.5 Testing a population proportion

To test a claimed population proportion p_0 using a large sample of size n with x observed successes, compute $\hat{p} = \frac{x}{n}$ and use the test statistic

$$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{\frac{p_0(1 - p_0)}{n}}}$$

noting that the standard error under H_0 uses the **claimed** value p_0 (not the sample estimate $\hat{p}$), since the test assumes H_0 is true throughout. The decision rule is exactly as for a test of a mean: compare z with the appropriate one-tail or two-tail critical value.

Test statistic for a population proportion: $z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$, compared with the usual critical z -values.

Ví dụ mẫu · Worked example

A company claims that 40% of its customers are aged under 30. In a random sample of 100 customers, 52 are found to be under 30. Test at the 5% significance level (one-tail) whether the true proportion is greater than claimed.

$H_0 : p = 0.4, H_1 : p > 0.4, \hat{p} = \frac{52}{100} = 0.52. z = \frac{0.52 - 0.4}{\sqrt{0.4(0.6)/100}} = \frac{0.12}{\sqrt{0.0024}} = \frac{0.12}{0.04899} = 2.449$. Critical value (5%, one-tail) = 1.645. Since $2.449 > 1.645$, **reject** H_0 : significant evidence at 5% that the true proportion of customers under 30 is greater than 40%.

Parameter tested	Test statistic	Notes
Mean, σ known	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$	exact for any n if population normal
Mean, σ unknown, n large	$z = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$	s is the unbiased sample estimate; relies on the CLT
Poisson mean λ	compare $P(X \leq x)$ or $P(X \geq x)$ under H_0 directly with α	no z -value; exact discrete probability
Proportion p, n large	$z = \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1 - p_0)/n}}$	standard error uses claimed p_0 , not $\hat{p}$

Summary of the four hypothesis-test statistics required for Paper 6, and when each applies.

Bài tập luyện tập

A factory claims that 10% of its output is Grade A. In a random sample of 80 items, 4 are Grade A. Test at the 5% significance level (one-tail) whether the true proportion of Grade A items is less than claimed.

Lời giải chi tiết

$H_0 : p = 0.1, H_1 : p < 0.1. \hat{p} = \frac{4}{80} = 0.05. z = \frac{0.05 - 0.1}{\sqrt{0.1(0.9)/80}} = \frac{-0.05}{\sqrt{0.001125}} = \frac{-0.05}{0.03354} = -1.491$. Critical value (5%, one-tail) = -1.645. Since $-1.491 > -1.645$ (not beyond the critical value), **do not reject** H_0 : insufficient evidence at 5% that the true proportion of Grade A items is less than 10%.

Bài tập luyện tập

Steel rods have historical mean 25cm, $\sigma = 0.5$ cm. A sample of 50 gives $\bar{x} = 25.15$ cm. Test at 1% (two-tail) whether the mean has changed.

Lời giải chi tiết

$H_0 : \mu = 25, H_1 : \mu \neq 25. z = \frac{25.15 - 25}{0.5/\sqrt{50}} = \frac{0.15}{0.0707} = 2.121$. Critical value (1%, two-tail) = ± 2.576 . Since $|2.121| < 2.576$, **do not reject** H_0 : no significant evidence at 1% that the mean has changed.

Bài tập luyện tập

A shop assumes complaints arrive at mean rate 4/week (Po(4)). One week, 9 complaints occur. Test at 5% (one-tail) whether the mean rate has increased.

Lời giải chi tiết

$H_0 : \lambda = 4, H_1 : \lambda > 4$. Under $H_0: P(X \geq 9) = 1 - P(X \leq 8) = 1 - 0.9786 = 0.0214$. Since $0.0214 < 0.05$, **reject** H_0 : significant evidence at 5% that the complaint rate has increased.

Bài tập luyện tập

Bolts have historical mean length 10cm, $\sigma = 0.2$ cm. A sample of 36 gives $\bar{x} = 9.94$ cm. Test at 5% (one-tail) whether the mean length has decreased.

Lời giải chi tiết

$H_0 : \mu = 10, H_1 : \mu < 10. z = \frac{9.94 - 10}{0.2/\sqrt{36}} = \frac{-0.06}{0.03333} = -1.8$. Critical value (5%, one-tail) = -1.645 . Since $-1.8 < -1.645$, **reject** H_0 : significant evidence the mean length has decreased.

