



AP Calculus AB

Giáo trình luyện thi chuyên sâu
Song ngữ Anh-Việt

8020 ENGLISH

5A/2 Trần Phú, P.4, Q.5, TP.HCM · luyenthi8020.com

Thầy Tường 0332 747 169 · Cô Nancy 0983 422 692

Lời mở đầu • Foreword

Cuốn sách này thuộc bộ giáo trình luyện thi chương trình quốc tế của **8020 English (8020 Education)** — trung tâm luyện thi trọng điểm **IELTS • SAT • AP • IB • A-level • IGCSE** và sẵn học bổng du học. Toàn bộ nội dung được biên soạn bởi đội ngũ **Giáo sư • Tiến sĩ • Thạc sĩ** tốt nghiệp các trường top đầu thế giới, bám sát khung chương trình chính thức, trình bày đầy đủ lý thuyết, ví dụ mẫu, hình minh họa và hệ thống bài tập có lời giải chi tiết.

This book is part of the 8020 English international exam-prep series: complete English theory with Vietnamese explanations, worked examples, illustrations and fully-solved practice, aligned to the official framework.

Thành tích 8020 English

9.0 IELTS cao nhất

1570 SAT cao nhất

5/5 AP — điểm tuyệt đối

90/100 IB Diploma

100% GV $\geq$ 8.0 IELTS / 1500 SAT

CMU Tiến sĩ ĐH #1 Hoa Kỳ về CS

Đội ngũ tiêu biểu: Thầy Châu Cát Tường (Academic Head, ThS Western Sydney, top 1% IELTS 8.5) · TS Nguyễn Anh Huy (Carnegie Mellon, cựu kỹ sư Amazon) · TS Nguyễn Phước Trường (Toán, ĐH Klagenfurt) · cùng đội ngũ giảng viên SAT 1500–1600, IELTS 8.0–8.5.

Kết quả học viên — điểm thi thật: IELTS 8.0–9.0 · SAT 1550 / 1570 / 1590 · AP 5/5 (Calculus BC, Microeconomics) · IB 90/100 (Economics) · Duolingo 110 · PTE 90 · TOEFL 120. **Bảng vàng SAT:** Khánh Đăng 1510 · Thảo Nguyên 1520 · Tâm Anh 1530.

“Cuối cùng đã đậu vào trường top như mong muốn.” — Phan Thị Thanh Hằng, IELTS Overall 8.5.

Cách dùng sách hiệu quả: mỗi Unit gồm (1) **Lý thuyết trọng tâm** tiếng Anh kèm **giải thích tiếng Việt**; (2) **Ví dụ mẫu** có lời giải; (3) **Hệ thống bài tập** kèm **lời giải chi tiết**. Hãy tự làm bài trước khi xem lời giải để đạt hiệu quả tối đa.

THÀNH TÍCH THỰC TẾ • 8020 ENGLISH

Điểm thi thật • Bảng & bảng điểm thật của giảng viên và học viên 8020 English — Điểm thật • Thầy thật • Kết quả thật

ĐỘI NGŮ
ĐỘI NGŮ GIÁO VIÊN TẬN TÂM
***Tối thiểu 8.0 IELTS Overall**



Gv. Nguyễn Nhật Nam
IELTS 8.5 Overall



Gv. Nguyễn Khanh
IELTS 8.0 Overall



Gv. Nguyễn Đan Vy
IELTS 8.0 Overall



Giảng viên 8020 — IELTS 8.5 & 8.0 Overall (British Council • IDP • Cambridge)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN
THÀNH TÍCH HỌC VIÊN
Bảng điểm thi thật – chất lượng được giám sát nghiêm ngặt. Một số học viên chỉ cần 1–2 khóa để đạt kết quả mong muốn.





Học viên 8020 — IELTS 8.0 Overall (bảng điểm thật)

ĐỘI NGŨ

ĐỘI NGŨ GIÁO VIÊN TẬN TÂM

*Tối thiểu 1500 SAT Overall

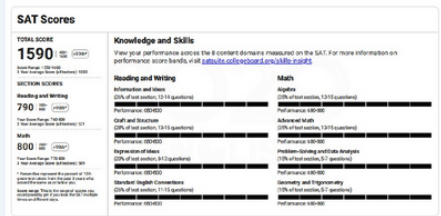
Thầy Quang Minh

Đại học Bách Khoa Hà Nội



SAT 1590

IELTS 8.0



THỂ MẠNH & KINH NGHIỆM

- Học sinh đạt 1450–1560 SAT
- Day nhanh band 1400–1550+
- Chiến thuật làm bài & quản lý thời gian

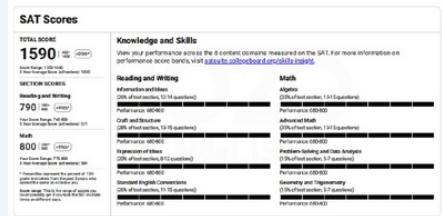
Cô Phương Vy

Đại học Ngoại thương



SAT 1590

IELTS 8.0



THỂ MẠNH & KINH NGHIỆM

- SAT Verbal Instructor (Springboard, QAS)
- Day lớp nhỏ & xây dựng tài liệu riêng
- Chuyên Reading & Writing: Logic – Grammar

Giảng viên 8020 – SAT 1590 (ĐH Bách Khoa Hà Nội & ĐH Ngoại thương)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

TUTOR 1-1 – ĐIỂM SỐ ẤN TƯỢNG



Your Scores

Name: Tam T Nguyen
Grade: 12
Test administration: SAT May 3, 2025
Record Locator: 410244771



Build your future, your way, with free personalized career and college planning tools

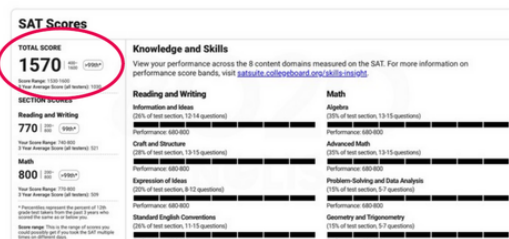


satsuite.org/whatsnext



Your Scores

Name: Linh Pham
Grade: 12
Test administration: SAT December 7, 2024
Record Locator: 409986376



Build your future, your way, with free personalized career and college planning tools



satsuite.org/whatsnext

Học viên 8020 – SAT 1550 & 1570 (College Board)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

BẢNG VÀNG HỌC VIÊN

SAT
CHAU CÁT TƯỜNG
Tư vấn hướng nghiệp học & điểm số8020
ENGLISH

Bảng vàng học viên



Bé Khanh Đăng

SAT Bứt phá + Nâng cao Cam kết 140++ => Kết quả 1510



Bé Phan Nguyên Thảo Nguyên

SAT Nâng cao



Bé Lê Tâm Anh

SAT Bứt phá + Nâng cao Cam kết 140++ => Bứt phá kết quả 1530

KHÁNH ĐĂNG – SAT 1510

“SAT Bứt phá + Nâng cao cam kết 140++ → 1510”

THẢO NGUYÊN – SAT 1520

“SAT Nâng cao → 1520”

TÂM ANH – SAT 1530

“SAT Bứt phá + Nâng cao cam kết 140++ → 1530”

Bảng vàng SAT – Học viên đạt 1510 · 1520 · 1530

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ AP

8020
ENGLISH

AP Biology: 4 · AP Chemistry: 4



AP Calculus AB: 5



AP Calculus BC: 5



AP Chemistry: 5

Bảng điểm AP thật của học viên – nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Điểm AP thật – Calculus AB/BC 5/5 · Biology & Chemistry 4–5 (College Board)

Mục lục • Contents

1	Limits and Continuity	6
1.1	From Average Rate of Change to the Idea of a Limit	6
1.2	Defining Limits and One-Sided Limits	7
1.3	Estimating Limits Graphically and Numerically	8
1.4	Determining Limits Using Algebraic Properties of Limits	9
1.5	Determining Limits Using Algebraic Manipulation	10
1.6	Selecting Procedures for More Complex Limits	12
1.7	The Squeeze Theorem	14
1.8	Connecting Graphical, Numerical, Analytical, and Verbal Representations	15
1.9	Types of Discontinuity	15
1.10	Continuity at a Point and on an Interval	16
1.11	Removing Discontinuities	18
1.12	Infinite Limits and Vertical Asymptotes	18
1.13	Limits at Infinity and Horizontal Asymptotes	20
1.14	The Intermediate Value Theorem	22
1.15	Problem Bank	23
2	Differentiation: Definition and Fundamental Properties	32
2.1	Average and Instantaneous Rates of Change	32
2.2	Derivative Notation and Numerical Estimation	34
2.3	Differentiability and Continuity	36
2.4	The Power Rule and Linearity of Differentiation	38
2.5	Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions	40
2.6	Derivatives of the Sine and Cosine Functions	41
2.7	The Product Rule	42
2.8	The Quotient Rule	44
2.9	Derivatives of the Other Trigonometric Functions	45
2.10	Problem Bank	46
3	Differentiation: Composite, Implicit, and Inverse Functions	55
3.1	The Chain Rule	55
3.2	Implicit Differentiation	59
3.3	Derivatives of General Inverse Functions	62
3.4	Derivatives of Inverse Trigonometric Functions	64
3.5	Selecting Procedures for Differentiation	66
3.6	Higher-Order Derivatives	67
3.7	Problem Bank	69
4	Contextual Applications of Differentiation	79
4.1	Interpreting the Derivative in Applied Context	79
4.2	Straight-Line Motion	81
4.3	Rates of Change Beyond Motion	83
4.4	Related Rates: The General Method	85
4.5	Solving Related Rates Problems	86

4.6	Approximating Values Using Local Linearity	90
4.7	Differentials	91
4.8	L'Hopital's Rule for Indeterminate Limits	93
4.9	Problem Bank	95
5	Analytical Applications of Differentiation	104
5.1	Extreme Values and Critical Points	104
5.2	Rolle's Theorem and the Mean Value Theorem	105
5.3	Increasing and Decreasing Functions	107
5.4	The First Derivative Test	108
5.5	The Candidates Test for Absolute Extrema	109
5.6	Concavity and the Second Derivative Test	110
5.7	Points of Inflection	112
5.8	Curve Sketching: Connecting a Function and Its Derivatives	113
5.9	Optimization Problems	115
5.10	Implicit Relations: Tangent Lines and Monotonicity	118
5.11	Problem Bank	119
6	Integration and Accumulation of Change	130
6.1	Accumulation of Change	130
6.2	Approximating Areas with Riemann Sums	131
6.3	The Trapezoidal Rule	134
6.4	Formal Riemann Sum Notation and the Definite Integral	135
6.5	Properties of Definite Integrals	136
6.6	The Fundamental Theorem of Calculus, Part 1	137
6.7	The Fundamental Theorem of Calculus, Part 2	139
6.8	Antiderivatives and Indefinite Integrals	140
6.9	Integration by u-Substitution	142
6.10	Algebraic Manipulation Before Integrating	144
6.11	Problem Bank	145
7	Differential Equations	156
7.1	Modeling Situations with Differential Equations	156
7.2	Verifying Solutions of Differential Equations	157
7.3	Slope Fields	158
7.4	Approximating Solutions Using Euler's Method	161
7.5	Finding General Solutions Using Separation of Variables	163
7.6	Finding Particular Solutions Using Initial Conditions	165
7.7	Exponential Models with Differential Equations	166
7.8	The Logistic Differential Equation	168
7.9	Problem Bank	170
8	Applications of Integration	180
8.1	Average Value of a Function and the Mean Value Theorem for Integrals	180
8.2	Motion Along a Line	182
8.3	Net Change and Accumulation in Applied Contexts	183
8.4	Area Between Two Curves	186
8.5	Volumes with Known Cross-Sections	189
8.6	The Disk Method	191
8.7	The Washer Method	193
8.8	Problem Bank	195

Limits and Continuity

Mục tiêu Unit: Hiểu khái niệm giới hạn (limit) một cách trực quan và qua kí hiệu hình thức; ước lượng giới hạn từ đồ thị và bảng giá trị; tính giới hạn bằng các định lý giới hạn (limit laws) và các kỹ thuật đại số (phân tích nhân tử, nhân liên hợp, quy đồng mẫu, xét hàm từng khúc); nắm hai giới hạn lượng giác đặc biệt và Định lý Kẹp (Squeeze Theorem); phân loại các dạng gián đoạn (khử được, nhảy, vô cực) và phát biểu định nghĩa liên tục tại một điểm cũng như trên một khoảng; xử lý giới hạn vô cực, tiệm cận đứng, tiệm cận ngang (kể cả với hàm mũ); và áp dụng Định lý Giá trị Trung gian (Intermediate Value Theorem) để chứng minh sự tồn tại của nghiệm hoặc của một giá trị hàm số.

1.1 From Average Rate of Change to the Idea of a Limit

Calculus begins with a single question that algebra cannot answer on its own: how fast is a quantity changing *at a single instant*? Algebra is very good at describing change over an **interval** — given two data points, it readily produces a single average rate — but a single instant is not an interval at all, so no ordinary algebraic ratio can be built from it directly. Every major idea in the chapters ahead, from the derivative (an instantaneous rate of change) to the definite integral (an instantaneous accumulation, built from infinitely many infinitesimally thin pieces), is constructed by taking exactly this kind of limiting process and making it precise; understanding limits thoroughly here is what makes those later constructions possible. If a car's position at time t (in seconds) is $s(t) = t^2 + 2t$ (in meters), the **average rate of change** of s over an interval $[a, b]$ is the slope of the secant line joining $(a, s(a))$ and $(b, s(b))$:

$$\text{average rate of change on } [a, b] = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}.$$

This number is easy to compute and tells us the car's average velocity over the whole interval, but it says nothing about how fast the car was moving at one particular moment, say $t = 1$. To isolate the behavior at a single instant, we shrink the interval down: instead of $[1, 4]$, consider $[1, 1 + h]$ for smaller and smaller values of h , and ask what the average rate of change over $[1, 1 + h]$ approaches as h shrinks toward 0 (without ever letting h actually equal 0, since the interval $[1, 1]$ has zero width and the ratio $\frac{s(1+h)-s(1)}{h}$ is undefined at $h = 0$). The value this ratio *approaches* — not the value it takes on at $h = 0$, which does not even exist — is called a **limit**, and it is the central object of study of this entire chapter.

Ví dụ mẫu • Average vs. instantaneous velocity

A car's position is $s(t) = t^2 + 2t$ meters, t in seconds. (a) Find the average velocity on $[1, 4]$. (b) Estimate the instantaneous velocity at $t = 1$ by computing the average velocity on $[1, 1 + h]$ and examining what happens as $h \rightarrow 0$.

(a) $s(4) = 16 + 8 = 24$ and $s(1) = 1 + 2 = 3$, so

$$\text{average velocity} = \frac{s(4) - s(1)}{4 - 1} = \frac{24 - 3}{3} = \frac{21}{3} = 7 \text{ m/s.}$$

(b) Compute the difference quotient on $[1, 1 + h]$:

$$s(1 + h) = (1 + h)^2 + 2(1 + h) = 1 + 2h + h^2 + 2 + 2h = 3 + 4h + h^2,$$

so

$$\frac{s(1+h) - s(1)}{h} = \frac{(3+4h+h^2) - 3}{h} = \frac{4h+h^2}{h} = 4+h \quad (h \neq 0).$$

As h is taken closer and closer to 0 (from either side), the expression $4+h$ gets closer and closer to 4. We say the limit of the average velocity, as $h \rightarrow 0$, is 4 – and this is exactly what we mean by the **instantaneous velocity** at $t = 1$: 4 m/s. Notice that the average velocity over the much longer interval $[1, 4]$, at 7 m/s, is a completely different number from the instantaneous velocity at the single instant $t = 1$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tốc độ thay đổi trung bình (average rate of change) trên một đoạn $[a, b]$ chỉ là độ dốc của đường thẳng nối hai điểm đầu-cuối – tính được ngay bằng đại số. Nhưng tốc độ thay đổi **tức thời** (instantaneous) tại một điểm duy nhất đòi hỏi ta thu hẹp đoạn $[a, b]$ lại thành một đoạn cực ngắn quanh điểm đó rồi xem tỉ số thay đổi **tiến tới** giá trị nào – đây chính là khái niệm **giới hạn (limit)**. Đây là ý tưởng nền tảng sẽ trở lại trong Chương sau khi ta định nghĩa đạo hàm (derivative) chính là giới hạn này.

1.2 Defining Limits and One-Sided Limits

1.2.1 The intuitive meaning of a limit

We write

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

to mean: as x takes values closer and closer to c (from either side, but always with $x \neq c$), the corresponding outputs $f(x)$ get closer and closer to the single number L . Read this as “the limit of $f(x)$, as x approaches c , is L .”

Approach, not arrival

A limit describes what $f(x)$ is **heading toward** as x approaches c – it makes no claim whatsoever about the actual value $f(c)$. Three situations can occur, and all three are perfectly compatible with $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$: $f(c) = L$ (the ordinary case); $f(c)$ equals some other number entirely; or $f(c)$ is not defined at all. The limit only cares about values of x **near** c , never about $x = c$ itself.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Giới hạn mô tả giá trị mà $f(x)$ **tiến tới** khi x tiến rất gần c – hoàn toàn không liên quan đến giá trị thật của $f(c)$. Có ba khả năng đều tương thích với $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$: $f(c) = L$ (trường hợp thường gặp); $f(c)$ bằng một số khác; hoặc $f(c)$ không xác định. Học sinh mới học thường nhầm lẫn “tính giới hạn” với “tính giá trị hàm số” – đây là hai việc khác nhau.

1.2.2 One-sided limits

Sometimes it matters from which side x approaches c . The **left-hand limit**, written $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$, only considers values of x less than c approaching c ; the **right-hand limit**, written $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$, only considers values of x greater than c approaching c . The two-sided limit exists precisely when both one-sided limits exist and agree.

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

If the two one-sided limits are unequal, or if either one fails to exist (e.g., is infinite), the two-sided limit $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ **does not exist** (abbreviated DNE).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

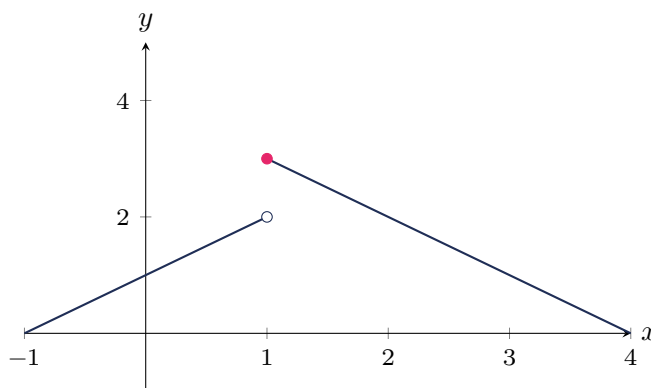
Giới hạn trái $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ chỉ xét x tiến tới c từ phía **nhỏ hơn** c ; giới hạn phải $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ chỉ xét x tiến tới c từ phía **lớn hơn** c . Giới hạn hai phía chỉ tồn tại khi và chỉ khi hai giới hạn một phía **cùng tồn tại và bằng nhau**. Đây là công cụ chủ đạo để xét giới hạn của hàm từng khúc (piecewise) và để xét gián đoạn kiểu "nhảy" (jump discontinuity) ở phần sau chương này.

(!) **Lỗi thường gặp:** " $f(c)$ không xác định" và " $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ không tồn tại" là hai điều **hoàn toàn khác nhau**, dù học sinh rất hay gộp chung. Một hàm số có thể không xác định tại c (ví dụ có một "lỗ hổng" trên đồ thị) nhưng giới hạn tại c vẫn tồn tại và hữu hạn — đây chính là bản chất của **gián đoạn khử được** (removable discontinuity), trình bày chi tiết ở phần sau. Ngược lại, $f(c)$ có thể xác định rõ ràng nhưng giới hạn tại c vẫn không tồn tại (ví dụ gián đoạn kiểu nhảy). Luôn kiểm tra hai câu hỏi này một cách độc lập.

1.3 Estimating Limits Graphically and Numerically

1.3.1 Reading limits from a graph

On a graph, $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ is the height the curve is heading toward as you trace it from the left and from the right toward $x = c$ — completely independent of whether the graph shows an open circle, a filled dot, or nothing at all plotted directly above $x = c$. To read a one-sided limit, trace the curve from only one direction.



$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ -x + 4, & x \geq 1 \end{cases}$. Tracing from the left, the curve heads toward the open circle at height 2: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$.

Tracing from the right, the curve heads toward the filled dot at height 3: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$. Since $2 \neq 3$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ does not exist, even though $f(1) = 3$ is perfectly well defined.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trên đồ thị, giới hạn tại $x = c$ chính là **độ cao mà đường cong đang hướng tới** khi ta "đi dọc" theo đường cong từ trái và từ phải về phía $x = c$ — hoàn toàn không quan tâm điểm đó vẽ bằng vòng tròn rỗng, chấm đặc, hay không vẽ gì cả. Trong hình trên, giới hạn trái là 2 (vòng tròn rỗng), giới hạn phải là 3 (chấm đặc, cũng chính là $f(1)$); vì hai giới hạn một phía khác nhau nên giới hạn hai phía **không tồn tại**.

1.3.2 Estimating limits from a table of values

Another way to estimate a limit is to build a table of $f(x)$ for values of x that get closer and closer to c from both sides, and observe the pattern the outputs follow. This numerical approach is especially useful when a formula is hard to simplify by hand, or as a way to check an algebraic answer.

Ví dụ mẫu · Estimating a limit numerically

Estimate $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ using a table of values.

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01
$f(x)$	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01

As x approaches 1 from either side, $f(x)$ appears to approach 2. This matches the algebraic computation: for $x \neq 1$, $\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$, and $x + 1 \rightarrow 2$ as $x \rightarrow 1$. So

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$, even though the original expression is the indeterminate form $\frac{0}{0}$ at $x = 1$ itself.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bảng giá trị là công cụ trực quan để **ước lượng** giới hạn: cho x tiến gần c từ cả hai phía bằng những giá trị cụ thể (ví dụ 0.9, 0.99, 0.999, ...) và quan sát $f(x)$ tiến về đâu. Đây chỉ là phương pháp **ước lượng**, không phải chứng minh chặt chẽ – muốn khẳng định chắc chắn giá trị giới hạn, ta vẫn cần kỹ thuật đại số (Mục tiếp theo) hoặc phép thế trực tiếp.

1.4 Determining Limits Using Algebraic Properties of Limits

When both $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ and $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$ exist (as finite numbers), limits interact predictably with the basic algebraic operations. These **limit laws** let us break a complicated limit into simpler pieces.

The limit laws

Suppose $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ and $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = M$, and k is a constant. Then:

- **Sum:** $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) + g(x)] = L + M$
- **Difference:** $\lim_{x \rightarrow c} [f(x) - g(x)] = L - M$
- **Constant multiple:** $\lim_{x \rightarrow c} [k f(x)] = kL$
- **Product:** $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)g(x)] = LM$
- **Quotient:** $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, provided $M \neq 0$
- **Power:** $\lim_{x \rightarrow c} [f(x)]^n = L^n$ for any positive integer n (and more generally for rational powers $L^{p/q}$, whenever $L^{p/q}$ is defined)

A direct and enormously useful consequence of the limit laws is that for a function built entirely out of sums, differences, products, quotients, and powers of simpler continuous pieces – polynomials, root functions, sine and cosine, exponentials, logarithms – the limit at any point c inside the

function's domain can be found by **direct substitution**:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c) \quad \text{whenever } f \text{ is continuous at } c.$$

This is by far the fastest technique and should always be tried first. It fails only when substitution produces an undefined expression, such as division by zero.

Ví dụ mẫu · Applying the limit laws

Suppose $\lim_{x \rightarrow 5} p(x) = 4$ and $\lim_{x \rightarrow 5} q(x) = 13$. (a) Find $\lim_{x \rightarrow 5} [p(x)q(x) + 5]$. (b) Find $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{q(x) - p(x)}$.

(c) Evaluate $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ by direct substitution.

(a) By the product law, $\lim_{x \rightarrow 5} p(x)q(x) = (4)(13) = 52$; by the sum law, $\lim_{x \rightarrow 5} [p(x)q(x) + 5] = 52 + 5 = 57$.

(b) By the difference law, $\lim_{x \rightarrow 5} [q(x) - p(x)] = 13 - 4 = 9$; by the power law (square root is the power $\frac{1}{2}$), $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{q(x) - p(x)} = \sqrt{9} = 3$.

(c) $\frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ is a quotient of polynomials, continuous everywhere the denominator is nonzero; since $2^2 + 1 = 5 \neq 0$, substitute $x = 2$ directly:

$$\frac{2^3 + 2(2) - 1}{2^2 + 1} = \frac{8 + 4 - 1}{4 + 1} = \frac{11}{5}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Các **định lý giới hạn (limit laws)** cho phép "tách" một giới hạn phức tạp thành các giới hạn đơn giản hơn: giới hạn của tổng bằng tổng các giới hạn, giới hạn của tích bằng tích các giới hạn, v.v. — miễn là các giới hạn thành phần đều tồn tại (và với phép chia, mẫu số không tiến về 0). Hệ quả quan trọng nhất: nếu f **liên tục** tại c (đa thức, hàm căn, hàm lượng giác, hàm mũ/log trong miền xác định), ta chỉ cần **thế trực tiếp** $x = c$ vào — đây luôn là bước thử đầu tiên.

1.5 Determining Limits Using Algebraic Manipulation

Direct substitution fails whenever it produces an undefined expression — most commonly the **indeterminate form** $\frac{0}{0}$. This does not mean the limit is 0, and it does not mean the limit fails to exist; it means the expression must first be rewritten in an equivalent form for which substitution *does* work. The word "indeterminate" is precise: $\frac{0}{0}$ alone tells us nothing about the eventual value of the limit, since different functions that both produce $\frac{0}{0}$ at a point can have completely different limits there (or none at all) — the specific algebraic structure of the expression, not the symbol $\frac{0}{0}$ itself, determines the answer. Three algebraic techniques handle the overwhelming majority of such limits.

1.5.1 Factoring and canceling common factors

If both numerator and denominator share a common factor that vanishes at $x = c$, factor both and cancel it. The resulting simplified expression agrees with the original everywhere except at $x = c$ itself — which is exactly what a limit needs, since it never looks at $x = c$.

Ví dụ mẫu · Factoring and canceling

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6}$.

Direct substitution gives $\frac{0}{0}$. Factor both numerator and denominator:

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = \frac{(x-3)(x+3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x+3}{x-2} \quad (x \neq 3).$$

Now substitute $x = 3$ into the simplified form: $\frac{3+3}{3-2} = \frac{6}{1} = 6$. So $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 5x + 6} = 6$.

(!) Lỗi thường gặp: Thấy $\frac{0}{0}$ khi thế trực tiếp **không có nghĩa là giới hạn bằng 0**, và cũng không có nghĩa là giới hạn không tồn tại. $\frac{0}{0}$ chỉ là tín hiệu cho biết biểu thức cần được **biến đổi đại số** trước (phân tích nhân tử, nhân liên hợp, quy đồng, v.v.) trước khi có thể kết luận được điều gì. Đừng bao giờ dừng lại và viết "giới hạn = 0" ngay khi gặp dạng $\frac{0}{0}$.

1.5.2 Rationalizing using a conjugate

When a limit involves a square root and direct substitution gives $\frac{0}{0}$, multiply the numerator and denominator by the **conjugate** of the radical expression. This uses the identity $(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$ to eliminate the square root from the piece that is causing the trouble.

Ví dụ mẫu · Rationalizing with a conjugate

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$.

Direct substitution gives $\frac{0}{0}$. Multiply by the conjugate $\frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2}$:

$$\frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+4} + 2}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{(x+4) - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} \quad (x \neq 0).$$

Now substitute $x = 0$: $\frac{1}{\sqrt{4} + 2} = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$. So $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \frac{1}{4}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi giới hạn có chứa căn thức và cho ra dạng $\frac{0}{0}$, ta nhân cả tử và mẫu với **biểu thức liên hợp** (conjugate) của phần chứa căn — dùng hằng đẳng thức $(\sqrt{A} - B)(\sqrt{A} + B) = A - B^2$ để "phá căn". Sau khi nhân liên hợp, nhân tử gây ra 0 ở mẫu (thường là $x - c$) sẽ xuất hiện ở tử và có thể rút gọn được.

1.5.3 Combining fractions into a single expression

When a limit contains a difference or sum of fractions, combine them over a common denominator first. This often reveals a common factor that can then be canceled, exactly as in the factoring technique.

Ví dụ mẫu · Combining fractions

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x}$.

Combine the numerator over a common denominator:

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} = \frac{2 - (x+2)}{2(x+2)} = \frac{-x}{2(x+2)}.$$

Now divide by x (equivalently, multiply by $\frac{1}{x}$):

$$\frac{-x}{2(x+2)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{-1}{2(x+2)} \quad (x \neq 0).$$

Substitute $x = 0$: $\frac{-1}{2(2)} = -\frac{1}{4}$. So $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x} = -\frac{1}{4}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi biểu thức có chứa hiệu hoặc tổng của các phân số, hãy **quy đồng mẫu số** trước tiên rồi rút gọn tử số. Sau bước quy đồng, thường sẽ xuất hiện nhân tử chung với mẫu số bên ngoài (ở đây là x) để có thể triệt tiêu, đưa biểu thức về dạng thể trực tiếp được.

1.5.4 Limits of piecewise-defined functions

For a piecewise-defined function, the limit at a point that lies **strictly inside** one piece's domain is found by direct substitution (or algebraic simplification) using that single piece. The limit at a **breakpoint** – where the formula changes – must be found using one-sided limits, computing each side with its own piece and then comparing.

Ví dụ mẫu • A piecewise limit

Let $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 2 \\ 3x - 1, & x \geq 2 \end{cases}$. Find $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Since the formula changes at $x = 2$, compute both one-sided limits separately, using the piece valid on each side:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 4 + 1 = 5, \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x - 1) = 6 - 1 = 5.$$

Both one-sided limits equal 5, so the two-sided limit exists: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$. (Since $f(2) = 3(2) - 1 = 5$ also matches, f is in fact continuous at $x = 2$ – a property examined closely later in this chapter.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hàm từng khúc (piecewise), nếu điểm cần xét giới hạn nằm **hẳn bên trong** một nhánh, chỉ cần dùng đúng nhánh đó. Nhưng nếu điểm đó là **điểm nối** giữa hai nhánh (breakpoint), bắt buộc phải tính **riêng biệt** giới hạn trái (dùng nhánh bên trái) và giới hạn phải (dùng nhánh bên phải) rồi so sánh – đây là ứng dụng trực tiếp của khái niệm giới hạn một phía đã học.

1.6 Selecting Procedures for More Complex Limits

Not every limit yields to a single technique; often the right move is to recognize the *type* of expression in front of you and select – or combine – the appropriate tool.

A general strategy. (1) Try direct substitution first. (2) If it gives $\frac{0}{0}$ and the expression involves polynomials or rational functions, try factoring and canceling. (3) If it involves a square root, try rationalizing with a conjugate. (4) If it involves a sum or difference of fractions, combine them first. (5) If it involves trigonometric functions divided by x (or a multiple of x), look for the special trigonometric limits below. (6) If none of these apply directly, look for a way to bound the expression between two simpler functions with the same limit (the Squeeze Theorem, next section).

1.6.1 The special trigonometric limits

Two limits involving trigonometric functions occur so frequently that they are worth memorizing outright, since neither can be evaluated by direct substitution (both give $\frac{0}{0}$) nor by ordinary factoring:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Both are believable numerically: taking $x = 0.1$ radians, $\frac{\sin(0.1)}{0.1} \approx \frac{0.09983}{0.1} = 0.9983$, and taking $x = 0.01$, $\frac{\sin(0.01)}{0.01} \approx 0.99998$ – clearly heading toward 1. Likewise $\frac{1 - \cos(0.1)}{0.1} \approx \frac{0.004996}{0.1} = 0.04996$, and at $x = 0.01$ this ratio is about 0.00005 – clearly heading toward 0. Graphically, both $y = \frac{\sin x}{x}$ and $y = \frac{1 - \cos x}{x}$ have a hole at $x = 0$ (since both are undefined there), but the curves approach the heights 1 and 0 respectively as $x \rightarrow 0$ from either side. Both facts can be proven rigorously with the Squeeze Theorem, introduced in the next section; here we treat them as established tools.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai giới hạn lượng giác đặc biệt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$ **không thể** tính bằng thế trực tiếp (đều cho $\frac{0}{0}$) và cũng không phân tích nhân tử được – cần ghi nhớ như công cụ có sẵn. Về mặt đồ thị, cả hai hàm đều có "lỗ hổng" tại $x = 0$ nhưng đường cong vẫn tiến rõ ràng về các độ cao 1 và 0 tương ứng khi $x \rightarrow 0$ từ hai phía; bảng giá trị với $x = 0.1, 0.01, \dots$ xác nhận điều này bằng số.

1.6.2 Combining techniques

A limit involving trigonometric expressions often needs to be reshaped algebraically first – multiplying by a strategic constant, or by a conjugate-like factor – before one of the special trigonometric limits can be applied directly.

Ví dụ mẫu · Special trigonometric limits, combined with algebra

(a) Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x}$. (b) Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x \sin x}$.

(a) Multiply and divide by 4 so the argument of sine matches the denominator:

$$\frac{\sin(4x)}{x} = 4 \cdot \frac{\sin(4x)}{4x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 4 \cdot 1 = 4.$$

(b) Multiply numerator and denominator by the conjugate-like factor $(1 + \cos x)$:

$$\frac{1 - \cos x}{x \sin x} \cdot \frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x \sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin^2 x}{x \sin x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x}.$$

As $x \rightarrow 0$: $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ and $\frac{1}{1 + \cos x} \rightarrow \frac{1}{1 + 1} = \frac{1}{2}$. So the product $\rightarrow 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

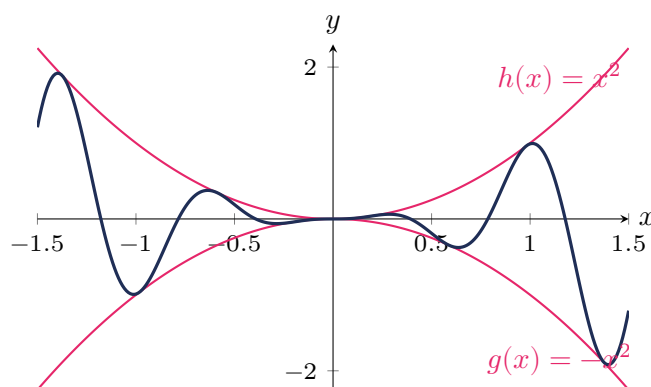
1.7 The Squeeze Theorem

Some limits cannot be evaluated directly by any algebraic simplification because the function oscillates or is otherwise too complicated to manipulate — yet it can be trapped, near the point in question, between two simpler functions that share the same limit. The **Squeeze Theorem** (also called the Sandwich Theorem) makes this idea precise.

Squeeze (Sandwich) Theorem. If $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ for all x near c (except possibly at c itself), and

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L,$$

then $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$ as well — f is "squeezed" between g and h into the same limiting value.



The wiggly curve $f(x) = x^2 \sin(8x)$ is trapped between $g(x) = -x^2$ and $h(x) = x^2$ for every x , since $|\sin(8x)| \leq 1$. As $x \rightarrow 0$, both bounding curves converge to 0, so $f(x)$ is squeezed to 0 as well, regardless of how wildly it oscillates elsewhere.

Ví dụ mẫu · The Squeeze Theorem in action

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Direct substitution fails ($\sin(1/x)$ is undefined at $x = 0$ and oscillates infinitely often near 0, so this limit cannot be found by simplification). However, for every $x \neq 0$, the sine function satisfies $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$. Multiplying through by $x^2 \geq 0$ (which does not flip the inequalities) gives

$$-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \quad \text{for all } x \neq 0.$$

Since $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = 0$ and $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, the Squeeze Theorem guarantees

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý Kẹp dùng khi hàm số quá phức tạp (dao động, không rút gọn được) nhưng có thể "kẹp" giữa hai hàm đơn giản hơn cùng tiến về một giá trị. Ví dụ kinh điển: $\sin(1/x)$ dao động vô hạn lần khi $x \rightarrow 0$ nên không thể tính trực tiếp, nhưng vì luôn có $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$, nhân với $x^2 \geq 0$ ta kẹp được $x^2 \sin(1/x)$ giữa $-x^2$ và x^2 — cả hai đều tiến về 0, nên hàm ở giữa cũng buộc phải tiến về 0.

1.8 Connecting Graphical, Numerical, Analytical, and Verbal Representations

A single limit statement can be approached – and confirmed – through four different lenses: a **graph** (visualizing what height the curve approaches), a **table** of numerical values (watching outputs settle toward a number), an **analytical** argument (algebraic simplification or a limit law), and a **verbal** description (a sentence describing the approach in words, often arising from an applied context). Fluent use of limits means being able to translate freely among these four representations – and, when they are all available, checking that they agree.

Ví dụ mẫu · Four representations, one limit

A demographic model predicts a town's population (in thousands), t years after its founding, using $P(t) = \frac{t^2 - 4}{t - 2}$ for $t \neq 2$. A table of the model's predictions is shown below.

t	1.9	1.99	2.01	2.1
$P(t)$	3.9	3.99	4.01	4.1

Connect the four representations: **Numerically**, the table shows $P(t) \rightarrow 4$ as $t \rightarrow 2$ from either side. **Analytically**, factoring gives $P(t) = \frac{(t-2)(t+2)}{t-2} = t+2$ for $t \neq 2$, and $t+2 \rightarrow 4$ as $t \rightarrow 2$. **Graphically**, the model's graph is the line $y = t+2$ with an open circle (a hole) at $(2, 4)$, since the model provides no value at $t = 2$ itself. **Verbally**, this all says: "as the town's age approaches 2 years from either side, the model's predicted population approaches 4,000 residents." All four representations agree that $\lim_{t \rightarrow 2} P(t) = 4$ – even though $P(2)$ itself is undefined in the model, a removable discontinuity examined further in the next section.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Một giới hạn có thể được tiếp cận qua 4 hình thức: **đồ thị** (độ cao đường cong hướng tới), **bảng số** (giá trị số cụ thể tiến gần một số), **đại số/giải tích** (biến đổi công thức để thể trực tiếp), và **lời văn** (mô tả bằng ngôn ngữ tự nhiên, thường xuất phát từ bài toán thực tế). Kỹ năng quan trọng là chuyển đổi linh hoạt giữa bốn hình thức này và kiểm tra chúng có **khớp** nhau hay không – như ví dụ trên, cả bốn cách đều cho cùng một kết luận: giới hạn bằng 4.

1.9 Types of Discontinuity

A function fails to be continuous at $x = c$ in one of three characteristic ways, distinguished by what happens to the one-sided limits there.

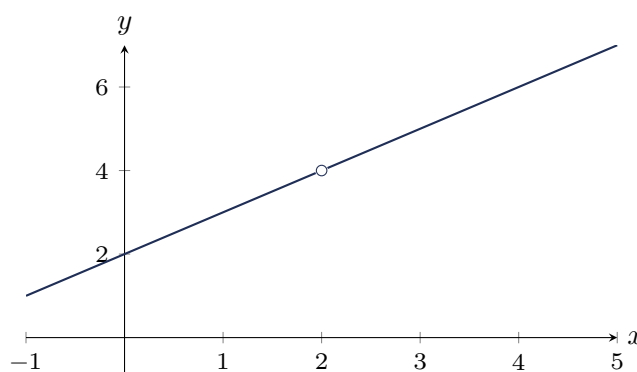
Three types of discontinuity

- **Removable discontinuity:** $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ exists (both one-sided limits exist and are equal), but either $f(c)$ is undefined or $f(c)$ does not equal that limit. Graphically, a single "hole" – the discontinuity can be fixed (removed) by defining or redefining the one value $f(c)$.
- **Jump discontinuity:** both one-sided limits exist (are finite) but are *unequal*, so the two-sided limit does not exist. Graphically, the curve "jumps" from one height to another at $x = c$; no single value of $f(c)$ could ever repair this.
- **Infinite discontinuity:** at least one one-sided limit is $+\infty$ or $-\infty$. Graphically, the curve shoots off toward a vertical asymptote at $x = c$; again, no redefinition of $f(c)$ could repair this.

The table below summarizes how the three types differ in terms of one-sided limit behavior, and

— critically for the next section — whether the discontinuity can be repaired by changing a single function value.

Type	One-sided limits	Two-sided limit	Fixable by redefining $f(c)$?
Removable	Both exist and are equal	Exists (finite)	Yes
Jump	Both exist but are unequal	Does not exist	No
Infinite	At least one is $+\infty$ or $-\infty$	Does not exist	No



$g(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$ for $x \neq 2$, undefined at $x = 2$. The line has a hole at $(2, 4)$: $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 4$ exists, but $g(2)$ is undefined — a removable discontinuity.

Ví dụ mẫu · Classifying discontinuities

Classify the discontinuity of each function at the indicated point.

(a) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 3, & x = 1 \end{cases}$ at $x = 1$. For $x \neq 1$, $h(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$, so $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) =$

2. But $h(1) = 3 \neq 2$. The limit exists yet disagrees with the function value $\Rightarrow$ **removable**.

(b) $g(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 1 \\ x^2, & x \geq 1 \end{cases}$ at $x = 1$. $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = 1 + 1 = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = 1^2 = 1$. The one-sided limits are finite but unequal ($2 \neq 1$) $\Rightarrow$ **jump**.

(c) $k(x) = \frac{1}{(x - 3)^2}$ at $x = 3$. As $x \rightarrow 3$ from either side, $(x - 3)^2 \rightarrow 0^+$, so $k(x) \rightarrow +\infty$. At least one one-sided limit is infinite $\Rightarrow$ **infinite** (with a vertical asymptote at $x = 3$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ba dạng gián đoạn phân biệt bằng hành vi của giới hạn một phía: **khử được (removable)** — giới hạn tồn tại nhưng $f(c)$ sai hoặc không xác định (đồ thị có "lỗ"); **nhảy (jump)** — hai giới hạn một phía đều hữu hạn nhưng khác nhau (đồ thị "nhảy bậc"); **vô cực (infinite)** — ít nhất một giới hạn một phía là $\pm\infty$ (đồ thị có tiệm cận đứng). Chỉ loại **khử được** mới có thể "sửa" bằng cách định nghĩa lại đúng một giá trị $f(c)$.

1.10 Continuity at a Point and on an Interval

1.10.1 The formal definition of continuity

Intuitively, a function is continuous at a point if its graph can be traced through that point without lifting the pen. This intuition is captured precisely by three conditions that must *all* hold simultaneously.

f is continuous at $x = c$ if and only if all three conditions hold:

1. $f(c)$ is defined (c is in the domain of f);
2. $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ exists (both one-sided limits exist and are equal);
3. $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ (the limit actually equals the function value).

If any one of the three fails, f is discontinuous at c .

Ví dụ mẫu • Checking the three conditions

Determine whether $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2}, & x \neq 2 \\ 4, & x = 2 \end{cases}$ is continuous at $x = 2$.

Condition 1: $f(2) = 4$ is defined. ✓

Condition 2: for $x \neq 2$, $f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2$, so $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2+2 = 4$, which exists. ✓

Condition 3: the limit (4) equals $f(2)$ (4). ✓

All three conditions hold, so f is **continuous** at $x = 2$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ba điều kiện liên tục phải **đồng thời** đúng: (1) $f(c)$ xác định; (2) giới hạn tại c tồn tại; (3) giới hạn đó **bằng** $f(c)$. Chỉ cần một điều kiện sai là hàm gián đoạn tại c . Đây chính là "phiên bản chặt chẽ" của ba loại gián đoạn vừa học: removable thường vi phạm điều kiện (1) hoặc (3); jump và infinite vi phạm điều kiện (2).

1.10.2 Continuity over an interval and at endpoints

A function is continuous on an **open interval** (a, b) if it is continuous at every point inside that interval. Continuity on a **closed interval** $[a, b]$ additionally requires appropriate one-sided behavior at the two endpoints, since a two-sided limit cannot even be discussed there (there is no "outside" the interval to approach from).

Continuity on a closed interval

f is continuous on $[a, b]$ if: f is continuous at every point of the open interval (a, b) ; **and** f is *right-continuous* at a , meaning $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$; **and** f is *left-continuous* at b , meaning $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$.

Ví dụ mẫu • Continuity on a closed interval

Explain why $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ is continuous on the closed interval $[-2, 2]$.

On the open interval $(-2, 2)$, f is a composition of the continuous function $4 - x^2$ (positive there) with the continuous square-root function, so f is continuous at every interior point by direct substitution. At the left endpoint $x = -2$, only the right-hand limit makes sense (there is no domain to the left of -2): $\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 = f(-2)$, so f is right-continuous at -2 . At the right endpoint $x = 2$, only the left-hand limit makes sense: $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4} = 0 = f(2)$, so f is left-continuous at 2 . All requirements are satisfied, so f is continuous on $[-2, 2]$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Liên tục trên khoảng **mở** (a, b) : chỉ cần liên tục tại mọi điểm bên trong. Liên tục trên đoạn **đóng** $[a, b]$: cần thêm liên tục **một phía** tại hai đầu mút — liên tục phải tại a (vì không có gì bên trái a để so sánh) và liên tục trái tại b (vì không có gì bên phải b). Đây là điểm học sinh hay bỏ sót khi xét các hàm có miền xác định giới hạn, ví dụ hàm căn.