Bài tập luyện tập

$\sigma = 4$ known, $n = 25, \bar{x} = 52$. Test $H_0 : \mu = 50$ against $H_1 : \mu \neq 50$ at 5%. Find the test statistic and conclusion.

(A) $z = 2.5$, reject H_0

(C) $z = 0.4$, reject H_0

(B) $z = 2.5$, do not reject H_0

(D) $z = 1.25$, reject H_0

Lời giải chi tiết

$z = \frac{52 - 50}{4/\sqrt{25}} = \frac{2}{0.8} = 2.5$. Critical value (5%, two-tail) = ± 1.960 . Since $2.5 > 1.960$, **reject** H_0 .
(A).

Bài tập luyện tập

Accidents on a stretch of road have historically followed Po(3) per month. After a speed camera is installed, one month records 0 accidents. Test at 5% (one-tail) whether the mean rate

has decreased.

Lời giải chi tiết

$H_0 : \lambda = 3, H_1 : \lambda < 3. P(X = 0) = e^{-3} = 0.0498$. Since $0.0498 < 0.05$, **reject** H_0 (marginally): significant evidence at 5% that the accident rate has decreased.

Bài tập luyện tập

The probability of a Type I error in a hypothesis test is:

- (A) the significance level of the test (C) the probability that H_1 is true
(B) the probability that H_0 is true (D) always 0.5

Lời giải chi tiết

By definition, a Type I error is rejecting a true H_0 ; for a continuous test statistic its probability equals the chosen significance level. (A).

Bài tập luyện tập

For a one-tail test at the 1% significance level (upper tail), the critical value of z is:

- (A) 2.326 (C) 2.576
(B) 1.645 (D) 1.960

Lời giải chi tiết

The upper 1% tail of $N(0, 1)$ begins at $z = 2.326$. (A).

Bài tập luyện tập

A random sample of 90 delivery times has $\bar{x} = 38.4$ min and unbiased variance estimate $s^2 = 49$. Test at 1% (two-tail) whether the mean delivery time differs from the target of 40 minutes.

Lời giải chi tiết

$H_0 : \mu = 40, H_1 : \mu \neq 40. s = 7. z = \frac{38.4 - 40}{7/\sqrt{90}} = \frac{-1.6}{0.7379} = -2.17$. Critical value (1%, two-tail) = ± 2.576 . Since $|-2.17| < 2.576$, **do not reject** H_0 : no significant evidence at 1% that the mean delivery time differs from 40 minutes.

Bài tập luyện tập

The historical mean waiting time at a clinic is 12 minutes, with $\sigma = 3$ minutes known. A random sample of 45 patients gives $\bar{x} = 13.1$ minutes. Test at 5% (one-tail) whether the mean waiting time has increased.

Lời giải chi tiết

$H_0 : \mu = 12, H_1 : \mu > 12. z = \frac{13.1 - 12}{3/\sqrt{45}} = \frac{1.1}{0.4472} = 2.460$. Critical value (5%, one-tail) = 1.645. Since $2.460 > 1.645$, **reject H_0** : significant evidence at 5% that the mean waiting time has increased.

Bài tập luyện tập

A random sample of 64 items gives $\bar{x} = 51.5$ and unbiased variance estimate $s^2 = 36$. Test $H_0 : \mu = 50$ against $H_1 : \mu \neq 50$ at 5%. Find the test statistic and conclusion.

(A) $z = 2.0$, reject H_0 (C) $z = 1.5$, reject H_0 (B) $z = 2.0$, do not reject H_0 (D) $z = 0.75$, do not reject H_0 **Lời giải chi tiết**

$s = 6. z = \frac{51.5 - 50}{6/\sqrt{64}} = \frac{1.5}{0.75} = 2.0$. Critical value (5%, two-tail) = ± 1.960 . Since $2.0 > 1.960$, **reject H_0** . (A).

Bài tập luyện tập

A hospital's emergency admissions historically follow $Po(5)$ per night. One night, 8 admissions occur. Test at 5% (one-tail) whether the mean admission rate has increased.

Lời giải chi tiết

$H_0 : \lambda = 5, H_1 : \lambda > 5$. Under $H_0: P(X \geq 8) = 1 - P(X \leq 7) = 1 - 0.8666 = 0.1334$. Since $0.1334 > 0.05$, **do not reject H_0** : there is insufficient evidence at 5% that the admission rate has increased.

7.5 Continuous random variables**7.5.1 Probability density functions**

A continuous random variable X has a **probability density function (pdf)** $f(x)$ satisfying $f(x) \geq 0$ for all x and $\int f(x) dx = 1$ over the range of X . Probabilities correspond to areas: $P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$. Because a single point has zero width, $P(X = a) = 0$ for any particular value a , so $P(X < a) = P(X \leq a)$.

Outside the stated range of X , $f(x) = 0$ – this must always be included (implicitly or explicitly) when integrating over "all x ", otherwise the region of integration is unclear. The pdf can be thought of as the limiting shape of a relative-frequency histogram as the class width shrinks to zero and the sample size grows to infinity: taller regions of the curve correspond to values of X that occur more densely.

Ví dụ mẫu · Worked example

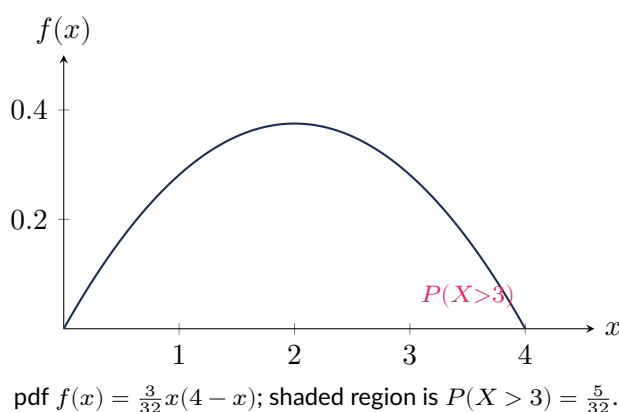
X has pdf $f(x) = kx(4 - x), 0 \leq x \leq 4$. Find k , then $P(X > 3)$, $E(X)$, $E(X^2)$ and $\text{Var}(X)$.

$$\int_0^4 kx(4-x) dx = k \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = k \cdot \frac{32}{3} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{32}. P(X > 3) = \frac{3}{32} \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_3^4 =$$

$$\frac{3}{32} \left(\frac{32}{3} - 9 \right) = \frac{3}{32} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{32}. E(X) = \frac{3}{32} \int_0^4 (4x^2 - x^3) dx = \frac{3}{32} \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^4 = \frac{3}{32} \cdot \frac{64}{3} = 2.$$

$$E(X^2) = \frac{3}{32} \int_0^4 (4x^3 - x^4) dx = \frac{3}{32} \left[x^4 - \frac{x^5}{5} \right]_0^4 = \frac{3}{32} \left(256 - \frac{1024}{5} \right) = \frac{3}{32} (51.2) = 4.8. \text{Var}(X) =$$

$$E(X^2) - [E(X)]^2 = 4.8 - 4 = 0.8. \text{ Since } f(x) = f(4-x), \text{ the pdf is symmetric about } x = 2:$$
 the mode, median and mean all equal 2.



GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với biến ngẫu nhiên liên tục, xác suất tại **một điểm** luôn bằng 0 ($P(X = a) = 0$); chỉ có xác suất trên một **khoảng** mới có nghĩa, tính bằng tích phân của $f(x)$. $E(X)$ và $\text{Var}(X)$ được tính bằng tích phân giống như $\sum xP(X = x)$ ở biến rời rạc, chỉ thay tổng bằng tích phân.

7.5.2 The cumulative distribution function

The **cumulative distribution function (cdf)** is $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. It is non-decreasing, with $F(x) = 0$ below the range of X and $F(x) = 1$ above it; differentiating recovers the pdf: $F'(x) = f(x)$. The cdf gives a fast way to compute probabilities: $P(a < X < b) = F(b) - F(a)$.

Once $F(x)$ has been found, it becomes the standard tool for locating the median and quartiles (solve $F(x) = 0.5, 0.25, 0.75$ respectively) without repeating the integration each time – this is the main practical reason for finding the cdf explicitly rather than always integrating the pdf from scratch.