(!) Lỗi thường gặp: Khi kiểm tra tính liên tục tại một điểm nối (breakpoint) của hàm từng khúc, một lỗi rất phổ biến là chỉ tính giới hạn từ **một phía** rồi kết luận vội. Luôn phải kiểm tra **cả hai** giới hạn một phía, xác nhận chúng bằng nhau, rồi **mới** so sánh với $f(c)$. Bỏ sót một phía có thể khiến ta kết luận sai một hàm không liên tục là liên tục (nếu tình cờ chỉ phía đã kiểm tra khớp với $f(c)$), hoặc ngược lại.

1.11 Removing Discontinuities

When a function has a **removable** discontinuity at $x = c$ — meaning $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ exists even though $f(c)$ is undefined or wrong — a new function can be built that agrees with f everywhere except at c , and is assigned the value of the limit exactly at c . This new function is continuous at c ; informally, we say the discontinuity has been “removed.” This is precisely why this type of discontinuity earns the name *removable* — unlike jump or infinite discontinuities, which no single redefinition of one point could ever fix.

Ví dụ mẫu · Removing a discontinuity

The function $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 3}$ is undefined at $x = 3$. Find the value k such that defining $f(3) = k$ produces a function that is continuous at $x = 3$.

Factor the numerator: $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$, so for $x \neq 3$,

$$f(x) = \frac{(x - 2)(x - 3)}{x - 3} = x - 2.$$

Then $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3 - 2 = 1$. For the redefined function to be continuous at $x = 3$, condition (3) of the continuity definition requires $f(3)$ to equal this limit, so $k = 1$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

“Khử” một gián đoạn nghĩa là **định nghĩa lại đúng một giá trị** $f(c)$ sao cho nó bằng giới hạn $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ đã tính được — khi đó hàm mới thỏa cả ba điều kiện liên tục tại c . Kỹ thuật luôn giống nhau: rút gọn biểu thức (thường bằng phân tích nhân tử) để tìm giới hạn, rồi gán giá trị đó cho $f(c)$.

1.12 Infinite Limits and Vertical Asymptotes

When $f(x)$ grows without bound as x approaches c from one or both sides, we write $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$ (or $-\infty$). Strictly speaking, this limit still “does not exist” as a finite number — but the $\pm\infty$ notation is far more informative than simply saying DNE, since it describes precisely *how* the function fails to settle down.

Vertical asymptotes

The line $x = c$ is a **vertical asymptote** of f if at least one of $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$ or $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$ is $+\infty$ or $-\infty$. For a rational function $\frac{p(x)}{q(x)}$ in lowest terms, vertical asymptotes occur exactly at the real zeros of $q(x)$ (points where the denominator vanishes but the numerator does not).

If $p(x)$ and $q(x)$ share a common factor that vanishes at $x = c$ (so the fraction is *not* in lowest terms there), that zero of the denominator produces a removable discontinuity instead of a vertical asymptote – exactly the situation analyzed algebraically in the factoring technique earlier in this chapter. Always cancel common factors first; only the zeros of the denominator that *survive* cancellation give genuine vertical asymptotes.

To determine the *sign* of an infinite one-sided limit, examine the sign of the numerator and the sign of the denominator separately as x approaches c from that side, then apply the usual division sign rules.

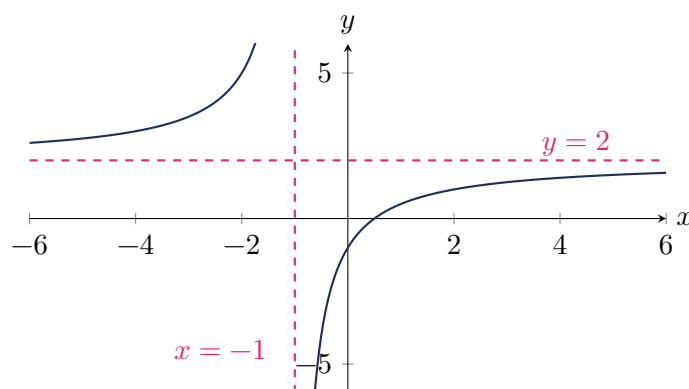
Ví dụ mẫu · Vertical asymptote sign analysis

Analyze $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{x-4}$ and $\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3}{x-4}$.

The numerator is the constant $3 > 0$ throughout. As $x \rightarrow 4^-$ (e.g., $x = 3.99$), the denominator $x - 4 \rightarrow 0^-$ (a small negative number), so $\frac{3}{x-4} \rightarrow \frac{3}{0^-} = -\infty$. As $x \rightarrow 4^+$ (e.g., $x = 4.01$), the denominator $x - 4 \rightarrow 0^+$ (a small positive number), so $\frac{3}{x-4} \rightarrow \frac{3}{0^+} = +\infty$. Thus

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3}{x-4} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3}{x-4} = +\infty,$$

and $x = 4$ is a vertical asymptote across which the function's sign flips from negative to positive.



$f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$: a vertical asymptote at $x = -1$ (denominator zero, numerator $-3 \neq 0$ there), with $f(x) \rightarrow +\infty$ as $x \rightarrow -1^-$ and $f(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow -1^+$; and a horizontal asymptote $y = 2$, approached as $x \rightarrow \pm\infty$ (discussed in the next section).

(!) Lỗi thường gặp: Xác định **dấu** của giới hạn vô cực một phía là bước dễ sai nhất. Cách an toàn nhất: chọn một giá trị x cụ thể, rất gần c về đúng phía đang xét (ví dụ $x = 3.99$ cho $x \rightarrow 4^-$), thế vào và xem **dấu** của tử và mẫu riêng biệt – đừng suy luận "chạy" trong đầu. Một lỗi thường gặp là mặc định cả hai giới hạn một phía tại cùng một tiệm cận đứng phải **cùng dấu**; trong ví dụ trên, dấu đổi từ $-\infty$ sang $+\infty$ ngay tại $x = 4$.

1.13 Limits at Infinity and Horizontal Asymptotes

A different question asks what happens to $f(x)$ as x itself grows without bound, in either the positive or negative direction. We write $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ (or $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$) to mean $f(x)$ gets arbitrarily close to the finite number L as x increases (or decreases) without bound. When such a limit exists, the line $y = L$ is a **horizontal asymptote** of f , describing the function's long-run **end behavior**.

Two different uses of ∞

It is easy to conflate two independent ideas that both involve the symbol ∞ . An **infinite limit** (previous section) asks what happens to the *output* $f(x)$ as the input x approaches a specific, finite number c — this is behavior in the vertical direction, near a vertical asymptote. A **limit at infinity** asks what happens to the output $f(x)$ as the *input* x itself grows without bound — this is behavior in the horizontal direction, far to the left or right, near a horizontal asymptote. A single function can have vertical asymptotes, horizontal asymptotes, both, or neither; the two questions are answered by entirely different reasoning, and neither implies the other.

1.13.1 End behavior of rational functions

For a rational function $\frac{p(x)}{q(x)}$, end behavior is governed entirely by comparing the degree n of the numerator $p(x)$ to the degree m of the denominator $q(x)$; dividing numerator and denominator by the highest power of x present makes the pattern clear.

End behavior of rational functions. Let $n = \deg p$, $m = \deg q$.

- If $n < m$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$; horizontal asymptote $y = 0$.
- If $n = m$: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m}$, the ratio of the leading coefficients; horizontal asymptote $y = \frac{a_n}{b_m}$.
- If $n > m$: the limit is $+\infty$ or $-\infty$ (no finite value); **there is no horizontal asymptote**.

Ví dụ mẫu · End behavior of rational functions

Evaluate each limit and identify the horizontal asymptote, if any. (a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x^2-4}$. (b)

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2-5x+1}{6x^2+x-7}$. (c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3-1}{2x^2+5}$.

(a) Numerator degree 1 < denominator degree 2. Dividing every term by x^2 : $\frac{2/x + 1/x^2}{1 - 4/x^2} \rightarrow \frac{0+0}{1-0} = 0$. Horizontal asymptote $y = 0$.

(b) Both degrees equal 2. Dividing every term by x^2 : $\frac{3 - 5/x + 1/x^2}{6 + 1/x - 7/x^2} \rightarrow \frac{3-0+0}{6+0-0} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Horizontal asymptote $y = \frac{1}{2}$.

(c) Numerator degree 3 > denominator degree 2. The numerator dominates: as $x \rightarrow \infty$, $\frac{x^3-1}{2x^2+5} \approx \frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2} \rightarrow \infty$. The limit is $+\infty$; there is no horizontal asymptote.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hàm phân thức, so sánh bậc tử (n) và bậc mẫu (m): $n < m \Rightarrow$ tiệm cận ngang $y = 0$; $n = m \Rightarrow y = \frac{a_n}{b_m}$ (tỉ số hệ số bậc cao nhất); $n > m \Rightarrow$ không có tiệm cận ngang (hàm tăng/giảm không giới hạn). Mẹo chứng minh: chia cả tử và mẫu cho lũy thừa bậc cao nhất của x ở mẫu, mọi số hạng dạng $\frac{1}{x^k}$ ($k > 0$) sẽ tiến về 0 khi $x \rightarrow \pm\infty$.

1.13.2 End behavior of functions built from exponentials

Exponential functions dominate polynomials at infinity in a way that produces distinctive end behavior. The key facts are $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$ and $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. For a ratio built from exponentials, divide through by the fastest-growing exponential term present, exactly as with rational functions.

Ví dụ mẫu · End behavior with exponentials

Evaluate $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5e^x - 3}{2e^x + 7}$ and $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5e^x - 3}{2e^x + 7}$.

As $x \rightarrow \infty$: divide numerator and denominator by e^x (the dominant term):

$$\frac{5e^x - 3}{2e^x + 7} = \frac{5 - 3e^{-x}}{2 + 7e^{-x}}.$$

As $x \rightarrow \infty$, $e^{-x} \rightarrow 0$, so this ratio $\rightarrow \frac{5 - 0}{2 + 0} = \frac{5}{2}$.

As $x \rightarrow -\infty$: here $e^x \rightarrow 0$ directly, so substitute $e^x = 0$ into the original expression:

$$\frac{5(0) - 3}{2(0) + 7} = \frac{-3}{7}.$$

So $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5e^x - 3}{2e^x + 7} = \frac{5}{2}$ while $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5e^x - 3}{2e^x + 7} = -\frac{3}{7}$ — **two different** horizontal asymptotes, one for each direction.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hàm dựng từ e^x , dùng $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = +\infty$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. Kỹ thuật giống hàm phân thức: chia cho số hạng e^x chiếm ưu thế nhất (khi $x \rightarrow \infty$) hoặc thay trực tiếp $e^x \rightarrow 0$ (khi $x \rightarrow -\infty$). Điểm khác biệt quan trọng so với hàm phân thức: một hàm dựng từ e^x hoàn toàn có thể có **hai tiệm cận ngang khác nhau** — một khi $x \rightarrow +\infty$ và một khi $x \rightarrow -\infty$ — trong khi hàm phân thức (khi có tiệm cận ngang) luôn cho cùng một giá trị ở cả hai phía.

(!) Lỗi thường gặp: Đừng nhầm lẫn tiệm cận ngang với tiệm cận đứng: đồ thị **không bao giờ** chạm hoặc vượt qua tiệm cận **đứng** (vì hàm không xác định tại đó), nhưng đồ thị **hoàn toàn có thể** chạm hoặc cắt ngang qua tiệm cận **ngang** tại một vài điểm hữu hạn — tiệm cận ngang chỉ mô tả hành vi khi $x \rightarrow \pm\infty$, không phải một "ranh giới cấm" trên toàn miền xác định. Ví dụ $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ có tiệm cận ngang $y = 0$ nhưng cắt trục hoành ($y = 0$) vô số lần.

The table below collects the end-behavior rules from this section into a single quick-reference summary.

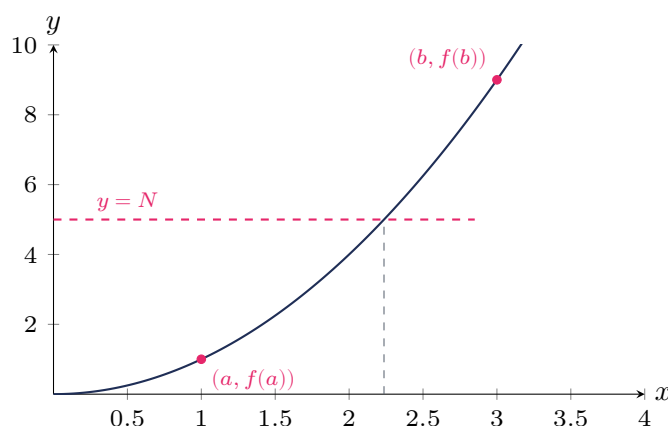
Function type	As $x \rightarrow +\infty$	As $x \rightarrow -\infty$
Rational, $n < m$	$\rightarrow 0$	$\rightarrow 0$ (same on both sides)
Rational, $n = m$	$\rightarrow a_n/b_m$	$\rightarrow a_n/b_m$ (same on both sides)
Rational, $n > m$	$\rightarrow +\infty$ or $-\infty$ (no HA)	$\rightarrow +\infty$ or $-\infty$ (no HA)
Built from e^x	determined by the dominant e^x term	substitute $e^x \rightarrow 0$ directly

1.14 The Intermediate Value Theorem

Continuity has a powerful geometric consequence: the graph of a continuous function cannot “skip over” any y -value between two of its outputs – to get from one height to another, a continuous curve must pass through every height in between.

Intermediate Value Theorem (IVT). If f is continuous on the closed interval $[a, b]$, and N is any number between $f(a)$ and $f(b)$, then there exists at least one $c \in (a, b)$ such that $f(c) = N$.

Geometrically, if you draw a horizontal line $y = N$ at any height strictly between $f(a)$ and $f(b)$, that line must cross the graph of f at least once somewhere between $x = a$ and $x = b$ – continuity leaves no way to jump over it. It is essential to understand what the IVT does *not* say: it **guarantees the existence** of at least one such c , but it does not say how many such points exist (there could be several), and it gives no method for actually **locating** c exactly.



$f(x) = x^2$ on $[a, b] = [1, 3]$: $f(1) = 1$ and $f(3) = 9$. Since $N = 5$ lies between 1 and 9, IVT guarantees some $c \in (1, 3)$ with $f(c) = 5$; indeed $c = \sqrt{5} \approx 2.236$.

Ví dụ mẫu · Using the Intermediate Value Theorem

(a) Show that $f(x) = x^3 - x - 1$ has at least one real root in the interval $(1, 2)$.

f is a polynomial, so it is continuous everywhere, in particular on $[1, 2]$. Evaluate the endpoints:

$$f(1) = 1 - 1 - 1 = -1, \quad f(2) = 8 - 2 - 1 = 5.$$

Since $f(1) = -1 < 0 < 5 = f(2)$, the value $N = 0$ lies between $f(1)$ and $f(2)$. By the IVT, there exists $c \in (1, 2)$ with $f(c) = 0$ – that is, a root of f in $(1, 2)$. (The IVT confirms a root exists but does not tell us its exact value.)

(b) A tank of water is heated over 10 minutes; its temperature $T(t)$ (in $^{\circ}\text{C}$) is a continuous function of time $t \in [0, 10]$, with $T(0) = 20$ and $T(10) = 310$. Explain why the water must, at some moment, have had a temperature of exactly 150°C .

T is continuous on $[0, 10]$ (given), and $N = 150$ satisfies $T(0) = 20 < 150 < 310 = T(10)$. By the IVT, there exists some $t \in (0, 10)$ with $T(t) = 150$ – the water’s temperature must have passed through 150°C at some instant, even though we cannot say exactly when from

this information alone.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý Giá trị Trung gian (IVT) nói rằng: nếu f liên tục trên $[a, b]$, thì với **mọi** giá trị N nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(c) = N$. Về hình học: đường cong liên tục không thể "nhảy qua" một độ cao nào đó mà không cắt ngang nó. Điều quan trọng cần nhớ: IVT chỉ **đảm bảo sự tồn tại** của c – không cho biết có bao nhiêu điểm c như vậy, và không cho cách **tìm** ra giá trị c chính xác.

1.15 Problem Bank

Bài tập luyện tập

A ball's height is $h(t) = -16t^2 + 64t + 5$ feet, t in seconds. Find the average velocity of the ball on the interval $[1, 3]$.

Lời giải chi tiết

$h(1) = -16 + 64 + 5 = 53$ and $h(3) = -16(9) + 64(3) + 5 = -144 + 192 + 5 = 53$. Average velocity $= \frac{h(3) - h(1)}{3 - 1} = \frac{53 - 53}{2} = \frac{0}{2} = 0$ ft/s. The ball's heights at $t = 1$ and $t = 3$ happen to coincide (the parabola is symmetric about its vertex at $t = 2$), so despite rising and falling in between, its net average rate of change over $[1, 3]$ is exactly 0.

Bài tập luyện tập

For $s(t) = t^3 - 3t$, the instantaneous velocity at $t = 2$, found as $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(2+h) - s(2)}{h}$, equals:

(A) 2

(C) 9

(B) 6

(D) 12

Lời giải chi tiết

$s(2) = 8 - 6 = 2$. Expand $s(2+h) = (2+h)^3 - 3(2+h) = 8 + 12h + 6h^2 + h^3 - 6 - 3h = 2 + 9h + 6h^2 + h^3$. So

$$\frac{s(2+h) - s(2)}{h} = \frac{9h + 6h^2 + h^3}{h} = 9 + 6h + h^2 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 9.$$

(C).

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 0 \\ x^2 - 1, & x \geq 0 \end{cases}$. Find $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ and $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, and state whether $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ exists.

Lời giải chi tiết

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 1) = 2(0) + 1 = 1$. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 1) = 0 - 1 = -1$. Since $1 \neq -1$, the one-sided limits disagree, so $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ does not exist.

Bài tập luyện tập

Suppose $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5$ and $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 5$, but $f(3) = 2$. Which statement is true?

- (A) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ does not exist (C) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$
(B) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ (D) f is continuous at $x = 3$

Lời giải chi tiết

Since both one-sided limits exist and agree ($5 = 5$), the two-sided limit exists and equals 5, regardless of $f(3)$. (C). Note that f is not continuous at $x = 3$, since $f(3) = 2 \neq 5 = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ – this is a removable discontinuity, so (D) is false.

Bài tập luyện tập

Estimate $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$ using a table of values at $x = 2.9, 2.99, 2.999, 3.001, 3.01$, then confirm your estimate algebraically.

Lời giải chi tiết

Algebraically, $x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$, so for $x \neq 3$, $\frac{x^3 - 27}{x - 3} = x^2 + 3x + 9$. The table values are: $f(2.9) = 8.41 + 8.7 + 9 = 26.11$; $f(2.99) \approx 26.9101$; $f(2.999) \approx 26.9910$; $f(3.001) \approx 27.0090$; $f(3.01) \approx 27.0901$ – clearly approaching 27. Algebraically, $x^2 + 3x + 9 \rightarrow 9 + 9 + 9 = 27$ as $x \rightarrow 3$, confirming $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = 27$.

Bài tập luyện tập

Suppose $\lim_{x \rightarrow 5} p(x) = 4$ and $\lim_{x \rightarrow 5} q(x) = 13$. Find $\lim_{x \rightarrow 5} [p(x)q(x) + 5]$ and $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{q(x) - p(x)}$.

Lời giải chi tiết

By the product and sum laws: $\lim_{x \rightarrow 5} [p(x)q(x) + 5] = (4)(13) + 5 = 52 + 5 = 57$. By the difference and power laws: $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{q(x) - p(x)} = \sqrt{13 - 4} = \sqrt{9} = 3$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 1}$ by direct substitution.

- (A) $\frac{11}{5}$ (C) 2
(B) $\frac{5}{11}$ (D) 11

Lời giải chi tiết

The function is a quotient of polynomials, continuous at $x = 2$ since $2^2 + 1 = 5 \neq 0$. Substitute directly: $\frac{8 + 4 - 1}{4 + 1} = \frac{11}{5}$. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 4}$.

Lời giải chi tiết

Factor: $\frac{(x+2)(x+3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x+3}{x-2}$ for $x \neq -2$. Substitute $x = -2$: $\frac{-2+3}{-2-2} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 3x - 4}$.

(A) $\frac{8}{5}$

(C) 0

(B) $\frac{5}{8}$

(D) DNE

Lời giải chi tiết

Factor: $\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+1)} = \frac{x+4}{x+1}$ for $x \neq 4$. Substitute $x = 4$: $\frac{8}{5}$. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$.

Lời giải chi tiết

Multiply by the conjugate $\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}$: $\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)} = \frac{1}{\sqrt{x}+3}$ for $x \neq 9$. Substitute $x = 9$: $\frac{1}{3+3} = \frac{1}{6}$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+x} - \frac{1}{3}}{x}$.

Lời giải chi tiết

Combine: $\frac{1}{3+x} - \frac{1}{3} = \frac{3 - (3+x)}{3(3+x)} = \frac{-x}{3(3+x)}$. Divide by x : $\frac{-1}{3(3+x)}$. Substitute $x = 0$: $\frac{-1}{9}$.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$. Then $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$

- (A) 1 (C) -2
(B) DNE (D) 0

Lời giải chi tiết

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3(1) - 2 = 1$. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^2 = 1$. Both equal 1, so the limit is 1. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{\sin(2x)}$.

Lời giải chi tiết

Rewrite as $\frac{\sin(7x)}{7x} \cdot \frac{7x}{2x} \cdot \frac{2x}{\sin(2x)}$. As $x \rightarrow 0$, the first and last factors each $\rightarrow 1$, leaving $\frac{7x}{2x} = \frac{7}{2}$.
So the limit is $\frac{7}{2}$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(3x)}{x}$.

- (A) 0 (C) $\frac{1}{3}$
(B) 3 (D) DNE

Lời giải chi tiết

Write $\frac{1 - \cos(3x)}{x} = 3 \cdot \frac{1 - \cos(3x)}{3x}$. As $x \rightarrow 0$, letting $u = 3x \rightarrow 0$, $\frac{1 - \cos u}{u} \rightarrow 0$, so the whole expression $\rightarrow 3 \cdot 0 = 0$. (A).

Bài tập luyện tập

Suppose $5 - x^2 \leq f(x) \leq 5 + x^2$ for all x near 0. Find $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, and name the theorem used.

Lời giải chi tiết

Both bounding functions satisfy $\lim_{x \rightarrow 0} (5 - x^2) = 5$ and $\lim_{x \rightarrow 0} (5 + x^2) = 5$. Since $f(x)$ is trapped between them near 0, the Squeeze (Sandwich) Theorem guarantees $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 5$.

Bài tập luyện tập

A table of values for $r(x) = x^2 + 5$ near $x = 2$ gives $r(1.9) = 8.61$, $r(1.99) = 8.9601$, $r(2.01) = 9.0401$, $r(2.1) = 9.41$. (a) Estimate $\lim_{x \rightarrow 2} r(x)$ from the table. (b) Confirm analytically. (c) Is r continuous at $x = 2$? Justify using the three-condition definition.

Lời giải chi tiết

(a) The table values approach 9 from both sides, so the estimate is $\lim_{x \rightarrow 2} r(x) \approx 9$.

(b) r is a polynomial, continuous everywhere, so $\lim_{x \rightarrow 2} r(x) = r(2) = 4 + 5 = 9$ by direct substitution – matching the table.

(c) Yes. $r(2) = 9$ is defined (condition 1); $\lim_{x \rightarrow 2} r(x) = 9$ exists (condition 2); and this limit equals $r(2) = 9$ (condition 3). All three conditions hold, so r is continuous at $x = 2$.

Bài tập luyện tập

Classify the discontinuity of $w(x) = \frac{x+5}{x^2-25}$ at (a) $x = 5$ and (b) $x = -5$.

Lời giải chi tiết

Factor the denominator: $x^2 - 25 = (x - 5)(x + 5)$.

(a) At $x = 5$: the numerator $x + 5 = 10 \neq 0$ while the denominator $\rightarrow 0$, so $w(x) \rightarrow \pm\infty$ – an **infinite discontinuity** (vertical asymptote) at $x = 5$.

(b) At $x = -5$: both numerator and denominator vanish, and the common factor cancels: $w(x) = \frac{x+5}{(x-5)(x+5)} = \frac{1}{x-5}$ for $x \neq -5$, giving a finite limit $\lim_{x \rightarrow -5} w(x) = \frac{1}{-10} = -\frac{1}{10}$, while $w(-5)$ itself is undefined – a **removable discontinuity** at $x = -5$.

Bài tập luyện tập

Let $m(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. At $x = 0$, m has:

(A) A removable discontinuity

(C) An infinite discontinuity

(B) A jump discontinuity

(D) No discontinuity – m is continuous at 0

Lời giải chi tiết

For $x < 0$, $\frac{|x|}{x} = \frac{-x}{x} = -1$; for $x > 0$, $\frac{|x|}{x} = \frac{x}{x} = 1$. So $\lim_{x \rightarrow 0^-} m(x) = -1$ and $\lim_{x \rightarrow 0^+} m(x) = 1$: both finite but unequal. (B).

Bài tập luyện tập

A function q satisfies $\lim_{x \rightarrow -1^-} q(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} q(x) = 3$, and $q(-1) = -2$. What is true at $x = -1$?

(A) q is continuous there

(C) q has a removable discontinuity

(B) q has a jump discontinuity

(D) $\lim_{x \rightarrow -1} q(x)$ does not exist

Lời giải chi tiết

The one-sided limits agree ($3 = 3$), so the two-sided limit exists: $\lim_{x \rightarrow -1} q(x) = 3$ — this rules out (B) and (D). But $q(-1) = -2 \neq 3$, so condition (3) of continuity fails and q is *not* continuous — this rules out (A). Since the limit exists but disagrees with the function value, this is exactly a **removable discontinuity**. (C).

Bài tập luyện tập

Explain why $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ is continuous on the closed interval $[-2, 2]$, addressing both endpoints.

Lời giải chi tiết

On $(-2, 2)$, f is a composition of the continuous functions $4 - x^2$ and $\sqrt{}$, hence continuous at every interior point by direct substitution. At $x = -2$, only $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \sqrt{4 - 4} = 0 = f(-2)$ needs to hold (right-continuity), and it does. At $x = 2$, only $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \sqrt{4 - 4} = 0 = f(2)$ needs to hold (left-continuity), and it does. Since f is continuous on the interior and one-sided continuous at each endpoint, f is continuous on $[-2, 2]$.

Bài tập luyện tập

Find the value of c that makes $g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}, & x \neq 2 \\ c, & x = 2 \end{cases}$ continuous at $x = 2$.

Lời giải chi tiết

Factor: $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$, so $g(x) = x + 3$ for $x \neq 2$. Then $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 2 + 3 = 5$. For continuity, c must equal this limit: $c = 5$.

Bài tập luyện tập

For $p(x) = \frac{-2}{x-1}$, the pair $(\lim_{x \rightarrow 1^-} p(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} p(x))$ is:

(A) $(+\infty, +\infty)$ (C) $(+\infty, -\infty)$ (B) $(-\infty, -\infty)$ (D) $(-\infty, +\infty)$ **Lời giải chi tiết**

As $x \rightarrow 1^-$ (e.g., $x = 0.99$), $x - 1 \rightarrow 0^-$, so $\frac{-2}{x-1} \rightarrow \frac{-2}{0^-} = +\infty$. As $x \rightarrow 1^+$ (e.g., $x = 1.01$), $x - 1 \rightarrow 0^+$, so $\frac{-2}{x-1} \rightarrow \frac{-2}{0^+} = -\infty$. (C).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 1}{2x^2 + 3x}$.

(A) $\frac{7}{2}$

(B) 0

(C) ∞

(D) $\frac{7}{3}$

Lời giải chi tiết

Degrees of numerator and denominator are both 2. Divide by x^2 : $\frac{7 - 1/x^2}{2 + 3/x} \rightarrow \frac{7}{2}$. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2x}{x^2 + 1}$ and state whether a horizontal asymptote exists.

Lời giải chi tiết

Numerator degree 3 > denominator degree 2, so no finite limit exists. Since $\frac{4x^3 - 2x}{x^2 + 1} \approx \frac{4x^3}{x^2} = 4x \rightarrow \infty$ as $x \rightarrow \infty$, the limit is $+\infty$, and there is **no horizontal asymptote**.

Bài tập luyện tập

Find all vertical and horizontal asymptotes of $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 - x - 6}$, and identify any removable discontinuity (hole).

Lời giải chi tiết

Factor: numerator $2x^2 - 8 = 2(x - 2)(x + 2)$; denominator $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$. The common factor $(x + 2)$ cancels:

$$f(x) = \frac{2(x - 2)(x + 2)}{(x - 3)(x + 2)} = \frac{2(x - 2)}{x - 3} \quad (x \neq -2).$$

At $x = -2$: this factor canceled, so there is a **removable discontinuity** (a hole), not a vertical asymptote, at $\left(-2, \frac{2(-4)}{-5}\right) = \left(-2, \frac{8}{5}\right)$. At $x = 3$: the denominator vanishes but the numerator does not ($2(3 - 2) = 2 \neq 0$), so $x = 3$ is a genuine **vertical asymptote**. For the horizontal asymptote, both the original numerator and denominator have degree 2, so the ratio of leading coefficients gives $y = \frac{2}{1} = 2$ (confirmed by dividing the simplified form: $\frac{2(x - 2)}{x - 3} \rightarrow \frac{2x}{x} = 2$ as $x \rightarrow \pm\infty$). **Summary:** vertical asymptote $x = 3$; horizontal asymptote $y = 2$; hole at $\left(-2, \frac{8}{5}\right)$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 + e^x}{1 - e^x}$.

(A) 3

(B) -3

(C) 1

(D) 0

Lời giải chi tiết

As $x \rightarrow -\infty$, $e^x \rightarrow 0$. Substituting: $\frac{3+0}{1-0} = 3$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Show that $f(x) = x^5 - 3x^2 + 1$ has at least one real root in $(0, 1)$.

Lời giải chi tiết

f is a polynomial, continuous on $[0, 1]$. $f(0) = 0 - 0 + 1 = 1 > 0$. $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1 < 0$. Since $f(0) = 1$ and $f(1) = -1$ have opposite signs, $N = 0$ lies between them, so by the IVT there exists $c \in (0, 1)$ with $f(c) = 0$ – a root of f in $(0, 1)$.

Bài tập luyện tập

A rock's temperature $T(t)$ (in $^{\circ}\text{C}$) is continuous on $[0, 10]$ minutes, with $T(0) = 20$ and $T(10) = 310$. Which of the following *must* be true by the Intermediate Value Theorem?

- (A) $T(t) = 20$ for some $t \in (0, 10)$ (C) T is increasing on $[0, 10]$
 (B) $T(t) = 150$ for some $t \in (0, 10)$ (D) $T(5) = 165$

Lời giải chi tiết

Since 150 lies strictly between $T(0) = 20$ and $T(10) = 310$, and T is continuous on $[0, 10]$, the IVT guarantees some $t \in (0, 10)$ with $T(t) = 150$. **(B)**. Choice (A) is not guaranteed (the temperature need not return to 20); (C) is not guaranteed (IVT says nothing about monotonicity); (D) is not guaranteed (IVT does not pinpoint where c occurs, nor that it is the midpoint average).

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 6}{x - 3}, & x < 3 \\ k, & x = 3 \\ -x + 8, & x > 3 \end{cases}$. (a) Simplify the piece for $x < 3$ and find $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$. (b) Find $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$. (c) Find the value of k that makes f continuous at $x = 3$. (d) Using this k , is f continuous on all of $\mathbb{R}$? Explain.

Lời giải chi tiết

- (a) $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, so for $x < 3$, $f(x) = x + 2$. Then $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3 + 2 = 5$.
 (b) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x + 8) = -3 + 8 = 5$.
 (c) Both one-sided limits equal 5, so the two-sided limit is 5; continuity at $x = 3$ requires $f(3) = k = 5$.
 (d) Yes. For $x < 3$, $f(x) = x + 2$ is a polynomial, continuous on $(-\infty, 3)$. For $x > 3$, $f(x) = -x + 8$ is a polynomial, continuous on $(3, \infty)$. At $x = 3$, with $k = 5$, all three continuity conditions hold as shown in (c). Since f is continuous on each piece and matches up seamlessly at the one breakpoint, f is continuous on all of $\mathbb{R}$.

Bài tập luyện tập

Let $g(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ m, & x = 1 \end{cases}$. (a) Find the value of m that removes the discontinuity at $x = 1$.

(b) Using that value of m , use the Intermediate Value Theorem to show that $g(x) = 2$ has a solution in $(0, 1)$, and verify this solution algebraically.

Lời giải chi tiết

(a) Factor: $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, so for $x \neq 1$, $g(x) = x^2 + x + 1$. Then $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 1 + 1 + 1 = 3$, so $m = 3$ removes the discontinuity. With this choice, $g(x) = x^2 + x + 1$ for every real x — a polynomial, continuous everywhere.

(b) $g(0) = 0 + 0 + 1 = 1$ and $g(1) = 1 + 1 + 1 = 3$. Since g is continuous on $[0, 1]$ and $N = 2$ satisfies $1 < 2 < 3$, the IVT guarantees some $c \in (0, 1)$ with $g(c) = 2$. *Verification:* solve $x^2 + x + 1 = 2 \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0$, giving $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. The positive root $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.618$ indeed lies in $(0, 1)$, confirming the IVT's guarantee.

Differentiation: Definition and Fundamental Properties

Mục tiêu Unit: Định nghĩa tốc độ thay đổi trung bình (thương sai phân, hệ số góc cát tuyến) và tốc độ thay đổi tức thời (đạo hàm tại một điểm, hệ số góc tiếp tuyến) thông qua giới hạn; các ký hiệu đạo hàm (Leibniz, Lagrange, Newton) và cách ước lượng đạo hàm từ bảng số liệu hoặc đồ thị; mối quan hệ giữa tính khả vi và tính liên tục, cùng bốn dạng điểm không khả vi (góc nhọn, điểm nhọn/cusp, tiếp tuyến đứng, gián đoạn); quy tắc lũy thừa (kể cả số mũ âm, phân số); quy tắc tổng–hiệu–nhân hằng số; đạo hàm của e^x và $\ln x$; chứng minh đạo hàm $\sin x$, $\cos x$ từ định nghĩa giới hạn; quy tắc tích (product rule) và quy tắc thương (quotient rule); đạo hàm của $\tan x$, $\cot x$, $\sec x$, $\csc x$.

2.1 Average and Instantaneous Rates of Change

2.1.1 The difference quotient and secant lines

Suppose f is a function defined on an interval containing two distinct points a and b . The **average rate of change** of f over $[a, b]$ measures how much the output changes per unit of input, on average, across that interval:

$$\text{average rate of change} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

This ratio is called the **difference quotient**. Geometrically, the two points $(a, f(a))$ and $(b, f(b))$ both lie on the graph of f , and the line joining them is called a **secant line** (from the Latin *secare*, "to cut" – it cuts through the curve at two points). The difference quotient $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ is exactly the slope of that secant line, since slope is "rise over run" and the rise is $f(b) - f(a)$ while the run is $b - a$.

The difference quotient

For any two distinct points a, b in the domain of f ,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

is simultaneously (i) the **average rate of change** of f on $[a, b]$, and (ii) the **slope of the secant line** through $(a, f(a))$ and $(b, f(b))$. If f represents position as a function of time, this quantity is the **average velocity** on $[a, b]$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Thương sai phân $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ chính là **tốc độ thay đổi trung bình** của f trên đoạn $[a, b]$, đồng thời cũng là **hệ số góc của đường thẳng cát tuyến** nối hai điểm $(a, f(a))$ và $(b, f(b))$ trên đồ thị. Nếu f là hàm vị trí theo thời gian, đại lượng này chính là **vận tốc trung bình**. Ghi nhớ: "trung bình" ở đây có nghĩa là ta chỉ nhìn vào hai điểm đầu–cuối của khoảng, không quan tâm hàm số biến thiên như thế nào ở giữa khoảng đó.

Ví dụ mẫu · Average rate of change as a secant slope

Let $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Find the average rate of change of f on $[1, 4]$, and give the equation of the secant line through the corresponding two points.

Compute the two function values: $f(1) = 1 - 2 + 3 = 2$ and $f(4) = 16 - 8 + 3 = 11$.

$$\text{average rate of change} = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{11 - 2}{3} = \frac{9}{3} = 3.$$

The secant line passes through $(1, 2)$ with slope 3: $y - 2 = 3(x - 1)$, i.e. $y = 3x - 1$. This line crosses the parabola at exactly the two points $x = 1$ and $x = 4$ and nowhere else between them.

2.1.2 From secant to tangent: the derivative at a point

The average rate of change depends on the choice of two points, but many questions in science and engineering – “how fast is this car going *right now*?”, “how fast is the tumor growing *at this instant*?” – ask about a rate of change at a single instant. To capture this, fix the first point at a and let the second point slide toward a . Write the second point as $a + h$, where h is a small (possibly negative) number representing the horizontal distance between the two points. The difference quotient becomes

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

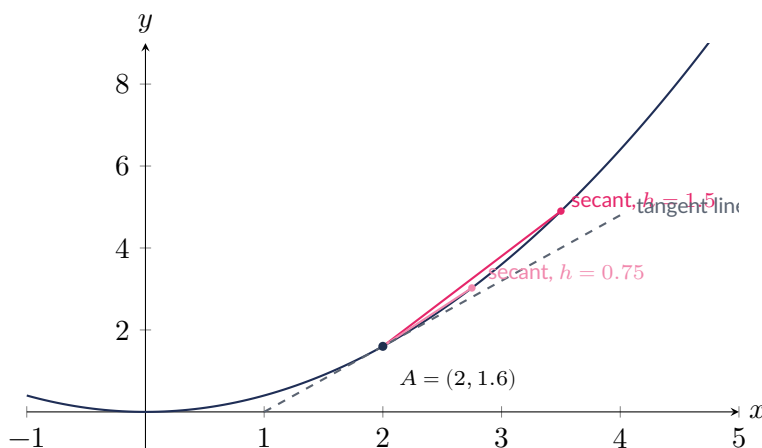
and as $h \rightarrow 0$ this secant line's slope approaches the slope of a limiting line called the **tangent line** at $(a, f(a))$ – the line that just “touches” the curve at that one point and best approximates it locally. This limiting slope is the **derivative of f at a** , written $f'(a)$:

Definition of the derivative at a point.

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (\text{equivalently, } f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}).$$

When this limit exists (and is finite), f is said to be **differentiable** at a , and $f'(a)$ is simultaneously the **instantaneous rate of change** of f at a and the **slope of the tangent line** to $y = f(x)$ at $x = a$.

The second form, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, is the same limit written with $x = a + h$ (so $h = x - a$ and $h \rightarrow 0 \iff x \rightarrow a$); the two are algebraically interchangeable, and either may be more convenient depending on the problem.



For $f(x) = 0.4x^2$ at $a = 2$: the secant with $h = 1.5$ has slope $\frac{f(3.5) - f(2)}{1.5} = \frac{4.9 - 1.6}{1.5} = 2.2$; the secant with $h = 0.75$ has slope $\frac{f(2.75) - f(2)}{0.75} = \frac{3.025 - 1.6}{0.75} = 1.9$. As $h \rightarrow 0$ these slopes approach the tangent slope $f'(2) = 1.6$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nếu đạo hàm là "hệ số góc của cát tuyến khi hai điểm tiến sát lại gần nhau", thì về bản chất ta đang lấy **giới hạn** của thương sai phân khi $h \rightarrow 0$. Đại lượng $f'(a)$ vừa là **tốc độ thay đổi tức thời** tại $x = a$ (ví dụ: vận tốc tức thời nếu f là vị trí), vừa là **hệ số góc của tiếp tuyến** tại điểm $(a, f(a))$. Hình vẽ minh họa: khi h giảm dần ($h = 1.5 \rightarrow h = 0.75 \rightarrow \dots \rightarrow 0$), đường cát tuyến "xoay dần" và tiến sát tới đường tiếp tuyến – hệ số góc cát tuyến $2.2 \rightarrow 1.9 \rightarrow \dots \rightarrow 1.6$.

Ví dụ mẫu · Derivative from the limit definition, then the tangent line

Let $f(x) = x^2$. (a) Use the limit definition to find a general formula for $f'(a)$. (b) Evaluate $f'(3)$. (c) Find the equation of the tangent line to $y = x^2$ at $x = 3$.

(a) By definition,

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h}.$$

Factor h out of the numerator and cancel (valid since $h \neq 0$ throughout the limit process):

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2a + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a.$$

(b) Substituting $a = 3$: $f'(3) = 2(3) = 6$.

(c) The point of tangency is $(3, f(3)) = (3, 9)$ and the slope is $f'(3) = 6$, so the tangent line is

$$y - 9 = 6(x - 3) \implies y = 6x - 9.$$

2.2 Derivative Notation and Numerical Estimation

2.2.1 Leibniz, Lagrange, and Newton notation

Three notations for the derivative are in common use, and it is essential to read all three fluently.

Lagrange notation: $f'(x)$, read "f prime of x"; higher derivatives $f''(x)$, $f'''(x)$, ...

Leibniz notation: $\frac{dy}{dx}$ or $\frac{d}{dx}[f(x)]$, emphasizing the derivative as a ratio of infinitesimal changes; the value at $x = a$ is written $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a}$.

Newton notation: a dot over the variable, $\dot{y}$ or $\dot{s}(t)$, used almost exclusively for derivatives with respect to *time* in physics and mechanics (e.g., if $s(t)$ is position, $\dot{s}(t)$ is velocity).

All three notations denote the exact same object; $f'(a) = \left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \dot{y}(a)$ whenever $y = f(x)$. Leibniz notation is especially convenient later for the chain rule and for related-rates problems, because it visually tracks which variable is changing with respect to which.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ba ký hiệu đạo hàm phổ biến: **Lagrange** ($f'(x)$ – gọn, hay dùng khi làm việc với hàm số trừu tượng); **Leibniz** ($\frac{dy}{dx}$ – hữu ích khi cần thấy rõ biến số nào đang thay đổi theo biến số nào, đặc biệt trong các bài liên quan đến tốc độ liên hệ sau này); **Newton** (dấu chấm trên đầu biến, $\dot{y}$ – chỉ dùng cho đạo hàm theo *thời gian* trong vật lý, ví dụ $\dot{s}(t)$ là vận tốc). Cả ba chỉ là ba cách viết khác nhau của cùng một đại lượng.

2.2.2 Estimating derivatives from tables and graphs

When f is known only through a table of sampled values (not a formula), the derivative at an interior point can be estimated using a **symmetric (central) difference quotient** — averaging the secant slope just before and just after the point — which is generally more accurate than a one-sided estimate:

$$f'(a) \approx \frac{f(a + \Delta) - f(a - \Delta)}{2\Delta}.$$

At an endpoint of the table, only a **one-sided difference quotient** (forward or backward) is available.

Ví dụ mẫu · Estimating a derivative from a table of values

A bacterial colony is measured every 2 hours; $P(t)$ is the population in thousands.

t (hours)	0	2	4	6	8
$P(t)$ (thousands)	12	18	29	45	68

Estimate (a) $P'(4)$, (b) $P'(0)$, and (c) $P'(8)$.

(a) $t = 4$ is an interior point, so use the central difference quotient with the neighboring data at $t = 2$ and $t = 6$:

$$P'(4) \approx \frac{P(6) - P(2)}{6 - 2} = \frac{45 - 18}{4} = \frac{27}{4} = 6.75 \text{ thousand/hour.}$$

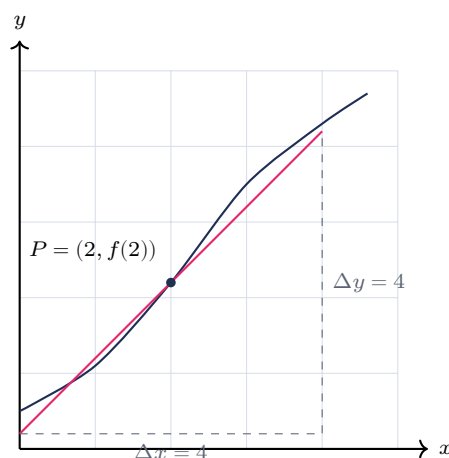
(b) $t = 0$ is the left endpoint of the table, so only a forward difference is available:

$$P'(0) \approx \frac{P(2) - P(0)}{2 - 0} = \frac{18 - 12}{2} = 3 \text{ thousand/hour.}$$

(c) $t = 8$ is the right endpoint, so only a backward difference is available:

$$P'(8) \approx \frac{P(8) - P(6)}{8 - 6} = \frac{68 - 45}{2} = \frac{23}{2} = 11.5 \text{ thousand/hour.}$$

When f is given only as a **graph**, $f'(a)$ can be estimated by sketching the tangent line at $x = a$ as accurately as possible and reading its slope from two clearly identifiable points on that line (ideally where it crosses grid lines).



Estimating $f'(2)$ graphically: the tangent line drawn at P crosses grid points at $(0, 0.2)$ and $(4, 4.2)$, giving slope

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4.2 - 0.2}{4 - 0} = \frac{4}{4} = 1, \text{ so } f'(2) \approx 1.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi hàm số chỉ được cho dưới dạng **bảng số liệu**, cách ước lượng đạo hàm chính xác nhất tại một điểm *nằm giữa* bảng là dùng **thương sai phân đối xứng (central difference)** — lấy hai điểm cách đều hai bên rồi chia cho tổng khoảng cách; còn tại hai đầu bảng, ta buộc phải dùng thương sai phân **một phía**. Khi hàm số chỉ được cho dưới dạng **đồ thị**, ta ước lượng $f'(a)$ bằng cách vẽ tiếp tuyến tại điểm đó càng chính xác càng tốt, rồi đọc hệ số góc $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ từ hai điểm rõ ràng trên đường tiếp tuyến đó (tốt nhất là các điểm cắt lưới ô vuông).

2.3 Differentiability and Continuity

2.3.1 Differentiability implies continuity

There is a precise logical relationship between differentiability and continuity, and it runs in only one direction.

Theorem: differentiability implies continuity

If f is differentiable at a , then f is continuous at a .

Proof. Suppose $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ exists as a finite number. To prove continuity at a , it suffices to show $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, i.e., $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = 0$. For $x \neq a$, algebraically rewrite:

$$f(x) - f(a) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a).$$

Now take the limit as $x \rightarrow a$ of both sides. The right-hand side is a product of two quantities that both have limits as $x \rightarrow a$: the first factor tends to $f'(a)$ (by hypothesis), and the second factor $(x - a)$ tends to 0. By the product rule for limits,

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Hence $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, so f is continuous at a . ■

Crucially, the **converse is false**: a function can be continuous at a point yet fail to be differentiable there. Four distinct geometric situations cause this failure.

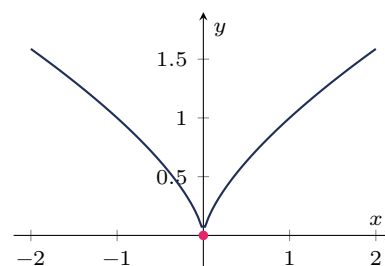
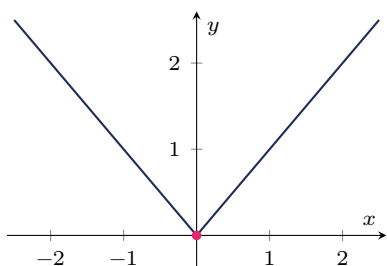
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

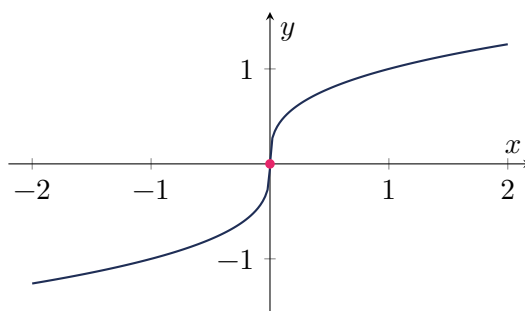
Chứng minh trên cho thấy: nếu giới hạn $f'(a)$ tồn tại (hữu hạn), thì bắt buộc $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ — tức là hàm liên tục tại a . Nói cách khác, **khả vi là điều kiện "mạnh" hơn liên tục**: muốn khả vi, hàm phải liên tục và còn phải "trơn" (không gấp khúc, không nhọn, không có tiếp tuyến đứng). Chiều ngược lại **KHÔNG** đúng — sẽ có bốn dạng minh họa cụ thể ngay sau đây, mỗi dạng đều là một hàm liên tục nhưng không khả vi tại một điểm.

2.3.2 Where derivatives fail to exist

Type	Example (at $x = 0$)	Behavior of $f'(x)$ near 0	Continuous?
Corner	$f(x) = x $	left/right slopes are finite but unequal (-1 vs. $+1$)	Yes
Cusp	$f(x) = x^{2/3}$	slopes $\rightarrow -\infty$ from the left, $\rightarrow +\infty$ from the right (infinite, opposite signs)	Yes
Vertical tangent	$f(x) = x^{1/3}$	slopes $\rightarrow +\infty$ from <i>both</i> sides (infinite, same sign)	Yes
Discontinuity	jump at a point	f itself has no limit at the point, so the difference quotient cannot converge	No



Left: $f(x) = |x|$ – a **corner** at $x = 0$ (finite but unequal one-sided slopes). Right: $f(x) = x^{2/3}$ – a **cusp** at $x = 0$ ($f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} \rightarrow \mp\infty$).



$f(x) = \sqrt[3]{x}$: a **vertical tangent** at $x = 0$. Since $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \rightarrow +\infty$ from *both* sides, the curve is still increasing smoothly through the origin – no corner, just an infinitely steep (vertical) tangent line.

Ví dụ mẫu · Verifying each type of non-differentiability

(a) Corner. For $f(x) = |x - 2| + 1$, check differentiability at $x = 2$. For $x < 2$, $f(x) = -(x - 2) + 1 = 3 - x$, so $f'(x) = -1$; for $x > 2$, $f(x) = (x - 2) + 1 = x - 1$, so $f'(x) = 1$. The left-hand derivative (-1) and right-hand derivative (1) disagree, so $f'(2)$ does not exist, even though f is continuous at $x = 2$ (both pieces give $f(2) = 1$).

(b) Cusp. For $f(x) = x^{2/3}$, $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3}$ for $x \neq 0$. As $x \rightarrow 0^+$, $x^{-1/3} \rightarrow +\infty$, so $f'(x) \rightarrow +\infty$. As $x \rightarrow 0^-$, $x^{1/3}$ is negative (e.g. at $x = -0.001$, $x^{1/3} \approx -0.1$), so $x^{-1/3} \rightarrow -\infty$, giving $f'(x) \rightarrow -\infty$. The one-sided slopes both blow up but with *opposite* signs – a cusp.

(c) Vertical tangent. For $f(x) = x^{1/3}$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} = \frac{1}{3x^{2/3}}$. Since $x^{2/3} \geq 0$ always and $\rightarrow 0^+$ as $x \rightarrow 0$ from either side, $f'(x) \rightarrow +\infty$ from *both* sides – the same (infinite) sign, so the graph has a genuine vertical tangent rather than a corner.

(d) Discontinuity. Let $f(x) = x + 1$ for $x < 1$ and $f(x) = x^2$ for $x \geq 1$. As $x \rightarrow 1^-$, $f(x) \rightarrow 2$, but $f(1) = 1^2 = 1$. Since $2 \neq 1$, f has a jump discontinuity at $x = 1$; by the contrapositive of

the theorem above, a function that is not continuous at a point cannot be differentiable there.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bốn dạng "gãy" khả vi cần phân biệt rõ: **góc nhọn (corner)** — hai hệ số góc trái/phải hữu hạn nhưng khác nhau (như $|x|$); **điểm nhọn (cusp)** — hai hệ số góc trái/phải đều tiến ra vô cực nhưng trái dấu (như $x^{2/3}$, tạo hình chữ V nhọn); **tiếp tuyến đứng (vertical tangent)** — hai hệ số góc trái/phải đều tiến ra vô cực cùng dấu (như $x^{1/3}$, đồ thị vẫn "trơn" và tăng liên tục, chỉ là tiếp tuyến thẳng đứng); và **điểm gián đoạn** — hàm còn chưa liên tục nên chắc chắn không thể khả vi. Phân biệt cusp và tiếp tuyến đứng thường gây nhầm lẫn nhất: cùng là "vô cực" nhưng cusp có hai dấu khác nhau còn tiếp tuyến đứng có cùng dấu.

(!) **Lỗi thường gặp:** "Hàm liên tục thì chắc chắn khả vi" là một suy luận **sai chiều**. Định lý chỉ đảm bảo chiều *khả vi* $\Rightarrow$ *liên tục*, không có chiều ngược lại. Hàm $f(x) = |x|$ là ví dụ kinh điển: liên tục tại $x = 0$ (đồ thị không đứt đoạn) nhưng không khả vi tại đó (đồ thị có góc nhọn, hệ số góc trái $= -1 \neq$ hệ số góc phải $= 1$). Khi được yêu cầu chứng minh một hàm **KHÔNG** khả vi, đừng chỉ chứng minh nó liên tục — điều đó không đủ.

2.4 The Power Rule and Linearity of Differentiation

2.4.1 The Power Rule

Power Rule. For any real number n for which both sides are defined,

$$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}.$$

As special cases, $\frac{d}{dx}[c] = 0$ for any constant c (an $n = 0$ -type function with a flat graph — slope 0 everywhere), and $\frac{d}{dx}[x] = 1$ (an $n = 1$ -type function whose graph already is a line of slope 1).

Derivation for a positive integer n . Using the limit definition and the algebraic factorization $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + a^{n-1})$ (a sum of exactly n terms):

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \dots + a^{n-1}).$$

As $x \rightarrow a$, every one of the n terms in the sum tends to a^{n-1} , so the whole sum tends to $n \cdot a^{n-1}$. Hence $f'(a) = na^{n-1}$, as claimed.

Extension to negative integers. Write $n = -m$ with $m > 0$, so $f(x) = x^{-m} = 1/x^m$. Then

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{x^m} - \frac{1}{a^m}}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{a^m - x^m}{x^m a^m (x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[-\frac{x^m - a^m}{x - a} \cdot \frac{1}{x^m a^m} \right] = -(ma^{m-1}) \cdot \frac{1}{a^{2m}} = -ma^{-m-1}, \end{aligned}$$

using the positive-integer result already proved. This matches nx^{n-1} with $n = -m$: $-mx^{-m-1}$.

Extension to fractional exponents. A fully general proof for arbitrary rational (or irrational) n requires implicit differentiation or logarithmic differentiation, developed in the next chapter; for now, the pattern can be verified directly for specific cases. For instance, with $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$,

rationalizing the difference quotient gives

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h) - a}{h(\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}},$$

which is exactly $\frac{1}{2}a^{-1/2}$ — matching the power rule with $n = \frac{1}{2}$. The power rule is used freely for every real exponent from this point forward.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc lũy thừa $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ áp dụng cho **mọi số mũ thực** n — nguyên dương, nguyên âm, phân số, thậm chí vô tỉ — miễn là cả x^n và x^{n-1} có nghĩa. Với n nguyên dương, ta chứng minh chặt chẽ bằng cách khai triển $x^n - a^n$ thành nhân tử; với n nguyên âm, dùng lại kết quả đó cộng với biến đổi đại số của phân thức; với n phân số, phép chứng minh tổng quát cần đến đạo hàm hàm ẩn (chương sau), nhưng có thể kiểm chứng trực tiếp từng trường hợp cụ thể — ví dụ $\sqrt{x} = x^{1/2}$ bằng cách nhân liên hợp. Điểm mấu chốt: quy tắc lũy thừa chỉ áp dụng khi **biến số nằm ở cơ số** (như x^n), không áp dụng cho hàm mũ có cơ số hằng số (như 2^x) — hai dạng này có công thức đạo hàm hoàn toàn khác nhau.

Ví dụ mẫu · Power rule with negative and fractional exponents

Differentiate each function.

(a) $f(x) = x^5$ (b) $f(x) = x^{-3}$ (c) $f(x) = x^{2/5}$ (d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ (e) $f(x) = \frac{1}{x^4}$

(a) $f'(x) = 5x^4$.

(b) $f'(x) = -3x^{-4} = -\frac{3}{x^4}$.

(c) $f'(x) = \frac{2}{5}x^{2/5-1} = \frac{2}{5}x^{-3/5}$.

(d) Rewrite $\sqrt[3]{x^2} = x^{2/3}$ first: $f'(x) = \frac{2}{3}x^{2/3-1} = \frac{2}{3}x^{-1/3}$.

(e) Rewrite $\frac{1}{x^4} = x^{-4}$ first: $f'(x) = -4x^{-5} = -\frac{4}{x^5}$.

(!) Lỗi thường gặp: Không được nhầm x^n (cơ số biến, số mũ hằng — dùng quy tắc lũy thừa) với a^x (cơ số hằng, số mũ biến — hàm số mũ, có công thức đạo hàm khác hẳn). Ví dụ: $\frac{d}{dx}(2^x) \neq x \cdot 2^{x-1}$ — áp dụng quy tắc lũy thừa vào 2^x là **sai**, vì biến số x nằm ở số mũ chứ không phải cơ số. (Đạo hàm đúng của a^x cần kỹ thuật khác, sẽ gặp sau khi học đạo hàm hàm hợp.) Luôn hỏi: "biến số x đang nằm ở cơ số hay số mũ?" trước khi chọn công thức.

2.4.2 Sum, difference, and constant multiple rules

Differentiation is **linear**: it distributes over addition/subtraction and pulls constant factors outside.

Linearity of differentiation. If f and g are differentiable and c is a constant,

$$[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x), \quad [c f(x)]' = c f'(x).$$

Proof (sum rule). By the limit definition,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right].\end{aligned}$$

Since both limits on the right exist (as $f'(x)$ and $g'(x)$), the limit of the sum equals the sum of the limits: $f'(x) + g'(x)$. The difference rule follows identically with a minus sign, and for the constant multiple rule,

$$\frac{d}{dx}[c f(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c f(x+h) - c f(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = c f'(x). \quad \blacksquare$$

Combined with the power rule, linearity lets any polynomial be differentiated term by term.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm có tính **tuyến tính**: đạo hàm của một tổng bằng tổng các đạo hàm, đạo hàm của một hiệu bằng hiệu các đạo hàm, và hằng số nhân có thể "kéo ra ngoài" phép lấy đạo hàm. Nhờ tính chất này, kết hợp với quy tắc lũy thừa, ta có thể lấy đạo hàm của **bất kỳ đa thức nào** chỉ bằng cách lấy đạo hàm từng số hạng một – đây là kỹ năng nền tảng được dùng lặp lại xuyên suốt cả môn học.

Ví dụ mẫu · Differentiating a polynomial term by term

Differentiate $p(x) = 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 - 7x + 9$, then evaluate $p'(1)$.

Apply linearity and the power rule to each term:

$$p'(x) = 3(4x^3) - 5(3x^2) + 2(2x) - 7(1) + 0 = 12x^3 - 15x^2 + 4x - 7.$$

Then $p'(1) = 12 - 15 + 4 - 7 = -6$.

Ví dụ mẫu · Where the tangent line is horizontal

Find all points where the tangent line to $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$ is horizontal.

A horizontal tangent occurs exactly where $f'(x) = 0$. Differentiate:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1).$$

Setting $f'(x) = 0$ gives $x = 3$ or $x = -1$. Compute the corresponding y -values:

$$f(3) = 27 - 27 - 27 + 2 = -25, \quad f(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7.$$

The tangent line is horizontal at $(3, -25)$ and at $(-1, 7)$.

2.5 Derivatives of Exponential and Logarithmic Functions

The number $e \approx 2.71828$ can be characterized as the unique base for which the exponential function's growth rate exactly equals its own value; formally, e is defined so that

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \quad \left(\text{equivalently } e = \lim_{h \rightarrow 0} (1 + h)^{1/h} \right).$$

$$\frac{d}{dx}[e^x] = e^x, \quad \frac{d}{dx}[\ln x] = \frac{1}{x} \quad (x > 0).$$

Justification for e^x . By the limit definition,

$$\frac{d}{dx}[e^x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x,$$

where the constant factor e^x was pulled out of the limit (it does not depend on h), and the remaining limit equals 1 by the very definition of e above. This is what makes e^x special among exponential functions: it is literally its own derivative.

Justification for $\ln x$. By the limit definition and the logarithm law $\ln(x+h) - \ln x = \ln(1 + \frac{h}{x})$,

$$\frac{d}{dx}[\ln x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \frac{\ln(1 + \frac{h}{x})}{h/x}.$$

Substitute $u = h/x$ (so $u \rightarrow 0$ as $h \rightarrow 0$, for fixed $x \neq 0$):

$$= \frac{1}{x} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = \frac{1}{x} \cdot 1 = \frac{1}{x},$$

using the standard fact $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$, which is equivalent (by continuity of $\ln$) to the defining limit $e = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{1/u}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Số e được định nghĩa chính xác là cơ số khiến $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$ — nói cách khác, e^x là hàm mũ **duy nhất** mà tốc độ tăng trưởng tại mọi điểm đúng bằng giá trị của chính nó tại điểm đó ($(e^x)' = e^x$). Đây là lý do e^x xuất hiện tự nhiên trong mọi mô hình tăng trưởng/phân rã mũ. Đạo hàm của $\ln x$ ($= 1/x$) có thể suy ra trực tiếp từ định nghĩa giới hạn kết hợp với tính chất logarit, không cần đến quy tắc dây chuyền.

Ví dụ mẫu · Combining exponential and logarithmic derivatives

Let $f(x) = 3e^x - 4 \ln x + x^2$. Find $f'(x)$ and evaluate $f'(1)$.

Apply linearity term by term:

$$f'(x) = 3e^x - \frac{4}{x} + 2x.$$

At $x = 1$: $f'(1) = 3e - 4 + 2 = 3e - 2 \approx 6.155$.

2.6 Derivatives of the Sine and Cosine Functions

Two special trigonometric limits are needed to differentiate $\sin x$ and $\cos x$ from first principles:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0.$$

Derivation of $(\sin x)' = \cos x$. By the limit definition and the angle-addition identity $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$,

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h}.$$

Group the terms containing $\sin x$ together:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\sin x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} + \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} \right] = -\sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Derivation of $(\cos x)' = -\sin x$. By the same method, using $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[\cos x] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\cos x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \right] = -\cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x.\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dx}[\sin x] = \cos x, \quad \frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cả hai công thức $(\sin x)' = \cos x$ và $(\cos x)' = -\sin x$ đều được suy ra trực tiếp từ định nghĩa giới hạn của đạo hàm, kết hợp công thức cộng góc lượng giác và **hai giới hạn lượng giác đặc biệt**: $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ và $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - \cos h}{h} = 0$. Mẹo ghi nhớ dấu: đạo hàm của sin "giữ nguyên dấu" ra cos; đạo hàm của cos "đổi dấu" ra $-\sin$ — đây là điểm học sinh hay quên nhất (xem phần Lỗi thường gặp bên dưới).

Ví dụ mẫu · Differentiating a sine-cosine combination and its tangent line

Let $g(x) = 2 \sin x - 3 \cos x + 5$. Find $g'(x)$ and the equation of the tangent line to $y = g(x)$ at $x = 0$.

$$g'(x) = 2 \cos x - 3(-\sin x) = 2 \cos x + 3 \sin x.$$

At $x = 0$: $g(0) = 2(0) - 3(1) + 5 = 2$ and $g'(0) = 2(1) + 3(0) = 2$. The tangent line at $x = 0$ is

$$y - 2 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x + 2.$$

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi dấu kinh điển: $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$, **không phải** $+\sin x$. Học sinh thường nhớ nhầm vì sin và cos "trông giống nhau", nhưng chỉ có đạo hàm của $\cos x$ mang dấu trừ. Kiểm tra nhanh bằng đồ thị: tại $x = 0$, $\cos x$ đang *giảm* (đi qua đỉnh cực đại) nên đạo hàm phải âm — khớp với $-\sin(0^+) < 0$ ngay sau 0; nếu nhớ nhầm thành $+\sin x$ thì tại x hơi lớn hơn 0 sẽ cho giá trị dương, mâu thuẫn với việc hàm đang giảm.

2.7 The Product Rule

When differentiating a product of two functions, it is **not** true in general that $(uv)' = u'v'$. The correct rule is:

Product Rule. If $u = u(x)$ and $v = v(x)$ are both differentiable,

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

In words: derivative of the first, times the second, plus the first, times derivative of the second.

Derivation. By the limit definition, and adding and subtracting the intermediate term $u(x+h)v(x)$ in the numerator:

$$\begin{aligned}(uv)'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x)v(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x+h)v(x+h) - u(x+h)v(x) + u(x+h)v(x) - u(x)v(x)}{h}.\end{aligned}$$

Group and split into two limits:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[u(x+h) \cdot \frac{v(x+h) - v(x)}{h} \right] + \lim_{h \rightarrow 0} \left[v(x) \cdot \frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right] \\ &= u(x)v'(x) + v(x)u'(x), \end{aligned}$$

where $u(x+h) \rightarrow u(x)$ as $h \rightarrow 0$ because u is differentiable, hence continuous (the theorem proved earlier in this chapter). Rearranging gives $u'v + uv'$.

An intuitive picture: think of $u(x)$ and $v(x)$ as the side lengths of a rectangle, so $u(x)v(x)$ is its area. A small change h in x changes u by roughly $u'(x)h$ and v by roughly $v'(x)h$; the resulting change in area is approximately one thin strip of width $u'(x)h$ along one side plus one thin strip of width $v'(x)h$ along the other side (the tiny corner rectangle of area $u'(x)v'(x)h^2$ is negligible as $h \rightarrow 0$), giving $\Delta A \approx u'(x)v(x)h + u(x)v'(x)h$ – consistent with the formula after dividing by h .

For a product of **three** factors, apply the two-factor rule twice by treating uvw as $u \cdot (vw)$:

$$(uvw)' = u'(vw) + u(vw)' = u'vw + u(v'w + vw') = u'vw + uv'w + uvw'.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc tích: đạo hàm của *cái thứ nhất*, nhân *cái thứ hai*, cộng *cái thứ nhất* nhân đạo hàm của *cái thứ hai* – **tuyệt đối không** lấy tích của hai đạo hàm riêng lẻ ($u'v'$). Phần chứng minh dùng đúng kỹ thuật "cộng rồi trừ một số hạng trung gian" quen thuộc, và đặc biệt cần dùng lại kết quả "khả vi $\Rightarrow$ liên tục" đã chứng minh ở đầu chương để khẳng định $u(x+h) \rightarrow u(x)$. Với tích ba hàm số, chỉ cần áp dụng quy tắc tích hai lần liên tiếp (nhóm hai hàm cuối lại thành một "khối").

Ví dụ mẫu · Product rule with two factors

Differentiate $f(x) = (3x^2 + 1)(x^3 - 2x)$ using the product rule, and verify by expanding first.

Let $u = 3x^2 + 1$ (so $u' = 6x$) and $v = x^3 - 2x$ (so $v' = 3x^2 - 2$).

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' = 6x(x^3 - 2x) + (3x^2 + 1)(3x^2 - 2) \\ &= (6x^4 - 12x^2) + (9x^4 - 6x^2 + 3x^2 - 2) = 15x^4 - 15x^2 - 2. \end{aligned}$$

Check by expanding: $f(x) = 3x^5 - 6x^3 + x^3 - 2x = 3x^5 - 5x^3 - 2x$, so $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 - 2$ – the two methods agree.

Ví dụ mẫu · Product rule with three factors

Differentiate $g(x) = x \cdot e^x \cdot \cos x$.

Let $u = x$ ($u' = 1$), $v = e^x$ ($v' = e^x$), $w = \cos x$ ($w' = -\sin x$). Then

$$g'(x) = u'vw + uv'w + uvw' = e^x \cos x + xe^x \cos x - xe^x \sin x.$$

Factor out e^x :

$$g'(x) = e^x [(1+x) \cos x - x \sin x].$$

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi thường gặp nhất khi gặp tích của hai biểu thức chứa biến: học sinh vô tình lấy đạo hàm từng phần rồi nhân lại – tức là tính $u' \cdot v'$ thay vì $u'v + uv'$. Kiểm tra nhanh bằng phản ví dụ: với $u = v = x$, tích $uv = x^2$ có đạo hàm đúng là $2x$; nhưng "quy tắc sai"

$u'v' = 1 \cdot 1 = 1 \neq 2x$ – sai hoàn toàn (trừ tại điểm $x = \frac{1}{2}$, một sự trùng hợp số học, không phải quy luật). Bất cứ khi nào thấy **hai biểu thức chứa biến số nhân với nhau**, đó là tín hiệu phải dùng quy tắc tích.

2.8 The Quotient Rule

Quotient Rule. If $u = u(x)$ and $v = v(x)$ are differentiable and $v(x) \neq 0$,

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}.$$

Derivation from the product rule. Let $q(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, so that $u(x) = q(x)v(x)$. Differentiate both sides using the product rule (treating q as an unknown differentiable function for now):

$$u' = q'v + qv'.$$

Solve for q' :

$$q' = \frac{u' - qv'}{v} = \frac{u' - \frac{u}{v}v'}{v} = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

(multiplying the numerator's inner fraction by v/v to clear it). This matches the boxed formula. An equivalent derivation works directly from the limit definition using the same add-and-subtract technique as the product rule, and gives the identical result.

Ví dụ mẫu · Quotient rule

Let $h(x) = \frac{2x-1}{x^2+3}$. Find $h'(x)$ and evaluate $h'(2)$.

Let $u = 2x - 1$ ($u' = 2$), $v = x^2 + 3$ ($v' = 2x$).

$$h'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{2(x^2 + 3) - (2x - 1)(2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6 - 4x^2 + 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2x^2 + 2x + 6}{(x^2 + 3)^2}.$$

At $x = 2$: numerator $= -2(4) + 2(2) + 6 = -8 + 4 + 6 = 2$; denominator $= (4 + 3)^2 = 49$. So $h'(2) = \frac{2}{49}$.

Ví dụ mẫu · When to rewrite instead of using the full quotient rule

Differentiate $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Here the numerator is the constant $u = 1$ ($u' = 0$), so the quotient rule simplifies nicely with $v = x^2 + 1$ ($v' = 2x$):

$$f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2} = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Notice that $f(x)$ could also be viewed as $u \cdot v^{-1}$ with $u = 1$ and $v = x^2 + 1$; for a *numerator that is not constant*, rewriting $\frac{u}{v}$ as $u \cdot v^{-1}$ and differentiating with the product rule requires knowing how to differentiate $v^{-1} = (x^2 + 1)^{-1}$, which needs the derivative of a *composite function* (an "outer" power applied to an "inner" polynomial). That technique – the chain rule – is developed fully in the next chapter and will make expressions like this one even faster to

differentiate; for now, the quotient rule (or, as here, a simplified case of it) handles every such problem correctly.

(!) Lỗi thường gặp: Hai lỗi phổ biến với quy tắc thương: (1) **sai thứ tự trừ** – viết nhầm thành $uv' - u'v$ thay vì đúng $u'v - uv'$ (đổi thứ tự sẽ đổi dấu toàn bộ kết quả); (2) **quên bình phương mẫu số** – chỉ chia cho $v(x)$ thay vì $[v(x)]^2$. Mẹo ghi nhớ thứ tự: “đạo hàm tử nhân mẫu, trừ tử nhân đạo hàm mẫu” (như đọc từ trái sang phải của công thức) – luôn bắt đầu bằng $u'v$, không phải uv' .

2.9 Derivatives of the Other Trigonometric Functions

The remaining four trigonometric derivatives all follow from the quotient rule applied to the identities

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \csc x = \frac{1}{\sin x}.$$

Tangent. With $u = \sin x$ ($u' = \cos x$), $v = \cos x$ ($v' = -\sin x$):

$$(\tan x)' = \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x,$$

using the Pythagorean identity $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Cotangent. With $u = \cos x$ ($u' = -\sin x$), $v = \sin x$ ($v' = \cos x$):

$$(\cot x)' = \frac{-\sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x.$$

Secant. With $u = 1$ ($u' = 0$), $v = \cos x$ ($v' = -\sin x$):

$$(\sec x)' = \frac{0 \cdot \cos x - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} = \tan x \sec x.$$

Cosecant. With $u = 1$ ($u' = 0$), $v = \sin x$ ($v' = \cos x$):

$$(\csc x)' = \frac{0 \cdot \sin x - 1 \cdot \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\frac{\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x} = -\cot x \csc x.$$

Function	Derivative	Function	Derivative
$\sin x$	$\cos x$	$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\cos x$	$-\sin x$	$\sec x$	$\sec x \tan x$
$\tan x$	$\sec^2 x$	$\csc x$	$-\csc x \cot x$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cả bốn công thức đạo hàm còn lại ($\tan$, $\cot$, $\sec$, $\csc$) đều được suy ra bằng cách viết chúng dưới dạng thương của $\sin x$ và $\cos x$ rồi áp dụng quy tắc thương – không cần học thuộc lòng máy móc, chỉ cần nhớ **quy tắc thương** và **định nghĩa** của bốn hàm này ($\tan = \sin / \cos$, $\cot = \cos / \sin$, $\sec = 1 / \cos$, $\csc = 1 / \sin$) là có thể tự suy ra lại bất cứ lúc nào. Mẹo nhỏ: $\tan x$ và $\sec x$ đi cùng nhau trong công thức đạo hàm của nhau ($\sec^2 x$ và $\sec x \tan x$); tương tự $\cot x$ và $\csc x$ luôn xuất hiện có dấu trừ.

Ví dụ mẫu · Combining the product rule with the new trig derivatives

Let $f(x) = x \tan x - \sec x$. Find $f'(x)$ and evaluate $f'(0)$.

Apply the product rule to $x \tan x$ (with $u = x$, $u' = 1$, and $v = \tan x$, $v' = \sec^2 x$), then subtract the derivative of $\sec x$:

$$f'(x) = \tan x + x \sec^2 x - \sec x \tan x.$$

$\boxed{} \{ \boxed{} \}$
 $(x \tan x)'$

$\boxed{} \{ \boxed{} \}$
 $(\sec x)'$

At $x = 0$: $\tan 0 = 0$ and $\sec 0 = 1$, so $f'(0) = 0 + 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 0$.

Rules established so far.

Power: $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

Sine/Cosine:

$(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$

Tan/Cot: $\sec^2 x$, $-\csc^2 x$

Sum/diff/const. mult.:

$(f \pm g)' = f' \pm g'$, $(cf)' = cf'$

Product: $(uv)' = u'v + uv'$

Sec/Csc:

$\sec x \tan x$, $-\csc x \cot x$

Exp/Log: $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$

Quotient: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

2.10 Problem Bank

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = x^2 + 3x$. The average rate of change of f on $[2, 5]$ equals:

(A) 10

(C) 15

(B) 13

(D) 8

Lời giải chi tiết

$f(2) = 4 + 6 = 10$ and $f(5) = 25 + 15 = 40$. Average rate of change $= \frac{40 - 10}{5 - 2} = \frac{30}{3} = 10$. (A).

Bài tập luyện tập

A particle's position is $s(t) = t^3 - 4t^2 + 2t$ meters. Find its average velocity on $[1, 3]$.

Lời giải chi tiết

$s(1) = 1 - 4 + 2 = -1$ and $s(3) = 27 - 36 + 6 = -3$. Average velocity $= \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = \frac{-3 - (-1)}{2} = \frac{-2}{2} = -1$ m/s.

Bài tập luyện tập

Using the limit definition of the derivative, $f'(2)$ for $f(x) = x^2 + 1$ equals:

(A) 4

(C) 5

(B) 2

(D) 1

Lời giải chi tiết

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 + 1 - (a^2 + 1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2a + h) = 2a. \text{ At } a = 2: \\ f'(2) = 4. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Use the limit definition of the derivative to find $f'(x)$ for $f(x) = 3x^2 - 2x$.

Lời giải chi tiết

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 2(x+h) - (3x^2 - 2x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6xh + 3h^2 - 2h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (6x + 3h - 2) = 6x - 2. \end{aligned}$$

(Consistent with the power/linearity rules: $\frac{d}{dx}(3x^2) = 6x$ and $\frac{d}{dx}(-2x) = -2$.)

Bài tập luyện tập

The slope of the tangent line to $y = x^2 - 4x + 1$ at $x = 3$ is:

- (A) 2 (C) -2
(B) 6 (D) 4

Lời giải chi tiết

$$f'(x) = 2x - 4, \text{ so } f'(3) = 6 - 4 = 2. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find the equation of the tangent line to $f(x) = x^3 - 2x + 1$ at $x = -1$.

Lời giải chi tiết

$f(-1) = -1 - (-2) + 1 = 2$. $f'(x) = 3x^2 - 2$, so $f'(-1) = 3(1) - 2 = 1$. Tangent line:
 $y - 2 = 1(x - (-1)) = x + 1$, so $y = x + 3$.

Bài tập luyện tập

Given the table for $g(t)$: $t = 1, 2, 3, 4, 5$ with $g(t) = 5, 9, 15, 23, 33$. The best estimate of $g'(3)$ using a central difference quotient is:

- (A) 6
(B) 7
(C) 8
(D) 14

Lời giải chi tiết

$$g'(3) \approx \frac{g(4) - g(2)}{4 - 2} = \frac{23 - 9}{2} = \frac{14}{2} = 7. \text{ (B).}$$

Bài tập luyện tập

A smooth curve passes through $(0, 2)$, and the tangent line drawn at the point where $x = 1$ passes through the grid points $(-1, 1)$ and $(3, 5)$. Estimate $f'(1)$ and explain the reasoning.

Lời giải chi tiết

The slope of the drawn tangent line is $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{5 - 1}{3 - (-1)} = \frac{4}{4} = 1$. Since the tangent line's slope at the point of tangency equals the derivative there, $f'(1) \approx 1$.

Bài tập luyện tập

Which function fails to be differentiable at $x = 0$ specifically because of a *corner* (finite but unequal one-sided slopes), rather than a cusp or vertical tangent?

(A) $f(x) = x^{1/3}$

(C) $f(x) = x^{2/3}$

(B) $f(x) = |x|$

(D) $f(x) = \sqrt{x}$

Lời giải chi tiết

$|x|$ has left-hand slope -1 and right-hand slope $+1$ at $x = 0$ — both finite but unequal, the defining feature of a corner. ($x^{1/3}$ has a vertical tangent; $x^{2/3}$ has a cusp; $\sqrt{x}$ has a one-sided vertical tangent at its domain endpoint.) (B).

Bài tập luyện tập

Show that $f(x) = |x - 3|$ is continuous at $x = 3$ but not differentiable there.

Lời giải chi tiết

Continuity: $\lim_{x \rightarrow 3} |x - 3| = 0 = f(3)$, so f is continuous at $x = 3$.

Differentiability: for $x < 3$, $f(x) = 3 - x = -(x - 3)$, so $f'(x) = -1$; for $x > 3$, $f(x) = x - 3$, so $f'(x) = 1$. The left-hand derivative (-1) and right-hand derivative (1) are unequal, so $f'(3)$ does not exist — f has a corner at $x = 3$.

Bài tập luyện tập

The derivative of $f(x) = 4x^{3/2} - \frac{2}{x^3} + 7$ is:

(A) $6\sqrt{x} + \frac{6}{x^4}$

(C) $\frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{6}{x^4}$

(B) $6\sqrt{x} - \frac{6}{x^4}$

(D) $6\sqrt{x} + \frac{6}{x^4} + 7$

Lời giải chi tiết

$\frac{d}{dx}(4x^{3/2}) = 4 \cdot \frac{3}{2}x^{1/2} = 6\sqrt{x}$. Rewrite $-\frac{2}{x^3} = -2x^{-3}$: its derivative is $-2(-3)x^{-4} = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$. The constant 7 differentiates to 0. Sum: $f'(x) = 6\sqrt{x} + \frac{6}{x^4}$. (A). (Choice (D) is the classic error of forgetting that a constant term vanishes.)

Bài tập luyện tập

Differentiate $f(x) = \sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} - 5x$.

Lời giải chi tiết

Rewrite as $f(x) = x^{1/3} + x^{-1/2} - 5x$. Then

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} - \frac{1}{2}x^{-3/2} - 5.$$

Bài tập luyện tập

For $p(x) = 2x^4 - 3x^3 + x - 8$, the value of $p'(1)$ is:

- (A) 0 (C) -9
(B) 8 (D) 1

Lời giải chi tiết

$p'(x) = 8x^3 - 9x^2 + 1$, so $p'(1) = 8 - 9 + 1 = 0$. (A).

Bài tập luyện tập

Find all points where the tangent line to $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ is horizontal.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x - 2)(x + 1)$, zero at $x = 2$ and $x = -1$.

$$f(2) = 16 - 12 - 24 + 5 = -15, \quad f(-1) = -2 - 3 + 12 + 5 = 12.$$

Horizontal tangents occur at $(2, -15)$ and $(-1, 12)$.

Bài tập luyện tập

For $f(x) = 5e^x - 3 \ln x$, the value of $f'(1)$ is:

- (A) $5e - 3$ (C) $5 - 3e$
(B) $5e + 3$ (D) $5e - \frac{1}{3}$

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 5e^x - \frac{3}{x}$. At $x = 1$: $f'(1) = 5e - 3$. (A).

Bài tập luyện tập

Using the limit definition of the derivative and the fact $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$, show that $\frac{d}{dx}[e^x] = e^x$.

Lời giải chi tiết

$$\frac{d}{dx}[e^x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

The factor e^x does not depend on h , so it can be pulled outside the limit; the remaining limit equals 1 by the defining property of e .

Bài tập luyện tập

For $f(x) = 4 \sin x - \cos x$, the value of $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ is:

- (A) 1 (C) -1
(B) 4 (D) 0

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 4 \cos x + \sin x$. At $x = \frac{\pi}{2}$: $\cos \frac{\pi}{2} = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$, so $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 + 1 = 1$. (A).

Bài tập luyện tập

Using the limit definition and the two special trigonometric limits, derive $\frac{d}{dx}[\cos x] = -\sin x$.

Lời giải chi tiết

Using $\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$:

$$\frac{d}{dx}[\cos x] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[-\cos x \cdot \frac{1 - \cos h}{h} - \sin x \cdot \frac{\sin h}{h} \right].$$

Since $\frac{1 - \cos h}{h} \rightarrow 0$ and $\frac{\sin h}{h} \rightarrow 1$ as $h \rightarrow 0$, this limit equals $-\cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x$.

Bài tập luyện tập

For $f(x) = (x^2 + 1)(3x - 2)$, the value of $f'(2)$ is:

- (A) 31 (C) 34
(B) 28 (D) 22

Lời giải chi tiết

Product rule: $f'(x) = 2x(3x - 2) + (x^2 + 1)(3) = 6x^2 - 4x + 3x^2 + 3 = 9x^2 - 4x + 3$. At $x = 2$: $9(4) - 8 + 3 = 36 - 8 + 3 = 31$. (A). (Check by expansion: $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$, so $f'(x) = 9x^2 - 4x + 3$ – matches.)

Bài tập luyện tập

Differentiate $g(x) = x^2 \cdot e^x \cdot \cos x$ and write the result in fully factored form.

Lời giải chi tiết

With $u = x^2$ ($u' = 2x$), $v = e^x$ ($v' = e^x$), $w = \cos x$ ($w' = -\sin x$):

$$g'(x) = u'vw + uv'w + uvw' = 2xe^x \cos x + x^2 e^x \cos x - x^2 e^x \sin x.$$

Factor out xe^x :

$$g'(x) = xe^x [(2+x) \cos x - x \sin x].$$

Bài tập luyện tập

For $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, the value of $f'(0)$ is:

(A) 2

(C) -2

(B) 1

(D) 0.5

Lời giải chi tiết

Quotient rule with $u = x-1$ ($u' = 1$), $v = x+1$ ($v' = 1$): $f'(x) = \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$.

At $x = 0$: $f'(0) = \frac{2}{1} = 2$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Differentiate $h(x) = \frac{3x^2 - 1}{2x + 5}$.

Lời giải chi tiết

With $u = 3x^2 - 1$ ($u' = 6x$), $v = 2x + 5$ ($v' = 2$):

$$h'(x) = \frac{6x(2x+5) - (3x^2-1)(2)}{(2x+5)^2} = \frac{12x^2 + 30x - 6x^2 + 2}{(2x+5)^2} = \frac{6x^2 + 30x + 2}{(2x+5)^2}.$$

Bài tập luyện tập

For $f(x) = \tan x + \sec x$, the value of $f'(0)$ is:

(A) 1

(C) 2

(B) 0

(D) -1

Lời giải chi tiết

$f'(x) = \sec^2 x + \sec x \tan x$. At $x = 0$: $\sec 0 = 1$, $\tan 0 = 0$, so $f'(0) = 1 + 1 \cdot 0 = 1$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Differentiate $f(x) = x \cot x - \csc x$ and evaluate $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải chi tiết

Product rule on $x \cot x$: $\frac{d}{dx}(x \cot x) = \cot x + x(-\csc^2 x) = \cot x - x \csc^2 x$. Derivative of $-\csc x$ is $-(-\csc x \cot x) = \csc x \cot x$. So

$$f'(x) = \cot x - x \csc^2 x + \csc x \cot x.$$

At $x = \frac{\pi}{2}$: $\cot \frac{\pi}{2} = 0$, $\csc \frac{\pi}{2} = 1$, so $f'(\frac{\pi}{2}) = 0 - \frac{\pi}{2}(1) + 1(0) = -\frac{\pi}{2}$.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ ($x \neq 0$). Find $f'(x)$ in simplified form, and determine whether f is increasing or decreasing at $x = \pi$.

Lời giải chi tiết

Quotient rule with $u = \sin x$ ($u' = \cos x$), $v = x^2$ ($v' = 2x$):

$$f'(x) = \frac{x^2 \cos x - 2x \sin x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3} \quad (\text{dividing numerator and denominator by } x).$$

At $x = \pi$: $\cos \pi = -1$, $\sin \pi = 0$, so $f'(\pi) = \frac{\pi(-1) - 0}{\pi^3} = \frac{-\pi}{\pi^3} = -\frac{1}{\pi^2}$. Since $f'(\pi) < 0$, f is decreasing at $x = \pi$.

Bài tập luyện tập

A function is defined piecewise: $f(x) = x^2$ for $x \leq 1$ and $f(x) = 2x - 1$ for $x > 1$. Is f differentiable at $x = 1$?

- (A) Yes – both one-sided derivatives equal 2 (C) No – f is discontinuous at $x = 1$
 (B) No – it is a corner since the two pieces are different formulas (D) Cannot be determined without a graph

Lời giải chi tiết

Continuity: $\lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} (2x - 1) = 1$, and $f(1) = 1^2 = 1$ – all agree, so f is continuous at $x = 1$.

Differentiability: for $x < 1$, $f'(x) = 2x \rightarrow 2(1) = 2$; for $x > 1$, $f'(x) = 2$ (constant). Both one-sided derivatives equal 2, so f is differentiable at $x = 1$ with $f'(1) = 2$ – the two pieces join smoothly even though they are different formulas. (A). (This shows that a piecewise definition does not automatically create a corner; the one-sided derivatives must always be checked directly.)

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = x^3 e^x$. (a) Find $f'(x)$ using the product rule. (b) Find all x where the tangent line is horizontal, and give the corresponding points.

Lời giải chi tiết

(a) With $u = x^3$ ($u' = 3x^2$), $v = e^x$ ($v' = e^x$):

$$f'(x) = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(3 + x).$$

(b) Since $e^x \neq 0$ for all x , $f'(x) = 0$ exactly when $x^2(3 + x) = 0$, i.e. $x = 0$ or $x = -3$.

$$f(0) = 0, \quad f(-3) = (-27)e^{-3} = -27e^{-3}.$$

Horizontal tangents occur at $(0, 0)$ and $(-3, -27e^{-3})$.

Bài tập luyện tập

The following table gives values of a differentiable function $r(x)$: $x = 0, 1, 2, 3, 4$ with $r(x) = 2, 5, 9, 14, 20$. (a) Estimate $r'(2)$ using a central difference quotient. (b) Estimate $r'(0)$ using the best available one-sided difference quotient.

Lời giải chi tiết

(a) $r'(2) \approx \frac{r(3) - r(1)}{3 - 1} = \frac{14 - 5}{2} = \frac{9}{2} = 4.5.$

(b) Since $x = 0$ is the left endpoint, use the forward difference: $r'(0) \approx \frac{r(1) - r(0)}{1 - 0} = \frac{5 - 2}{1} = 3.$

Bài tập luyện tập

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h}$ equals:

(A) $\sin x$

(C) $\cos x$

(B) $-\sin x$

(D) $-\cos x$

Lời giải chi tiết

This limit is exactly the definition of $\frac{d}{dx}[\cos x]$, which was derived to equal $-\sin x$. (B).

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$ ($x \neq 0$). (a) Rewrite $f(x)$ as a sum of power functions and differentiate using the power and sum rules. (b) Verify your answer using the quotient rule. (c) Find the equation of the tangent line to $y = f(x)$ at $x = 1$.

Lời giải chi tiết

(a) $f(x) = \frac{x^2}{x} + \frac{1}{x} = x + x^{-1}$, so $f'(x) = 1 - x^{-2} = 1 - \frac{1}{x^2}.$

(b) Quotient rule with $u = x^2 + 1$ ($u' = 2x$), $v = x$ ($v' = 1$):

$$f'(x) = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2},$$

which matches part (a).

(c) $f(1) = \frac{1+1}{1} = 2$ and $f'(1) = 1 - 1 = 0$. Since the slope is 0, the tangent line is horizontal:
 $y = 2$.

Differentiation: Composite, Implicit, and Inverse Functions

Mục tiêu Unit: Quy tắc dây chuyền (chain rule) cho hàm hợp một lớp lẫn nhiều lớp, kể cả khi phối hợp với quy tắc tích và quy tắc thương; kỹ thuật đạo hàm hàm ẩn (implicit differentiation) để tìm y' và y'' từ một phương trình không giải được y theo x , gồm cả viết phương trình tiếp tuyến và xác định điểm có tiếp tuyến nằm ngang hoặc thẳng đứng; công thức đạo hàm hàm ngược tổng quát $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ và cách áp dụng từ bảng giá trị của f và f' ; đạo hàm của ba hàm lượng giác ngược cơ bản $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$; chiến lược lựa chọn đúng quy tắc phù hợp cho một biểu thức bất kỳ; và đạo hàm bậc cao (cấp hai, cấp ba, và quy luật tổng quát) của đa thức, hàm lượng giác, và hàm mũ.