7.5.3 Expectation and variance by integration

$E(X) = \int xf(x) dx$ and $E(X^2) = \int x^2 f(x) dx$, so $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, exactly as for discrete variables but with integration replacing summation. Because these are still defined via the general expectation operator $E(\cdot)$, the linear combination rules from Section 2 – $E(aX + b) = aE(X) + b$ and $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$ – apply unchanged to continuous random variables as well.

Ví dụ mẫu · Worked example

Using the distribution $f(x) = \frac{3}{32}x(4-x)$, $0 \leq x \leq 4$, from the earlier example (where $E(X) = 2$ and $\text{Var}(X) = 0.8$), find $E(5X - 3)$ and $\text{Var}(5X - 3)$.

By the linear combination rules, which apply unchanged to continuous random variables:

$$E(5X - 3) = 5(2) - 3 = 7. \text{Var}(5X - 3) = 5^2(0.8) = 25(0.8) = 20.$$

	Discrete	Continuous
Distribution given by	$P(X = x)$	$f(x)$, with $f(x) \geq 0$
Total probability	$\sum P(X = x) = 1$	$\int f(x) dx = 1$
$E(X)$	$\sum xP(X = x)$	$\int xf(x) dx$
$P(X = a)$	can be > 0	always $= 0$

Comparing the discrete and continuous frameworks: sums become integrals, but the underlying ideas (total probability = 1, expectation as a weighted average) are identical.

7.5.4 Median, quartiles and mode

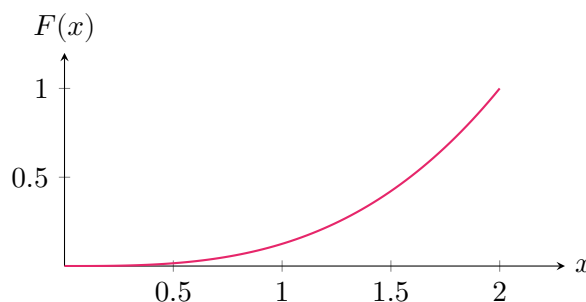
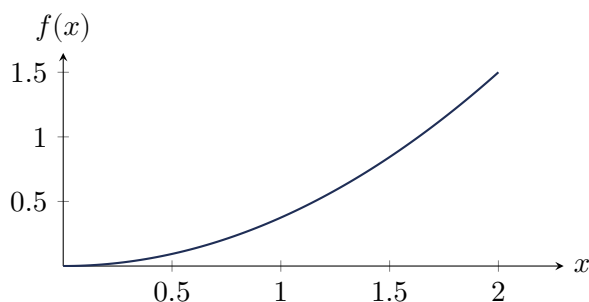
The **median** m satisfies $F(m) = 0.5$, i.e. it splits the area under $f(x)$ into two equal halves. The **lower quartile** Q_1 satisfies $F(Q_1) = 0.25$ and the **upper quartile** Q_3 satisfies $F(Q_3) = 0.75$. The **mode** is the value of x where $f(x)$ is greatest; for a pdf that is monotonic (always increasing or always decreasing) on its domain, the mode occurs at an endpoint of the range rather than at a turning point.

As with discrete data, the **interquartile range** $IQR = Q_3 - Q_1$ measures the spread of the middle 50% of the distribution, and is found the same way here: solve $F(x) = 0.25$ and $F(x) = 0.75$ and subtract. When a pdf has an interior turning point, the mode is found by differentiating $f(x)$, setting $f'(x) = 0$, and checking it gives a maximum (as in the symmetric parabola example above, where the mode coincided with the mean by symmetry).

Ví dụ mẫu · Worked example

X has pdf $f(x) = \frac{3}{8}x^2$, $0 \leq x \leq 2$. (a) Verify f is a valid pdf and find $F(x)$. (b) Find the median, the quartiles, and $P(X > 1)$. (c) State the mode.