The differentiation rules built up so far — the Power Rule, the Sum/Difference Rule, the Product Rule, and the Quotient Rule — handle functions written explicitly and directly in terms of x . This unit extends that toolkit in four directions: differentiating **composite functions** (one function plugged inside another) using the **Chain Rule**; differentiating relations that mix x and y **implicitly**, where y cannot be isolated as a single formula; differentiating **inverse functions**, both in general and for the standard inverse trigonometric functions; and computing derivatives of **higher order**. These four ideas — chain rule, implicit differentiation, inverse functions, and higher-order derivatives — are the machinery behind nearly every later application of the derivative, from related rates to curve sketching to optimization. Mastering these techniques introduces very little in the way of brand-new differentiation *formulas* — a short reference table holds all of them — so the real skill this unit builds is recognizing, quickly and reliably, which combination of rules a given expression calls for, and executing that combination without dropping a factor along the way.

3.1 The Chain Rule

A **composite function** $y = f(g(x))$ is built in two stages: the inner function g is applied to x first, and then the outer function f is applied to the result $g(x)$. Functions such as $\sin(x^2)$, $(3x - 7)^5$, $e^{\cos x}$, and $\sqrt{4 - x^2}$ are all composite functions of this kind — none of them is a sum, a plain product, or a simple power of x by itself. The **Chain Rule** is the differentiation rule for exactly this situation:

$$\frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Read this as “*outer times inner*.” Differentiate the outer function f , evaluated at the inner function $g(x)$ (leaving $g(x)$ completely untouched inside), and then multiply the result by the derivative of the inner function, $g'(x)$. This second factor matters because $g(x)$ is not simply x : as x changes, the inner function has its own rate of change, and that rate scales how quickly the whole composite output changes. Omitting this factor — differentiating only the outer layer and stopping — is the single most common error at this level of calculus.

Composite functions of this kind are not a mathematical curiosity — they are the rule rather than the exception whenever real quantities are modeled together. The temperature at a weather balloon’s location depends on its altitude, which itself changes with time; the area of a spreading oil slick depends on its radius, which itself changes with time; the volume of a melting snowball

depends on its side length, which itself changes with time. Every one of these is naturally written as one function of a second, time-dependent quantity — exactly the composite-function structure the Chain Rule is built to differentiate, and exactly the structure exploited later when studying related rates.

Writing $y = f(u)$ where $u = g(x)$ makes the same idea transparent in **Leibniz notation**:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

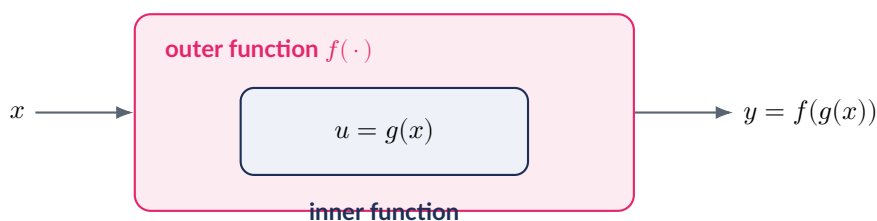
Although $\frac{dy}{du}$ and $\frac{du}{dx}$ are not literally fractions, this notation is a genuinely useful memory device: the “ du ” factors behave as though they cancel, leaving the overall rate of change of y with respect to x .

Chain Rule

For a composite function $y = f(g(x))$, writing $u = g(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Identify the outer function f and the inner function $u = g(x)$ first; differentiate the outer function at u (leaving u untouched), then multiply by $\frac{du}{dx}$.



The value x is substituted into the inner function g first; the result $u = g(x)$ is then substituted into the outer function f , producing $y = f(g(x))$. Differentiating undoes this in the same order, from the outside in.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc dây chuyền: lấy đạo hàm hàm NGOÀI (giữ nguyên hàm trong bên trong nó), rồi NHÂN với đạo hàm hàm TRONG. Luôn tự hỏi “đâu là hàm trong, đâu là hàm ngoài?” trước khi bắt đầu lấy đạo hàm. Ký hiệu Leibniz $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ tuy không phải phép chia phân số thật sự, nhưng là cách ghi nhớ trực quan và hữu ích: các du “triệt tiêu” nhau về mặt hình thức.

Ví dụ mẫu · Basic chain rule

Differentiate $y = (3x^2 - 5)^4$.

The outer function is $(\cdot)^4$ and the inner function is $u = 3x^2 - 5$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 4(3x^2 - 5)^3 \cdot \frac{d}{dx}[3x^2 - 5] \\ &= 4(3x^2 - 5)^3 \cdot 6x \\ &= 24x(3x^2 - 5)^3. \end{aligned}$$

Generalized Power Rule. A special case of the Chain Rule that appears constantly in practice: if $y = [g(x)]^n$ for a differentiable function g and a real exponent n , then

$$\frac{dy}{dx} = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x).$$

This is simply the ordinary Power Rule, $\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$, applied with the inner function $g(x)$ standing in for x — the extra factor $g'(x)$ is exactly what the Chain Rule contributes on top of the Power Rule.

The same pattern — “ordinary derivative formula, with an inner function $u = g(x)$ in place of x , times u' ” — applies to every basic differentiation formula already known, giving a compact chain-rule reference for the composite forms that appear most often:

$$\begin{array}{ll} \frac{d}{dx}[\sin u] = \cos u \cdot u' & \frac{d}{dx}[\cos u] = -\sin u \cdot u' \\ \frac{d}{dx}[\tan u] = \sec^2 u \cdot u' & \frac{d}{dx}[e^u] = e^u \cdot u' \\ \frac{d}{dx}[\ln u] = \frac{u'}{u} & \frac{d}{dx}[\sqrt{u}] = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \end{array}$$

(In every entry, $u = g(x)$ stands for an arbitrary differentiable inner function, and $u' = g'(x)$.)

3.1.1 Nested (Multi-Layer) Compositions

When a function is built from three or more layers of composition, apply the Chain Rule repeatedly, peeling off exactly one layer at a time, always from the outside in. For a triple composition $y = f(g(h(x)))$:

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

Each layer of composition contributes exactly one multiplicative factor — no layer, however deeply buried, may be skipped. More generally, for a composition of k layers, $y = f_1(f_2(f_3(\dots f_k(x)\dots)))$, the derivative is a product of exactly k factors, one contributed by each layer and each evaluated at the appropriate nested input — the same peeling process simply continues for as many layers as the expression actually has.

Ví dụ mẫu · Nested chain rule

Differentiate $y = [\sin(x^2 + 1)]^3$.

Three layers: outer $(\cdot)^3$, middle $\sin(\cdot)$, inner $x^2 + 1$.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3[\sin(x^2 + 1)]^2 \cdot \cos(x^2 + 1) \cdot \frac{d}{dx}[x^2 + 1] \\ &= 3\sin^2(x^2 + 1) \cos(x^2 + 1) \cdot 2x \\ &= 6x \sin^2(x^2 + 1) \cos(x^2 + 1). \end{aligned}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi có từ ba lớp hàm hợp trở lên, bóc từng lớp một từ NGOÀI vào TRONG, mỗi lớp nhân thêm một đạo hàm tương ứng. Đừng bỏ sót lớp trong cùng — đây là lỗi phổ biến nhất khi hàm hợp có nhiều tầng.

(!) Lỗi thường gặp: Writing $\frac{d}{dx} \sin(3x) = \cos(3x)$ leaves out the derivative of the inner function. The correct derivative is $\cos(3x) \cdot 3 = 3 \cos(3x)$. Every layer of a composite function contributes its own factor — never stop differentiating after handling just the outer function.

3.1.2 Combining the Chain Rule with the Product and Quotient Rules

A great many derivatives require more than one rule at once. Recognizing when this happens is mostly a matter of identifying the **outermost** operation, then checking whether any piece underneath it is itself a composite function. If the outermost operation is a **product** of two factors, apply the Product Rule, and apply the Chain Rule to any factor that is itself a composition. If the outermost operation is a **quotient**, apply the Quotient Rule the same way, checking the numerator and the denominator separately for hidden compositions.

In general, if $y = u(x) \cdot v(x)$ where $v(x) = h(k(x))$ is itself a composition, the Product Rule gives $y' = u'v + uv'$, and finding $v' = h'(k(x)) \cdot k'(x)$ is a separate Chain-Rule computation nested inside that larger derivative. The same logic applies when the composition sits in a quotient's numerator, its denominator, or both: differentiate each piece with whatever rule it individually needs, then assemble the pieces using the Product or Quotient Rule.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc tích và quy tắc thương KHÔNG thay thế quy tắc dây chuyền — chúng phối hợp với nhau. Khi áp dụng quy tắc tích/thương, nếu một thừa số (hoặc tử số/mẫu số) là hàm hợp, phải dùng thêm quy tắc dây chuyền để lấy đạo hàm riêng của thừa số đó, rồi mới thay vào công thức tích/thương.

Ví dụ mẫu · Chain rule with the product rule

Differentiate $y = x^3 \sin(2x)$.

Product rule with $u = x^3$, $v = \sin(2x)$; note $v' = 2 \cos(2x)$ by the chain rule.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= 3x^2 \sin(2x) + x^3 \cdot 2 \cos(2x) \\ &= 3x^2 \sin(2x) + 2x^3 \cos(2x). \end{aligned}$$

Ví dụ mẫu · Chain rule with the quotient rule

Differentiate $y = \frac{e^{2x}}{\cos(x^2)}$.

Quotient rule with $u = e^{2x}$, $v = \cos(x^2)$; note $u' = 2e^{2x}$ and $v' = -2x \sin(x^2)$, both by the chain rule.

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{2e^{2x} \cos(x^2) - e^{2x} (-2x \sin(x^2))}{\cos^2(x^2)} \\ &= \frac{2e^{2x} \cos(x^2) + 2xe^{2x} \sin(x^2)}{\cos^2(x^2)} \\ &= \frac{2e^{2x} [\cos(x^2) + x \sin(x^2)]}{\cos^2(x^2)}. \end{aligned}$$

Dividing each term in the bracket by $\cos^2(x^2)$ gives the equivalent factored form $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x} \sec(x^2) [1 + x \tan(x^2)]$.

3.2 Implicit Differentiation

Every function differentiated so far has been given **explicitly**: y isolated on one side of an equation, written directly as a formula in x . Many curves that matter, however, are described by an equation that mixes x and y together in a way that cannot be solved for y as a single formula — or that can only be solved by splitting into multiple awkward branches. The equation of a circle, $x^2 + y^2 = 25$, is one of the simplest examples: solving for y produces two separate branches, $y = \sqrt{25 - x^2}$ and $y = -\sqrt{25 - x^2}$, and messier relations such as $\sin(xy) = x + y^2$ cannot be solved for y in terms of elementary functions at all. Even when an equation *could* in principle be solved for y , doing so is sometimes needlessly painful; implicit differentiation finds $\frac{dy}{dx}$ directly from the original equation, without that detour.

Implicit differentiation sidesteps this problem entirely. Instead of solving for y first, treat y as an unspecified differentiable function of x — mentally write $y = y(x)$ — and differentiate *both sides* of the given equation with respect to x , term by term. Every term containing only x differentiates as usual. Every term containing y must be treated as a composite function of x , and therefore requires the Chain Rule, contributing a factor of y' (also written $\frac{dy}{dx}$) each time y is differentiated:

$$\frac{d}{dx}[y^n] = n y^{n-1} y', \quad \frac{d}{dx}[\sin y] = (\cos y) y', \quad \frac{d}{dx}[e^y] = e^y y'.$$

A term containing *both* x and y , such as xy or $x^2 y^3$, additionally requires the Product Rule. After every term has been differentiated, the resulting equation is linear in y' : collect every term containing y' on one side, factor y' out, and divide to solve for y' explicitly.

Implicit differentiation, step by step.

1. Differentiate both sides of the equation with respect to x , term by term.
2. Every term containing y picks up a factor of y' (Chain Rule); a term containing both x and y together also needs the Product Rule.
3. Collect every term containing y' on one side of the resulting equation; move every other term to the other side.
4. Factor y' out of the collected terms, then divide to solve for $y' = \frac{dy}{dx}$ explicitly, usually leaving an expression in both x and y .

$\frac{d}{dx}[y^n] = n y^{n-1} y'$	$\frac{d}{dx}[xy] = y + xy'$
$\frac{d}{dx}[x^2 y^3] = 2xy^3 + 3x^2 y^2 y'$	$\frac{d}{dx}[\sin y] = (\cos y) y'$
$\frac{d}{dx}[e^y] = e^y y'$	$\frac{d}{dx}[\ln y] = \frac{y'}{y}$
$\frac{d}{dx}[\tan y] = \sec^2 y y'$	$\frac{d}{dx}\left[\frac{x}{y}\right] = \frac{y - xy'}{y^2}$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm hàm ẩn: coi y là một hàm theo x , nên mọi số hạng chứa y khi lấy đạo hàm phải nhân thêm y' (áp dụng quy tắc dây chuyền, vì bản thân y là hàm hợp theo x). Nếu số hạng chứa cả x lẫn y (ví dụ xy , $x^2 y^3$), phải dùng thêm quy tắc tích. Sau khi lấy đạo hàm hai vế, gom tất cả số hạng chứa y' về một phía, đặt y' làm nhân tử chung, rồi chia để giải ra y' .

Ví dụ mẫu · Implicit differentiation

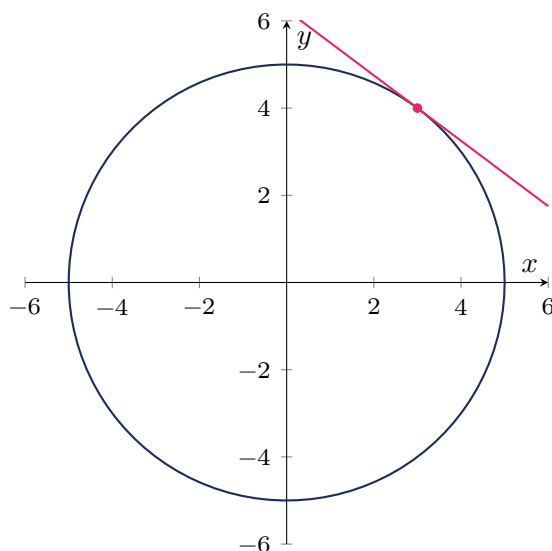
Find y' if $x^2y + y^3 = x + 5$.

Every term on the left involves y , either directly or raised to a power, so each requires the Chain Rule (and the mixed term x^2y additionally requires the Product Rule); the right side is an ordinary polynomial in x alone. Differentiate both sides, using the product rule on x^2y and the chain rule on y^3 :

$$\begin{aligned} 2xy + x^2y' + 3y^2y' &= 1 \\ y'(x^2 + 3y^2) &= 1 - 2xy \\ y' &= \frac{1 - 2xy}{x^2 + 3y^2}. \end{aligned}$$

3.2.1 Finding the Tangent Line at a Point

Once y' has been written as a formula in terms of x and y , substituting the coordinates of a specific point that lies on the curve produces a numerical slope – exactly what is needed to write the equation of a tangent line, $y - y_1 = m(x - x_1)$.



Tangent line to $x^2 + y^2 = 25$ at $(3, 4)$.

Ví dụ mẫu · Tangent line to an implicit curve

Find the tangent line to $x^2 + y^2 = 25$ at $(3, 4)$.

Differentiate implicitly:

$$2x + 2yy' = 0 \implies y' = -\frac{x}{y}.$$

At $(3, 4)$: $y' = -\frac{3}{4}$. The tangent line is

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \implies y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{4}.$$

3.2.2 Horizontal and Vertical Tangent Lines

An implicitly defined curve has a tangent line at essentially every point, including points where an explicit formula $y = f(x)$ would be undefined or multi-valued. Two special cases are worth locating

directly from the formula for y' , which for an implicit curve is typically a ratio of two expressions in x and y . A **horizontal tangent** occurs where $y' = 0$ — that is, where the *numerator* of y' equals zero, provided the denominator is nonzero at that same point. A **vertical tangent** occurs where y' is undefined — that is, where the *denominator* of y' equals zero, provided the numerator is nonzero. Because both cases depend on the point actually lying on the curve, always substitute the candidate x - or y -value back into the *original* equation to solve for the matching coordinate, and always check that the other part of the fraction does not also vanish there.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tiếp tuyến **NẪM NGANG** khi $y' = 0$, tức là **TỬ SỐ** của biểu thức y' bằng 0 (trong khi mẫu số khác 0 tại điểm đó). Tiếp tuyến **THẰNG ĐỨNG** khi y' không xác định, tức là **MẪU SỐ** của y' bằng 0 (trong khi tử số khác 0). Sau khi tìm được giá trị x hoặc y nghi ngờ, luôn thay ngược vào phương trình gốc của đường cong để tìm tọa độ điểm đầy đủ.

Ví dụ mẫu · Horizontal and vertical tangents

Find all points on the ellipse $4x^2 + y^2 = 8$ where the tangent line is horizontal, and all points where it is vertical.

Differentiate implicitly:

$$8x + 2yy' = 0 \implies y' = -\frac{4x}{y}.$$

Horizontal tangents ($y' = 0$, numerator zero, $y \neq 0$): need $-4x = 0 \implies x = 0$. Substitute into the original equation: $4(0)^2 + y^2 = 8 \implies y^2 = 8 \implies y = \pm 2\sqrt{2}$. Since $y \neq 0$ at both points, these are genuine horizontal tangents:

$$(0, 2\sqrt{2}) \quad \text{and} \quad (0, -2\sqrt{2}).$$

Vertical tangents (y' undefined, denominator zero, numerator nonzero): need $y = 0$. Substitute into the original equation: $4x^2 + 0 = 8 \implies x^2 = 2 \implies x = \pm\sqrt{2}$. Since the numerator $-4x = \mp 4\sqrt{2} \neq 0$ at both points, these are genuine vertical tangents:

$$(\sqrt{2}, 0) \quad \text{and} \quad (-\sqrt{2}, 0).$$

Notice the fourfold symmetry: because the ellipse $4x^2 + y^2 = 8$ is unchanged under $x \rightarrow -x$ and under $y \rightarrow -y$, the two horizontal-tangent points are reflections of each other across the x -axis, and the two vertical-tangent points are reflections of each other across the y -axis.

3.2.3 Second Derivatives of Implicit Relations

To find the second derivative y'' of an implicitly defined relation, differentiate the expression already found for y' one more time with respect to x , treating y as a function of x exactly as before — any y appearing inside that expression again contributes a factor of y' when differentiated. As soon as a lone y' appears in the resulting expression, substitute the already-known first-derivative formula back in, so the final expression for y'' is written purely in terms of x and y .

This extends naturally to questions of concavity: since $y'' > 0$ corresponds to a curve bending upward and $y'' < 0$ to a curve bending downward, exactly as for an explicit function, the same second-derivative expression found here can be used to decide whether an implicitly defined curve is concave up or concave down at a given point — without ever solving the original equation for y .

Ví dụ mẫu · Implicit second derivative

Continuing the circle $x^2 + y^2 = 25$ with $y' = -\frac{x}{y}$, find y'' at $(3, 4)$.

Differentiate $y' = -\frac{x}{y}$ using the quotient rule:

$$y'' = -\frac{(1)(y) - x y'}{y^2} = -\frac{y - x\left(-\frac{x}{y}\right)}{y^2} = -\frac{\frac{y^2 + x^2}{y}}{y^2} = -\frac{x^2 + y^2}{y^3}.$$

Since $x^2 + y^2 = 25$ on the curve, this simplifies to $y'' = -\frac{25}{y^3}$. At $(3, 4)$:

$$y'' = -\frac{25}{4^3} = -\frac{25}{64}.$$

(!) Lỗi thường gặp: Treating y as a constant while differentiating an equation in x and y is the most common implicit-differentiation error. Since y represents a function of x , every term containing y picks up a factor of y' : $\frac{d}{dx}[y^2] = 2yy'$ (not $2y$), and $\frac{d}{dx}[xy] = y + xy'$ (product rule – not just y').

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Để tính đạo hàm cấp hai y'' theo kiểu ẩn, lấy đạo hàm biểu thức y' (đã tìm được) một lần nữa theo x , và thay y' đã biết vào ngay khi nó xuất hiện để rút gọn kết quả theo x và y .

3.3 Derivatives of General Inverse Functions

A function has an inverse only if it is **one-to-one**: no two different inputs may produce the same output, since otherwise there would be no way to decide which input a given output should be sent back to (graphically, this is the horizontal line test). For a differentiable function, one-to-one on an interval is guaranteed whenever f' does not change sign there – that is, whenever f is strictly increasing throughout ($f' > 0$) or strictly decreasing throughout ($f' < 0$) on that interval. Assuming f is one-to-one and differentiable, its inverse $g = f^{-1}$ satisfies, by definition,

$$f(g(x)) = x$$

for every x in the domain of g . This is itself a composite-function identity, so it can be differentiated using the Chain Rule. Differentiating both sides with respect to x – the right-hand side is simply x , whose derivative is 1:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

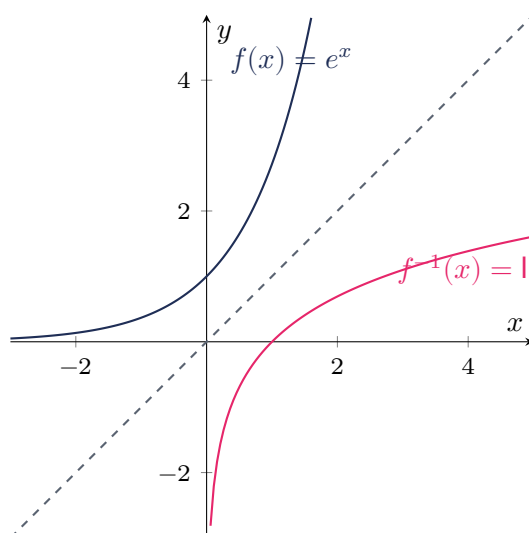
This single formula lets us find the derivative of an inverse function at a point without ever writing down a formula for g itself – all that is required is the value of g at that point (i.e., knowing which input to f produces the desired output) and the value of f' there.

Derivative of an inverse function

If $g = f^{-1}$ is differentiable, then $f(g(x)) = x$ for every x in the domain of g . Differentiating both sides with respect to x :

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}, \quad f'(g(x)) \neq 0.$$

Geometrically, if the point (a, b) lies on the graph of f , then (b, a) lies on the graph of g , and the tangent slopes at these mirrored points are reciprocals of one another.



$f(x) = e^x$ and $f^{-1}(x) = \ln x$ are mirror images of each other across the line $y = x$ (dashed); at mirrored points, their tangent slopes are reciprocals.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nếu g là hàm ngược của f thì đồ thị của g là ảnh phản chiếu của đồ thị f qua đường thẳng $y = x$. Vì vậy $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$ – hệ số góc của g tại x là NGHỊCH ĐẢO của hệ số góc của f tại điểm tương ứng $g(x)$ (không phải tại x).

The condition $f'(g(x)) \neq 0$ is not a technicality – it identifies exactly the points where the inverse function has a **vertical tangent**. For instance, $f(x) = x^3$ has $f'(x) = 3x^2$, so $f'(0) = 0$; its inverse $g(x) = \sqrt[3]{x}$ indeed has a vertical tangent at $x = 0$, since $g'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ is undefined there. Geometrically, a horizontal tangent on the graph of f (slope 0) always mirrors into a vertical tangent on the graph of g (slope undefined) at the corresponding reflected point, echoing the horizontal/vertical tangent analysis already carried out for implicit curves.

To use this formula from a **table of values**, first find $g(x) = f^{-1}(x)$ by locating x in the row of f -values (i.e., finding which input produces that output), then look up f' at that input.

Ví dụ mẫu · Inverse function from a table

x	1	2	3	4
$f(x)$	3	6	10	15
$f'(x)$	2	3	4	5

Let $g = f^{-1}$. Find $g'(6)$.

Since $f(2) = 6$, we have $g(6) = 2$. Then

$$g'(6) = \frac{1}{f'(g(6))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{3}.$$

(!) Lỗi thường gặp: Given $g = f^{-1}$, a frequent error is computing $g'(a) = \frac{1}{f'(a)}$ instead of $\frac{1}{f'(g(a))}$. The formula requires evaluating f' at $g(a)$ — the *output* of the inverse function — not at the original input a itself. Always find $g(a)$ first (by solving $f(\cdot) = a$, or reading a table backward), then look up f' there.

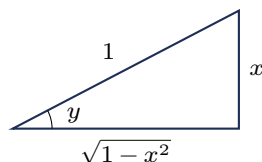
3.4 Derivatives of Inverse Trigonometric Functions

The derivatives of the inverse trigonometric functions can be derived using implicit differentiation. Let $y = \arcsin x$, so that $\sin y = x$ with $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Differentiating both sides with respect to x :

$$\cos y \cdot y' = 1 \implies y' = \frac{1}{\cos y}.$$

On $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos y \geq 0$, so $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Therefore

$$\frac{d}{dx} [\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$



Reference triangle for $y = \arcsin x$: $\sin y = \frac{x}{1}$, so the adjacent side is $\sqrt{1 - x^2}$ and $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$.

By the same method, let $y = \arccos x$ so that $\cos y = x$ with $y \in [0, \pi]$. Differentiating: $-\sin y \cdot y' = 1$, and since $\sin y \geq 0$ on $[0, \pi]$, $\sin y = \sqrt{1 - x^2}$, giving

$$\frac{d}{dx} [\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Let $y = \arctan x$ so that $\tan y = x$ with $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Differentiating: $\sec^2 y \cdot y' = 1$, and using the identity $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$:

$$\frac{d}{dx} [\arctan x] = \frac{1}{1 + x^2}.$$

The restricted ranges used above — $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ for $\arcsin$, $[0, \pi]$ for $\arccos$, and $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ for $\arctan$ — are exactly what make $\sin$, $\cos$, and $\tan$ one-to-one and therefore invertible in the first place, and they are also what pin down the sign used to simplify each derivative (e.g., $\cos y \geq 0$ on $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$). On a different branch, the same identities would produce the opposite sign, which is exactly why the standard inverse trigonometric functions are always defined with these particular ranges.

$$\frac{d}{dx}[\arcsin x] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{domain } -1 < x < 1)$$

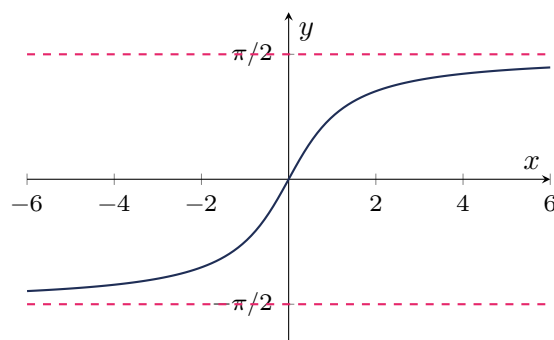
$$\frac{d}{dx}[\arccos x] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (\text{domain } -1 < x < 1)$$

$$\frac{d}{dx}[\arctan x] = \frac{1}{1+x^2} \quad (\text{domain: all real } x)$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ba công thức đạo hàm hàm lượng giác ngược cần thuộc lòng: $\arcsin x$ và $\arccos x$ có CÙNG mẫu số $\sqrt{1-x^2}$ nhưng KHÁC dấu; $\arctan x$ có mẫu số $1+x^2$ và không chứa căn.



The graph of $y = \arctan x$: domain is all real numbers, range is $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$; the horizontal lines $y = \pm\pi/2$ (dashed) are asymptotes that the graph approaches but never reaches.

Ví dụ mẫu · Derivative of arcsin

Differentiate $y = \arcsin(4x)$.

Chain rule with inner function $u = 4x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-(4x)^2}} \cdot 4 = \frac{4}{\sqrt{1-16x^2}}.$$

Ví dụ mẫu · Derivative of arctan

Differentiate $y = \arctan(3x)$.

Chain rule with inner function $u = 3x$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3 = \frac{3}{1+9x^2}.$$

(!) Lỗi thường gặp: $\arcsin x$ and $\arccos x$ share the same denominator $\sqrt{1-x^2}$ but **opposite signs:** $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ while $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. This is consistent graphically – $\arcsin x$ is increasing while $\arccos x$ is decreasing on $(-1, 1)$.

(!) Lỗi thường gặp: A common shortcut error is writing $\frac{d}{dx}[\arctan(5x)] = \frac{1}{1+25x^2}$ and stopping there. The formula $(\arctan u)' = \frac{1}{1+u^2}$ is only the *outer* derivative; since the argument

here is $u = 5x$, not x itself, the Chain Rule still requires multiplying by $u' = 5$. The correct derivative is $\frac{5}{1 + 25x^2}$. This omission is the single most common error when combining inverse trig derivatives with the chain rule.

3.5 Selecting Procedures for Differentiation

Most derivatives on an exam require combining more than one rule. Before writing anything down, scan the expression from the outside in and identify the outermost structure.

Decision strategy

Before differentiating, scan the expression from the outside in and ask:

1. Is the outermost operation a **sum or difference**? Differentiate term by term.
2. Is the outermost operation a **product** of two factors? Apply the product rule; check whether either factor itself needs the chain rule.
3. Is the outermost operation a **quotient**? Apply the quotient rule; check whether the numerator or denominator needs the chain rule.
4. Is one function plugged inside another (a **composition**)? Apply the chain rule, peeling one layer at a time from the outside in.
5. Does the equation mix x and y with no way to isolate y , or does y appear more than once? Differentiate **implicitly**, remembering the factor y' on every term containing y .
6. Only substitute specific numeric values **after** the derivative expression has been fully simplified.

The six checks above introduce no new differentiation rule; they are simply a disciplined way of applying the rules already established in this and the previous unit in the correct order, so that no layer of an expression is left undifferentiated and no factor is invented that was never actually part of the original function.

Spot the right tool – four quick diagnoses.

- $y = \frac{x^2 + 1}{\sin(4x)}$: outermost operation is a **quotient** $\Rightarrow$ Quotient Rule; the denominator $\sin(4x)$ is itself a composition, so its derivative needs the Chain Rule ($4 \cos(4x)$) before it is substituted into the quotient formula.
- $y = (x^3 + \tan x)^7$: the outermost operation is a single expression raised to a **power** $\Rightarrow$ Chain Rule only, with outer function $(\cdot)^7$ and inner function $u = x^3 + \tan x$. There is no separate product or quotient to handle, because the whole sum is packaged inside one set of parentheses.
- $\sqrt{y} + x^3 = y^2$: cannot be solved for y as a single explicit formula $\Rightarrow$ differentiate **implicitly**. Every term containing y (including $\sqrt{y} = y^{1/2}$) picks up a factor of y' .
- $y = e^{\sin(2x)} \cos x$: outermost operation is a **product** of $e^{\sin(2x)}$ and $\cos x \Rightarrow$ Product Rule; the first factor is itself a nested composition (outer $e^{(\cdot)}$, inner $\sin(2x)$, innermost $2x$), so differentiating it alone requires two applications of the Chain Rule before the Product Rule can even be written down.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi một bài toán kết hợp nhiều quy tắc, hãy xử lý theo đúng THỨ TỰ cấu trúc của biểu thức: nhận diện phép toán NGOÀI CÙNG trước (tổng, tích, thương, hay hàm hợp), áp dụng quy tắc tương ứng, rồi mới xử lý các hàm nằm bên trong.

Ví dụ mẫu · Mixed differentiation strategy

Find y' if $\sin(xy) = x + y^2$.

Reading the equation from the outside in: the left side is a single composition $\sin(\cdot)$ whose argument xy is itself a product; the right side is a sum whose second term y^2 is itself a power of y . Because y cannot be isolated on one side, the entire equation must be differentiated implicitly, applying the Chain Rule to every piece that involves y . Differentiate both sides:

$$\cos(xy) \cdot \frac{d}{dx}[xy] = 1 + 2yy' \implies \cos(xy)(y + xy') = 1 + 2yy'.$$

Expand and collect the y' terms:

$$\begin{aligned} y \cos(xy) + xy' \cos(xy) &= 1 + 2yy' \\ y' [x \cos(xy) - 2y] &= 1 - y \cos(xy) \\ y' &= \frac{1 - y \cos(xy)}{x \cos(xy) - 2y}. \end{aligned}$$

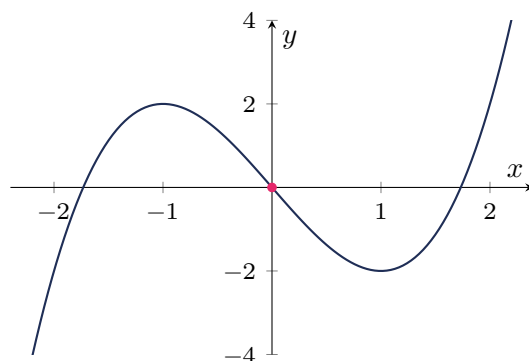
3.6 Higher-Order Derivatives

3.6.1 Notation and the Meaning of Higher-Order Derivatives

Differentiating a function repeatedly produces **higher-order derivatives**. The second derivative is the derivative of the first derivative, the third derivative is the derivative of the second, and so on.

1st derivative:	$f'(x)$	Leibniz:	$\frac{dy}{dx}$
2nd derivative:	$f''(x)$	Leibniz:	$\frac{d^2y}{dx^2}$
3rd derivative:	$f'''(x)$	Leibniz:	$\frac{d^3y}{dx^3}$
n -th derivative:	$f^{(n)}(x)$	Leibniz:	$\frac{d^ny}{dx^n}$

The sign of f'' describes how the graph of f curves: $f'' > 0$ corresponds to the graph bending upward and $f'' < 0$ to the graph bending downward, a connection developed further when studying the shape of a graph. Higher-order derivatives also carry direct physical meaning: if $s(t)$ gives the position of an object moving along a line, then $s'(t)$ gives its velocity and $s''(t)$ gives its acceleration, a connection developed in depth in the unit on contextual applications of the derivative.



$y = x^3 - 3x$ bends downward for $x < 0$ (where $y'' < 0$) and upward for $x > 0$ (where $y'' > 0$); the origin is where that behavior switches.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm bậc cao là lấy đạo hàm liên tiếp nhiều lần: f'' là đạo hàm của f' , f''' là đạo hàm của f'' , và cứ tiếp tục như vậy. Dấu của f'' mô tả chiều cong của đồ thị f , một ý sẽ được khai thác sâu hơn khi khảo sát hình dạng đồ thị.

3.6.2 General Patterns for Polynomials, Trig, and Exponential Functions

Three families of functions display especially clean patterns under repeated differentiation, and recognizing them turns what looks like a tedious problem into a quick one. For a **polynomial** of degree m , each differentiation reduces the degree by one, and every derivative of order $m + 1$ or higher is identically zero. This happens because a degree- m term x^m becomes mx^{m-1} , then $m(m-1)x^{m-2}$, and so on, until after m differentiations it becomes the constant $m!$ — and differentiating a constant one more time gives 0, after which every further derivative remains 0. For **sine and cosine**, differentiation cycles with period 4:

$$\sin x \xrightarrow{d/dx} \cos x \xrightarrow{d/dx} -\sin x \xrightarrow{d/dx} -\cos x \xrightarrow{d/dx} \sin x \xrightarrow{d/dx} \dots$$

so the n -th derivative of $\sin x$ (or $\cos x$) depends only on the remainder when n is divided by 4. For the **natural exponential function** e^{kx} , each differentiation multiplies by the constant k , so

$$\frac{d^n}{dx^n} [e^{kx}] = k^n e^{kx}.$$

Polynomial, degree m	$f^{(n)}(x) = 0$ for every $n > m$ (each derivative lowers the degree by exactly 1)
$\sin x$	cycles $\sin x \rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x \rightarrow \sin x \rightarrow \dots$ (period 4; use $n \bmod 4$)
$\cos x$	cycles $\cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x \rightarrow \sin x \rightarrow \cos x \rightarrow \dots$ (period 4; use $n \bmod 4$)
e^{kx}	$f^{(n)}(x) = k^n e^{kx}$

Other elementary functions display their own patterns under repeated differentiation. For instance,

$$\frac{d^n}{dx^n} \left[\frac{1}{x} \right] = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}},$$

alternating sign with every derivative while the power of x in the denominator grows by exactly one each time — a pattern easily confirmed by differentiating x^{-1} a few times by hand and tracking the accumulating constant: $-x^{-2}$, then $2x^{-3}$, then $-6x^{-4}$, and so on.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hàm lượng giác ($\sin x$, $\cos x$), đạo hàm lặp lại theo chu kỳ 4; muốn tìm đạo hàm cấp n rất lớn, chỉ cần lấy phần dư của n khi chia cho 4 rồi tra chu kỳ. Với hàm mũ e^{kx} , mỗi lần đạo hàm nhân thêm một thừa số k , nên đạo hàm cấp n là $k^n e^{kx}$. Với đa thức bậc m , mọi đạo hàm từ cấp $(m+1)$ trở lên đều bằng 0 – vì mỗi lần đạo hàm làm giảm bậc đi đúng 1.

Ví dụ mẫu · Higher-order and pattern derivatives

(a) Find $f'''(x)$ if $f(x) = x^5 - 3x^4 + 2x$.

Differentiate three times in succession:

$$f'(x) = 5x^4 - 12x^3 + 2, \quad f''(x) = 20x^3 - 36x^2, \quad f'''(x) = 60x^2 - 72x.$$

(b) Find $f^{(23)}(x)$ if $f(x) = \sin x$.

Using the period-4 cycle $\sin x \rightarrow \cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x$, only the remainder of 23 divided by 4 matters: $23 = 4(5) + 3$, so the remainder is 3. The third derivative in the cycle is $-\cos x$, so

$$f^{(23)}(x) = -\cos x.$$

(c) Find $f^{(10)}(x)$ if $f(x) = e^{3x}$.

Each differentiation multiplies by 3, so $f^{(n)}(x) = 3^n e^{3x}$. With $n = 10$ and $3^{10} = 59049$:

$$f^{(10)}(x) = 59049 e^{3x}.$$

3.7 Problem Bank

Bài tập luyện tập

If $y = (4x + 1)^5$, then $\frac{dy}{dx} =$

(A) $5(4x + 1)^4$

(C) $4(4x + 1)^4$

(B) $20(4x + 1)^4$

(D) $20(4x + 1)^5$

Lời giải chi tiết

Chain rule: $\frac{dy}{dx} = 5(4x + 1)^4 \cdot 4 = 20(4x + 1)^4$. (B).

Bài tập luyện tập

$\frac{d}{dx} [\tan(x^2)] =$

(A) $\sec^2(x^2)$

(C) $2x \tan x \sec x$

(B) $2x \sec^2(x^2)$

(D) $\sec^2 x$

Lời giải chi tiết

Outer function $\tan(\cdot)$, inner function $u = x^2$: $\frac{d}{dx} [\tan(x^2)] = \sec^2(x^2) \cdot 2x = 2x \sec^2(x^2)$. (B).

Bài tập luyện tập

Find $\frac{dy}{dx}$ if $y = \sqrt{4x^3 - x}$.

Lời giải chi tiết

Write $y = (4x^3 - x)^{1/2}$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}(4x^3 - x)^{-1/2} \cdot (12x^2 - 1) = \frac{12x^2 - 1}{2\sqrt{4x^3 - x}}.$$

Bài tập luyện tập

Find $\frac{d}{dx}[\cos^2(3x)]$.

Lời giải chi tiết

Write $y = [\cos(3x)]^2$. Outer $(\cdot)^2$, middle $\cos(\cdot)$, inner $3x$:

$$\frac{dy}{dx} = 2 \cos(3x) \cdot (-\sin(3x)) \cdot 3 = -6 \sin(3x) \cos(3x).$$

(Equivalently $-3 \sin(6x)$ using the double-angle identity $\sin(6x) = 2 \sin(3x) \cos(3x)$.)

Bài tập luyện tập

Differentiate: (a) $y = x^2 \sin(3x)$; (b) $y = \frac{\cos(3x)}{x^2}$.

Lời giải chi tiết

(a) Product rule, with $\frac{d}{dx}[\sin(3x)] = 3 \cos(3x)$ by the chain rule:

$$y' = 2x \sin(3x) + 3x^2 \cos(3x).$$

(b) Quotient rule, with $\frac{d}{dx}[\cos(3x)] = -3 \sin(3x)$ by the chain rule:

$$y' = \frac{-3 \sin(3x) \cdot x^2 - \cos(3x) \cdot 2x}{x^4} = -\frac{3x \sin(3x) + 2 \cos(3x)}{x^3}.$$

Bài tập luyện tập

If $f(x) = \frac{e^{2x}}{x+1}$, then $f'(x) =$

(A) $\frac{e^{2x}(2x+1)}{(x+1)^2}$

(C) $\frac{e^{2x}(2x-1)}{(x+1)^2}$

(B) $\frac{2e^{2x}}{x+1}$

(D) $\frac{e^{2x}}{(x+1)^2}$

Lời giải chi tiết

Quotient rule, with $u' = 2e^{2x}$ by the chain rule:

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}(x+1) - e^{2x}(1)}{(x+1)^2} = \frac{e^{2x}[2(x+1) - 1]}{(x+1)^2} = \frac{e^{2x}(2x+1)}{(x+1)^2}.$$

(A).

Bài tập luyện tập

If $x^2 + xy + y^2 = 7$, find $\frac{dy}{dx}$ at the point $(1, 2)$.

(A) $-\frac{4}{5}$

(C) $-\frac{5}{4}$

(B) $\frac{4}{5}$

(D) $\frac{5}{4}$

Lời giải chi tiết

Differentiate implicitly (product rule on xy):

$$2x + (y + xy') + 2yy' = 0 \Rightarrow y'(x + 2y) = -(2x + y) \Rightarrow y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}.$$

At $(1, 2)$: $y' = -\frac{2(1) + 2}{1 + 2(2)} = -\frac{4}{5}$. (A).

Bài tập luyện tập

Find y' if $y^3 + x^2y = 6$.

Lời giải chi tiết

$$3y^2y' + (2xy + x^2y') = 0 \Rightarrow y'(3y^2 + x^2) = -2xy \Rightarrow y' = -\frac{2xy}{3y^2 + x^2}.$$

Bài tập luyện tập

The tangent line to $x^2 + 4y^2 = 8$ at $(2, 1)$ is

(A) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

(C) $y = -2x + 5$

(B) $y = \frac{1}{2}x$

(D) $y = -\frac{1}{2}x + 1$

Lời giải chi tiết

First confirm $(2, 1)$ lies on the curve: $2^2 + 4(1)^2 = 4 + 4 = 8$ ✓. Differentiate: $2x + 8yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{x}{4y}$. At $(2, 1)$: $y' = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Tangent: $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 2$. (A).

Bài tập luyện tập

Find all points on the curve $x^2 + xy + y^2 = 3$ where the tangent line is horizontal, and all points where it is vertical.

Lời giải chi tiết

Differentiate implicitly: $2x + (y + xy') + 2yy' = 0 \Rightarrow y'(x + 2y) = -(2x + y) \Rightarrow y' = -\frac{2x + y}{x + 2y}$.

Horizontal ($2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x$, with $x + 2y \neq 0$): substitute into $x^2 + xy + y^2 = 3$:

$$x^2 + x(-2x) + (-2x)^2 = 3 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm 1.$$

This gives $(1, -2)$ and $(-1, 2)$; at both points $x + 2y = \mp 3 \neq 0$, so these are genuine horizontal tangents.

Vertical ($x + 2y = 0 \Rightarrow x = -2y$, with $2x + y \neq 0$): substitute into $x^2 + xy + y^2 = 3$:

$$(-2y)^2 + (-2y)y + y^2 = 3 \Rightarrow 3y^2 = 3 \Rightarrow y = \pm 1.$$

This gives $(-2, 1)$ and $(2, -1)$; at both points $2x + y = \mp 3 \neq 0$, so these are genuine vertical tangents.

Bài tập luyện tập

For $x^2 - y^2 = 16$, find $\frac{d^2y}{dx^2}$ in terms of x and y .

(A) $-\frac{16}{y^3}$

(C) $-\frac{16}{x^3}$

(B) $\frac{16}{y^3}$

(D) $\frac{y^3}{16}$

Lời giải chi tiết

$2x - 2yy' = 0 \Rightarrow y' = \frac{x}{y}$. Differentiate again with the quotient rule:

$$y'' = \frac{(1)y - xy'}{y^2} = \frac{y - \frac{x^2}{y}}{y^2} = \frac{y^2 - x^2}{y^3}.$$

Since $x^2 - y^2 = 16$, we have $y^2 - x^2 = -16$, so $y'' = -\frac{16}{y^3}$. (A).

Bài tập luyện tập

For $xy = 6$, find y'' at the point $(2, 3)$.

(A) $\frac{3}{2}$

(C) $\frac{3}{4}$

(B) $-\frac{3}{2}$

(D) $-\frac{3}{4}$

Lời giải chi tiết

First confirm $(2, 3)$ lies on the curve: $2 \times 3 = 6 \checkmark$. $y + xy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{y}{x}$. Differentiate again:

$$y'' = -\frac{y'x - y}{x^2} = \frac{y - y'x}{x^2}.$$

Since $y'x = -y$, the numerator is $y - (-y) = 2y$, so $y'' = \frac{2y}{x^2}$. At $(2, 3)$: $y'' = \frac{2(3)}{4} = \frac{3}{2}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Find the slope of the tangent line to $y^2 = x^3 - 3x + 1$ at the point $(2, \sqrt{3})$.