(a) $\int_0^2 \frac{3}{8}x^2 dx = \frac{3}{8} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{3} = 1$, and $f(x) \geq 0$ on $[0, 2]$, so f is a valid pdf. $F(x) = \int_0^x \frac{3}{8}t^2 dt = \frac{x^3}{8}$, for $0 \leq x \leq 2$ (check: $F(2) = \frac{8}{8} = 1$). (b) Median: $\frac{m^3}{8} = 0.5 \Rightarrow m^3 = 4 \Rightarrow m = \sqrt[3]{4} = 1.587$. Lower quartile: $\frac{Q_1^3}{8} = 0.25 \Rightarrow Q_1^3 = 2 \Rightarrow Q_1 = \sqrt[3]{2} = 1.260$. Upper quartile: $\frac{Q_3^3}{8} = 0.75 \Rightarrow Q_3^3 = 6 \Rightarrow Q_3 = \sqrt[3]{6} = 1.817$. $P(X > 1) = 1 - F(1) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0.875$. (c) $f(x) = \frac{3}{8}x^2$ is strictly increasing on $[0, 2]$, so the greatest density occurs at the right-hand endpoint: the mode is $x = 2$.



The pdf $f(x) = \frac{3}{8}x^2$ (left) and its cdf $F(x) = \frac{x^3}{8}$ (right), $0 \leq x \leq 2$: F is the running area under f , rising from 0 to 1.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trung vị (median) chia diện tích dưới đường cong pdf thành hai phần bằng nhau: $F(m) = 0.5$. Tứ phân vị dưới/trên ứng với $F(Q_1) = 0.25$ và $F(Q_3) = 0.75$. Mốt (mode) là điểm $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất – nếu $f(x)$ đơn điệu tăng hoặc giảm trên toàn miền, mốt nằm ở **đầu mút** của miền xác định, không phải ở điểm cực trị bên trong.

Ví dụ mẫu · Worked example

X has probability density function $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$ for $-1 \leq x \leq 1$ (and $f(x) = 0$ otherwise). (a) Verify that f is a valid pdf. (b) Find $P(-0.5 < X < 0.5)$. (c) Find $E(X)$ and $\text{Var}(X)$. (d) State the mode.

(a) $\int_{-1}^1 \frac{3}{4}(1 - x^2) dx = \frac{3}{4} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{3}{4} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right] = \frac{3}{4} \left(\frac{4}{3} \right) = 1$, and $f(x) \geq 0$ on $[-1, 1]$, so f is a valid pdf. (b) By symmetry, $P(-0.5 < X < 0.5) = 2 \int_0^{0.5} \frac{3}{4}(1 - x^2) dx = \frac{3}{2} \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{0.5} = \frac{3}{2} (0.5 - 0.0417) = \frac{3}{2} (0.4583) = 0.6875$. (c) Since $f(x) = f(-x)$ is an even function, $xf(x)$ is odd, so $E(X) = \int_{-1}^1 xf(x) dx = 0$. $E(X^2) = 2 \int_0^1 x^2 \cdot \frac{3}{4}(1 - x^2) dx = \frac{3}{2} \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \frac{3}{2} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{2} \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{1}{5} = 0.2$. $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = 0.2 - 0 = 0.2$. (d) $f'(x) = -\frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x = 0$, and $f''(x) = -\frac{3}{2} < 0$ confirms a maximum: the mode is $x = 0$, consistent with the symmetry of f about $x = 0$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hàm mật độ $f(x) = \frac{3}{4}(1 - x^2)$ trên $[-1, 1]$ là một pdf **đối xứng qua** $x = 0$ (dạng parabol úp ngược), khác hẳn hai ví dụ pdf trước đó (đơn điệu hoặc parabol trên miền dương). Vì $f(x) = f(-x)$ (hàm chẵn), nên $E(X) = 0$ ngay lập tức nhờ tính đối xứng – không cần tính tích phân $\int xf(x) dx$ một cách "vất vả", vì tích của một hàm chẵn ($f(x)$) với một hàm lẻ (x) luôn là hàm lẻ, và tích phân của hàm lẻ trên một miền đối xứng luôn bằng 0.

Bài tập luyện tập

Y has pdf $f(y) = \frac{1}{8}y$, $0 \leq y \leq 4$. Find the median of Y .

(A) $2\sqrt{2} \approx 2.83$

(C) 3

(B) 2

(D) 2.5

Lời giải chi tiết

$$\int_0^m \frac{y}{8} dy = \frac{m^2}{16} = 0.5 \Rightarrow m^2 = 8 \Rightarrow m = 2\sqrt{2} \approx 2.83. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

X has pdf $f(x) = kx^2$, $0 \leq x \leq 3$. Find k .