Lời giải chi tiết

First confirm $(2, \sqrt{3})$ lies on the curve: $2^3 - 3(2) + 1 = 8 - 6 + 1 = 3 = (\sqrt{3})^2 \checkmark$. Differentiate: $2yy' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = \frac{3x^2 - 3}{2y}$. At $(2, \sqrt{3})$:

$$y' = \frac{3(4) - 3}{2\sqrt{3}} = \frac{9}{2\sqrt{3}} = \frac{9\sqrt{3}}{6} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

The tangent line is $y - \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2}(x - 2)$.

Bài tập luyện tập

Using the table

x	0	1	2	3
$f(x)$	-1	1	4	9
$f'(x)$	3	4	5	6

let $g = f^{-1}$. Find $g'(4)$.

(A) $\frac{1}{5}$

(C) $\frac{1}{4}$

(B) 5

(D) 4

Lời giải chi tiết

Since $f(2) = 4$, $g(4) = 2$. So $g'(4) = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{5}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Using the table

x	2	4	6	8
$f(x)$	5	9	15	23
$f'(x)$	2	3	5	7

let $h = f^{-1}$. Find $h'(15)$.

(A) $\frac{1}{5}$

(B) 5

(C) $\frac{1}{3}$

(D) 3

Lời giải chi tiết

Since $f(6) = 15$, $h(15) = 6$. So $h'(15) = \frac{1}{f'(6)} = \frac{1}{5}$. (A).

Bài tập luyện tập

Suppose f is differentiable and invertible, $f(3) = 7$, and $f'(3) = \frac{1}{2}$. Find $(f^{-1})'(7)$.

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 2

(C) 7

(D) 3

Lời giải chi tiết

$(f^{-1})'(7) = \frac{1}{f'(f^{-1}(7))} = \frac{1}{f'(3)} = \frac{1}{1/2} = 2$. (B).

Bài tập luyện tập

Let $p(x) = x^3 + 2x + 5$ and let $q = p^{-1}$. Find $q'(8)$.

Lời giải chi tiết

Since $p'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ for all x , p is increasing and therefore invertible. Solve $p(x) = 8$: $x^3 + 2x - 3 = 0$, and $x = 1$ works since $1 + 2 - 3 = 0$. So $q(8) = 1$.

$$p'(1) = 3(1)^2 + 2 = 5 \implies q'(8) = \frac{1}{p'(1)} = \frac{1}{5}.$$

Bài tập luyện tập

Differentiate: (a) $y = \arcsin(5x)$; (b) $y = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$, and evaluate $y'(0)$ for part (b).

Lời giải chi tiết

(a) $\frac{d}{dx}[\arcsin(5x)] = \frac{1}{\sqrt{1-(5x)^2}} \cdot 5 = \frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}.$

(b)

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1/2}{\sqrt{1-x^2/4}}.$$

At $x = 0$: $y'(0) = \frac{1/2}{1} = \frac{1}{2}.$

Bài tập luyện tập

Find $\frac{d}{dx} [\arctan(x^3)]$.

Lời giải chi tiết

$$\frac{d}{dx} [\arctan(x^3)] = \frac{1}{1 + (x^3)^2} \cdot 3x^2 = \frac{3x^2}{1 + x^6}.$$

Bài tập luyện tập

If $y = \arccos(2x)$, then $y'(0) =$

(A) -2

(C) $-\frac{1}{2}$

(B) 2

(D) $\frac{1}{2}$

Lời giải chi tiết

$$y' = -\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}. \text{ At } x = 0: y'(0) = -\frac{2}{\sqrt{1}} = -2. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Show that if $y = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$, then $y' = \arctan x$.

Lời giải chi tiết

Differentiate term by term. First term (product rule; the chain rule on $\arctan x$ is trivial since the inner function is x itself):

$$\frac{d}{dx} [x \arctan x] = \arctan x + x \cdot \frac{1}{1 + x^2}.$$

Second term (chain rule):

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \ln(1 + x^2) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{x}{1 + x^2}.$$

Subtracting:

$$y' = \arctan x + \frac{x}{1 + x^2} - \frac{x}{1 + x^2} = \arctan x.$$

Bài tập luyện tập

If $y = (x^2 + 1)^3(x - 4)^2$, find $y'(4)$.

(A) 0

(C) undefined

(B) 17^3

(D) 1

Lời giải chi tiết

Product rule, with chain rule on $(x^2 + 1)^3$:

$$y' = 3(x^2 + 1)^2(2x)(x - 4)^2 + (x^2 + 1)^3 \cdot 2(x - 4).$$

Both terms contain a factor of $(x - 4)$, so both vanish at $x = 4$: $y'(4) = 0$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = \frac{\sin(2x)}{x^3}$.

Lời giải chi tiết

Quotient rule, with chain rule on $\sin(2x)$:

$$y' = \frac{2 \cos(2x) \cdot x^3 - \sin(2x) \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2[2x \cos(2x) - 3 \sin(2x)]}{x^6} = \frac{2x \cos(2x) - 3 \sin(2x)}{x^4}.$$

Bài tập luyện tập

Find y' at the point $(0, 1)$ if $e^{xy} = x + y$.

(A) 0

(C) -1

(B) 1

(D) undefined

Lời giải chi tiết

Check the point: $e^{0 \cdot 1} = 1$ and $0 + 1 = 1$, so $(0, 1)$ is on the curve. Differentiate implicitly (chain rule on e^{xy} , product rule inside):

$$e^{xy}(y + xy') = 1 + y'.$$

At $(0, 1)$: $e^0(1 + 0 \cdot y') = 1 + y' \Rightarrow 1 = 1 + y' \Rightarrow y' = 0$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = \ln(\sec x + \tan x)$.

Lời giải chi tiết

Chain rule: $y' = \frac{u'}{u}$ where $u = \sec x + \tan x$ and $u' = \sec x \tan x + \sec^2 x$.

$$y' = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x(\tan x + \sec x)}{\sec x + \tan x} = \sec x.$$

Bài tập luyện tập

If $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + x$, then $f''(x) =$

(A) $36x^2 - 12x$

(C) $36x^2 - 12x + 1$

(B) $12x^2 - 6x$

(D) $24x - 12$

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 12x^3 - 6x^2 + 1$, then $f''(x) = 36x^2 - 12x$. (A).

Bài tập luyện tập

Find $\frac{d^2y}{dx^2}$ if $y = \sin(x^2)$.

Lời giải chi tiết

$y' = 2x \cos(x^2)$ (chain rule). Differentiate again with the product rule, using the chain rule on $\cos(x^2)$:

$$y'' = 2 \cos(x^2) + 2x \cdot (-\sin(x^2) \cdot 2x) = 2 \cos(x^2) - 4x^2 \sin(x^2).$$

Bài tập luyện tập

If $g(x) = e^{2x}$, find $g^{(4)}(x)$, the fourth derivative.

(A) $16e^{2x}$

(C) $2^4 x e^{2x}$

(B) $8e^{2x}$

(D) $4e^{2x}$

Lời giải chi tiết

Each differentiation multiplies by 2: $g' = 2e^{2x}$, $g'' = 4e^{2x}$, $g''' = 8e^{2x}$, $g^{(4)} = 16e^{2x}$. (A).

Bài tập luyện tập

Use implicit differentiation to find y'' at the point $(1, 1)$ on the curve $y^2 = x^3$.

Lời giải chi tiết

First confirm $(1, 1)$ lies on the curve: $1^2 = 1^3 \checkmark$. Differentiate once: $2yy' = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{2y}$.

At $(1, 1)$: $y' = \frac{3}{2}$.

Differentiate again, using the quotient rule (equivalently, differentiating $2yy' = 3x^2$ directly with the product rule on the left):

$$2(y')^2 + 2yy'' = 6x \Rightarrow y'' = \frac{6x - 2(y')^2}{2y} = \frac{3x}{y} - \frac{(y')^2}{y}.$$

At $(1, 1)$ with $y' = \frac{3}{2}$:

$$y'' = 3 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}.$$

Bài tập luyện tập

Using the pattern for repeated differentiation, find: **(a)** $f^{(15)}(x)$ if $f(x) = \cos x$; **(b)** $f^{(6)}(x)$ if $f(x) = e^{-2x}$.

Lời giải chi tiết

(a) The cycle for $\cos x$ is $\cos x \rightarrow -\sin x \rightarrow -\cos x \rightarrow \sin x \rightarrow \cos x \rightarrow \dots$ (period 4, starting from the first derivative). Since $15 = 4(3) + 3$, the remainder is 3, and the third derivative in the cycle is $\sin x$:

$$f^{(15)}(x) = \sin x.$$

(b) Each differentiation of e^{-2x} multiplies by -2 , so $f^{(n)}(x) = (-2)^n e^{-2x}$. With $n = 6$ (even, so the sign is positive) and $(-2)^6 = 64$:

$$f^{(6)}(x) = 64 e^{-2x}.$$

Contextual Applications of Differentiation

Mục tiêu Unit: Diễn giải ý nghĩa của đạo hàm trong bối cảnh thực tế, kèm đơn vị và câu văn chính xác; phân tích chuyển động thẳng qua vị trí – vận tốc – tốc độ – gia tốc, xác định khi vật tăng tốc, giảm tốc, hay đổi hướng; thiết lập và diễn giải đạo hàm trong các bối cảnh phi chuyển động như kinh tế (chi phí biên, doanh thu biên, lợi nhuận biên), dân số, thể tích, diện tích; nắm vững phương pháp tốc độ liên hệ (related rates) theo quy trình năm bước và áp dụng cho hình cầu giãn nở, thang trượt, bóng đổ, và bể nước hình nón; xấp xỉ giá trị hàm số bằng đường tiếp tuyến (linearization) và vi phân (differentials), đánh giá sai số truyền; sử dụng quy tắc L'Hôpital để tính giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$ và $\frac{\infty}{\infty}$.

4.1 Interpreting the Derivative in Applied Context

4.1.1 Units of the derivative

Whenever $y = f(x)$ models a real quantity, the derivative $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ is itself a rate of change, and rates of change always carry **compound units**: units of the output divided by units of the input.

$$\text{units of } f'(x) = \frac{\text{units of } f(x)}{\text{units of } x}.$$

If $f(x)$ is measured in liters and x in minutes, then $f'(x)$ is measured in liters per minute. If $P(t)$ is a population count (people) and t is measured in years, $P'(t)$ is measured in people per year. The units of f' are never the same as the units of f itself – this is one of the most reliable checks that a derivative has been set up correctly.

The **sign** of $f'(a)$ tells the *direction* of change: positive means the quantity is increasing at $x = a$, negative means it is decreasing. The **magnitude** $|f'(a)|$ tells *how fast*: a large magnitude means rapid change, and a magnitude near 0 means the quantity is nearly stationary (momentarily) at that instant. It is important to remember that $f'(a)$ is an *instantaneous* rate – the rate at which f would change over the next unit of x if that instantaneous rate stayed constant, which in general it does not.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đơn vị của đạo hàm $f'(x)$ luôn là **đơn vị của f chia cho đơn vị của x** – không bao giờ trùng với đơn vị của chính f . Đây là cách kiểm tra nhanh xem một đạo hàm có được thiết lập đúng hay không. **Dấu** của $f'(a)$ cho biết đại lượng đang tăng hay giảm; **độ lớn** $|f'(a)|$ cho biết tốc độ thay đổi nhanh hay chậm. $f'(a)$ là tốc độ **tức thời** tại đúng thời điểm $x = a$, không phải tốc độ trung bình trên cả một khoảng.

4.1.2 Writing correct interpretation sentences

A correctly written interpretation of $f'(a) = k$ must contain four pieces of information: the identity of the quantity being described, the direction of change (increasing/decreasing, from the sign of k), the numerical rate $|k|$ together with its correct compound units, and the specific input value a (with its own units).

A template for interpretation sentences

"At [input value a , with units], [the quantity described by f] is [increasing / decreasing] at a rate of $[|k|]$, with compound units]."

A sentence that reports only the bare number k – with no units, no direction, and no mention of what quantity or instant is being discussed – is not an acceptable interpretation, even if the number itself is correct.

Ví dụ mẫu · Interpreting a derivative value

Let $W(t)$ be the number of gallons of water remaining in a fire truck's tank t minutes after it begins spraying water on a fire, with $W(6) = 450$ and $W'(6) = -25$. Interpret both values in the context of the problem.

$W(6) = 450$ is a *function value*: six minutes after spraying begins, the tank holds 450 gallons of water.

$W'(6) = -25$ is a *derivative value*, with units gallons per minute (gallons, the units of W , divided by minutes, the units of t). Since the sign is negative: at $t = 6$ minutes, the amount of water in the tank is *decreasing* at a rate of 25 gallons per minute.

It is worth distinguishing the **average** rate of change of f over an interval $[a, b]$, given by $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (the slope of a secant line through $(a, f(a))$ and $(b, f(b))$), from the **instantaneous** rate of change $f'(a)$ (the slope of the tangent line at the single point $x = a$). The average rate summarizes overall behavior across a whole interval and can hide large swings within it; $f'(a)$ describes behavior at one exact instant only. When a problem supplies an explicit formula for f , differentiation rules give $f'(a)$ exactly; when a problem supplies only a table of values, as below, an average rate of change over a nearby interval is the best available *estimate* of $f'(a)$.

Ví dụ mẫu · Estimating a rate from a table of values

The amount of water $W(t)$, in liters, in a drainage tank is recorded every 10 minutes:

t (min)	0	10	20	30	40
$W(t)$ (liters)	500	430	375	335	310

Use the data to estimate $W'(25)$, and write a sentence interpreting your result, including units.

Since $t = 25$ is not one of the recorded times, estimate $W'(25)$ using the average rate of change over the smallest available interval centered at $t = 25$, namely $[20, 30]$:

$$W'(25) \approx \frac{W(30) - W(20)}{30 - 20} = \frac{335 - 375}{10} = \frac{-40}{10} = -4 \text{ L/min.}$$

Interpretation: at $t = 25$ minutes, the amount of water in the tank is decreasing at an approximate rate of 4 liters per minute.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Khi đề bài cho một **bảng số liệu** rời rạc (không có công thức tường minh), ta ước lượng đạo hàm tại một thời điểm $t = a$ nằm giữa hai giá trị đã cho bằng **tốc độ thay đổi trung bình** (**average rate of change**) trên khoảng nhỏ nhất chứa a mà bảng cung cấp: $f'(a) \approx \frac{f(b) - f(c)}{b - c}$ với $c < a < b$ càng gần a càng tốt. Đây là kỹ thuật xuất hiện thường xuyên trong đề thi AP khi

dữ liệu chỉ có dạng bảng.

4.1.3 Function value versus rate of change

A recurring source of error in applied problems is confusing $f(a)$ (a **state** – how much of the quantity exists at $x = a$) with $f'(a)$ (a **rate** – how fast that quantity is changing at $x = a$). These two numbers answer entirely different questions and, in general, have no numerical relationship to each other: a quantity can be large but decreasing ($f(a)$ large, $f'(a) < 0$), small but increasing rapidly ($f(a)$ small, $f'(a)$ large and positive), or any other combination.

(!) Lỗi thường gặp: A written interpretation that reports a rate of change (units: [output]/[input]) without stating those compound units, or that reports a bare number with no sentence explaining what is increasing/decreasing and at what instant, will not communicate the intended meaning – and on a scored free-response item, will not earn full credit even if the numerical value is correct. Always attach the correct compound units and identify the specific instant being described.

4.2 Straight-Line Motion

4.2.1 Position, velocity, and acceleration

For a particle moving along a straight line (the x -axis or a number line), let $s(t)$ denote its **position** at time t . Two further functions are obtained by successive differentiation:

$$v(t) = s'(t) \quad (\text{velocity}), \quad a(t) = v'(t) = s''(t) \quad (\text{acceleration}).$$

Speed is defined as $|v(t)|$ – the magnitude of velocity – and is never negative. Velocity, by contrast, is *signed*: it encodes both how fast the particle is moving *and* which direction it is moving. The particle moves in the positive direction when $v(t) > 0$, in the negative direction when $v(t) < 0$, and is momentarily at rest when $v(t) = 0$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$s(t)$ là **vị trí**, $v(t) = s'(t)$ là **vận tốc** (có dấu – dương nghĩa là chuyển động theo chiều dương, âm nghĩa là chuyển động theo chiều âm), và $a(t) = v'(t) = s''(t)$ là **gia tốc**. **Tốc độ (speed)** = $|v(t)|$ luôn không âm – đây là đại lượng đo "độ nhanh chậm" thuần túy, không quan tâm chiều chuyển động. Vật đứng yên tức thời khi $v(t) = 0$.

4.2.2 Speed and the direction of motion

Because speed is $|v(t)|$, the particle "speeding up" means $|v(t)|$ is *increasing*, and "slowing down" means $|v(t)|$ is *decreasing*. Whether the speed is increasing or decreasing at a given instant is determined not by $v(t)$ alone, but by comparing the *signs* of $v(t)$ and $a(t)$ at that instant.

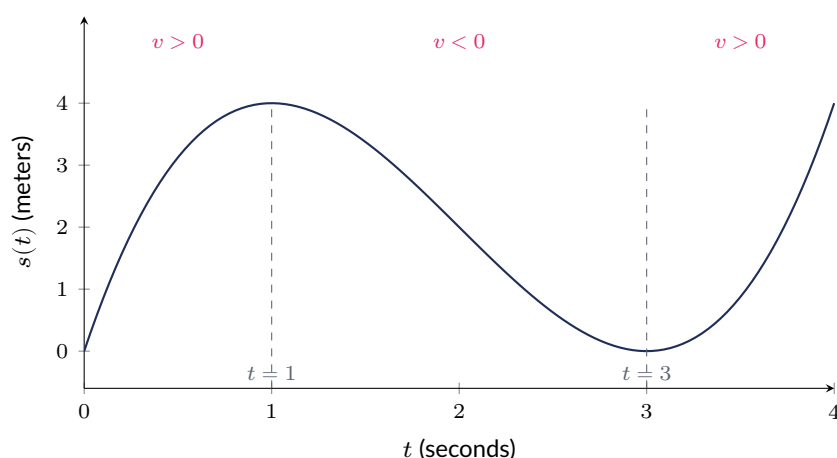
Speeding up versus slowing down: at a given instant t ,

- if $v(t)$ and $a(t)$ have the **same sign** (both positive or both negative), the speed $|v(t)|$ is **increasing** – the particle is speeding up;
- if $v(t)$ and $a(t)$ have **opposite signs**, the speed $|v(t)|$ is **decreasing** – the particle is slowing down;
- if $v(t) = 0$ or $a(t) = 0$ at that instant, the particle is (instantaneously) neither speeding up nor slowing down.

(!) Lỗi thường gặp: Velocity and speed are *not* the same quantity, and "the velocity is decreasing" does *not* mean "the particle is slowing down." For example, if $v(t)$ goes from -2 to -5 m/s, the velocity value has decreased ($-5 < -2$), yet the *speed* has increased from 2 to 5 m/s – the particle is moving in the negative direction and speeding up. Never judge speeding up/slowing down from whether $v(t)$ itself is numerically growing or shrinking; always compare the **signs** of $v(t)$ and $a(t)$.

4.2.3 Speeding up, slowing down, and changing direction

A zero of $v(t)$ means the particle is momentarily at rest, but this does *not* automatically mean the particle reverses direction there. The particle genuinely **changes direction** at $t = c$ only if $v(c) = 0$ and $v(t)$ actually changes sign as t passes through c (from positive to negative, or negative to positive). If $v(t) = 0$ at $t = c$ but $v(t)$ has the *same* sign immediately before and after c , the particle merely pauses and continues in the same direction.



Position $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. The curve rises where $v(t) > 0$ (moving right) and falls where $v(t) < 0$ (moving left). Direction reverses exactly where v changes sign, at $t = 1$ and $t = 3$.

Ví dụ mẫu · Full motion analysis of a cubic position function

A particle moves along a line with position $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (meters, t in seconds) for $0 \leq t \leq 4$, graphed above. Find when the particle is at rest, describe its direction of motion, determine when it speeds up or slows down, and state the times at which it changes direction.

Velocity: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$. Setting $v(t) = 0$ gives $t = 1$ and $t = 3$: the particle is at rest at these two instants.

Direction: testing a value in each sub-interval, $v(t) > 0$ on $(0, 1)$, $v(t) < 0$ on $(1, 3)$, and $v(t) > 0$ on $(3, 4)$. So the particle moves *right* on $(0, 1)$, *left* on $(1, 3)$, and *right* again on $(3, 4)$.

Acceleration: $a(t) = v'(t) = 6t - 12 = 6(t-2)$, so $a(t) < 0$ on $(0, 2)$ and $a(t) > 0$ on $(2, 4)$.

Speeding up / slowing down – compare the signs of v and a on each sub-interval:

Interval	sign of v	sign of a	same/opposite	conclusion
$(0, 1)$	+	–	opposite	slowing down
$(1, 2)$	–	–	same	speeding up
$(2, 3)$	–	+	opposite	slowing down
$(3, 4)$	+	+	same	speeding up

Change of direction: since $v(t)$ actually changes sign at $t = 1$ (from + to –) and again at $t = 3$ (from – to +), the particle reverses direction at **both** $t = 1$ and $t = 3$.

Ví dụ mẫu · Motion given by a velocity function directly

A particle moves along the x -axis with velocity $v(t) = t^2 - 6t + 5$ (m/s) for $0 \leq t \leq 6$. Determine whether the particle is speeding up or slowing down at $t = 4$, and find all times in $[0, 6]$ at which the particle changes direction.

Factor: $v(t) = (t - 1)(t - 5)$, so $v(t) = 0$ at $t = 1$ and $t = 5$. Testing signs: $v > 0$ on $[0, 1)$, $v < 0$ on $(1, 5)$, $v > 0$ on $(5, 6]$. Since v genuinely changes sign at both zeros, the particle **changes direction at $t = 1$ and at $t = 5$** .

Acceleration: $a(t) = v'(t) = 2t - 6 = 2(t - 3)$, so $a(t) < 0$ on $[0, 3)$ and $a(t) > 0$ on $(3, 6]$.

At $t = 4$: $v(4) = 16 - 24 + 5 = -3$ (so $v < 0$), and $a(4) = 2(4) - 6 = 2$ (so $a > 0$). Since $v(4) < 0$ and $a(4) > 0$ have **opposite signs**, the particle is **slowing down** at $t = 4$ (speed at that instant is $|v(4)| = 3$ m/s, and that speed is decreasing).

Note that $a(t) = 0$ at $t = 3$, but $v(3) = 9 - 18 + 5 = -4 \neq 0$ there – the acceleration vanishing does not cause a direction change; only a sign change in $v(t)$ does, and v does not change sign at $t = 3$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đừng lẫn hai loại "điểm đặc biệt": $v(t) = 0$ (vật **đứng yên tức thời** – chỉ đổi hướng nếu v thực sự đổi dấu quanh đó) và $a(t) = 0$ (chỉ là ranh giới giữa hai kiểu tăng/giảm tốc, **không** liên quan đến việc đổi hướng). Ở Ví dụ mẫu thứ hai, $a(3) = 0$ nhưng vật không hề đổi hướng tại $t = 3$ vì $v(3) = -4 \neq 0$ – gia tốc bằng 0 chỉ đánh dấu ranh giới chuyển từ "giảm tốc" sang "tăng tốc" (hoặc ngược lại), không phải điểm đổi chiều chuyển động.

4.3 Rates of Change Beyond Motion

4.3.1 Marginal cost, revenue, and profit

The derivative-as-rate-of-change idea applies far beyond motion. In economics, if $C(x)$ is the total cost (in dollars) to produce x units of a good, the derivative $C'(x)$ is called the **marginal cost**: the approximate cost, in dollars per unit, of producing one additional unit beyond the current production level x . Likewise, if $R(x)$ is total revenue from selling x units, $R'(x)$ is the **marginal revenue**; and if $P(x) = R(x) - C(x)$ is total profit, $P'(x) = R'(x) - C'(x)$ is the **marginal profit**.

Marginal quantities

For any total quantity $Q(x)$ that depends on the number of units x , the **marginal Q** at production level x is $Q'(x)$, with units [dollars, or whatever Q is measured in] per unit. A positive marginal profit at $x = x_0$ means producing more units beyond x_0 increases total profit; a negative marginal profit means producing more units beyond x_0 decreases total profit.

Ví dụ mẫu · Marginal cost, revenue, and profit

A company's cost to produce x office chairs is $C(x) = 0.01x^2 + 20x + 500$ dollars, and the revenue from selling x chairs is $R(x) = 60x - 0.02x^2$ dollars. Find the marginal cost, marginal revenue, and marginal profit at $x = 300$ units, and interpret the marginal profit.

Marginal cost: $C'(x) = 0.02x + 20$, so $C'(300) = 0.02(300) + 20 = 6 + 20 = \26 per chair.

Marginal revenue: $R'(x) = 60 - 0.04x$, so $R'(300) = 60 - 0.04(300) = 60 - 12 = \48 per chair.

Marginal profit: $P(x) = R(x) - C(x) = -0.03x^2 + 40x - 500$, so $P'(x) = -0.06x + 40$, and $P'(300) = -0.06(300) + 40 = -18 + 40 = \22 per chair. (Check: $R'(300) - C'(300) = 48 - 26 = 22$, consistent.)

Interpretation: at a production level of 300 chairs, profit is increasing at approximately \$22 for each additional chair produced – since marginal revenue (\$48) exceeds marginal cost (\$26), producing more chairs beyond 300 is profitable.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Chi phí biên (marginal cost) $C'(x)$ xấp xỉ chi phí để sản xuất thêm **một** đơn vị kể từ mức x ; tương tự cho **doanh thu biên** $R'(x)$ và **lợi nhuận biên** $P'(x) = R'(x) - C'(x)$. Nếu lợi nhuận biên dương tại một mức sản lượng, công ty nên tiếp tục tăng sản lượng (lợi nhuận còn đang tăng); nếu âm, nên giảm sản lượng. Mức sản lượng tối ưu (lợi nhuận cao nhất) chính là nơi $P'(x) = 0$, tức doanh thu biên bằng chi phí biên.

4.3.2 Other applied rates of change

The same idea – differentiate a total-quantity function with respect to its input, then read off sign and units – applies to population counts, volumes, areas, and countless other applied quantities. The essential skill is simply setting up the correct function and units before differentiating. In every case, the input variable does not have to be time: a chemist might track the rate of change of reaction yield with respect to temperature, or a physiologist the rate of change of drug concentration with respect to dosage. Whatever the input variable represents, the same interpretation rules from the beginning of this chapter still govern how the resulting derivative is read: units of output per unit of input, sign gives direction, and magnitude gives speed of change.

Ví dụ mẫu · Rate of change of a population

The number of subscribers to a streaming service, in thousands, t months after launch is modeled for $0 \leq t \leq 30$ by

$$S(t) = 800 + 120t - 3t^2.$$

Find $S'(t)$, evaluate and interpret $S'(10)$ and $S'(25)$, and determine the month in which the subscriber count stops growing.

$S'(t) = 120 - 6t$ (thousand subscribers per month).

$S'(10) = 120 - 6(10) = 120 - 60 = 60$: at $t = 10$ months, the number of subscribers is *increasing* at a rate of about 60,000 subscribers per month.

$S'(25) = 120 - 6(25) = 120 - 150 = -30$: at $t = 25$ months, the number of subscribers is *decreasing* at a rate of about 30,000 subscribers per month.

Growth stops when $S'(t) = 0$: $120 - 6t = 0 \Rightarrow t = 20$. At $t = 20$ **months**, the subscriber count is momentarily neither increasing nor decreasing (its maximum).

Ví dụ mẫu · Rate of change of a melting volume

A block of ice has volume $V(t) = 1200 - 8t^2$ cubic centimeters, t minutes after being removed from a freezer, for $0 \leq t \leq 10$. Find the rate at which the volume is changing at $t = 5$ minutes, and interpret the sign and units of the result.

$V'(t) = -16t$, so $V'(5) = -16(5) = -80$ cm³/min. At $t = 5$ minutes, the volume of the ice block is *decreasing* at a rate of 80 cubic centimeters per minute – the ice is melting.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kỹ thuật chung không đổi dù bối cảnh là gì: xác định hàm biểu diễn **tổng lượng** theo biến độc lập (thường là thời gian), lấy đạo hàm, rồi đọc **dấu** (tăng hay giảm) và **đơn vị** (luôn là đơn vị đại

lượng chia đơn vị biến). Lưu ý sự khác biệt với phần **tốc độ liên hệ (related rates)** ở các mục tiếp theo: ở đây chỉ có một hàm phụ thuộc thời gian được cho trực tiếp, còn related rates liên quan hai (hay nhiều) đại lượng ràng buộc với nhau bởi một phương trình hình học hoặc đại số.

4.4 Related Rates: The General Method

4.4.1 The general method for related rates

A **related rates** problem involves two or more quantities that are all changing with time and are linked by a fixed geometric or algebraic relationship. Knowing the rate of change of one quantity at a particular instant, the goal is to find the rate of change of another quantity at that same instant.

Every variable in a related rates problem is implicitly a function of time, even though t rarely appears explicitly in the relating equation itself. Differentiating with respect to t is therefore always an application of the **chain rule**: for instance, $\frac{d}{dt}(r^3) = 3r^2 \frac{dr}{dt}$, because r is secretly $r(t)$, and differentiating $r(t)^3$ with respect to t requires the chain rule exactly as differentiating $(g(x))^3$ with respect to x would.

Five-step strategy for related rates

1. **Identify variables.** List every quantity that changes with time, assign it a symbol, and note which rates are given and which rate is unknown. Draw and label a diagram if the problem is geometric.
2. **Write a relating equation.** Find a single equation, valid at every instant of time (not just the instant in question), that connects the variables – typically a geometric formula (area, volume, Pythagorean theorem, similar triangles) or a given algebraic relationship.
3. **Differentiate implicitly with respect to t .** Apply $\frac{d}{dt}$ to both sides of the equation, using the chain rule for every variable that depends on t (this is exactly implicit differentiation, treating t as the independent variable).
4. **Substitute known numerical values – after differentiating, never before.** Plug in the specific values of the variables and known rates that describe the instant in question.
5. **Solve for the unknown rate,** and state the answer with correct units, including a sentence of interpretation if the problem asks for one.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy trình năm bước cho related rates: (1) liệt kê các đại lượng thay đổi theo thời gian; (2) viết một **phương trình liên hệ** đúng tại **mọi** thời điểm; (3) **đạo hàm ẩn theo t** cả hai vế (dùng chain rule cho mỗi biến phụ thuộc t); (4) **chỉ sau khi đã đạo hàm**, mới thay các giá trị số đã biết vào; (5) giải ra tốc độ cần tìm, kèm đơn vị. Thứ tự bước (3) trước bước (4) là điều quan trọng nhất của toàn bộ chủ đề này.

(!) Lỗi thường gặp: The single most common fatal error in related rates is substituting the known numerical values into the relating equation **before** differentiating. For example, in a problem about a sphere with $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, if a student is told $r = 5$ cm at the instant in question and immediately substitutes to get $V = \frac{4}{3}\pi(5)^3 = \frac{500\pi}{3}$ – now a fixed number – and then differentiates, they will get $\frac{dV}{dt} = 0$, since the derivative of a constant is 0. This is wrong. The relating equation $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ must be differentiated **first**, while r is still treated as a variable

function of t , giving $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$ - *only then* is $r = 5$ substituted into this derivative equation.

Ví dụ mẫu · A first related-rates computation

Suppose x and y are both differentiable functions of t satisfying $x^2 + y^2 = 25$. At the instant when $x = 3$ (and $y = 4 > 0$), $\frac{dx}{dt} = 3$. Find $\frac{dy}{dt}$ at that instant.

Differentiate implicitly with respect to t :

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(25) \implies 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0.$$

Now substitute $x = 3$, $y = 4$, $\frac{dx}{dt} = 3$ (after differentiating, as required):

$$2(3)(3) + 2(4) \frac{dy}{dt} = 0 \implies 18 + 8 \frac{dy}{dt} = 0 \implies \frac{dy}{dt} = -\frac{18}{8} = -\frac{9}{4}.$$

So $\frac{dy}{dt} = -2.25$ at that instant.

4.5 Solving Related Rates Problems

4.5.1 An expanding sphere

Ví dụ mẫu · A spherical balloon being inflated

A spherical weather balloon is inflated with helium gas pumped in at a constant rate of $8 \text{ m}^3/\text{min}$. Find the rate at which the radius is increasing at the instant the radius is 2 meters.

Step 1 – variables: let V be the volume and r the radius of the balloon, both functions of t .

Given: $\frac{dV}{dt} = 8 \text{ m}^3/\text{min}$ (constant). Find $\frac{dr}{dt}$ when $r = 2 \text{ m}$.

Step 2 – relating equation: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Step 3 – differentiate with respect to t :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}.$$

Step 4 – substitute $\frac{dV}{dt} = 8$ and $r = 2$:

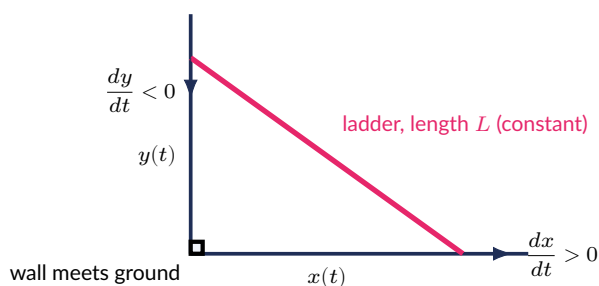
$$8 = 4\pi(2)^2 \frac{dr}{dt} = 16\pi \frac{dr}{dt}.$$

Step 5 – solve:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{8}{16\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx 0.159 \text{ m/min}.$$

At the instant the radius is 2 m, the radius is increasing at about 0.159 meters per minute.

4.5.2 A ladder sliding down a wall



A ladder of fixed length L leans against a vertical wall. As the foot slides away from the wall ($x(t)$ increasing), the top slides down the wall ($y(t)$ decreasing).

Ví dụ mẫu · A ladder sliding down a wall

A 10-meter ladder leans against a vertical wall. The bottom of the ladder is pulled away from the wall at a constant rate of 1.2 m/s. How fast is the top of the ladder sliding down the wall at the instant the bottom of the ladder is 6 m from the wall?

Variables: let $x(t)$ be the distance from the wall to the foot of the ladder, and $y(t)$ the height of the top of the ladder on the wall. Given $\frac{dx}{dt} = 1.2$ m/s (constant, since the ladder length is fixed at 10 m). Find $\frac{dy}{dt}$ when $x = 6$ m.

Relating equation (Pythagorean theorem, true at every instant): $x^2 + y^2 = 10^2 = 100$.

When $x = 6$: $y^2 = 100 - 36 = 64$, so $y = 8$ m.

Differentiate with respect to t :

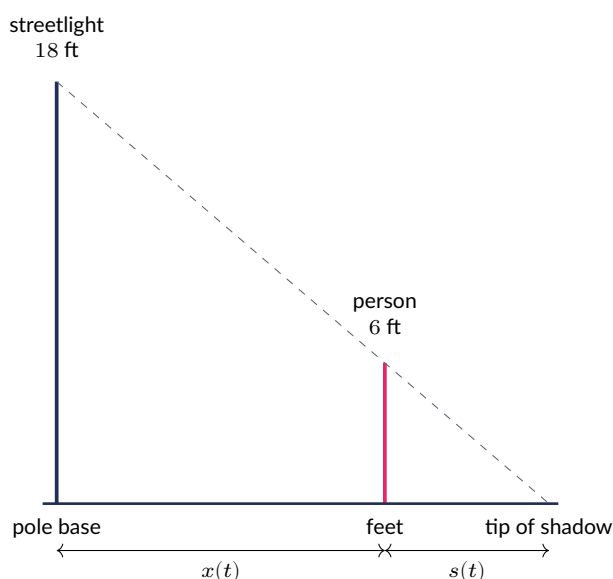
$$2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \implies x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0.$$

Substitute $x = 6$, $y = 8$, $\frac{dx}{dt} = 1.2$:

$$(6)(1.2) + 8 \frac{dy}{dt} = 0 \implies 7.2 + 8 \frac{dy}{dt} = 0 \implies \frac{dy}{dt} = -\frac{7.2}{8} = -0.9 \text{ m/s}.$$

The top of the ladder is sliding down the wall at 0.9 m/s at the instant the bottom is 6 m from the wall. (The negative sign is expected: y is decreasing.)

4.5.3 A shadow lengthening along the ground



Similar triangles: the large triangle (pole, ground, light ray) and the small triangle (person, ground, same light ray) share the same light ray as hypotenuse, so their height-to-base ratios are equal.

Ví dụ mẫu · A shadow problem via similar triangles

A street lamp is 18 ft above the ground. A person 6 ft tall walks away from the lamp at a constant rate of 5 ft/s. At what rate is the length of the person's shadow increasing? At what rate is the tip of the shadow moving away from the pole?

Variables: let $x(t)$ be the distance of the person from the base of the pole, and $s(t)$ the length of the person's shadow, both in feet. Given $\frac{dx}{dt} = 5$ ft/s. Find $\frac{ds}{dt}$.

Relating equation: the pole, the person, and the light ray to the tip of the shadow form two similar right triangles (as shown above), so the ratio of height to base is the same for both:

$$\frac{18}{x+s} = \frac{6}{s} \Rightarrow 18s = 6(x+s) = 6x + 6s \Rightarrow 12s = 6x \Rightarrow s = \frac{x}{2}.$$

Because this relationship holds at every instant, it is valid to differentiate directly:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(5) = 2.5 \text{ ft/s.}$$

The shadow is lengthening at 2.5 ft/s.

The tip of the shadow is located at distance $x + s$ from the pole, so its speed is

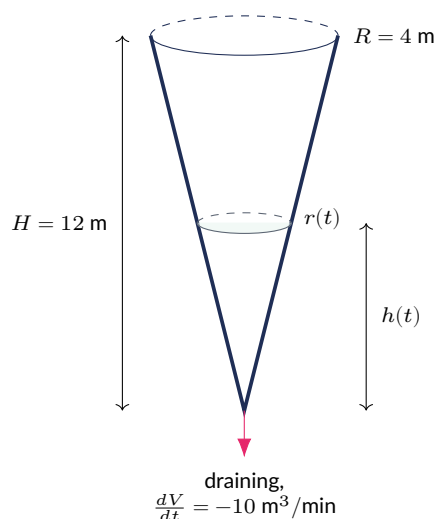
$$\frac{d}{dt}(x+s) = \frac{dx}{dt} + \frac{ds}{dt} = 5 + 2.5 = 7.5 \text{ ft/s.}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bài toán "bóng đổ" luôn dựa trên **tam giác đồng dạng**: chiều cao chia để của tam giác lớn (cột đèn) bằng chiều cao chia để của tam giác nhỏ (người). Vì tỉ lệ này là một **hằng số hình học** đúng tại mọi thời điểm, ta có thể rút gọn thành một phương trình tuyến tính đơn giản ($s = \frac{x}{2}$ trong ví dụ trên) rồi đạo hàm trực tiếp – không cần dùng công thức đạo hàm của thương số.

4.5.4 A draining conical tank



Inverted conical tank, height $H = 12 \text{ m}$ and top radius $R = 4 \text{ m}$. At water depth $h(t)$, the water's surface has radius $r(t)$, and similar triangles force $r/h = R/H = 1/3$ at every instant.

Ví dụ mẫu · A draining conical tank

Water drains from an inverted conical tank of height 12 m and top radius 4 m at a constant rate of $10 \text{ m}^3/\text{min}$. Find the rate at which the water level is falling at the instant the water is 6 m deep.

Variables: let V be the volume of water, h the depth of water, and r the radius of the water's surface, all functions of t . Given $\frac{dV}{dt} = -10 \text{ m}^3/\text{min}$ (negative, since draining). Find $\frac{dh}{dt}$ when $h = 6 \text{ m}$.

Relating equation: the volume of a cone is $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. This has two time-dependent variables, r and h , so first eliminate r using similar triangles: since the full tank has radius 4 at height 12, at every instant $\frac{r}{h} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, i.e. $r = \frac{h}{3}$. Substituting,

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{3}\right)^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{h^2}{9} \cdot h = \frac{\pi h^3}{27}.$$

Differentiate with respect to t (only V and h remain, both functions of t):

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{27} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\pi h^2}{9} \frac{dh}{dt}.$$

Substitute $\frac{dV}{dt} = -10$ and $h = 6$:

$$-10 = \frac{\pi(6)^2}{9} \frac{dh}{dt} = \frac{36\pi}{9} \frac{dh}{dt} = 4\pi \frac{dh}{dt}.$$

Solve:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{-10}{4\pi} = -\frac{5}{2\pi} \approx -0.796 \text{ m/min}.$$

At the instant the water is 6 m deep, the water level is falling at about 0.796 meters per minute.

(!) Lỗi thường gặp: In the conical tank example, the volume formula $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ contains two variables that both change with time, r and h , but only one rate is wanted (dh/dt) and only one is given (dV/dt). Differentiating $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ directly (using the product rule on $r^2 h$) would introduce an extra unknown rate dr/dt with no way to find it. The fix is always to first use the fixed geometric relationship between r and h (here, similar triangles, $r = h/3$) to rewrite V as a function of h alone, and only then differentiate with respect to t .

4.6 Approximating Values Using Local Linearity

4.6.1 The tangent line as a local approximation

If f is differentiable at $x = a$, the tangent line to the graph of f at the point $(a, f(a))$ is called the **linearization** of f at a :

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Local linearity is the principle that, for x sufficiently close to a , the curve $y = f(x)$ is very well approximated by its tangent line: $f(x) \approx L(x)$. This is the same idea used to *define* the derivative in the first place (the tangent line is the limit of secant lines), used here in reverse – to estimate function values near a point where $f(a)$ and $f'(a)$ are known or easy to compute exactly.

The quality of the approximation $f(x) \approx L(x)$ degrades as x moves farther from a , because the tangent line is a *straight* line while the actual curve may bend away from it. This is why linearization is only reliable “locally” – near the point of tangency.

Linearization is useful precisely because $f(a)$ and $f'(a)$ are often easy to compute exactly (for a “nice” input a , such as a perfect square or a point where a formula simplifies), while $f(x)$ at a nearby but “messy” input x is not. Estimating $f(x)$ by evaluating the much simpler linear function $L(x)$ avoids the need for a calculator or a more complicated exact computation, at the cost of a small, predictable amount of error.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Đường tiếp tuyến tại $x = a$, viết dưới dạng $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, được gọi là **xấp xỉ tuyến tính (linearization)** của f tại a . Nguyên lý **tuyến tính hoá địa phương (local linearity)**: khi x đủ gần a , đồ thị $y = f(x)$ gần như trùng với đường tiếp tuyến, nên $f(x) \approx L(x)$. Xấp xỉ này càng **kém chính xác** khi x càng xa a , vì đường thẳng không thể “bám” theo độ cong của đồ thị mãi mãi.

Ví dụ mẫu · Linearizing the square-root function

Use linearization to approximate $\sqrt{4.1}$, based on $f(x) = \sqrt{x}$ at $a = 4$.

$$f(4) = 2. \quad f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ so } f'(4) = \frac{1}{4}.$$

$$L(x) = 2 + \frac{1}{4}(x - 4) \implies L(4.1) = 2 + \frac{1}{4}(0.1) = 2 + 0.025 = 2.025.$$

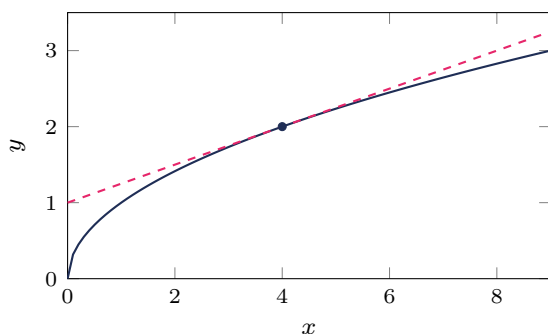
(For comparison, the true value is $\sqrt{4.1} \approx 2.02485$, so the linear approximation is accurate to about 0.00015.)

4.6.2 Overestimates, underestimates, and concavity

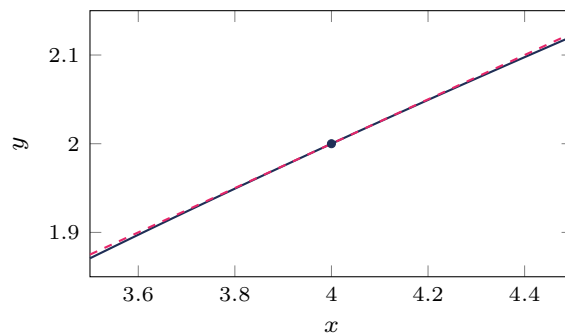
Whether $L(x)$ over- or under-estimates the true value $f(x)$ near $x = a$ is controlled entirely by the **concavity** of f near a – that is, by the sign of f'' .

- If $f''(x) > 0$ near a (**concave up**), the tangent line lies *below* the curve, so $L(x)$ **underestimates** $f(x)$.
- If $f''(x) < 0$ near a (**concave down**), the tangent line lies *above* the curve, so $L(x)$ **overestimates** $f(x)$.

For $f(x) = \sqrt{x}$ above, $f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} < 0$ for all $x > 0$, so f is concave down everywhere on its domain; the linearization $L(4.1) = 2.025$ should therefore *overestimate* the true value – and indeed $2.025 > 2.02485$, confirming the concavity argument.



Full view on $[0, 9]$: $f(x) = \sqrt{x}$ (solid) and its tangent line $L(x)$ at $a = 4$ (dashed). The lines visibly separate away from $a = 4$.



Zoomed to $[3.5, 4.5]$: near $a = 4$ the curve and the tangent line are nearly indistinguishable – this is local linearity.

Ví dụ mẫu · Reasoning about over/underestimates without a formula

Suppose $f(3) = 7$, $f'(3) = -2$, and $f''(x) > 0$ for all x near 3. Use linearization to estimate $f(3.2)$, and state whether this estimate is larger or smaller than the true value of $f(3.2)$.

$$L(x) = f(3) + f'(3)(x - 3) = 7 - 2(x - 3) \implies L(3.2) = 7 - 2(0.2) = 7 - 0.4 = 6.6.$$

Since $f''(x) > 0$ near $x = 3$, f is concave up there, so the tangent line lies *below* the curve. Therefore $L(3.2) = 6.6$ is an **underestimate**: the true value of $f(3.2)$ is greater than 6.6.

Ví dụ mẫu · Linearizing the sine function near zero

Use linearization to approximate $\sin(0.1)$ (radians), based on $f(x) = \sin x$ at $a = 0$, and determine whether the approximation is an over- or underestimate.

$f(0) = 0$, $f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$. So $L(x) = 0 + 1(x - 0) = x$, and $L(0.1) = 0.1$.

Since $f''(x) = -\sin x$, and $\sin x > 0$ for $x \in (0, 0.1]$, we have $f''(x) < 0$ on this interval: f is concave down just to the right of $a = 0$, so the tangent line lies *above* the curve there, and $L(0.1) = 0.1$ **overestimates** $\sin(0.1)$. (Indeed, $\sin(0.1) \approx 0.09983$, slightly less than 0.1.)

4.7 Differentials

4.7.1 The differential and propagated error

Closely related to linearization is the notion of a **differential**. Writing $\Delta x = dx$ for a small change in x , the **differential** of $y = f(x)$ is defined as

$$dy = f'(x) dx.$$

The differential dy approximates the **true change** $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ for small Δx : $\Delta y \approx dy$. This is exactly the same approximation as linearization, restated in differential notation: $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x) \Delta x$, i.e. $f(x + \Delta x) - f(x) \approx dy$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vi phân (differential) $dy = f'(x) dx$ là một **xấp xỉ** của **độ biến thiên thực** $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, khi $\Delta x = dx$ đủ nhỏ. Về bản chất, đây chính là ý tưởng xấp xỉ tuyến tính viết dưới dạng ký hiệu vi phân - dy luôn là một giá trị **gần đúng**, không phải giá trị chính xác của Δy (trừ khi f là hàm bậc nhất).

Ví dụ mẫu · Comparing the differential to the true change

Let $y = f(x) = x^3$, and let x change from 2 to 2.1 (so $dx = \Delta x = 0.1$). Compute the differential dy and the true change Δy , and compare.

$$f'(x) = 3x^2, \text{ so } dy = f'(2) dx = 3(2)^2(0.1) = 3(4)(0.1) = 1.2.$$

$$\text{True change: } \Delta y = f(2.1) - f(2) = (2.1)^3 - 2^3 = 9.261 - 8 = 1.261.$$

The differential $dy = 1.2$ is close to, but not exactly equal to, the true change $\Delta y = 1.261$ - the difference (0.061) is the error introduced by using the (straight) tangent line instead of the (curved) graph of f .

(!) Lỗi thường gặp: The differential dy is an **approximation** of Δy , not an exact restatement of it - the two are generally different numbers, as the example above shows ($dy = 1.2$ versus $\Delta y = 1.261$). Writing " $dy = \Delta y$ " as though they are always identical is incorrect; the correct relationship is $\Delta y \approx dy$ for small dx , with the approximation improving as $dx \rightarrow 0$.

Ví dụ mẫu · Propagated error using differentials

The radius of a sphere is measured to be $r = 10$ cm, with a possible measurement error of $dr = \pm 0.1$ cm. Use differentials to estimate the resulting error in the computed volume, and express this as a percent error.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \text{ so } \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2. \text{ At } r = 10:$$

$$dV = 4\pi(10)^2 dr = 400\pi(0.1) = 40\pi \approx 125.66 \text{ cm}^3.$$

The volume computed from the measured radius, $V(10) = \frac{4}{3}\pi(10)^3 = \frac{4000\pi}{3} \approx 4188.79 \text{ cm}^3$, therefore carries a propagated error of about $\pm 125.66 \text{ cm}^3$.

Percent error:

$$\frac{dV}{V} \times 100\% = \frac{40\pi}{4000\pi/3} \times 100\% = \frac{40 \times 3}{4000} \times 100\% = 3\%.$$

This matches the general rule for a power relationship $V \propto r^3$: a relative error of $\frac{dr}{r} = \frac{0.1}{10} = 1\%$ in the radius propagates to a relative error of $3 \times 1\% = 3\%$ in the volume (the exponent 3 multiplies the relative error).

4.8 L'Hopital's Rule for Indeterminate Limits

4.8.1 Statement and conditions of the rule

Some limits of the form $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ cannot be evaluated by direct substitution because doing so produces a meaningless expression such as $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$ – these are called **indeterminate forms**. L'Hopital's Rule gives a way to evaluate such limits using derivatives.

L'Hopital's Rule. Suppose f and g are differentiable near c (except possibly at c itself), $g'(x) \neq 0$ near c , and

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} \text{ is of the form } \frac{0}{0} \text{ or } \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Then

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

provided the limit on the right exists (as a finite number) or is $\pm\infty$. The rule applies equally to one-sided limits and to limits as $x \rightarrow \pm\infty$.

Two conditions are essential and frequently overlooked. First, L'Hopital's Rule applies *only* to the indeterminate forms $\frac{0}{0}$ and $\frac{\infty}{\infty}$ (and, after algebraic rewriting, a few related forms) – it must **never** be applied to a limit that is not indeterminate, even if it looks superficially similar. Second, if applying the rule once produces *another* indeterminate form, the rule may be applied again – but the indeterminate form must be verified freshly **before every single application**, not assumed to persist automatically.

It is also worth emphasizing what L'Hopital's Rule is *not*: it does not say to apply the quotient rule to $\frac{f(x)}{g(x)}$. Instead, the numerator and denominator are differentiated **separately**, and the new derivatives are placed in a brand-new fraction $\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Confusing the two procedures is a common source of algebra errors even among students who correctly recognize the indeterminate form.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc L'Hôpital chỉ áp dụng được cho các **dạng vô định** $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$: lấy đạo hàm tử số và mẫu số **riêng biệt** (không phải đạo hàm của cả phân thức theo quy tắc thương số!), rồi tính lại giới hạn. Nếu sau một lần áp dụng vẫn còn ra dạng vô định, có thể áp dụng tiếp – nhưng **mỗi lần** đều phải kiểm tra lại xem có đúng là dạng vô định hay không trước khi đạo hàm thêm một lần nữa.

(!) Lỗi thường gặp: L'Hopital's Rule may be applied **only** when the limit is genuinely in the form $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$. For example, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x+2}$ is *not* indeterminate: direct substitution gives $\frac{0+4}{0+2} = \frac{4}{2} = 2$, a perfectly well-defined finite answer. A student who mistakenly applies L'Hopital's Rule anyway – differentiating numerator and denominator to get $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$ – obtains the **wrong** answer (1 instead of the correct 2). Before invoking the rule, always substitute first to confirm the limit truly is $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$.

4.8.2 Worked applications

Ví dụ mẫu · A single application, form zero over zero

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$.

Direct substitution gives $\frac{e^0 - 1}{0} = \frac{0}{0}$, an indeterminate form, so L'Hopital's Rule applies. Differentiate numerator and denominator separately:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = e^0 = 1.$$

Check (Taylor series): $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$, so $e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \dots$, and dividing by x gives $1 + \frac{x}{2} + \dots \rightarrow 1$ as $x \rightarrow 0$. Consistent.

Ví dụ mẫu · A single application, form infinity over infinity

Evaluate $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$.

As $x \rightarrow \infty$, both $\ln x \rightarrow \infty$ and $x \rightarrow \infty$, so this is $\frac{\infty}{\infty}$. Differentiate numerator and denominator:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

This confirms the standard fact that $\ln x$ grows more slowly than x as $x \rightarrow \infty$.

Ví dụ mẫu · Two applications, rechecking the indeterminate form each time

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

Check the form: at $x = 0$, numerator = $1 - \cos 0 = 0$, denominator = 0: form $\frac{0}{0}$. Apply L'Hopital once:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}.$$

Recheck the form before differentiating again: at $x = 0$, numerator = $\sin 0 = 0$, denominator = $2(0) = 0$: still $\frac{0}{0}$. Apply L'Hopital a *second* time:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Check (Taylor series): $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots$, so $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \dots$, and dividing by x^2 gives $\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24} + \dots \rightarrow \frac{1}{2}$ as $x \rightarrow 0$. Consistent.

Why the indeterminate form must be rechecked before each step

After one application of L'Hopital's Rule, the resulting limit is not automatically indeterminate again. If the new limit already evaluates to a definite finite number or $\pm\infty$ by direct substitution, that is the final answer – differentiating a second time would change the expression into something unrelated to the original limit and would generally produce an incorrect result.

4.9 Problem Bank

Bài tập luyện tập

If $C(x)$ is the cost, in dollars, to produce x office chairs, what are the units of $C'(250)$?

- (A) chairs
(B) dollars
(C) dollars per chair
(D) chairs per dollar

Lời giải chi tiết

$C'(x) = \frac{dC}{dx}$ has units of C (dollars) divided by units of x (chairs): dollars per chair. (C).

Bài tập luyện tập

Let $A(t)$ be the number of gallons of water in a swimming pool t hours after an automatic pump is turned on, and suppose $A(3) = 850$ and $A'(3) = 40$. Write one sentence interpreting $A(3) = 850$, and one sentence interpreting $A'(3) = 40$, including units. Then briefly explain the difference between what each value tells you.

Lời giải chi tiết

$A(3) = 850$: three hours after the pump is turned on, the pool contains 850 gallons of water (a *state*, measured in gallons). $A'(3) = 40$ gallons per hour: at $t = 3$ hours, the amount of water in the pool is *increasing* at a rate of 40 gallons per hour (a *rate*, measured in gallons/hour). $A(3)$ tells you how much water is present at that instant; $A'(3)$ tells you how fast that amount is changing at that instant – the two carry different units and answer different questions.

Bài tập luyện tập

A cup of coffee has temperature $F(t)$, in degrees Fahrenheit, t minutes after being poured, with $F(5) = 145$ and $F'(5) = -6$. A student writes: “The temperature of the coffee at $t = 5$ is -6 .” Explain what is wrong with this statement, and write a corrected pair of sentences describing $F(5)$ and $F'(5)$.

Lời giải chi tiết

The student has confused the derivative value with the function value: $F'(5) = -6$ is a *rate of change* (units °F per minute), not a temperature, and a temperature cannot correctly be reported as a bare number with no units. Corrected: $F(5) = 145$ means that at $t = 5$ minutes, the coffee’s temperature is 145°F. $F'(5) = -6$ °F/min means that at $t = 5$ minutes, the coffee’s temperature is *decreasing* at a rate of 6°F per minute.

Bài tập luyện tập

A particle moves along the x -axis with position $s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$ (meters) for $t \geq 0$. For which interval is the particle moving in the negative direction?

- (A) $0 < t < 3$
(B) $t > 3$
(C) $0 < t < 1$
(D) never

Lời giải chi tiết

$v(t) = s'(t) = -3t^2 + 6t + 9 = -3(t^2 - 2t - 3) = -3(t - 3)(t + 1)$. For $t \geq 0$, the only relevant zero is $t = 3$. Testing $t = 0$: $v(0) = 9 > 0$; testing $t = 4$: $v(4) = -3(16) + 24 + 9 = -15 < 0$. So $v(t) < 0$ for $t > 3$. **(B)**.

Bài tập luyện tập

For the same position function $s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$, determine whether the particle is speeding up or slowing down at $t = 2$ and at $t = 4$.

Lời giải chi tiết

$v(t) = -3t^2 + 6t + 9$ and $a(t) = v'(t) = -6t + 6 = -6(t - 1)$.

At $t = 2$: $v(2) = -3(4) + 12 + 9 = 9 > 0$; $a(2) = -6(2 - 1) = -6 < 0$. Opposite signs $\Rightarrow$ **slowing down**.

At $t = 4$: $v(4) = -3(16) + 24 + 9 = -15 < 0$; $a(4) = -6(4 - 1) = -18 < 0$. Same sign $\Rightarrow$ **speeding up**.

Bài tập luyện tập

A particle moves along a line with velocity $v(5) = -8$ m/s. What is the particle's speed at $t = 5$?

(A) -8 m/s

(C) 0 m/s

(B) 8 m/s

(D) cannot be determined

Lời giải chi tiết

Speed is $|v(t)|$, so the speed at $t = 5$ is $|-8| = 8$ m/s. **(B)**.

Bài tập luyện tập

A particle moves along the x -axis with velocity $v(t) = t^2 - 5t + 4$ for $0 \leq t \leq 6$. Find all times in this interval at which the particle changes direction, and justify your answer.

Lời giải chi tiết

Factor: $v(t) = (t - 1)(t - 4)$, zero at $t = 1, 4$. Testing signs: $v(0) = 4 > 0$; $v(2) = 4 - 10 + 4 = -2 < 0$; $v(5) = 25 - 25 + 4 = 4 > 0$. So $v > 0$ on $[0, 1)$, $v < 0$ on $(1, 4)$, $v > 0$ on $(4, 6]$ – velocity changes sign at both zeros, so the particle **changes direction** at $t = 1$ and $t = 4$.

Bài tập luyện tập

The cost to produce x units of a product is $C(x)$ dollars, and $C'(400) = 12.5$. Which statement correctly interprets this value?

(A) It costs exactly \$12.50 to produce the 400th unit.

(C) The cost of producing one additional unit beyond 400 is approximately \$12.50.

(B) The average cost per unit at 400 units is \$12.50.

(D) Total cost is decreasing at 400 units.

Lời giải chi tiết

Marginal cost $C'(x)$ is an instantaneous rate that *approximates* the cost of one more unit – it is neither an exact discrete cost nor an average cost, and it is positive here, so cost is increasing, not decreasing. **(C)**.

Bài tập luyện tập

Using $C(x) = 0.01x^2 + 20x + 500$ and $R(x) = 60x - 0.02x^2$ (dollars) from the worked marginal-analysis example, (a) find the marginal profit at $x = 500$ units and interpret it, and (b) find the production level at which marginal profit equals zero.

Lời giải chi tiết

(a) $C'(x) = 0.02x + 20 \Rightarrow C'(500) = 10 + 20 = \$30/\text{unit}$. $R'(x) = 60 - 0.04x \Rightarrow R'(500) = 60 - 20 = \$40/\text{unit}$. Marginal profit $P'(500) = R'(500) - C'(500) = 40 - 30 = \$10/\text{unit}$: at a production level of 500 units, profit is increasing at about \$10 for each additional unit, so increasing production is worthwhile.

(b) $P(x) = R(x) - C(x) = -0.03x^2 + 40x - 500$, so $P'(x) = -0.06x + 40$. Setting $P'(x) = 0$: $x = \frac{40}{0.06} = \frac{2000}{3} \approx 666.7$ units – the (continuous) profit-maximizing production level, where marginal revenue equals marginal cost.

Bài tập luyện tập

A bacteria population is modeled, in thousands, by $N(t) = 200 + 45t - 1.5t^2$ for $0 \leq t \leq 20$ hours. (a) Find $N'(t)$ and interpret $N'(6)$, with units. (b) Find the time at which the population is at its maximum, and the maximum population.

Lời giải chi tiết

(a) $N'(t) = 45 - 3t$ (thousand bacteria per hour). $N'(6) = 45 - 18 = 27$: at $t = 6$ hours, the population is increasing at about 27,000 bacteria per hour.

(b) $N'(t) = 0 \Rightarrow 45 - 3t = 0 \Rightarrow t = 15$ hours. $N(15) = 200 + 45(15) - 1.5(15)^2 = 200 + 675 - 337.5 = 537.5$ thousand bacteria, i.e. about 537,500 bacteria.

Bài tập luyện tập

A block of ice has volume $V(t) = 1200 - 8t^2$ cubic centimeters, t minutes after being removed from a freezer, for $0 \leq t \leq 10$. Find the rate at which the volume is changing at $t = 3$ minutes, and interpret the sign of your answer.

Lời giải chi tiết

$V'(t) = -16t$, so $V'(3) = -48 \text{ cm}^3/\text{min}$. At $t = 3$ minutes, the volume of the ice block is decreasing (melting) at a rate of 48 cubic centimeters per minute.

Bài tập luyện tập

Which of the following is the correct final step in solving a related rates problem?

- (A) Substitute all known numerical values into the relating equation, then differentiate.
- (B) Differentiate the relating equation implicitly with respect to time, then substitute known numerical values.
- (C) Solve for the unknown variable algebraically without ever differentiating.
- (D) Substitute known values into the derivative equation before actually differentiating.

Lời giải chi tiết

The relating equation must be differentiated *first*, while all variables are still treated as functions of t ; only afterward are the known numerical values substituted into the resulting derivative equation. **(B)**.

Bài tập luyện tập

A circular oil slick spreads on the surface of the ocean so that its radius increases at a constant rate of 1.5 m/min. Find the rate at which the area of the slick is increasing at the instant the radius is 40 m.

Lời giải chi tiết

$$A = \pi r^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}. \text{ At } r = 40, \frac{dr}{dt} = 1.5:$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(40)(1.5) = 120\pi \approx 376.99 \text{ m}^2/\text{min}.$$

Bài tập luyện tập

A 10-meter ladder leans against a vertical wall. The bottom of the ladder slides away from the wall at a constant rate of 1.2 m/s. How fast is the top of the ladder sliding down the wall at the instant the bottom is 6 m from the wall?

Lời giải chi tiết

$x^2 + y^2 = 100$. At $x = 6$: $y = \sqrt{100 - 36} = \sqrt{64} = 8$. Differentiate: $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0$. Substitute $x = 6$, $y = 8$, $\frac{dx}{dt} = 1.2$:

$$(6)(1.2) + 8 \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 7.2 + 8 \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -0.9 \text{ m/s}.$$

The top of the ladder is sliding down at 0.9 m/s.

Bài tập luyện tập

A street lamp is 20 ft above the ground. A person 5 ft tall walks away from the lamp at a constant rate of 6 ft/s. At what rate is the length of the person's shadow increasing?

Lời giải chi tiết

By similar triangles, $\frac{20}{x+s} = \frac{5}{s} \Rightarrow 20s = 5(x+s) = 5x + 5s \Rightarrow 15s = 5x \Rightarrow s = \frac{x}{3}$.

Differentiating, $\frac{ds}{dt} = \frac{1}{3} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{3}(6) = 2$ ft/s. (The tip of the shadow moves at $\frac{dx}{dt} + \frac{ds}{dt} = 6 + 2 = 8$ ft/s.)

Bài tập luyện tập

An inverted conical tank has height 9 m and top radius 3 m. Water is pumped into the tank at a rate of $2 \text{ m}^3/\text{min}$. Find the rate at which the water level is rising at the instant the water is 4 m deep.

Lời giải chi tiết

By similar triangles, $r/h = 3/9 = 1/3$, so $r = h/3$, and $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{3}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{27}$. Then $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{9} \frac{dh}{dt}$. At $h = 4$, $\frac{dV}{dt} = 2$:

$$2 = \frac{\pi(16)}{9} \frac{dh}{dt} = \frac{16\pi}{9} \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{18}{16\pi} = \frac{9}{8\pi} \approx 0.358 \text{ m/min}.$$

Bài tập luyện tập

Car A leaves an intersection traveling east at a constant 50 mph. At the same moment, Car B leaves the same intersection traveling north at a constant 30 mph. Find the rate at which the distance between the two cars is increasing at the instant Car A is 8 miles east of the intersection and Car B is 6 miles north of it.

Lời giải chi tiết

Let x be Car A's distance east of the intersection and y Car B's distance north of it, with $\frac{dx}{dt} = 50$ mph and $\frac{dy}{dt} = 30$ mph. The distance between the cars is $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, so $z^2 = x^2 + y^2$.

Differentiating with respect to t : $2z \frac{dz}{dt} = 2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt}$, i.e. $z \frac{dz}{dt} = x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt}$.

At $x = 8$, $y = 6$: $z = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$ miles. Substituting:

$$10 \frac{dz}{dt} = (8)(50) + (6)(30) = 400 + 180 = 580 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = \frac{580}{10} = 58 \text{ mph}.$$

Bài tập luyện tập

A rectangle always has length equal to twice its width, $L = 2w$, where both dimensions change with time. Which equation correctly relates $\frac{dA}{dt}$ to $\frac{dw}{dt}$?

(A) $\frac{dA}{dt} = 2w \frac{dw}{dt}$

(C) $\frac{dA}{dt} = w^2 \frac{dw}{dt}$

(B) $\frac{dA}{dt} = 4w \frac{dw}{dt}$

(D) $\frac{dA}{dt} = 2 \frac{dw}{dt}$

Lời giải chi tiết

$A = Lw = (2w)w = 2w^2$, so $\frac{dA}{dt} = 4w \frac{dw}{dt}$. (B).

Bài tập luyện tập

Each side of a square is increasing at a rate of 3 cm/s. Find the rate at which the area of the square is increasing at the instant the side length is 10 cm.

Lời giải chi tiết

$$A = s^2 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2s \frac{ds}{dt} = 2(10)(3) = 60 \text{ cm}^2/\text{s}.$$

Bài tập luyện tập

If f is differentiable at $x = a$, the linearization of f at a is given by:

(A) $L(x) = f(a) + f'(x)(x - a)$

(C) $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$

(B) $L(x) = f(x) + f'(a)(x - a)$

(D) $L(x) = f'(a) + f(a)(x - a)$

Lời giải chi tiết

The linearization is the tangent line at a : $L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$, using the constants $f(a)$ and $f'(a)$, not $f(x)$ or $f'(x)$. (C).

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = \ln x$. (a) Find the linearization $L(x)$ of f at $a = 1$. (b) Use $L(x)$ to approximate $\ln(1.05)$. (c) Is this approximation an overestimate or underestimate of the true value? Justify using the concavity of f .

Lời giải chi tiết

(a) $f(1) = 0$, $f'(x) = 1/x \Rightarrow f'(1) = 1$, so $L(x) = 0 + 1(x - 1) = x - 1$.

(b) $L(1.05) = 1.05 - 1 = 0.05$.

(c) $f''(x) = -1/x^2 < 0$ for all $x > 0$, so f is concave down: the tangent line lies above the curve, so $L(1.05) = 0.05$ is an **overestimate**. (True value $\ln(1.05) \approx 0.04879$, confirming $0.05 > 0.04879$.)

Bài tập luyện tập

Use linearization based on $f(x) = x^{1/3}$ at $a = 27$ to approximate $\sqrt[3]{28}$, and state whether the approximation over- or underestimates the true value.

Lời giải chi tiết

$f(27) = 3$, $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} \Rightarrow f'(27) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{27}$. So $L(x) = 3 + \frac{1}{27}(x - 27)$, and

$$L(28) = 3 + \frac{1}{27}(1) = 3 + 0.0370 \approx 3.0370.$$

Since $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3} < 0$ for $x > 0$, f is concave down, so $L(28)$ **overestimates** $\sqrt[3]{28}$ (true value ≈ 3.0366).

Bài tập luyện tập

The differential dy of a differentiable function $y = f(x)$ is defined as:

(A) $dy = f(x + dx) - f(x)$

(C) $dy = \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx}$

(B) $dy = f'(x) dx$

(D) $dy = f''(x) dx$

Lời giải chi tiết

By definition, $dy = f'(x) dx$ – an approximation of the true change $\Delta y = f(x + dx) - f(x)$. (B).

Bài tập luyện tập

The radius of a circular disk is measured to be 8 cm, with a possible measurement error of ± 0.05 cm. Use differentials to estimate the propagated error in the calculated area of the disk, and find the approximate percent error.

Lời giải chi tiết

$A = \pi r^2 \Rightarrow dA = 2\pi r dr$. At $r = 8$, $dr = 0.05$: $dA = 2\pi(8)(0.05) = 0.8\pi \approx 2.51 \text{ cm}^2$.

$A(8) = \pi(64) = 64\pi$. Percent error $= \frac{dA}{A} \times 100\% = \frac{0.8\pi}{64\pi} \times 100\% = 1.25\%$. (Consistent with the shortcut: relative error in A is twice the relative error in r , since $A \propto r^2$: $2 \times \frac{0.05}{8} = 2 \times 0.625\% = 1.25\%$.)

Bài tập luyện tập

Which of the following limits is in an indeterminate form to which L'Hopital's Rule can be directly applied?

(A) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x+5}$

(C) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2}$

(B) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(D) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

Lời giải chi tiết

(A) evaluates directly to $3/5$; (C) evaluates directly to $0/4 = 0$; (D) evaluates directly to 0 – none of these are indeterminate. Only (B) gives $\sin(0)/0 = 0/0$, a genuine indeterminate form. (B).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$.

Lời giải chi tiết

Form $\frac{0}{0}$. L'Hopital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sec^2 x}{1} = \sec^2(0) = \frac{1}{\cos^2(0)} = 1$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 7}{2x - 3}$ using L'Hopital's Rule, and verify your answer using an algebraic method.

Lời giải chi tiết

Form $\frac{\infty}{\infty}$. L'Hopital: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$. **Verify algebraically:** divide numerator and denominator by x : $\frac{5 + 7/x}{2 - 3/x} \rightarrow \frac{5}{2}$ as $x \rightarrow \infty$. Consistent.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

Lời giải chi tiết

At $x = 0$: form $\frac{0}{0}$. Apply L'Hopital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2}$ - recheck: still $\frac{0}{0}$ at $x = 0$. Apply again: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x}$ - recheck: still $\frac{0}{0}$. Apply a third time: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{6} = \frac{\cos 0}{6} = \frac{1}{6}$. (Consistent with the Taylor series $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$, giving $x - \sin x \approx \frac{x^3}{6}$, so the ratio $\rightarrow \frac{1}{6}$.)

Bài tập luyện tập

A student wants to evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 4}{x + 2}$ and applies L'Hopital's Rule to obtain $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1} = 1$. Explain the error in this reasoning, and give the correct value of the limit.

Lời giải chi tiết

Direct substitution gives $\frac{0 + 4}{0 + 2} = \frac{4}{2} = 2$, a well-defined finite value - this limit is **not** an indeterminate form, so L'Hopital's Rule does not apply at all. Differentiating numerator and denominator anyway produces an unrelated (and incorrect) result. The correct value of the limit is 2, obtained by direct substitution.

Bài tập luyện tập

A particle's velocity $v(t)$, in m/s, is recorded at selected times:

t (s)	0	2	4	6	8
$v(t)$ (m/s)	5	2	-3	-1	4

Assuming v is continuous, between which consecutive recorded times can you guarantee (by the Intermediate Value Theorem) that the particle changed direction? Justify your answer.

Lời giải chi tiết

A direction change requires v to cross zero, i.e. change sign. Reading the signs: +, +, -, -, + at $t = 0, 2, 4, 6, 8$. The sign changes from + (at $t = 2$) to - (at $t = 4$), so by the Intermediate

Value Theorem v must equal 0 somewhere in $(2, 4)$ – a guaranteed direction change on $(2, 4)$. The sign changes again from $-$ (at $t = 6$) to $+$ (at $t = 8$), guaranteeing a second direction change on $(6, 8)$. No sign change occurs between $t = 0$ and $t = 2$, nor between $t = 4$ and $t = 6$, so no direction change is guaranteed on those intervals.

Analytical Applications of Differentiation

Mục tiêu Unit: Định lý Giá trị Cực trị (Extreme Value Theorem) và điểm tới hạn (critical points); Định lý Rolle và Định lý Giá trị Trung bình (Mean Value Theorem); xét tính đơn điệu (đồng biến/ngược biến) bằng dấu của đạo hàm bậc nhất và cách lập bảng xét dấu; Quy tắc Đạo hàm Bậc nhất (First Derivative Test) để phân loại cực trị địa phương; Quy tắc Điểm Ứng viên (Candidates Test) để tìm cực trị tuyệt đối trên một đoạn đóng; tính lồi-lõm (concavity) và Quy tắc Đạo hàm Bậc hai (Second Derivative Test); điểm uốn (inflection points); phác họa đồ thị hàm số từ thông tin về f' và f'' , và mối liên hệ ngược lại giữa đồ thị của f , f' , f'' ; giải các bài toán tối ưu hóa (optimization) có ràng buộc; và ứng dụng đạo hàm để phân tích các quan hệ cho dưới dạng ẩn (implicit relations).

5.1 Extreme Values and Critical Points

Many of the most useful applications of the derivative — from finding the cheapest way to manufacture a container to locating the highest point on a roller-coaster track — boil down to a single question: where does a function attain its largest or smallest value? This chapter develops a complete toolkit, built entirely on the sign of f' and f'' , for answering that question rigorously.

5.1.1 The Extreme Value Theorem

A function f has an **absolute (global) maximum** at $x = c$ on an interval I if $f(c) \geq f(x)$ for every x in I ; it has an **absolute minimum** at $x = c$ if $f(c) \leq f(x)$ for every x in I . Not every function attains such extreme values — for instance, $f(x) = x$ on the open interval $(0, 1)$ gets arbitrarily close to 0 and to 1 but never actually reaches either value. The following theorem gives a simple, powerful guarantee.

Extreme Value Theorem (EVT). If f is **continuous** on a **closed, bounded interval** $[a, b]$, then f attains an absolute maximum value and an absolute minimum value on $[a, b]$ — each at least once, at some point(s) in $[a, b]$.

Both hypotheses matter. If the interval is not closed (e.g., $(0, 1)$ or $[0, 1)$), or if f has even a single discontinuity inside $[a, b]$ (for instance a vertical asymptote or a jump), the guarantee can fail: the function may increase or decrease without bound, or approach a value without ever attaining it. The EVT does not tell us *where* the extrema occur — only that they exist — so we still need a systematic search procedure, which is exactly what the rest of this chapter builds.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý Giá trị Cực trị (EVT) khẳng định: nếu f liên tục trên một đoạn đóng và bị chặn $[a, b]$, thì f chắc chắn đạt được giá trị lớn nhất (max) và giá trị nhỏ nhất (min) tuyệt đối trên đoạn đó. Cả hai điều kiện — liên tục và đoạn đóng — đều bắt buộc: nếu khoảng không đóng (ví dụ $(0, 1)$) hoặc hàm số có điểm gián đoạn bên trong đoạn, định lý có thể không còn đúng nữa. EVT chỉ đảm bảo sự **tồn tại** của cực trị, chứ không nói cực trị nằm ở đâu — ta cần thêm công cụ (đạo hàm) để xác định vị trí cụ thể.

5.1.2 Critical Points

The search for extrema begins by locating a short list of "candidate" locations.

Critical point

A number c is a **critical point** of f if c is in the domain of f , and either

$$f'(c) = 0 \quad \text{or} \quad f'(c) \text{ is undefined.}$$

Geometrically, this means the graph of f has a horizontal tangent line at $x = c$ (when $f'(c) = 0$), or a corner, cusp, or vertical tangent at $x = c$ (when $f'(c)$ fails to exist).

Critical points matter because of a basic fact: if f has a local maximum or local minimum at an interior point c of its domain, then c *must* be a critical point. (If $f'(c)$ existed and were nonzero, the function would be strictly increasing or decreasing right through c , ruling out a local extremum there.) This gives a necessary — but, as we will see repeatedly in this chapter, *not sufficient* — condition: every local extremum is a critical point, but not every critical point is a local extremum.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT**VN**

Điểm tới hạn (critical point) là điểm c thuộc tập xác định của f mà tại đó $f'(c) = 0$ hoặc $f'(c)$ không xác định (ví dụ tại góc nhọn, điểm gấp khúc, hoặc tiếp tuyến đứng). Mọi cực trị địa phương (local max/min) đều phải là điểm tới hạn — đây là điều kiện **cần**. Nhưng điều ngược lại không đúng: một điểm tới hạn **chưa chắc** là cực trị (điều kiện không phải là **đủ**) — ta sẽ thấy rất nhiều ví dụ về việc này trong chương này.

Ví dụ mẫu · Locating critical points

Find all critical points of $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Then find the critical point of $h(x) = (x - 1)^{2/3} + 2$.

Part 1. Differentiate: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$. Since f' is a polynomial, it is defined everywhere, so critical points occur only where $f'(x) = 0$:

$$3(x - 3)(x + 1) = 0 \implies x = -1 \text{ or } x = 3.$$

Both values are in the domain of f (all real numbers), so f has two critical points: $x = -1$ and $x = 3$. This cubic will serve as a running example through the next several sections.

Part 2. Differentiate using the chain rule: $h'(x) = \frac{2}{3}(x - 1)^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x - 1}}$. This expression is undefined at $x = 1$ (division by zero), but $h(1) = 0^{2/3} + 2 = 2$ is defined, so $x = 1$ is in the domain of h . Therefore $x = 1$ is a critical point of h — one where the derivative fails to exist (the graph has a sharp cusp there, since h behaves like $|x - 1|^{2/3}$ near $x = 1$).

The phrase " c is in the domain of f " in the definition is not a technicality to skip over — it actively rules out points where f itself is undefined, even if the algebraic form of f' appears to vanish or blow up there. For instance, $k(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ simplifies to $x + 1$ algebraically, but $x = 1$ is **excluded** from the domain of k (division by zero in the original expression); consequently $x = 1$ can never be a critical point of k , no matter what the simplified derivative suggests. Likewise, $m(x) = \frac{1}{x}$ has $m'(x) = -\frac{1}{x^2}$, which is never zero and is undefined only at $x = 0$ — but $x = 0$ is not in the domain of m either, so m has **no critical points at all**. Always check domain membership *before* declaring a critical point.

5.2 Rolle's Theorem and the Mean Value Theorem

5.2.1 Rolle's Theorem

Rolle's Theorem is the simplest case of a family of results connecting the *average* behavior of a function on an interval to its *instantaneous* behavior at a single point inside that interval.

Rolle's Theorem. If f is continuous on $[a, b]$, differentiable on (a, b) , and $f(a) = f(b)$, then there exists at least one number c in (a, b) such that

$$f'(c) = 0.$$

Geometrically: if a smooth curve starts and ends at the same height, it must have at least one point in between where the tangent line is horizontal – the curve cannot climb away from its starting height and come back down (or vice versa) without leveling off somewhere.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Định lý Rolle: nếu f liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b) , và $f(a) = f(b)$ (hai đầu mút có cùng độ cao), thì tồn tại ít nhất một điểm c bên trong khoảng (a, b) sao cho $f'(c) = 0$ – tức tiếp tuyến tại c nằm ngang. Về mặt hình học: đường cong xuất phát và kết thúc ở cùng một độ cao thì chắc chắn phải "làm phẳng" (tiếp tuyến ngang) ít nhất một lần ở giữa.

Ví dụ mẫu · Applying Rolle's Theorem

Verify that Rolle's Theorem applies to $f(x) = x^3 - 3x^2$ on $[0, 3]$, and find the guaranteed value of c .

Check hypotheses: f is a polynomial, so it is continuous on $[0, 3]$ and differentiable on $(0, 3)$. Also $f(0) = 0 - 0 = 0$ and $f(3) = 27 - 27 = 0$, so $f(0) = f(3)$. All three hypotheses hold, so Rolle's Theorem guarantees at least one $c \in (0, 3)$ with $f'(c) = 0$.

Find c : $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$. Setting $f'(x) = 0$ gives $x = 0$ or $x = 2$. The value $x = 0$ is an *endpoint*, not inside the open interval $(0, 3)$, so it does not count. The guaranteed value is

$$c = 2.$$

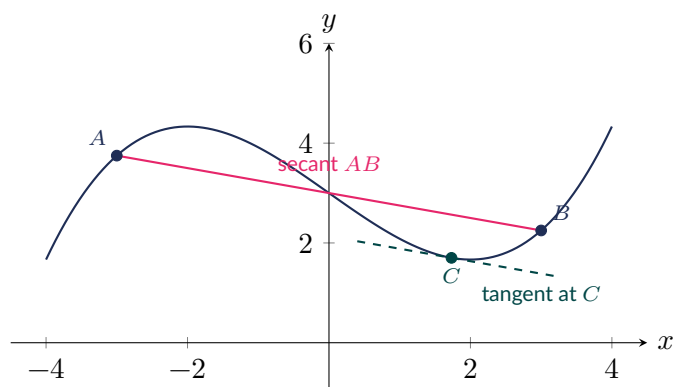
5.2.2 The Mean Value Theorem

Rolle's Theorem is the special case of a more general statement in which the two endpoint heights need not be equal.

Mean Value Theorem (MVT). If f is continuous on $[a, b]$ and differentiable on (a, b) , then there exists at least one number c in (a, b) such that

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

The right-hand side is the slope of the **secant line** joining the endpoints $(a, f(a))$ and $(b, f(b))$ – the *average rate of change* of f over $[a, b]$. The MVT says this average rate of change is always achieved as an actual **instantaneous** rate of change at some interior point: the tangent line at $x = c$ is **parallel** to the secant line. (Rolle's Theorem is the special case where $f(a) = f(b)$, so the secant is horizontal and $f'(c) = 0$.)



Geometric meaning of the MVT: for $f(x) = \frac{1}{12}x^3 - x + 3$ on $[-3, 3]$, the secant line through $A(-3, 3.75)$ and $B(3, 2.25)$ has slope $-\frac{1}{4}$; the tangent line at $C \approx (1.73, 1.70)$ has the same slope, so it is parallel to the secant.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý Giá trị Trung bình (MVT): nếu f liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) , luôn tồn tại một điểm c bên trong sao cho hệ số góc tiếp tuyến tại c **bằng đúng** hệ số góc của đường thẳng nối hai đầu mút (cát tuyến, secant line) – nói cách khác, "tốc độ trung bình" trên cả đoạn luôn được đạt tới như một "tốc độ tức thời" tại ít nhất một thời điểm nào đó bên trong. Định lý Rolle chỉ là trường hợp riêng khi $f(a) = f(b)$ (cát tuyến nằm ngang nên $f'(c) = 0$).

Ví dụ mẫu · Finding the guaranteed c

Let $f(x) = x^3 - 2x + 1$ on $[-1, 2]$. Verify the hypotheses of the MVT and find every value of c guaranteed by the theorem.

Hypotheses: f is a polynomial, so it is continuous on $[-1, 2]$ and differentiable on $(-1, 2)$. The MVT applies.

Average rate of change: $f(-1) = -1 + 2 + 1 = 2$ and $f(2) = 8 - 4 + 1 = 5$, so

$$\frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} = \frac{5 - 2}{3} = 1.$$

Solve $f'(c) = 1$: $f'(x) = 3x^2 - 2$, so

$$3c^2 - 2 = 1 \implies 3c^2 = 3 \implies c^2 = 1 \implies c = \pm 1.$$

The value $c = -1$ is the left endpoint, not an interior point, so it is rejected. The guaranteed value is

$$c = 1,$$

which indeed lies in $(-1, 2)$.

(!) Lỗi thường gặp: Đừng quên kiểm tra **cả hai** giả thiết của MVT/Rolle trước khi áp dụng: liên tục trên đoạn đóng $[a, b]$ và khả vi trên khoảng mở (a, b) . Một hàm có góc nhọn bên trong đoạn (ví dụ $f(x) = |x - 1|$ trên $[-1, 3]$) là liên tục nhưng **không khả vi** tại $x = 1$ – MVT **không** áp dụng được, dù hàm trông "liền mạch". Ngoài ra, khi giải phương trình $f'(c) = \dots$ ra nhiều nghiệm, phải loại bỏ nghiệm nằm **ngoài** khoảng mở (a, b) (kể cả khi nghiệm đó trùng với đầu mút).

5.3 Increasing and Decreasing Functions

5.3.1 The Sign of the Derivative

The single most important consequence of the Mean Value Theorem is a rigorous link between the *sign* of f' and the *monotonic behavior* of f .

Monotonicity from f'

Let f be differentiable on an open interval I .

- If $f'(x) > 0$ for every x in I , then f is **increasing** on I .
- If $f'(x) < 0$ for every x in I , then f is **decreasing** on I .

(This follows directly from the MVT: for any $x_1 < x_2$ in I , $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ for some c between them, and the sign of $f'(c)$ determines the sign of $f(x_2) - f(x_1)$.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đây là ứng dụng quan trọng nhất của MVT: dấu của f' trên một khoảng quyết định hoàn toàn tính đơn điệu của f trên khoảng đó. $f'(x) > 0$ trên cả khoảng $\Rightarrow f$ **đồng biến** (tăng); $f'(x) < 0$ trên cả khoảng $\Rightarrow f$ **nghịch biến** (giảm). Đây chính là công cụ ta sẽ dùng liên tục trong suốt chương này để phân tích hình dạng đồ thị.

5.3.2 Constructing and Reading Sign Charts

Because f' can only change sign at a critical point (or at a point of discontinuity of f'), the critical points found in Section 5.1 split the domain into open intervals on which f' has **constant sign**. A **sign chart** (or sign diagram) organizes this: mark the critical points on a number line, then test one convenient point from each resulting interval in f' to determine the sign on that whole interval.

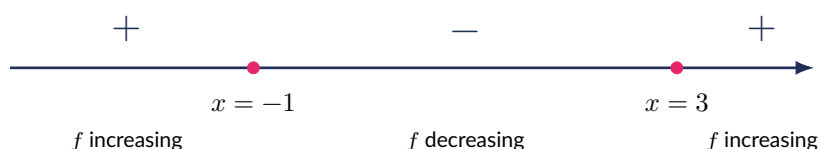
Ví dụ mẫu · Building a sign chart

Determine the intervals on which $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ (from the earlier example, with critical points $x = -1$ and $x = 3$) is increasing and decreasing.

Recall $f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$. The critical points $x = -1$ and $x = 3$ divide the real line into three intervals: $(-\infty, -1)$, $(-1, 3)$, $(3, \infty)$. Test one point in each:

- $x = -2$: $f'(-2) = 3(-2 - 3)(-2 + 1) = 3(-5)(-1) = 15 > 0$.
- $x = 0$: $f'(0) = 3(0 - 3)(0 + 1) = 3(-3)(1) = -9 < 0$.
- $x = 4$: $f'(4) = 3(4 - 3)(4 + 1) = 3(1)(5) = 15 > 0$.

So f is **increasing** on $(-\infty, -1)$, **decreasing** on $(-1, 3)$, and **increasing** on $(3, \infty)$.



Sign chart for $f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$: f increases on $(-\infty, -1)$, decreases on $(-1, 3)$, increases on $(3, \infty)$. The sign switches from + to - at $x = -1$ and from - to + at $x = 3$.

5.4 The First Derivative Test

The sign chart from the previous example does more than describe monotonic behavior — it tells us exactly which critical points are local extrema, and of which type.

First Derivative Test. Suppose c is a critical point of a continuous function f .

- If f' changes from **positive to negative** at c (increasing, then decreasing), f has a **local maximum** at c .
- If f' changes from **negative to positive** at c (decreasing, then increasing), f has a **local minimum** at c .
- If f' does **not change sign** at c (same sign on both sides), f has **no local extremum** at c — the graph merely levels off (or has a cusp) momentarily.

Applying this to the running example: at $x = -1$, f' changes from $+$ to $-$, so $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ has a **local maximum** at $x = -1$, with value $f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$. At $x = 3$, f' changes from $-$ to $+$, so f has a **local minimum** at $x = 3$, with value $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$. Every critical point of this particular function turns out to be an extremum — but that is not guaranteed in general, as the next example and the pitfall below make clear.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc Đạo hàm Bậc nhất (First Derivative Test): nhìn vào sự **đổi dấu** của f' khi đi qua điểm tới hạn c . Đổi từ $+$ sang $- \Rightarrow$ **cực đại địa phương**. Đổi từ $-$ sang $+$ $\Rightarrow$ **cực tiểu địa phương**. Nếu **không đổi dấu** (cùng dấu ở hai bên) $\Rightarrow$ **không phải cực trị** — đây là trường hợp học sinh hay bỏ sót.

Ví dụ mẫu · First Derivative Test with xe^{-x}

Find and classify all local extrema of $f(x) = xe^{-x}$.

Derivative (product rule): $f'(x) = (1)e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$. Since $e^{-x} > 0$ for every real x , the only critical point comes from $1 - x = 0$, i.e. $x = 1$ (and f' is defined for all x , so there are no other critical points).

Sign chart: the sign of $f'(x) = e^{-x}(1 - x)$ matches the sign of $(1 - x)$, since $e^{-x} > 0$ always.

- For $x < 1$: $1 - x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$ (increasing).
- For $x > 1$: $1 - x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ (decreasing).

f' changes from $+$ to $-$ at $x = 1$, so f has a **local maximum** at $x = 1$, with value $f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e} \approx 0.368$.