(A) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{1}{27}$ (B) $\frac{1}{3}$

(D) 3

Lời giải chi tiết

$$\int_0^3 kx^2 dx = k \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Using $f(x) = \frac{1}{9}x^2$, $0 \leq x \leq 3$ (from the previous question), find $P(1 < X < 2)$.

Lời giải chi tiết

$$\int_1^2 \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{27} [x^3]_1^2 = \frac{1}{27}(8 - 1) = \frac{7}{27} \approx 0.259.$$

Bài tập luyện tập

Using $f(x) = \frac{1}{9}x^2$, $0 \leq x \leq 3$, find the cdf $F(x)$ and use it to find $P(X > 2)$.

Lời giải chi tiết

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{9}t^2 dt = \frac{x^3}{27}, 0 \leq x \leq 3. P(X > 2) = 1 - F(2) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27} \approx 0.704.$$

Bài tập luyện tập

Using $f(x) = \frac{1}{9}x^2$, $0 \leq x \leq 3$, find $E(X)$.

(A) 2.25

(C) 2

(B) 1.5

(D) 3

Lời giải chi tiết

$$E(X) = \int_0^3 x \cdot \frac{1}{9}x^2 dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^3 = \frac{1}{9} \cdot \frac{81}{4} = 2.25. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

State the mode of X with pdf $f(x) = \frac{1}{9}x^2$, $0 \leq x \leq 3$, justifying your answer.

Lời giải chi tiết

$f(x) = \frac{1}{9}x^2$ is strictly increasing on $[0, 3]$ (it has no interior turning point), so its greatest value on the domain occurs at the right-hand endpoint: the mode is $x = 3$.

Bài tập luyện tập

Using $F(x) = \frac{x^3}{27}$, $0 \leq x \leq 3$, find the lower quartile Q_1 .

Lời giải chi tiết

$$F(Q_1) = 0.25 \Rightarrow Q_1^3 = 6.75 \Rightarrow Q_1 = \sqrt[3]{6.75} \approx 1.89.$$

Bài tập luyện tập

Y has pdf $f(y) = k(2 - y)$, $0 \leq y \leq 2$. Find k , and hence find $P(Y > 1)$.

Lời giải chi tiết

$$\int_0^2 k(2 - y) dy = k \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_0^2 = k(4 - 2) = 2k = 1 \Rightarrow k = 0.5. P(Y > 1) = \int_1^2 0.5(2 - y) dy = 0.5 \left[2y - \frac{y^2}{2} \right]_1^2 = 0.5[(4 - 2) - (2 - 0.5)] = 0.5(0.5) = 0.25.$$

Bài tập luyện tập

X has pdf $f(x) = kx$, $0 \leq x \leq 5$. Find k .

(A) 0.08

(C) 0.2

(B) 0.04

(D) 0.4

Lời giải chi tiết

$$\int_0^5 kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^5 = \frac{25}{2}k = 12.5k = 1 \Rightarrow k = 0.08. \text{ (A)}$$

Ôn nhanh trước ngày thi: (1) luôn kiểm tra Δ /domain trước khi kết luận nghiệm; (2) $R \sin / \cos(\theta + \alpha)$ giải nhanh $a \cos \theta + b \sin \theta = c$; (3) vector: $\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}$, đường thẳng chéo nhau khi hệ vô nghiệm; (4) DE tách biến $\Rightarrow$ mô hình mũ $y = y_0 e^{kt}$; (5) Cơ học: vẽ sơ đồ lực, dùng $F = ma$ theo từng phương; (6) chuẩn hóa trước khi tra $\Phi(z)$; (7) Poisson: λ đổi theo tỉ lệ khoảng thời gian, tổng các biến Poisson độc lập vẫn là Poisson; (8) tổ hợp tuyến tính: $E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$ luôn đúng, còn $\text{Var}(aX + bY) = a^2\text{Var}(X) + b^2\text{Var}(Y)$ chỉ đúng khi X, Y **độc lập** (luôn cộng phương sai, kể cả khi lấy hiệu); (9) lấy mẫu & ước lượng: $\bar{x}$ ước lượng μ , $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x - \bar{x})^2$ ước lượng không chệch σ^2 , CLT cho $\bar{X} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$ khi n lớn, khoảng tin cậy $\bar{x} \pm z \cdot \sigma/\sqrt{n}$ (hoặc s nếu σ chưa biết); (10) kiểm định luôn nêu rõ H_0, H_1 , dùng đúng z một/hai đuôi, và kết luận theo ngữ cảnh đề bài.

Đồng hành cùng 8020 English

Cảm ơn bạn đã học cùng bộ giáo trình quốc tế 8020. **Điểm thật · Thầy thật · Kết quả thật** — nhiều học viên chỉ cần 1–2 khoá để đạt kết quả mong muốn.

Chương trình đào tạo tại 8020 English

IELTS Academic/General · SAT · PTE · Duolingo · TOEFL | AP (College Board) · IB Diploma · Cambridge IGCSE / A-Level | sẵn học bổng du học.

Vì sao chọn 8020 English?

- **100% giáo viên** đạt tối thiểu 8.0 IELTS hoặc 1500 SAT — đội ngũ Giáo sư · Tiến sĩ · Thạc sĩ tốt nghiệp trường top đầu thế giới (Carnegie Mellon — #1 Hoa Kỳ về Khoa học Máy tính).
- **Kèm 1–1** mọi độ tuổi; lớp sĩ số nhỏ 2–5 bạn (đa số dưới 10 bạn/lớp).
- Lộ trình cá nhân hoá, theo sát tiến độ từng học viên; lớp OFFLINE tại TP.HCM & ONLINE toàn quốc.

Bảng vàng học viên

AP 5/5 — Calculus AB/BC
SAT 1590 / 1570 / 1550

AP 4–5 — Biology, Chemistry
IELTS 8.0–9.0

IB 90/100 — Economics
Duolingo 110 · PTE 90

Cảm nhận học viên & phụ huynh

"Bạn đã cải thiện được tư duy Writing — kỹ năng từng là nỗi sợ lớn nhất — và cuối cùng đã đậu vào trường top như mong muốn. Thái độ học tập cực kỳ nghiêm túc; ngay cả khi nằm viện vẫn cố gắng học đều đặn."

— Phan Thị Thanh Hằng • IELTS Overall 8.5

"Cần tất cả kỹ năng trên 7.5 để xét vào trường top 1 Anh Quốc về Y học (chương trình UKFPO của NHS) — và đã đạt mục tiêu sau khi học Writing 1-1."

— Trần Hoàng Bảo Ngọc • IELTS Overall 8.0 (Writing 6.0 → 7.5)

"Gia đình và bé xin cảm ơn thầy cô đã giúp con có hành trang chín chu khi qua Mỹ. Đạt điểm 5 môn Giải tích trong thời gian ngắn là quá mãn nguyện."

— Phụ huynh • AP Calculus BC 5/5

"Em cảm ơn thầy đã luôn đồng hành. Nhờ thầy, em học vững hơn rất nhiều dù thời gian ôn không dài."

— Học viên • AP Calculus AB 4

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

FEEDBACK PHỤ HUYNH & HỌC VIÊN AP



Phụ huynh • AP Calculus BC: 5

"Gia đình cảm ơn thầy cô đã giúp con có hành trang chín chu khi qua Mỹ. Đạt điểm 5 môn Giải tích trong thời gian ngắn là quá mãn nguyện."



Phụ huynh • AP Calculus BC

"Mẹ con xin gửi lời cảm ơn chân thành tới thầy và cả nhóm. Thời gian ôn rất ngắn nhưng con nhận được rất nhiều sự hỗ trợ."



Học viên • AP Calculus AB: 4 • Statistics: 3

"Em cảm ơn thầy Steven đã luôn đồng hành. Nhờ thầy, em học vững hơn rất nhiều dù thời gian không dài."