(!) Lỗi thường gặp: "Điểm tới hạn" **không** đồng nghĩa với "cực trị". Xét $g(x) = (x - 2)^3 + 1$: $g'(x) = 3(x - 2)^2 \geq 0$ với mọi x , và $g'(2) = 0$ nên $x = 2$ là điểm tới hạn. Nhưng $g'(x) > 0$ ở **cả hai phía** của $x = 2$ (không đổi dấu) — hàm số vẫn đồng biến xuyên suốt, chỉ "khựng lại" tức thời tại $x = 2$. Vậy $x = 2$ **không phải** là cực trị. Luôn kiểm tra sự đổi dấu, đừng vội kết luận chỉ vì $f'(c) = 0$.

5.5 The Candidates Test for Absolute Extrema

The First Derivative Test locates and classifies *local* extrema. When a function is continuous on a **closed interval** $[a, b]$, the EVT guarantees that *absolute* extrema exist as well — and locating them is even simpler than running a full sign chart.

Candidates Test. If f is continuous on $[a, b]$, the absolute maximum and absolute minimum of f on $[a, b]$ each occur either at a critical point inside (a, b) , or at one of the two endpoints a or b . To find the absolute extrema:

1. Find all critical points of f that lie inside (a, b) .
2. Evaluate f at every such critical point *and* at both endpoints a, b .
3. The largest value found is the absolute maximum; the smallest is the absolute minimum.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc Điểm Ứng viên (Candidates Test) là cách nhanh nhất để tìm cực trị **tuyệt đối** trên một đoạn đóng $[a, b]$: chỉ cần tính giá trị f tại **tất cả điểm tới hạn nằm trong đoạn** và tại **cả hai đầu mút**, rồi so sánh. Giá trị lớn nhất trong danh sách là max tuyệt đối, giá trị nhỏ nhất là min tuyệt đối – không cần lập bảng xét dấu đầy đủ như First Derivative Test.

Ví dụ mẫu · Candidates Test

Find the absolute maximum and absolute minimum of $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ (the running example) on the closed interval $[-2, 4]$.

Critical points inside $(-2, 4)$: from before, $f'(x) = 3(x - 3)(x + 1) = 0$ at $x = -1$ and $x = 3$; both lie inside $(-2, 4)$.

Evaluate f at critical points and endpoints:

$$f(-2) = -8 - 12 + 18 + 5 = 3, \quad f(-1) = 10, \quad f(3) = -22, \quad f(4) = 64 - 48 - 36 + 5 = -15.$$

x	-2 (endpoint)	-1 (critical pt.)	3 (critical pt.)	4 (endpoint)
$f(x)$	3	10	-22	-15

Comparing all four values, the largest is 10 and the smallest is -22 . So the **absolute maximum** is 10 at $x = -1$, and the **absolute minimum** is -22 at $x = 3$. Notice that in this case neither endpoint produced the extreme value – but that will not always be true, as the next pitfall emphasizes.

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi cực kỳ phổ biến: chỉ tìm cực trị **địa phương** bằng First Derivative Test rồi dừng lại, **quên không kiểm tra hai đầu mút**. Trên một đoạn đóng $[a, b]$, giá trị lớn nhất/nhỏ nhất tuyệt đối hoàn toàn có thể nằm ngay tại $x = a$ hoặc $x = b$ – kể cả khi đạo hàm tại đó khác 0. Ví dụ: $f(x) = x^3 - 3x + 1$ trên $[0, 2]$ có $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$, chỉ một điểm tới hạn $x = 1$ nằm trong $(0, 2)$ với $f(1) = -1$; nhưng $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$ tại đầu mút phải lại **lớn hơn** $f(1)$, nên max tuyệt đối là 3 tại $x = 2$ chứ không phải tại điểm tới hạn.

5.6 Concavity and the Second Derivative Test

5.6.1 Concavity

Knowing where f increases and decreases describes the overall trend of the graph, but not its *shape*. The second derivative captures shape: whether the curve bends upward like a cup, or downward like a dome.

Concavity from f''

Let f be twice differentiable on an open interval I .

- If $f''(x) > 0$ for every x in I , the graph of f is **concave up** on I (it bends upward, like $y = x^2$; the graph lies above its tangent lines, and f' is increasing).
- If $f''(x) < 0$ for every x in I , the graph of f is **concave down** on I (it bends downward, like $y = -x^2$; the graph lies below its tangent lines, and f' is decreasing).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tính lồi-lõm (concavity) được xác định bởi dấu của f'' – đạo hàm của f' . $f''(x) > 0$ trên một khoảng $\Rightarrow$ đồ thị **lõm lên (concave up)**, giống hình chữ U, và f' đang **tăng** (đồ thị "dốc" ngày càng nhanh theo chiều dương). $f''(x) < 0 \Rightarrow$ đồ thị **lõm xuống (concave down)**, giống mái vòm, và f' đang **giảm**. Hãy nhớ: lồi-lõm nói về **đạo hàm bậc nhất đang tăng hay giảm**, không phải bản thân f đang tăng hay giảm.

5.6.2 The Second Derivative Test

Concavity gives a second – often faster – way to classify a critical point where $f'(c) = 0$.

Second Derivative Test. Suppose $f'(c) = 0$ and f'' exists near c .

- If $f''(c) > 0$, the graph is concave up at c , so f has a **local minimum** at c .
- If $f''(c) < 0$, the graph is concave down at c , so f has a **local maximum** at c .
- If $f''(c) = 0$, the test is **inconclusive** – it gives no information either way, and the **First Derivative Test must be used instead**.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc Đạo hàm Bậc hai (Second Derivative Test) áp dụng khi $f'(c) = 0$: nếu $f''(c) > 0$ (lõm lên tại đó) $\Rightarrow$ **cực tiểu**; nếu $f''(c) < 0$ (lõm xuống) $\Rightarrow$ **cực đại**. Nhưng nếu $f''(c) = 0$, quy tắc này **không cho kết luận gì cả** (inconclusive) – **bắt buộc** phải quay lại dùng First Derivative Test (xét dấu f' hai bên c) để xác định.

Ví dụ mẫu · Second Derivative Test (successful case)

Classify the critical points of $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x-1)(x-3)$, so critical points are $x = 1$ and $x = 3$.

$f''(x) = 6x - 12$.

$$f''(1) = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow \text{local maximum at } x = 1, \quad f(1) = 1 - 6 + 9 = 4.$$

$$f''(3) = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow \text{local minimum at } x = 3, \quad f(3) = 27 - 54 + 27 = 0.$$

So f has a local maximum $(1, 4)$ and a local minimum $(3, 0)$.

Ví dụ mẫu · Second Derivative Test (inconclusive case)

Analyze the critical points of $g(x) = x^4 - 4x^3$.

$g'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$, so critical points are $x = 0$ and $x = 3$.

$$g''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2).$$

$$g''(3) = 12(3)(1) = 36 > 0 \Rightarrow \text{local minimum at } x = 3, \quad g(3) = 81 - 108 = -27.$$

$$g''(0) = 12(0)(-2) = 0 \Rightarrow \text{inconclusive at } x = 0.$$

Since the Second Derivative Test fails at $x = 0$, fall back on the First Derivative Test. Because $g'(x) = 4x^2(x - 3)$ and $x^2 \geq 0$ always, the sign of g' matches the sign of $(x - 3)$ — which is **negative for every x near 0** (both slightly less than and slightly greater than 0, since $0 < 3$). g' does **not** change sign at $x = 0$, so $x = 0$ is **not** a local extremum — it is a critical point where the graph merely has a momentary horizontal tangent while continuing to decrease. (Section 5.7 will show that $x = 0$ is, however, a genuine point of inflection.)

(!) Lỗi thường gặp: Nếu $f''(c) = 0$, **tuyệt đối không được** kết luận "không phải cực trị" hay đoán bừa max/min. $f''(c) = 0$ chỉ có nghĩa Second Derivative Test **bất lực** tại điểm đó — nó không nói lên được điều gì về bản chất của điểm c . Bắt buộc quay lại First Derivative Test (xét dấu f' ở hai bên c) để có kết luận chắc chắn. Ví dụ $g(x) = x^4 - 4x^3$ ở trên: $g''(0) = 0$ nhưng $x = 0$ hoàn toàn không phải cực trị (vì g' không đổi dấu) — nếu chỉ dựa vào $f''(0) = 0$ mà đoán ngẫu nhiên, kết luận rất dễ sai.

5.7 Points of Inflection

Point of inflection

A point $(c, f(c))$ is a **point of inflection** of the graph of f if f is continuous at c and the concavity of f **actually changes** — from concave up to concave down, or from concave down to concave up — as x passes through c .

Because concavity is governed by the sign of f'' , a necessary condition for an inflection point at c is that $f''(c) = 0$ or $f''(c)$ is undefined. But — exactly parallel to the critical-point situation in Section 5.1 — this is a **necessary**, not a **sufficient**, condition. The only way to confirm a genuine inflection point is to verify that f'' actually changes sign on either side of c , using the same test-point method as a first-derivative sign chart.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

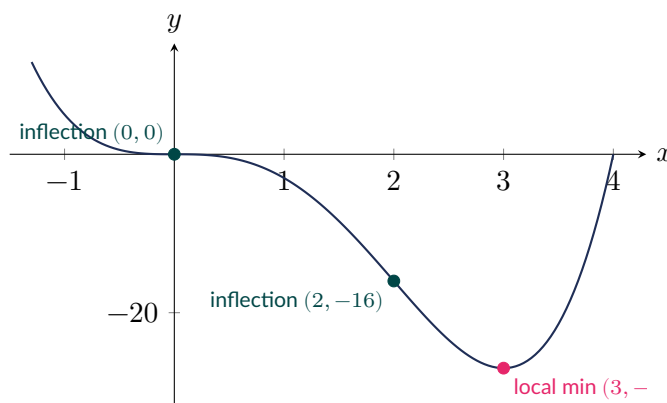
Điểm uốn (inflection point) là nơi tính lồi-lõm thực sự đổi chiều. Điều kiện cần là $f''(c) = 0$ (hoặc không xác định), nhưng đây **không phải** điều kiện đủ — hoàn toàn giống tình huống "điểm tới hạn chưa chắc là cực trị". Phải kiểm tra f'' có **thực sự đổi dấu** hai bên c hay không bằng cách thử điểm, giống hệt cách lập bảng xét dấu cho f' .

Returning to $g(x) = x^4 - 4x^3$ from the previous section: $g''(x) = 12x(x - 2)$, which is zero at $x = 0$ and $x = 2$. Testing points in the three resulting intervals:

$$g''(-1) = 12(-1)(-3) = 36 > 0 \text{ (concave up)}, \quad g''(1) = 12(1)(-1) = -12 < 0 \text{ (concave down)},$$

$$g''(3) = 12(3)(1) = 36 > 0 \text{ (concave up)}.$$

The sign of g'' genuinely changes at **both** $x = 0$ (from + to −) and $x = 2$ (from − to +), so **both** are points of inflection: $(0, 0)$ and $(2, g(2)) = (2, -16)$. Notice that $x = 0$ is simultaneously a critical point (horizontal tangent) that is *not* a local extremum, *and* a point of inflection — a single x -value can carry both roles.



$g(x) = x^4 - 4x^3$: a local minimum at $x = 3$ (confirmed by the Second Derivative Test), and inflection points at $x = 0$ and $x = 2$ where the concavity genuinely switches sign. Note $x = 0$ is a critical point but *not* an extremum.

(!) Lỗi thường gặp: $f''(c) = 0$ **không tự động** nghĩa là c là điểm uốn — phải kiểm tra đổi dấu thật sự. Ví dụ kinh điển: $g(x) = x^4$ có $g''(x) = 12x^2$, và $g''(0) = 0$. Nhưng $g''(x) = 12x^2 \geq 0$ với mọi x (không bao giờ âm) — tức f'' **không hề đổi dấu** tại $x = 0$, đồ thị luôn lõm lên (hoặc phẳng tức thời) ở cả hai phía. Vậy $x = 0$ **không phải** điểm uốn của x^4 , mặc dù $g''(0) = 0$ — nó thực ra là một điểm cực tiểu (kiểm tra bằng First Derivative Test vì Second Derivative Test cũng vô hiệu ở đây).

5.8 Curve Sketching: Connecting a Function and Its Derivatives

5.8.1 Reading Derivative Graphs

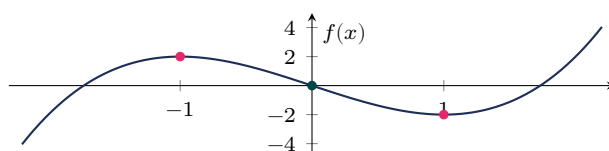
Every fact established so far can be read in either direction. Given a formula (or graph) for f , we can deduce the shape of f' and f'' ; and given information about f' or f'' (a sign chart, a table, or a graph), we can deduce the shape of f itself. AP exam questions frequently give the graph of f' (not f) and ask about the behavior of f — so it is essential to internalize the translation table below.

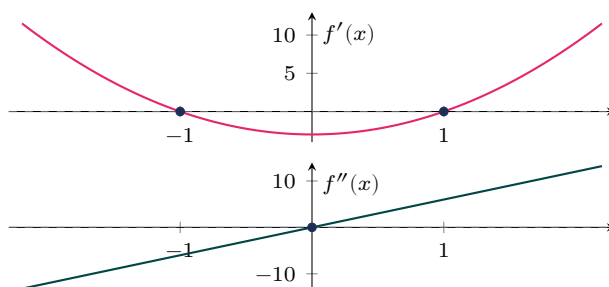
$f' > 0$ on an interval	f is increasing there
$f' < 0$ on an interval	f is decreasing there
f' changes $+$ → $-$ at c	local maximum of f at c
f' changes $-$ → $+$ at c	local minimum of f at c
$f'' > 0$ on an interval	f is concave up there (f' increasing)
$f'' < 0$ on an interval	f is concave down there (f' decreasing)
f'' changes sign at c	point of inflection of f at c
$f''(c) = 0$ only, no sign change	<i>not</i> an inflection point — verify first!

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bảng trên là "từ điển" chuyển đổi hai chiều giữa f , f' , và f'' . Đề thi AP rất hay cho **đồ thị của f'** (không phải f) rồi hỏi về hành vi của f : hãy đọc **dấu** và **sự đổi dấu** của đồ thị f' (nó nằm trên hay dưới trục hoành, và có cắt trục hoành hay không) để suy ra f đang tăng/giảm và có cực trị ở đâu; tương tự, đọc xem đồ thị f' đang **tăng hay giảm** (chứ không phải nằm trên/dưới trục) để suy ra tính lõm-lồi của f .





Top to bottom, on the same x -scale: $f(x) = x^3 - 3x$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f''(x) = 6x$. Where $f' > 0$ (outside $[-1, 1]$), f is increasing; where $f' < 0$ (inside $(-1, 1)$), f is decreasing; $f' = 0$ at the local max/min $x = \pm 1$. Where $f'' < 0$ ($x < 0$), f is concave down; where $f'' > 0$ ($x > 0$), concave up; the sign change of f'' at $x = 0$ marks the inflection point.

5.8.2 A Complete Curve Sketch

The following example walks through a full analysis, combining every tool from this chapter: domain, symmetry, intercepts, first-derivative behavior, second-derivative behavior, and asymptotes.

Ví dụ mẫu · Full curve analysis

Analyze and sketch $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Domain and symmetry: $x^2 + 1 > 0$ for every real x , so the domain is all reals. Since $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 1} = f(x)$, f is **even** — its graph is symmetric about the y -axis.

Intercepts: $f(0) = \frac{1}{0 + 1} = 1$, so the y -intercept is $(0, 1)$. Since the numerator 1 is never zero, $f(x)$ is never zero — there are **no x -intercepts**.

First derivative: $f'(x) = -2x(x^2 + 1)^{-2} = \frac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$. Since $(x^2 + 1)^2 > 0$ always, the only critical point is $x = 0$ (from the numerator). For $x < 0$, $-2x > 0$ so $f' > 0$ (increasing); for $x > 0$, $-2x < 0$ so $f' < 0$ (decreasing). f' changes $+$ → $-$ at $x = 0$, so f has a local (in fact absolute) **maximum** at $(0, 1)$.

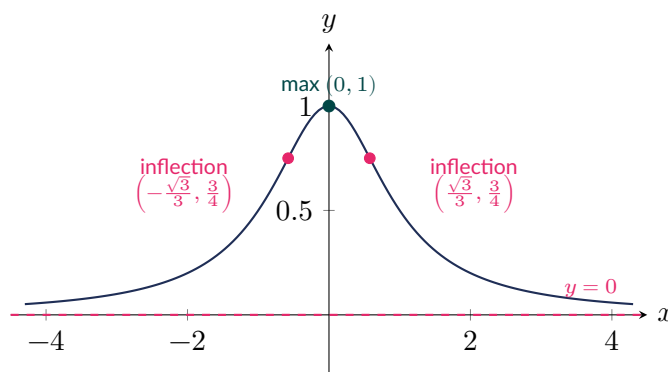
Second derivative: differentiating $f'(x) = -2x(x^2 + 1)^{-2}$ with the product rule,

$$f''(x) = -2(x^2 + 1)^{-2} + (-2x)(-2)(x^2 + 1)^{-3}(2x) = \frac{-2(x^2 + 1) + 8x^2}{(x^2 + 1)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(x^2 + 1)^3}.$$

Setting $6x^2 - 2 = 0$ gives $x^2 = \frac{1}{3}$, so $x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Since $(x^2 + 1)^3 > 0$ always, the sign of f'' matches the sign of $6x^2 - 2$: negative (concave down) for $|x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$, positive (concave up) for $|x| > \frac{1}{\sqrt{3}}$ — a genuine sign change at both roots. So f has **inflection points** at $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$,

where $f\left(\pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} = \frac{3}{4}$.

Asymptotes: as $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow 0$, so $y = 0$ is a **horizontal asymptote**. The denominator $x^2 + 1$ is never zero, so there is **no vertical asymptote**.



$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ (the Witch of Agnesi): even, no x -intercepts, absolute maximum $(0, 1)$, inflection points at $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \approx \pm 0.577$, horizontal asymptote $y = 0$, no vertical asymptote.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy trình phân tích đồ thị đầy đủ luôn theo thứ tự: (1) miền xác định và tính đối xứng (chẵn/lẻ); (2) giao điểm với hai trục; (3) f' để tìm điểm tới hạn, khoảng đồng biến/ngược biến, và cực trị; (4) f'' để tìm khoảng lõm/lồi và điểm uốn; (5) tiệm cận (đứng và ngang). Ví dụ $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ ở trên minh họa đầy đủ cả năm bước – kể cả trường hợp "không có" (không có giao điểm với trục hoành, không có tiệm cận đứng) cũng là thông tin quan trọng cần nêu rõ.

5.9 Optimization Problems

5.9.1 Setting Up Optimization Problems

Optimization problems ask for the largest or smallest possible value of some quantity, subject to a constraint. The calculus is usually the easy part; the hard part is translating a word problem into a single-variable function.

General optimization procedure.

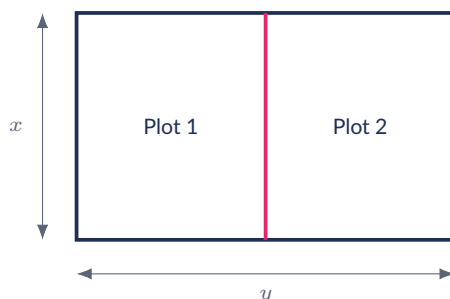
1. **Identify** the quantity to be maximized or minimized, and write it as a function of the relevant variables (the **objective function**).
2. **Identify the constraint** – a fixed relationship among the variables (fixed perimeter, fixed volume, a point restricted to lie on a curve, etc.) – and use it to eliminate all but **one** variable in the objective function.
3. **Determine the domain** of the resulting single-variable function from the physical context (e.g., lengths must be positive).
4. **Find critical points** of the objective function by setting its derivative to zero (or finding where it is undefined).
5. **Justify** that the critical point actually gives the desired maximum or minimum – using the First Derivative Test, the Second Derivative Test, or (on a closed domain) the Candidates Test, comparing against the domain's endpoints/limits.
6. **Answer the question actually asked** – often a dimension or a maximal/minimal value, not just the critical x -value.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy trình giải bài toán tối ưu (optimization) luôn gồm các bước: (1) viết **hàm mục tiêu** (objective function) – đại lượng cần max/min – theo các biến; (2) dùng **ràng buộc** (constraint) để rút một biến, đưa hàm mục tiêu về **một biến duy nhất**; (3) xác định miền xác định hợp lý theo ngữ cảnh

thực tế (độ dài phải dương, v.v.); (4) tìm điểm tới hạn bằng đạo hàm; (5) **bắt buộc chứng minh** điểm đó thực sự là max/min (bằng First/Second Derivative Test hoặc so sánh với biên miền) — đây là bước học sinh hay bỏ qua nhất nhưng lại chiếm điểm quan trọng trong bài thi tự luận.



A rectangular region of dimensions x by y , divided into two equal plots by an internal dividing fence (pink) parallel to the sides of length x . Total fencing needed equals the outer perimeter plus this internal divider.

5.9.2 Optimization Worked Examples

Ví dụ mẫu · Minimizing surface area for fixed volume

A closed cylindrical can must have volume $16\pi \text{ cm}^3$. Find the radius and height that minimize the total surface area (top, bottom, and lateral surface), and find that minimum area.

Objective: surface area $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ (two circular ends plus the lateral surface).

Constraint: volume $V = \pi r^2 h = 16\pi$, so $h = \frac{16}{r^2}$.

Reduce to one variable:

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{16}{r^2} = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}, \quad r > 0.$$

Critical points: $S'(r) = 4\pi r - \frac{32\pi}{r^2}$. Setting $S'(r) = 0$:

$$4\pi r = \frac{32\pi}{r^2} \Rightarrow 4r^3 = 32 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2 \text{ cm}.$$

Justify the minimum: $S''(r) = 4\pi + \frac{64\pi}{r^3} > 0$ for every $r > 0$, so S is concave up everywhere on its domain — the unique critical point $r = 2$ must be an absolute minimum (also consistent with $S(r) \rightarrow \infty$ as $r \rightarrow 0^+$ or $r \rightarrow \infty$).

Answer: $r = 2 \text{ cm}$, and $h = \frac{16}{4} = 4 \text{ cm}$ (so $h = 2r$). The minimum surface area is

$$S(2) = 2\pi(4) + \frac{32\pi}{2} = 8\pi + 16\pi = 24\pi \text{ cm}^2 \approx 75.4 \text{ cm}^2.$$

Ví dụ mẫu · Maximizing area for fixed fencing

A farmer has 240 m of fencing to build a rectangular pen that is divided into two equal-sized plots by an internal fence parallel to one pair of sides (as in the figure above). Find the dimensions that maximize the total enclosed area, and find that maximum area.

Setup: let x be the length of each of the three fence segments running in one direction (the

two outer sides plus the internal divider, all parallel to each other), and y the length of the other two (undivided) sides. Total fencing used is $3x + 2y$, and the total enclosed area is $A = xy$.

Constraint: $3x + 2y = 240 \Rightarrow y = \frac{240 - 3x}{2}$.

Reduce to one variable:

$$A(x) = x \cdot \frac{240 - 3x}{2} = 120x - \frac{3}{2}x^2, \quad 0 < x < 80.$$

Critical point: $A'(x) = 120 - 3x$. Setting $A'(x) = 0$ gives $x = 40$.

Justify the maximum: $A''(x) = -3 < 0$ for all x , so A is concave down everywhere – the unique critical point is an absolute maximum on the domain (also $A \rightarrow 0$ as $x \rightarrow 0^+$ or $x \rightarrow 80^-$, consistent with an interior maximum).

Answer: $x = 40$ m, and $y = \frac{240 - 120}{2} = 60$ m. The maximum area is

$$A(40) = 40 \times 60 = 2400 \text{ m}^2.$$

Ví dụ mẫu · Minimizing distance

Find the point on the parabola $y = x^2$ that is closest to the point $(3, 0)$, and find that minimum distance.

Objective: rather than minimizing distance directly (which involves a square root), minimize the **square** of the distance – it is minimized at the same x -value, since $t \mapsto \sqrt{t}$ is increasing. For a point (x, x^2) on the parabola,

$$D(x) = (x - 3)^2 + (x^2 - 0)^2 = (x - 3)^2 + x^4 = x^4 + x^2 - 6x + 9.$$

Critical points: $D'(x) = 4x^3 + 2x - 6$. Setting $D'(x) = 0$: $4x^3 + 2x - 6 = 0$, i.e. $2x^3 + x - 3 = 0$. Testing $x = 1$: $2(1) + 1 - 3 = 0$ – a root. Factoring,

$$2x^3 + x - 3 = (x - 1)(2x^2 + 2x + 3).$$

The quadratic factor $2x^2 + 2x + 3$ has discriminant $2^2 - 4(2)(3) = 4 - 24 = -20 < 0$, so it has no real roots. Thus $x = 1$ is the **only** critical point.

Justify the minimum: $D''(x) = 12x^2 + 2 > 0$ for every real x , so D is concave up everywhere (strictly convex) – the unique critical point $x = 1$ must give the absolute minimum of D , and hence of the actual distance.

Answer: the closest point is $(1, 1)$, and the minimum distance is

$$\sqrt{D(1)} = \sqrt{(1 - 3)^2 + 1^4} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}.$$

(!) Lỗi thường gặp: Tìm được điểm tới hạn trong bài toán tối ưu **chưa phải là xong** – phải **chứng minh** đó thực sự là max hay min theo đúng yêu cầu đề bài, không được ngầm giả định. Cách phổ biến nhất: dùng Second Derivative Test (nếu f'' luôn cùng dấu trên miền xác định thì kết luận ngay là max/min tuyệt đối), hoặc First Derivative Test (lập bảng xét dấu), hoặc so sánh với giá trị tại biên miền (đặc biệt khi hàm mục tiêu không xác định trên toàn trục số, ví dụ độ dài phải dương). Bỏ qua bước này là lỗi bị trừ điểm nhiều nhất trong các bài tự luận tối ưu hóa của đề thi AP.

5.10 Implicit Relations: Tangent Lines and Monotonicity

Not every curve is the graph of a function $y = f(x)$; many important curves (circles, ellipses, and more general relations) are defined **implicitly** by an equation in x and y . Implicit differentiation — treating y as an unspecified function of x and applying the chain rule to every y -term — produces a formula for $\frac{dy}{dx}$ that is itself usually a function of **both** x and y . That formula is exactly what is needed to locate horizontal and vertical tangent lines, and to determine where the curve is rising or falling.

Horizontal and vertical tangents on implicit curves

Suppose implicit differentiation produces $\frac{dy}{dx} = \frac{N(x, y)}{D(x, y)}$ (a ratio in lowest terms).

- A **horizontal tangent** occurs where $N(x, y) = 0$ while $D(x, y) \neq 0$ (slope equals 0).
- A **vertical tangent** occurs where $D(x, y) = 0$ while $N(x, y) \neq 0$ (slope is undefined).
- Where **both** $N = 0$ and $D = 0$ simultaneously, the point requires separate investigation (it is often not even on the curve, or is a singular point).

In both cases, the candidate x - or y -values must be substituted back into the **original** equation of the curve to find the actual point(s), and then checked against the other (numerator or denominator) condition.

VN

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Với một quan hệ ẩn (implicit relation), sau khi đạo hàm ẩn ta được $\frac{dy}{dx} = \frac{N(x, y)}{D(x, y)}$. **Tiếp tuyến ngang** (horizontal tangent, hệ số góc = 0) xảy ra khi **tử số** $N = 0$ (và mẫu số khác 0). **Tiếp tuyến đứng** (vertical tangent, hệ số góc không xác định) xảy ra khi **mẫu số** $D = 0$ (và tử số khác 0). Sau khi tìm được điều kiện, luôn phải **thay ngược lại phương trình gốc** của đường cong để tìm tọa độ điểm cụ thể — đừng quên bước này.

Ví dụ mẫu · Horizontal and vertical tangents

Find all points where the curve $x^2 - xy + y^2 = 3$ has a horizontal tangent, and all points where it has a vertical tangent.

Implicit differentiation (product rule on the xy term):

$$2x - \left(y + x \frac{dy}{dx}\right) + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \implies \frac{dy}{dx} (2y - x) = y - 2x \implies \frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}.$$

Horizontal tangents ($y - 2x = 0$, i.e. $y = 2x$, with $2y - x \neq 0$): substituting into the original equation,

$$x^2 - x(2x) + (2x)^2 = 3 \implies 3x^2 = 3 \implies x = \pm 1.$$

This gives points $(1, 2)$ and $(-1, -2)$. Checking the denominator at each: at $(1, 2)$, $2y - x = 4 - 1 = 3 \neq 0$; at $(-1, -2)$, $2y - x = -4 + 1 = -3 \neq 0$. Both are valid horizontal-tangent points.

Vertical tangents ($2y - x = 0$, i.e. $x = 2y$, with $y - 2x \neq 0$): substituting,

$$(2y)^2 - (2y)y + y^2 = 3 \implies 3y^2 = 3 \implies y = \pm 1.$$

This gives points $(2, 1)$ and $(-2, -1)$. Checking the numerator: at $(2, 1)$, $y - 2x = 1 - 4 = -3 \neq 0$; at $(-2, -1)$, $y - 2x = -1 + 4 = 3 \neq 0$. Both are valid vertical-tangent points.

Summary: horizontal tangents at $(1, 2)$ and $(-1, -2)$; vertical tangents at $(2, 1)$ and $(-2, -1)$.

The same formula for $\frac{dy}{dx}$ also tells us where the curve is rising or falling at any specific point on it – simply substitute the coordinates and read the sign, exactly as with an explicit function.

5.11 Problem Bank

Bài tập luyện tập

Explain whether the Extreme Value Theorem guarantees an absolute maximum and absolute minimum for $g(x) = \frac{1}{x-2}$ on the interval $[0, 1]$, and separately for $h(x) = \frac{1}{x-2}$ on the interval $[1, 3]$.

Lời giải chi tiết

On $[0, 1]$, the value $x = 2$ (where g is undefined) does not lie in the interval, so g is continuous on all of $[0, 1]$. Since $[0, 1]$ is closed and bounded, the EVT applies: g is guaranteed to attain both an absolute maximum and an absolute minimum on $[0, 1]$. On $[1, 3]$, however, $x = 2$ *does* lie inside the interval, and $h(x) = \frac{1}{x-2}$ has a vertical asymptote there – h is **not continuous** on $[1, 3]$, so the EVT's hypotheses fail, and it gives no guarantee. Indeed, $h(x) \rightarrow +\infty$ as $x \rightarrow 2^-$ and $h(x) \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow 2^+$, so h has neither an absolute maximum nor an absolute minimum on $[1, 3]$.

Bài tập luyện tập

How many critical points does $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 7$ have?

- (A) 0 (C) 2
(B) 1 (D) 3

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2) = 6(x+2)(x-1)$, which is defined for all x and equals zero at $x = -2$ and $x = 1$. Both are in the domain, so f has exactly 2 critical points. (C).

Bài tập luyện tập

What is the critical point of $f(x) = (x+3)^{2/3} - 1$?

- (A) $x = 3$ (C) $x = 0$
(B) $x = -3$ (D) $x = -1$

Lời giải chi tiết

$f'(x) = \frac{2}{3}(x+3)^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x+3}}$, which is undefined at $x = -3$. Since $f(-3) = 0^{2/3} - 1 = -1$ is defined, $x = -3$ is in the domain, so it is a critical point (a cusp). (B).

Bài tập luyện tập

Verify that Rolle's Theorem applies to $f(x) = \sin x$ on $[0, \pi]$, and find the value of c it guarantees.

Lời giải chi tiết

$f(x) = \sin x$ is continuous on $[0, \pi]$ and differentiable on $(0, \pi)$ (sine is differentiable everywhere), and $f(0) = \sin 0 = 0$, $f(\pi) = \sin \pi = 0$, so $f(0) = f(\pi)$. All hypotheses hold. Since $f'(x) = \cos x$, solving $\cos c = 0$ on $(0, \pi)$ gives $c = \frac{\pi}{2}$.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = x^3 - 4x$ on $[0, 3]$. Find the value(s) of c guaranteed by the Mean Value Theorem.

Lời giải chi tiết

f is a polynomial, so it is continuous on $[0, 3]$ and differentiable on $(0, 3)$; the MVT applies. $f(0) = 0$, $f(3) = 27 - 12 = 15$, so the average rate of change is $\frac{15-0}{3-0} = 5$. Since $f'(x) = 3x^2 - 4$, solve $3c^2 - 4 = 5 \Rightarrow 3c^2 = 9 \Rightarrow c^2 = 3 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3}$. Only $c = \sqrt{3} \approx 1.73$ lies in $(0, 3)$, so $c = \sqrt{3}$.

Bài tập luyện tập

Let $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1$. On which interval is g decreasing?

(A) $(-\infty, -1)$ (C) $(2, \infty)$ (B) $(-1, 2)$ (D) g is never decreasing**Lời giải chi tiết**

$g'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x-2)(x+1)$, zero at $x = -1, 2$. Testing $x = 0$: $g'(0) = 6(-2)(1) = -12 < 0$, so g is decreasing on $(-1, 2)$; testing $x = -2$ and $x = 3$ both give $g' > 0$, confirming g increases outside $[-1, 2]$. (B).

Bài tập luyện tập

Let $h(x) = x^4 - 8x^2 + 3$. Construct the sign chart for h' , and classify every critical point as a local maximum, local minimum, or neither.

Lời giải chi tiết

$h'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x^2 - 4) = 4x(x-2)(x+2)$, with critical points $x = -2, 0, 2$. Testing points:

$$h'(-3) = 4(-3)(5)(-1) = -60 < 0, \quad h'(-1) = 4(-1)(-1)(3) = 12 > 0;$$

Recomputing carefully: $h'(-1) = 4(-1)((-1)-2)((-1)+2) = 4(-1)(-3)(1) = 12 > 0$; $h'(1) = 4(1)(1-2)(1+2) = 4(1)(-1)(3) = -12 < 0$; $h'(3) = 4(3)(1)(5) = 60 > 0$.

Interval	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
Sign of h'	−	+	−	+

h' changes $- \rightarrow +$ at $x = -2$: **local minimum**, $h(-2) = 16 - 32 + 3 = -13$. h' changes $+ \rightarrow -$ at $x = 0$: **local maximum**, $h(0) = 3$. h' changes $- \rightarrow +$ at $x = 2$: **local minimum**, $h(2) = 16 - 32 + 3 = -13$.

Bài tập luyện tập

At which x -value does $f(x) = xe^{-x}$ have a local maximum?

- (A) $x = 0$ (C) $x = e$
(B) $x = 1$ (D) f has no local maximum

Lời giải chi tiết

$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$, zero only at $x = 1$ (since $e^{-x} > 0$ always); $f' > 0$ for $x < 1$ and $f' < 0$ for $x > 1$, so f has a local maximum at $x = 1$. (B).

Bài tập luyện tập

Show that $x = 2$ is a critical point of $f(x) = (x - 2)^3 + 1$, but that it is *not* a local extremum. Use concavity to describe what kind of point it is instead.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 3(x - 2)^2$, so $f'(2) = 0$ and $x = 2$ is a critical point. Since $(x - 2)^2 \geq 0$ for all x , $f'(x) \geq 0$ everywhere – in particular f' is positive on both sides of $x = 2$ (it never becomes negative), so f' does **not** change sign there, and $x = 2$ is **not** a local extremum (f is increasing right through that point). Checking concavity: $f''(x) = 6(x - 2)$, which is negative for $x < 2$ and positive for $x > 2$ – a genuine sign change. So $x = 2$ is a point of **inflection** (with a momentarily horizontal tangent).

Bài tập luyện tập

Find the absolute maximum and absolute minimum of $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ on $[-2, 2]$.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x - 1)(x + 1)$, with critical points $x = -1, 0, 1$, all inside $(-2, 2)$. Evaluate:

$$f(-2) = 16 - 8 + 3 = 11, f(-1) = 1 - 2 + 3 = 2, f(0) = 3, f(1) = 2, f(2) = 11.$$

Comparing all five values, the largest is 11 (attained at both $x = \pm 2$) and the smallest is 2 (attained at both $x = \pm 1$). Absolute maximum = 11; absolute minimum = 2.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = x^3 - 3x + 1$ on $[0, 2]$. The absolute maximum value of f on this interval is:

- (A) -1 (C) 3
(B) 1 (D) cannot be determined

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$; the only critical point inside $(0, 2)$ is $x = 1$. Candidates: $f(0) = 1$, $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$, $f(2) = 8 - 6 + 1 = 3$. The largest value is $f(2) = 3$, occurring at the **endpoint** $x = 2$, not at the critical point. (C).

Bài tập luyện tập

For $f(x) = x^4 - 6x^2$, the Second Derivative Test classifies the critical point $x = 0$ as a:

- (A) Local maximum
(B) Local minimum
(C) Inflection point
(D) Point where the test is inconclusive

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 4x^3 - 12x = 4x(x^2 - 3)$, critical points $x = 0, \pm\sqrt{3}$. $f''(x) = 12x^2 - 12$, so $f''(0) = -12 < 0$, which by the Second Derivative Test means $x = 0$ is a **local maximum**. (A).

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = x^5$. Show that the Second Derivative Test is inconclusive at the critical point $x = 0$, then use the First Derivative Test to determine whether $x = 0$ is a local extremum.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 5x^4$, so $f'(0) = 0$ and $x = 0$ is a critical point. $f''(x) = 20x^3$, so $f''(0) = 0$ – the Second Derivative Test is inconclusive. Using the First Derivative Test instead: $f'(x) = 5x^4 \geq 0$ for **every** real x (an even power), so f' does not change sign at $x = 0$ – f is increasing on both sides, and $x = 0$ is **not** a local extremum. (Checking concavity confirms $f''(x) = 20x^3$ changes from negative to positive at $x = 0$, so $x = 0$ is instead a point of inflection.)

Bài tập luyện tập

Which statement correctly describes the behavior of $g(x) = x^4$ at $x = 0$?

- (A) $x = 0$ is an inflection point because $g''(0) = 0$
- (B) $x = 0$ is not an inflection point because g'' does not change sign there
- (C) $x = 0$ is a local maximum
- (D) g is concave down on an interval containing 0

Lời giải chi tiết

$g''(x) = 12x^2 \geq 0$ for every x , so g'' never becomes negative – it does not change sign at $x = 0$, so $x = 0$ is **not** an inflection point despite $g''(0) = 0$. (Separately, $g'(x) = 4x^3$ changes from negative to positive at $x = 0$, so $x = 0$ is actually a local minimum.) **(B)**.

Bài tập luyện tập

For $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$: find all local extrema (using the Second Derivative Test) and all points of inflection, and describe the concavity of f on each relevant interval.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$, critical points $x = 1, 3$. $f''(x) = 6x - 12$. Since $f''(1) = -6 < 0$, $x = 1$ is a **local maximum**, $f(1) = 1 - 6 + 9 + 1 = 5$. Since $f''(3) = 6 > 0$, $x = 3$ is a **local minimum**, $f(3) = 27 - 54 + 27 + 1 = 1$.

For inflection: $f''(x) = 6x - 12 = 0$ at $x = 2$; since f'' is linear and increasing, $f'' < 0$ for $x < 2$

(concave down) and $f'' > 0$ for $x > 2$ (concave up) – a genuine sign change, so $(2, f(2)) = (2, 3)$ is a point of inflection. Summary: concave down on $(-\infty, 2)$, concave up on $(2, \infty)$, local max $(1, 5)$, local min $(3, 1)$, inflection point $(2, 3)$.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2$. (a) Find all critical points and classify each with the First Derivative Test. (b) Find all points of inflection, in exact form.

Lời giải chi tiết

Note $f(x) = x^2(x - 2)^2$.

(a) $f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 8x = 4x(x^2 - 3x + 2) = 4x(x - 1)(x - 2)$, critical points $x = 0, 1, 2$. Testing: $f'(-1) = 4(-1)(-2)(-3) = -24 < 0$; $f'(0.5) = 4(0.5)(-0.5)(-1.5) = 1.5 > 0$; $f'(1.5) = 4(1.5)(0.5)(-0.5) = -1.5 < 0$; $f'(3) = 4(3)(2)(1) = 24 > 0$. So f decreases, then increases, then decreases, then increases: **local minimum** at $x = 0$ ($f(0) = 0$), **local maximum** at $x = 1$ ($f(1) = 1$), **local minimum** at $x = 2$ ($f(2) = 0$).

(b) $f''(x) = 12x^2 - 24x + 8 = 4(3x^2 - 6x + 2)$. Solving $3x^2 - 6x + 2 = 0$: $x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 24}}{6} = \frac{6 \pm 2\sqrt{3}}{6} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. Since $3x^2 - 6x + 2$ is an upward parabola in x , $f'' < 0$ between the roots and $f'' > 0$ outside – a genuine sign change at both, so both are inflection points. Writing $x = 1 + t$ with $t = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ (so $t^2 = \frac{1}{3}$): $x(x - 2) = (1 + t)(t - 1) = t^2 - 1 = \frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$, so $f(x) = [x(x - 2)]^2 = \frac{4}{9}$ at both roots. Inflection points: $(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9})$ and $(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{4}{9})$.

Bài tập luyện tập

The sign of $f'(x)$ is given on four intervals: positive on $(-\infty, -2)$, negative on $(-2, 1)$, positive on $(1, 4)$, negative on $(4, \infty)$. Which x -value is a local minimum of f ?

(A) $x = -2$

(C) $x = 4$

(B) $x = 1$

(D) f has no local minimum

Lời giải chi tiết

A local minimum requires f' to change from negative to positive. That happens only at $x = 1$ (negative on $(-2, 1)$, positive on $(1, 4)$). At $x = -2$, f' changes $+$ → $-$ (local max); at $x = 4$, f' changes $+$ → $-$ (local max). (B).

Bài tập luyện tập

The table below gives the sign of $f'(x)$ and $f''(x)$ on four intervals determined by the values $A < B < C$.

Interval	$(-\infty, A)$	(A, B)	(B, C)	(C, ∞)
Sign of f'	+	+	−	−
Sign of f''	+	−	−	+

Describe the behavior of f (increasing/decreasing, concave up/down) on each interval, and identify which of A, B, C are local extrema and which are points of inflection.

Lời giải chi tiết

On $(-\infty, A)$: f increasing, concave up. On (A, B) : f increasing, concave down. On (B, C) : f decreasing, concave down. On (C, ∞) : f decreasing, concave up.

At $x = A$: f' stays positive on both sides (no sign change) $\Rightarrow$ **not** a local extremum; but f'' changes $+$ $\rightarrow$ $-$ $\Rightarrow A$ is a point of inflection. At $x = B$: f' changes $+$ $\rightarrow$ $-$ $\Rightarrow$ **local maximum**; f'' stays negative on both sides $\Rightarrow$ **not** an inflection point. At $x = C$: f' stays negative on both sides $\Rightarrow$ **not** a local extremum; f'' changes $-$ $\rightarrow$ $+$ $\Rightarrow C$ is a point of inflection.

Bài tập luyện tập

If $f''(x) > 0$ for every x in (a, b) , then on (a, b) the graph of f is:

(A) Increasing

(C) Concave up

(B) Decreasing

(D) Concave down

Lời giải chi tiết

By definition, $f'' > 0$ on an interval means the graph is concave up there. (Concavity says nothing by itself about whether f is increasing or decreasing.) (C).

Bài tập luyện tập

An open-top box with a square base must have volume 64 ft^3 . The base material costs \$4 per square foot and the (four) side material costs \$2 per square foot. Find the dimensions that minimize the total cost, and find that minimum cost.

Lời giải chi tiết

Let x be the side of the square base and h the height. Volume: $x^2h = 64 \Rightarrow h = \frac{64}{x^2}$. Cost: base costs $4x^2$; the four sides have combined area $4xh$, costing $2(4xh) = 8xh$. Total cost

$$C(x) = 4x^2 + 8xh = 4x^2 + 8x \cdot \frac{64}{x^2} = 4x^2 + \frac{512}{x}, \quad x > 0.$$

$C'(x) = 8x - \frac{512}{x^2}$. Setting $C'(x) = 0$: $8x^3 = 512 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4 \text{ ft}$. Then $h = \frac{64}{16} = 4 \text{ ft}$ (the box is a cube). Since $C''(x) = 8 + \frac{1024}{x^3} > 0$ for all $x > 0$, this critical point is an absolute minimum. Minimum cost:

$$C(4) = 4(16) + \frac{512}{4} = 64 + 128 = \$192.$$

Bài tập luyện tập

A rectangle has its base on the x -axis and its two upper corners on the parabola $y = 9 - x^2$. Find the dimensions of the rectangle with maximum area, and find that maximum area.

Lời giải chi tiết

By symmetry, let the upper corners be $(-x, 9 - x^2)$ and $(x, 9 - x^2)$ for $0 < x < 3$. Width = $2x$, height = $9 - x^2$, so

$$A(x) = 2x(9 - x^2) = 18x - 2x^3.$$

$A'(x) = 18 - 6x^2$. Setting $A'(x) = 0$: $x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ (rejecting the negative root, since $x > 0$). $A''(x) = -12x$, and $A''(\sqrt{3}) = -12\sqrt{3} < 0$, confirming a maximum (also $A(0) = A(3) = 0$ at the domain's edges, consistent with an interior maximum). Width = $2\sqrt{3}$, height = $9 - 3 = 6$. Maximum area:

$$A(\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} - 2(3\sqrt{3}) = 18\sqrt{3} - 6\sqrt{3} = 12\sqrt{3} \approx 20.8.$$

Bài tập luyện tập

A rectangular garden of area 150 m^2 is to be divided into two equal-size plots by a fence parallel to one pair of sides (as in the earlier figure). Find the dimensions that minimize the total length of fencing used (outer perimeter plus the dividing fence), and find that minimum length.