Feedback phụ huynh & học viên AP — nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Điểm thi thật của học viên

KẾT QUẢ HỌC VIÊN
ĐIỂM SỐ AP

8020 ENGLISH

AP Biology: 4 · AP Chemistry: 4

AP Calculus AB: 5

AP Calculus BC: 5

AP Chemistry: 5

Bảng điểm AP thật của học viên – nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Bảng điểm AP thật — Calculus AB/BC 5/5 · Biology & Chemistry 4-5 (College Board)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN
ĐIỂM SỐ PTE

8020 ENGLISH

Em báo điểm nha c

trời ơi!!!

duới này vậy luôn do haaaaa

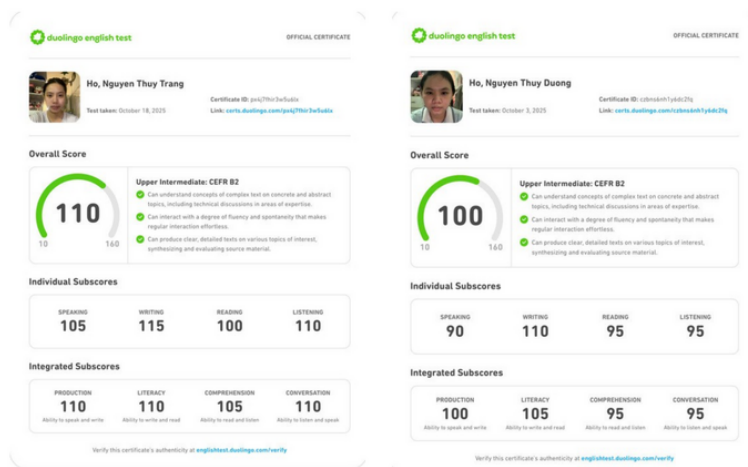
chúc mừng e nhaaaa

Bảng điểm PTE thật của học viên

Học viên 8020 – PTE Academic 90

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ DUOLINGO



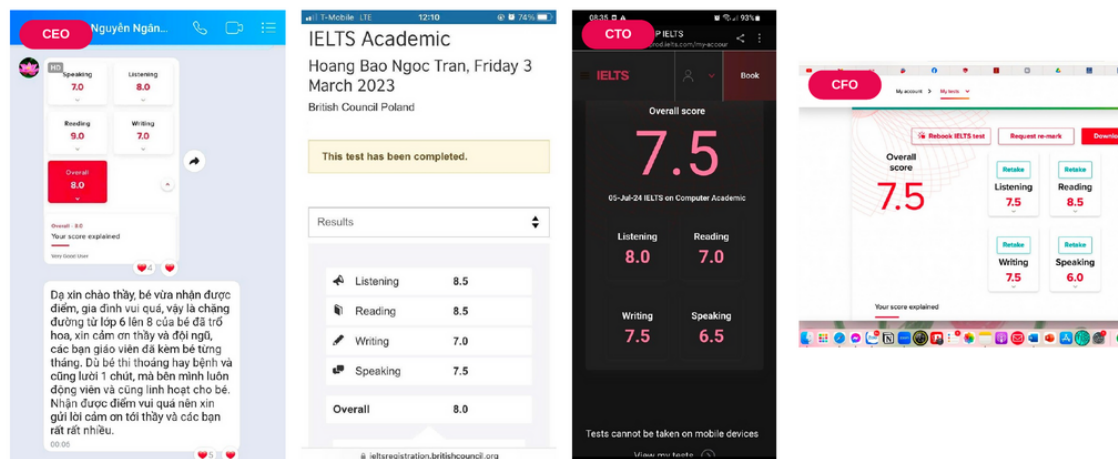
Duolingo English Test – 110 & 100

Học viên 8020 – Duolingo English Test 110 & 100

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

THÀNH TÍCH HỌC VIÊN

Bảng điểm thi thật – chất lượng được giám sát nghiêm ngặt. Một số học viên chỉ cần 1–2 khóa để đạt kết quả mong muốn.



Học viên 8020 – IELTS 8.0 / 7.5 / 8.5 (báo điểm thật)

**8020 ENGLISH – CHƯƠNG TRÌNH QUỐC TẾ**

Test đầu vào & tư vấn lộ trình MIỄN PHÍ

Hotline Thầy Tường (Head of 8020): 0332 747 169**Cô Nancy:** 0983 422 692 · 0772 631 496**Offline** Trần Phú, P.4, Q.5, TP.HCM**Online** Lớp trực tuyến toàn quốc**Web** luyenthi8020.com