Lời giải chi tiết

Let x be the length of each of the three parallel fence segments (two outer sides plus the divider) and y the length of the other two sides. Area constraint: $xy = 150 \Rightarrow y = \frac{150}{x}$. Total fence:

$$F(x) = 3x + 2y = 3x + \frac{300}{x}, \quad x > 0.$$

$F'(x) = 3 - \frac{300}{x^2}$. Setting $F'(x) = 0$: $3x^2 = 300 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$ m. Then $y = \frac{150}{10} = 15$ m. Since $F''(x) = \frac{600}{x^3} > 0$ for $x > 0$, this is an absolute minimum. Minimum fencing:

$$F(10) = 3(10) + \frac{300}{10} = 30 + 30 = 60 \text{ m.}$$

Bài tập luyện tập

Two positive numbers have a product of 100. The minimum possible value of their sum is:

- (A) 10 (C) 25
(B) 20 (D) 50

Lời giải chi tiết

Let the numbers be x and $\frac{100}{x}$, $x > 0$. Sum $S(x) = x + \frac{100}{x}$. $S'(x) = 1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10$, giving the other number also 10. $S''(x) = \frac{200}{x^3} > 0$ for $x > 0$, confirming a minimum. Minimum sum = $10 + 10 = 20$. **(B)**.

Bài tập luyện tập

An open-top box with a square base must have volume 4000 cm^3 . Find the dimensions that minimize the total surface area (base plus four sides), and find that minimum surface area.

Lời giải chi tiết

Let x be the base side and h the height, with $x^2h = 4000 \Rightarrow h = \frac{4000}{x^2}$. Surface area: $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + \frac{16000}{x}$, $x > 0$. $S'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$. Setting $S'(x) = 0$: $2x^3 = 16000 \Rightarrow x^3 = 8000 \Rightarrow x = 20$ cm. Then $h = \frac{4000}{400} = 10$ cm. $S''(x) = 2 + \frac{32000}{x^3} > 0$ for $x > 0$, confirming a minimum. Minimum area:

$$S(20) = 400 + \frac{16000}{20} = 400 + 800 = 1200 \text{ cm}^2.$$

Bài tập luyện tập

For the circle $x^2 + y^2 = 25$, find $\frac{dy}{dx}$ at the point $(3, 4)$.

(A) $-\frac{3}{4}$

(C) $-\frac{4}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{4}{3}$

Lời giải chi tiết

Differentiating implicitly: $2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. At $(3, 4)$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$. (A).

Bài tập luyện tập

Find all points on the curve $y^2 = x^3 - 3x + 4$ where the tangent line is horizontal.

Lời giải chi tiết

Differentiating implicitly: $2y\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 3}{2y}$. A horizontal tangent requires the numerator to vanish (with $y \neq 0$): $3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. At $x = 1$: $y^2 = 1 - 3 + 4 = 2 \Rightarrow y = \pm\sqrt{2}$. At $x = -1$: $y^2 = -1 + 3 + 4 = 6 \Rightarrow y = \pm\sqrt{6}$. All four y -values are nonzero, so all are valid. Horizontal tangents occur at $(1, \sqrt{2})$, $(1, -\sqrt{2})$, $(-1, \sqrt{6})$, $(-1, -\sqrt{6})$.

Bài tập luyện tập

The curve $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$ (a circle) has vertical tangent lines at:

(A) $(9, -3)$ and $(-1, -3)$

(C) $(9, -3)$ only

(B) $(4, 2)$ and $(4, -8)$

(D) $(4, 2)$ only

Lời giải chi tiết

Writing the circle as $x^2 + y^2 - 8x + 6y = 0$ and differentiating implicitly: $2x + 2y\frac{dy}{dx} - 8 + 6\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4 - x}{y + 3}$. Vertical tangents require the denominator to vanish: $y = -3$. Substituting into the circle equation: $(x - 4)^2 + 0 = 25 \Rightarrow x = 9$ or $x = -1$. Both give a nonzero numerator ($4 - 9 = -5$ and $4 - (-1) = 5$), so both are valid: $(9, -3)$ and $(-1, -3)$. (A).

Bài tập luyện tập

For the curve $x^2 - xy + y^2 = 3$, find $\frac{dy}{dx}$ at the point $(\sqrt{3}, 0)$, and state whether the curve is rising or falling there.

Lời giải chi tiết

First confirm $(\sqrt{3}, 0)$ lies on the curve: $(\sqrt{3})^2 - (\sqrt{3})(0) + 0^2 = 3$, which checks out. From the earlier derivation, $\frac{dy}{dx} = \frac{y - 2x}{2y - x}$. At $(\sqrt{3}, 0)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{0 - 2\sqrt{3}}{0 - \sqrt{3}} = \frac{-2\sqrt{3}}{-\sqrt{3}} = 2$. Since the slope is positive, the curve is **rising** (increasing) as it passes through $(\sqrt{3}, 0)$.

Bài tập luyện tập

Which of the following is *not* part of the definition of a critical point of f at $x = c$?

- (A) c is in the domain of f
- (B) $f'(c) = 0$ or $f'(c)$ does not exist
- (C) f has a local maximum or minimum at $x = c$
- (D) All of the above are required

Lời giải chi tiết

A critical point requires only that c be in the domain of f and that $f'(c) = 0$ or fail to exist – it does **not** require c to be a local extremum (many critical points are not extrema, as seen throughout this chapter). (C).

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = 3x^5 - 5x^3$. Find all intervals of increase and decrease, classify all critical points with the First Derivative Test, find all intervals of concavity, and find all points of inflection (exact form).

Lời giải chi tiết

Monotonicity: $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$, critical points $x = -1, 0, 1$. Since $x^2 \geq 0$ always, the sign of f' matches the sign of $(x^2 - 1)$: testing $x = -2$ gives $f' > 0$ (increasing); testing $x = -0.5$ and $x = 0.5$ both give $f' < 0$ (decreasing on all of $(-1, 1)$, including straight through $x = 0$); testing $x = 2$ gives $f' > 0$ (increasing). So f increases on $(-\infty, -1)$, decreases on $(-1, 1)$, increases on $(1, \infty)$.

Extrema: at $x = -1$, f' changes $+$ $\rightarrow$ $-$: **local maximum**, $f(-1) = 3(-1) - 5(-1) = 2$. At $x = 1$, f' changes $-$ $\rightarrow$ $+$: **local minimum**, $f(1) = 3 - 5 = -2$. At $x = 0$, f' is negative on both sides (no sign change): **not an extremum**.

Concavity: $f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2 - 1)$, zero at $x = 0$ and $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Testing: $f''(-1) = -30 < 0$ (down); $f''(-0.5) = 7.5 > 0$ (up); $f''(0.5) = -7.5 < 0$ (down);
 $f''(1) = 30 > 0$ (up). So f is concave down on $(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$, concave up on $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$, concave down on $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, concave up on $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$.

Inflection points: sign changes occur at all three roots. $f(0) = 0$. Using f odd (only odd powers of x), $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{8} - 5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{3\sqrt{2}}{8} - \frac{10\sqrt{2}}{8} = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$, and by oddness

$$f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{7\sqrt{2}}{8}. \text{ Inflection points: } \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{7\sqrt{2}}{8}\right), (0, 0), \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{7\sqrt{2}}{8}\right).$$

Bài tập luyện tập

The function $f(x) = \ln x - x$ (for $x > 0$) has a local maximum at $x =$

- (A) 1 (C) -1
(B) e (D) 0

Lời giải chi tiết

$f'(x) = \frac{1}{x} - 1$, zero when $\frac{1}{x} = 1$, i.e. $x = 1$ (in the domain $x > 0$). $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$, so $f''(1) = -1 < 0$, confirming a local maximum by the Second Derivative Test, with value $f(1) = \ln 1 - 1 = -1$. (A).

Bài tập luyện tập

An open-top cylindrical container (a base but no lid) must hold a volume of $27\pi \text{ cm}^3$. Find the radius and height that minimize the total surface area (base plus lateral surface only), and find that minimum area.

Lời giải chi tiết

Let r be the radius and h the height. Volume: $\pi r^2 h = 27\pi \Rightarrow h = \frac{27}{r^2}$. Surface area (one circular base, no top, plus the lateral surface):

$$S(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{27}{r^2} = \pi r^2 + \frac{54\pi}{r}, \quad r > 0.$$

$S'(r) = 2\pi r - \frac{54\pi}{r^2}$. Setting $S'(r) = 0$: $2\pi r^3 = 54\pi \Rightarrow r^3 = 27 \Rightarrow r = 3 \text{ cm}$. Then $h = \frac{27}{9} = 3 \text{ cm}$. Since $S''(r) = 2\pi + \frac{108\pi}{r^3} > 0$ for every $r > 0$, this critical point is an absolute minimum. Minimum surface area:

$$S(3) = \pi(9) + \frac{54\pi}{3} = 9\pi + 18\pi = 27\pi \text{ cm}^2 \approx 84.8 \text{ cm}^2.$$

Bài tập luyện tập

The curve $xy - x^2 = 4$ passes through the point $(1, 5)$. Find $\frac{dy}{dx}$ at that point, and determine whether the curve is increasing or decreasing there.

Lời giải chi tiết

Check the point: $(1)(5) - (1)^2 = 5 - 1 = 4$, so the point is valid. Differentiate implicitly (product rule on xy):

$$y + x \frac{dy}{dx} - 2x = 0 \Rightarrow x \frac{dy}{dx} = 2x - y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x}.$$

At $(1, 5)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{2(1) - 5}{1} = -3$. Since the slope is negative, the curve is **decreasing** as it passes

through (1, 5).

Ôn tập nhanh: (1) mọi cực trị là điểm tới hạn, nhưng **không** phải mọi điểm tới hạn là cực trị — luôn kiểm tra đổi dấu; (2) Candidates Test = điểm tới hạn **cộng** hai đầu mút, không được thiếu bên nào; (3) $f''(c) = 0$ không tự động là điểm uốn và không làm Second Derivative Test vô hiệu hoàn toàn — nó chỉ buộc quay lại First Derivative Test; (4) bài toán tối ưu luôn cần bước **chứng minh** max/min, không chỉ tìm điểm tới hạn; (5) tiếp tuyến ngang $\Leftrightarrow$ tử số của $\frac{dy}{dx}$ bằng 0; tiếp tuyến đứng $\Leftrightarrow$ mẫu số bằng 0.

Integration and Accumulation of Change

Mục tiêu Unit: Tích lũy sự thay đổi qua diện tích dưới đồ thị hàm tốc độ thay đổi; xấp xỉ diện tích bằng tổng Riemann (trái, phải, trung điểm) và quy tắc hình thang; định nghĩa hình thức của tích phân xác định như giới hạn của tổng Riemann; các tính chất của tích phân xác định (tuyến tính, cộng tính, đối cận, so sánh); hai phần của Định lý cơ bản của Giải tích (FTC); nguyên hàm và tích phân bất định cùng hằng số $+C$; kỹ thuật đổi biến u cho cả tích phân bất định lẫn xác định; và các phép biến đổi đại số (chia đa thức, tách phân thức, viết lại căn thức) trước khi lấy nguyên hàm.

6.1 Accumulation of Change

Every derivative answers the question “how fast is a quantity changing?” Integration answers the reverse question: given how fast a quantity is changing, how much has it changed in total? If $r(t)$ is the **rate of change** of some quantity Q at time t (with units of “quantity per unit time”), then the **total accumulated change** in Q from $t = a$ to $t = b$ is recovered by adding up all the small contributions $r(t) \Delta t$ over the interval — and geometrically, that sum is exactly the **area between the graph of r and the horizontal axis** on $[a, b]$.

The simplest case to picture is motion along a line. If $v(t)$ is the velocity of a particle (its rate of change of position), then over a short time interval Δt the particle’s displacement is approximately $v(t) \Delta t$ — velocity times elapsed time, which is precisely the area of a thin rectangle of height $v(t)$ and width Δt . Adding up all such thin rectangles across $[a, b]$ and refining the partition gives, in the limit, the exact displacement: the **area under the velocity graph equals displacement**. The same idea applies to any rate: the area under an income-rate graph is total income earned; the area under a flow-rate graph is total volume that has flowed; the area under a population growth-rate graph is the total change in population.

Rate graph $\rightarrow$ accumulated change

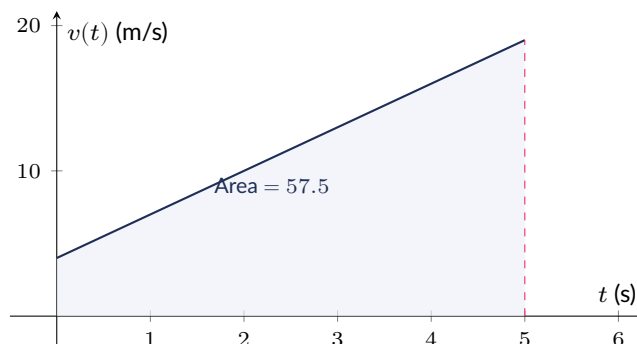
If $r(t)$ is continuous on $[a, b]$, the (signed) area between $y = r(t)$ and the t -axis on $[a, b]$ equals the total accumulated change of the quantity whose rate of change is r . Area above the axis counts as positive change; area below the axis counts as negative change. Units check: (rate) $\times$ (time) = (quantity) — the units of the horizontal axis cancel against the “per unit time” in the vertical axis, leaving the units of the accumulated quantity itself.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm trả lời câu hỏi “đại lượng đang thay đổi nhanh thế nào?”; tích phân trả lời câu hỏi ngược lại: “biết tốc độ thay đổi, tổng lượng thay đổi là bao nhiêu?” Nếu $r(t)$ là tốc độ thay đổi của một đại lượng Q , thì **diện tích giữa đồ thị $r(t)$ và trục hoành trên $[a, b]$ chính là tổng lượng thay đổi tích lũy** của Q từ $t = a$ đến $t = b$. Trường hợp quen thuộc nhất: diện tích dưới đồ thị vận tốc $v(t)$ bằng độ dời (displacement) của vật. Phần diện tích nằm *trên* trục hoành được tính là thay đổi dương, phần nằm *dưới* trục hoành được tính là thay đổi âm.

When the rate function is linear (or piecewise linear), the “area under the graph” can be computed directly with elementary geometry — triangles, rectangles, and trapezoids — before any integral machinery is introduced. This is the most direct way to see accumulation in action.



Displacement equals the area of the shaded trapezoidal region under $v(t) = 3t + 4$ on $[0, 5]$: a straightforward geometry computation before any integration technique is needed.

Ví dụ mẫu · Displacement as area under a velocity graph

A car travels along a straight road with velocity $v(t) = 3t + 4$ (in m/s) for $0 \leq t \leq 5$ (in seconds). Find the car's displacement over this interval using geometry alone.

Because $v(t)$ is linear, its graph on $[0, 5]$ is a straight line from $(0, v(0)) = (0, 4)$ to $(5, v(5)) = (5, 19)$, and $v(t) > 0$ throughout, so the region under the graph is a trapezoid with parallel sides of length 4 and 19 and width 5. Its area is

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(b_1 + b_2)h = \frac{1}{2}(4 + 19)(5) = \frac{1}{2}(23)(5) = 57.5.$$

Since velocity is positive on the whole interval, the displacement equals this area exactly: the car travels **57.5 meters** in the forward direction over the first 5 seconds.

For a curved (nonlinear) rate function, no elementary shape describes the exact region, and this is precisely the gap that Riemann sums and the definite integral are built to close: first approximate the area with shapes whose areas we *can* compute (rectangles, trapezoids), and then take these approximations to their limit for an exact value.

6.2 Approximating Areas with Riemann Sums

6.2.1 Left, right, and midpoint sums

To approximate the area under $y = f(x)$ on $[a, b]$, partition the interval into n subintervals of equal width $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, with partition points $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$. On each subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, build a rectangle of width Δx whose height is the value of f at some chosen point in that subinterval, and add up the n rectangle areas. The three standard choices of "which point" give the **left**, **right**, and **midpoint Riemann sums**.

For n subintervals of equal width $\Delta x = \frac{b-a}{n}$:

$$L_n = \Delta x[f(x_0) + f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})], \quad R_n = \Delta x[f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)],$$

$$M_n = \Delta x[f(m_1) + f(m_2) + \dots + f(m_n)],$$

where $m_i = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ is the midpoint of the i -th subinterval. Each sum is a total area of n rectangles: L_n uses the **left** endpoint of each subinterval as the rectangle's height, R_n uses the **right** endpoint, and M_n uses the **midpoint**.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Để xấp xỉ diện tích dưới đồ thị $f(x)$ trên $[a, b]$, chia đoạn thành n phần bằng nhau, mỗi phần rộng $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, rồi dựng n hình chữ nhật có chiều rộng Δx . **Tổng Riemann trái** (L_n) lấy chiều cao mỗi hình chữ nhật bằng giá trị hàm số tại *đầu trái* của mỗi đoạn con; **tổng Riemann phải** (R_n) lấy chiều cao tại *đầu phải*; **tổng Riemann trung điểm** (M_n) lấy chiều cao tại *trung điểm* của mỗi đoạn con. Tổng diện tích các hình chữ nhật là giá trị xấp xỉ cho tích phân xác định.

Whether a given sum over- or under-estimates the true area depends on the shape of f on each subinterval — specifically, on whether f is increasing or decreasing there.

On an interval where f is increasing: the left endpoint gives the smallest function value on each subinterval (rectangle lies below the curve) and the right endpoint gives the largest (rectangle lies above the curve). So L_n **underestimates** and R_n **overestimates** the true area.

On an interval where f is decreasing: the roles reverse — the left endpoint gives the largest value and the right endpoint the smallest. So L_n **overestimates** and R_n **underestimates** the true area.

Ví dụ mẫu • Left, right, and midpoint sums from a formula

Let $f(x) = x^2 + 1$. Approximate $\int_0^4 f(x) dx$ using $n = 4$ subintervals of equal width with (a) a left Riemann sum, (b) a right Riemann sum, (c) a midpoint Riemann sum. Then compare all three to the exact value.

With $n = 4$ on $[0, 4]$, $\Delta x = 1$, and the partition points are $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4$, giving

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 5, \quad f(3) = 10, \quad f(4) = 17.$$

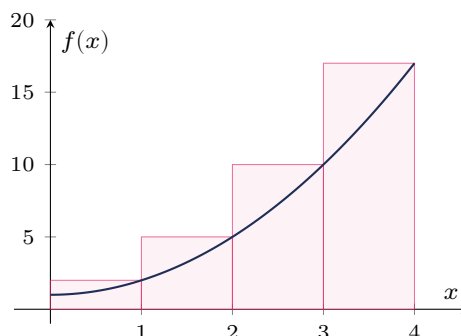
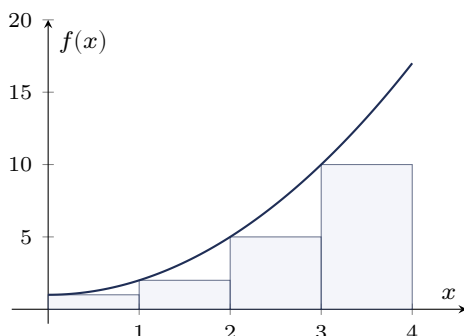
(a) Left sum: $L_4 = \Delta x[f(0) + f(1) + f(2) + f(3)] = 1(1 + 2 + 5 + 10) = 18$.

(b) Right sum: $R_4 = \Delta x[f(1) + f(2) + f(3) + f(4)] = 1(2 + 5 + 10 + 17) = 34$.

(c) Midpoint sum: the midpoints are 0.5, 1.5, 2.5, 3.5, with $f(0.5) = 1.25, f(1.5) = 3.25, f(2.5) = 7.25, f(3.5) = 13.25$, so

$$M_4 = 1(1.25 + 3.25 + 7.25 + 13.25) = 25.$$

The exact value (computed later by antiderivatives) is $\int_0^4 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^4 = \frac{64}{3} + 4 = \frac{76}{3} \approx 25.33$. Because f is increasing on $[0, 4]$, $L_4 = 18$ underestimates and $R_4 = 34$ overestimates, exactly as predicted; the midpoint sum $M_4 = 25$ lands much closer to the true value than either one-sided sum.



Left sum (left panel, heights at left endpoints) versus right sum (right panel, heights at right endpoints) for $f(x) = x^2 + 1$ on $[0, 4]$ with $n = 4$. Because f is increasing, every left rectangle sits below the curve ($L_4 = 18$, an underestimate) while every right rectangle sits above it ($R_4 = 34$, an overestimate).

(!) Lỗi thường gặp: Do not memorize "left sum = underestimate, right sum = overestimate" as a universal rule — it only holds while f is **increasing**. On a subinterval where f is **decreasing**, the relationship flips: the left endpoint gives the larger value (overestimate) and the right endpoint gives the smaller value (underestimate). Always check monotonicity on the specific interval in question before declaring which sum is too big or too small; on an interval that is increasing in part and decreasing in part, neither one-sided sum needs to be uniformly above or below the true area.

6.2.2 Riemann sums from a table of values

On the AP exam, Riemann sums are frequently built not from a formula but from a **table of values** recorded at discrete times or positions — for instance, sensor readings, flow-rate measurements, or tabulated experimental data. The rectangle-building process is identical; only the source of the function values changes.

Ví dụ mẫu · Left and right sums from a table

Water drains from a tank at rate $R(t)$ (liters per minute), recorded every 5 minutes:

t (min)	0	5	10	15	20
$R(t)$ (L/min)	8	6	5	3	2

Use these five values to estimate $\int_0^{20} R(t) dt$, the total volume drained, with (a) a left Riemann sum and (b) a right Riemann sum using $n = 4$ subintervals of width $\Delta t = 5$. State whether each is an over- or underestimate.

(a) $L_4 = 5[R(0) + R(5) + R(10) + R(15)] = 5(8 + 6 + 5 + 3) = 5(22) = \mathbf{110}$ liters.

(b) $R_4 = 5[R(5) + R(10) + R(15) + R(20)] = 5(6 + 5 + 3 + 2) = 5(16) = \mathbf{80}$ liters.

The data is **decreasing** throughout, so the left endpoint of each subinterval gives the larger reading (rectangle above the true drain-rate curve) while the right endpoint gives the smaller reading (rectangle below the curve): $L_4 = 110$ **overestimates** the total volume drained, and $R_4 = 80$ **underestimates** it.

Ví dụ mẫu · Midpoint sum from a table

Values of a rate function g are recorded at $x = 2, 6, 10, 14$ — chosen so that each is the *midpoint* of one of four subintervals of width 4 partitioning $[0, 16]$:

x (midpoint)	2	6	10	14
$g(x)$	4	9	13	16

Use these values to estimate $\int_0^{16} g(x) dx$ with a midpoint Riemann sum.

Each subinterval $[0, 4]$, $[4, 8]$, $[8, 12]$, $[12, 16]$ has width $\Delta x = 4$, and its midpoint value is already given directly in the table, so

$$M_4 = 4[g(2) + g(6) + g(10) + g(14)] = 4(4 + 9 + 13 + 16) = 4(42) = \mathbf{168}.$$

This is the standard table-based setup for a midpoint sum: the given x -values *are* the midpoints of equal-width subintervals spanning the full interval, so no additional averaging of table entries is needed.

6.3 The Trapezoidal Rule

Rather than approximating each strip of area with a flat-topped rectangle, the **Trapezoidal Rule** approximates each strip with a **trapezoid** whose slanted top connects the function values at the two endpoints of the subinterval. This single change usually produces a noticeably better estimate than either one-sided Riemann sum, because a trapezoid follows the general upward or downward trend of the curve across the subinterval instead of using a single, possibly unrepresentative, height.

For n subintervals of equal width $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ with partition points $x_0, x_1, \dots, x_n$,

$$T_n = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)].$$

Geometrically, T_n is the sum of the areas of n trapezoids, each with parallel sides $f(x_{i-1})$ and $f(x_i)$ and width Δx . Every interior data point is used **twice** (once as the right edge of one trapezoid and once as the left edge of the next), which is exactly why it carries a coefficient of 2, while the two endpoints $f(x_0)$ and $f(x_n)$ are each used only once.

For equal-width subintervals, the Trapezoidal Rule has a clean relationship to the left and right Riemann sums built from the *same* partition: since each trapezoid's area is the average of the left-rectangle and right-rectangle areas on that subinterval, summing over all subintervals gives $T_n = \frac{1}{2}(L_n + R_n)$ — the Trapezoidal Rule estimate is always exactly the average of the corresponding left and right sums.

Ví dụ mẫu · Trapezoidal Rule from a table, compared to Riemann sums

Using the same drainage-rate table as before —

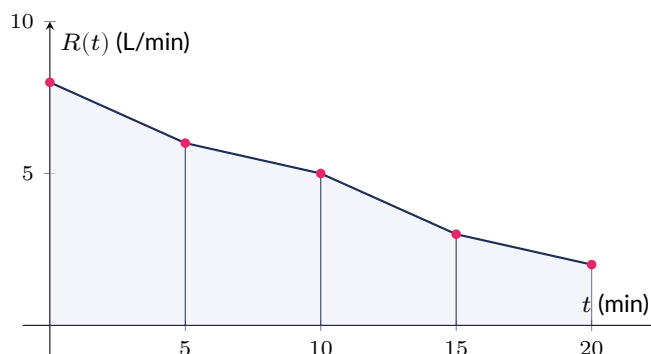
t (min)	0	5	10	15	20
$R(t)$ (L/min)	8	6	5	3	2

estimate $\int_0^{20} R(t) dt$ with the Trapezoidal Rule using $n = 4$, and compare to the left and right sums $L_4 = 110$ and $R_4 = 80$ computed earlier.

With $\Delta t = 5$,

$$T_4 = \frac{5}{2} [R(0) + 2R(5) + 2R(10) + 2R(15) + R(20)] = \frac{5}{2} [8 + 2(6) + 2(5) + 2(3) + 2] = \frac{5}{2} (38) = \mathbf{95 \text{ liters.}}$$

As expected, $T_4 = 95$ is exactly the average of the left and right sums: $\frac{1}{2}(L_4 + R_4) = \frac{1}{2}(110 + 80) = 95$. It also lies squarely between the overestimate $L_4 = 110$ and the underestimate $R_4 = 80$, illustrating why the trapezoidal estimate is generally more reliable than either one-sided Riemann sum alone.



The Trapezoidal Rule joins consecutive data points with straight segments, forming four trapezoids whose combined area is $T_4 = 95$ liters.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc hình thang (Trapezoidal Rule) thay hình chữ nhật bằng hình thang: cạnh trên nối trực tiếp hai giá trị $f(x_{i-1})$ và $f(x_i)$ ở hai đầu mỗi đoạn con, thay vì lấy một chiều cao cố định. Công thức $T_n = \frac{\Delta x}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + \dots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$ có hệ số 2 ở mọi điểm *bên trong* vì điểm đó vừa là cạnh phải của hình thang này vừa là cạnh trái của hình thang kế tiếp. Với các đoạn con rộng bằng nhau, T_n luôn đúng bằng **trung bình cộng** của tổng Riemann trái và phải: $T_n = \frac{1}{2}(L_n + R_n)$.

The Trapezoidal Rule's over/underestimate behavior depends on **concavity**, not monotonicity: if f is **concave up** ($f'' > 0$) on $[a, b]$, the straight trapezoid tops lie *above* the curve, so T_n **overestimates** the true integral; if f is **concave down** ($f'' < 0$), the trapezoid tops lie *below* the curve, so T_n **underestimates** it.

6.4 Formal Riemann Sum Notation and the Definite Integral

Summation (Σ) notation lets any of the sums above be written compactly. With $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ and x_i^* denoting whichever sample point is chosen in the i -th subinterval (left endpoint, right endpoint, midpoint, or any other point in $[x_{i-1}, x_i]$),

$$\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$$

represents the total area of the n approximating rectangles. As n increases, Δx shrinks, the rectangles hug the curve more and more tightly, and the approximation improves — regardless of which sample point within each subinterval was chosen. This motivates the formal definition of the definite integral as a **limit** of Riemann sums.

Definition of the definite integral. If f is continuous on $[a, b]$, the **definite integral** of f from a to b is

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x, \quad \Delta x = \frac{b-a}{n},$$

provided this limit exists and is the same regardless of which sample points x_i^* are chosen. The symbol $\int$ is an elongated "S" for "sum," $f(x) dx$ recalls the "height times infinitesimal width" of each rectangle, and a, b are called the **limits of integration**. Geometrically, $\int_a^b f(x) dx$ is the **signed area** between the curve $y = f(x)$ and the x -axis on $[a, b]$: positive where $f \geq 0$, negative where $f \leq 0$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tích phân xác định được định nghĩa chính thức là **giới hạn của tổng Riemann** khi số đoạn con $n \rightarrow \infty$ (và do đó $\Delta x \rightarrow 0$): $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$. Miễn là f liên tục trên $[a, b]$, giới hạn này tồn tại và cho cùng một giá trị dù ta chọn điểm mẫu x_i^* ở đâu trái, đâu phải, trung điểm, hay bất kỳ điểm nào trong mỗi đoạn con – đây chính là lý do L_n, R_n, M_n đều hội tụ về cùng một giá trị chính xác khi n đủ lớn. Về mặt hình học, tích phân xác định là **diện tích có dấu**: dương khi đồ thị nằm trên trục hoành, âm khi nằm dưới.

Ví dụ mẫu · Evaluating a definite integral from the limit definition

Use the formal limit definition (with right endpoints) to evaluate $\int_0^2 x^2 dx$.

Partition $[0, 2]$ into n equal subintervals: $\Delta x = \frac{2}{n}$, and the right endpoint of the i -th subinterval is $x_i = \frac{2i}{n}$. Then $f(x_i) = x_i^2 = \frac{4i^2}{n^2}$, so

$$R_n = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x = \sum_{i=1}^n \frac{4i^2}{n^2} \cdot \frac{2}{n} = \frac{8}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2.$$

Using the summation formula $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

$$R_n = \frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{4(n+1)(2n+1)}{3n^2} = \frac{8n^2 + 12n + 4}{3n^2} = \frac{8}{3} + \frac{4}{n} + \frac{4}{3n^2}.$$

Taking $n \rightarrow \infty$, the last two terms vanish, leaving $\int_0^2 x^2 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{8}{3}$. (This matches the antiderivative computation $\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{8}{3}$ from later in this unit – confirming that the limit-of-Riemann-sums definition and the Fundamental Theorem of Calculus agree.)

6.5 Properties of Definite Integrals

Because the definite integral is built from sums, it inherits several algebraic properties directly from the properties of summation and limits. These properties let complicated integrals be broken apart, combined, or reasoned about without ever computing an antiderivative.

Properties of the definite integral

For continuous functions f, g on the relevant intervals and constants a, b, c, k_1, k_2 :

- **Linearity:** $\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int_a^b f(x) dx + k_2 \int_a^b g(x) dx.$
- **Additivity over adjacent intervals:** $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ (for a, b, c in any order, as long as f is continuous on the interval containing all three).
- **Reversing the limits of integration:** $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$
- **Zero-width interval:** $\int_a^a f(x) dx = 0.$
- **Comparison:** if $f(x) \leq g(x)$ for all x in $[a, b]$, then $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$; and if $m \leq f(x) \leq M$ on $[a, b]$, then $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tích phân xác định có các tính chất đại số quan trọng: **tuyến tính** (tách tổng, đưa hằng số ra ngoài); **cộng tính** theo các đoạn kề nhau ($\int_a^b + \int_b^c = \int_a^c$); **đổi cận** thì đổi dấu ($\int_a^b = -\int_b^a$); tích phân trên đoạn có độ dài 0 luôn bằng 0; và tính chất **so sánh**: nếu $f(x) \leq g(x)$ trên $[a, b]$ thì $\int_a^b f \leq \int_a^b g$, còn nếu $m \leq f(x) \leq M$ thì tích phân bị "kẹp" giữa $m(b-a)$ và $M(b-a)$. Những tính chất này cho phép tính toán mà không cần tìm nguyên hàm.

Ví dụ mẫu • Combining integrals using properties

Suppose $\int_0^5 f(x) dx = 12$, $\int_0^5 g(x) dx = 7$, and $\int_5^8 f(x) dx = 4$. Find (a) $\int_0^5 [3f(x) - 2g(x)] dx$, (b) $\int_0^8 f(x) dx$, (c) $\int_5^0 f(x) dx$.

(a) By linearity: $3 \int_0^5 f(x) dx - 2 \int_0^5 g(x) dx = 3(12) - 2(7) = 36 - 14 = \mathbf{22}.$

(b) By additivity over adjacent intervals: $\int_0^8 f(x) dx = \int_0^5 f(x) dx + \int_5^8 f(x) dx = 12 + 4 = \mathbf{16}.$

(c) By reversing the limits: $\int_5^0 f(x) dx = - \int_0^5 f(x) dx = \mathbf{-12}.$

6.6 The Fundamental Theorem of Calculus, Part 1

The Fundamental Theorem of Calculus is the bridge that connects the two central operations of calculus — differentiation and integration — showing that they are, in a precise sense, inverse processes. **Part 1** of the theorem addresses what happens when the definite integral's *upper limit* is allowed to vary: define an **accumulation function**

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

which reports the accumulated (signed) area under f from the fixed point a up to the variable point x . FTC Part 1 says that differentiating this accumulation function simply returns the original integrand.

FTC Part 1. If f is continuous on an interval containing a , then for every x in that interval,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x).$$

Chain-rule extension. If the upper limit is itself a differentiable function $g(x)$ instead of x alone,

$$\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

The extended version is nothing more than FTC Part 1 combined with the chain rule: think of $F(u) = \int_a^u f(t) dt$ as the "outer function" (with $F'(u) = f(u)$ by Part 1) and $u = g(x)$ as the "inner function"; then $\frac{d}{dx} F(g(x)) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

FTC Phần 1 khẳng định: nếu $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ (hàm tích lũy, với cận trên là biến x), thì $F'(x) = f(x)$ – lấy đạo hàm "huỷ" tích phân, đưa ta trở lại đúng hàm ban đầu. Khi cận trên không phải là x mà là một hàm $g(x)$, ta áp dụng thêm **quy tắc dây chuyền**: $\frac{d}{dx} \int_a^{g(x)} f(t) dt = f(g(x)) \cdot g'(x)$ – lấy f tại cận trên rồi nhân với đạo hàm của cận trên đó.

Ví dụ mẫu · FTC1, direct case

Let $F(x) = \int_2^x (t^3 - 4t) dt$. Find $F'(x)$ and evaluate $F'(3)$.

By FTC Part 1, differentiating simply substitutes x for t in the integrand: $F'(x) = x^3 - 4x$. Then $F'(3) = 3^3 - 4(3) = 27 - 12 = 15$.

Ví dụ mẫu · FTC1 with the chain rule and a variable lower limit

(a) Let $G(x) = \int_1^{x^2} \sin(t) dt$. Find $G'(x)$.

(b) Let $H(x) = \int_x^5 \sqrt{t^2 + 1} dt$. Find $H'(x)$.

(a) The upper limit is $g(x) = x^2$, with $g'(x) = 2x$. By the chain-rule extension of FTC1,

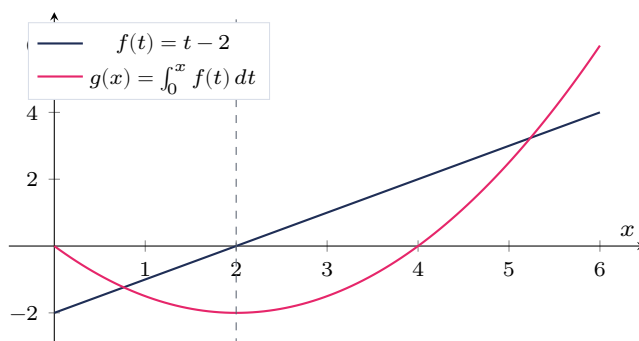
$$G'(x) = \sin(x^2) \cdot \frac{d}{dx}[x^2] = 2x \sin(x^2).$$

(b) Here the *variable* is the **lower** limit, not the upper one, so first reverse the limits of integration to move the variable to the top:

$$H(x) = \int_x^5 \sqrt{t^2 + 1} dt = - \int_5^x \sqrt{t^2 + 1} dt.$$

Now FTC Part 1 applies directly to the rewritten form (upper limit x , lower limit fixed at 5):

$$H'(x) = -\sqrt{x^2 + 1}.$$



The accumulation function $g(x) = \int_0^x (t - 2) dt = \frac{x^2}{2} - 2x$ alongside $f(t) = t - 2$. Where $f < 0$ (on $[0, 2]$), g is decreasing; where $f > 0$ (on $[2, 6]$), g is increasing; g has a minimum exactly where f crosses zero, at $x = 2$ — a direct visual statement of $g'(x) = f(x)$.

(!) Lỗi thường gặp: When the variable of integration appears in the **lower** limit instead of the upper limit, do not apply FTC1 directly and forget the sign. $\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt$ is **not** $f(x)$ — it is $-f(x)$, because reversing the limits to put the variable on top, $\int_x^b f(t) dt = -\int_b^x f(t) dt$, introduces a minus sign before FTC1 can be applied. More generally, for $\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt$, split at any convenient constant c in the domain: $\int_{h(x)}^c f(t) dt + \int_c^{g(x)} f(t) dt = -\int_c^{h(x)} f(t) dt + \int_c^{g(x)} f(t) dt$, then differentiate each piece separately: $-f(h(x))h'(x) + f(g(x))g'(x)$.

6.7 The Fundamental Theorem of Calculus, Part 2

While Part 1 differentiates an accumulation function, **Part 2** goes the other direction: it turns evaluating a definite integral into a simple two-step arithmetic process, using *any* antiderivative of the integrand — no limits, no Riemann sums required.

FTC Part 2. If f is continuous on $[a, b]$ and F is **any** antiderivative of f (that is, $F' = f$) on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

often written $[F(x)]_a^b$. Because two antiderivatives of the same function differ only by a constant, the choice of antiderivative (and, in particular, the value of $+C$) does not affect the result: the constant would appear in both $F(b)$ and $F(a)$ and cancel in the subtraction.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

FTC Phần 2 biến việc tính tích phân xác định thành phép trừ đơn giản: tìm một nguyên hàm $F(x)$ bất kỳ của $f(x)$, rồi tính $F(b) - F(a)$. Vì hai nguyên hàm bất kỳ của cùng một hàm chỉ chênh nhau một hằng số C , hằng số này luôn bị triệt tiêu khi lấy hiệu $F(b) - F(a)$ — do đó khi tính tích phân xác định, ta **không cần** viết $+C$.

Ví dụ mẫu · Evaluating a definite integral with FTC2

Evaluate $\int_1^2 \left(3x^2 - \frac{1}{x^2} \right) dx$.

An antiderivative of $3x^2 - x^{-2}$ is $F(x) = x^3 + \frac{1}{x}$ (since $\frac{d}{dx}[x^{-1}] = -x^{-2}$, the antiderivative of $-x^{-2}$ is $+x^{-1}$). By FTC2,

$$\begin{aligned}\int_1^2 \left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx &= \left[x^3 + \frac{1}{x}\right]_1^2 = \left(2^3 + \frac{1}{2}\right) - (1^3 + 1) \\ &= \left(8 + \frac{1}{2}\right) - (1 + 1) = \frac{17}{2} - 2 = \frac{17}{2} - \frac{4}{2} = \frac{13}{2}.\end{aligned}$$

The value of the integral is $\boxed{\frac{13}{2}}$.

Ví dụ mẫu · Two more applications of FTC2

(a) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx$. (b) Evaluate $\int_{-1}^2 (x^3 - 2x) \, dx$.

(a) An antiderivative of $\cos x$ is $\sin x$:

$$\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1 - 0 = \mathbf{1}.$$

(b) An antiderivative of $x^3 - 2x$ is $\frac{x^4}{4} - x^2$:

$$\int_{-1}^2 (x^3 - 2x) \, dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^2\right]_{-1}^2 = \left(\frac{16}{4} - 4\right) - \left(\frac{1}{4} - 1\right) = (4 - 4) - \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 + \frac{3}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}}.$$

6.8 Antiderivatives and Indefinite Integrals

An **antiderivative** of f is any function F with $F'(x) = f(x)$. Antiderivatives are never unique: if F is one antiderivative of f , then $F(x) + C$ is also an antiderivative for every constant C , since $\frac{d}{dx}[F(x) + C] = F'(x) + 0 = f(x)$. Conversely, any two antiderivatives of the same continuous function on an interval differ by exactly a constant — so the collection of *all* antiderivatives of f is the single family $F(x) + C$. This family is written as the **indefinite integral**,

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C,$$

where C is called the **constant of integration**. Graphically, the graphs of $F(x) + C$ for different values of C are vertical translates of one another — an entire family of parallel curves, all sharing the same slope $f(x)$ at every x -value, but stacked at different heights.

Basic antiderivative rules.

Function	Antiderivative	Function	Antiderivative
$x^n \ (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\sin x$	$-\cos x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$	$\cos x$	$\sin x + C$
e^x	$e^x + C$	$\sec^2 x$	$\tan x + C$
$\csc^2 x$	$-\cot x + C$	$\sec x \tan x$	$\sec x + C$

Each rule is simply the corresponding differentiation rule read backwards; every entry can be checked by differentiating the right-hand column and confirming it returns the left-hand function.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nguyên hàm (antiderivative) của f là bất kỳ hàm F nào thoả $F'(x) = f(x)$. Vì đạo hàm của một hằng số luôn bằng 0, nếu $F(x)$ là một nguyên hàm thì $F(x) + C$ cũng là nguyên hàm với mọi hằng số C – do đó **tích phân bất định** $\int f(x) dx = F(x) + C$ đại diện cho *cả một họ* đường cong, tất cả có cùng độ dốc $f(x)$ tại mỗi điểm nhưng nằm ở các độ cao khác nhau (các đường cong này chỉ là tịnh tiến theo phương thẳng đứng của nhau). Bảng nguyên hàm cơ bản chính là bảng đạo hàm "đọc ngược".

(!) Lỗi thường gặp: Forgetting the "+C" on an **indefinite** integral is one of the most common point losses on the AP exam. $\int f(x) dx$ represents an entire family of antiderivatives, not a single function – omitting +C effectively claims there is only one antiderivative, which is false for every function. (The constant *does* disappear when evaluating a **definite** integral by FTC2, because it cancels in the subtraction $F(b) - F(a)$ – but that cancellation is a consequence of having limits of integration, and does not apply to an indefinite integral.)

(!) Lỗi thường gặp: The reverse power rule $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ **fails** at $n = -1$, because the formula would require dividing by $n+1 = 0$. So $\int \frac{1}{x} dx$ is **not** $\frac{x^0}{0}$ (undefined) – it is $\ln |x| + C$, a separate rule that must be memorized on its own. The absolute value is essential: $\ln |x|$ is defined for all $x \neq 0$ (both positive and negative), matching the domain of $\frac{1}{x}$, whereas $\ln x$ alone would only be defined for $x > 0$.

Ví dụ mẫu · Finding a particular antiderivative and applying the basic rules

(a) Find $f(x)$ given $f'(x) = 4x^3 - 6x + 5$ and $f(1) = 3$.

(b) Evaluate $\int \left(3e^x + \frac{2}{x} - 5 \sec^2 x \right) dx$.

(a) Antidifferentiate term by term: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x + C$. Apply the initial condition $f(1) = 3$:

$$1 - 3 + 5 + C = 3 \implies 3 + C = 3 \implies C = 0.$$

So this initial condition picks out exactly one curve from the family: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5x$.

(b) Applying the table of rules to each term:

$$\int \left(3e^x + \frac{2}{x} - 5 \sec^2 x \right) dx = 3e^x + 2 \ln |x| - 5 \tan x + C.$$

6.9 Integration by u-Substitution

6.9.1 Indefinite integrals

Many integrands are the result of a chain-rule differentiation, and **u-substitution** is essentially the chain rule run in reverse. If an integrand can be seen as $f(g(x)) \cdot g'(x)$ for some "inner function" g , substituting $u = g(x)$ (so $du = g'(x) dx$) rewrites the whole integral in terms of the single variable u , often reducing it to a basic rule from the previous section.

u-substitution procedure

1. Identify an inner function $u = g(x)$ whose derivative $g'(x)$ (up to a constant multiple) also appears in the integrand.
2. Compute $du = g'(x) dx$ and solve for dx (or for whatever combination, such as $x dx$, is needed to match the integrand).
3. Rewrite the entire integral in terms of u only — no x 's should remain.
4. Integrate with respect to u using the basic rules, then substitute $g(x)$ back in for u (for an **indefinite** integral only — see the next subsection for definite integrals).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đổi biến u (u-substitution) thực chất là "quy tắc dây chuyền chạy ngược". Chọn u là một "hàm trong" sao cho đạo hàm của nó (sai khác một hằng số) cũng xuất hiện trong biểu thức tích phân; tính du ; viết lại toàn bộ tích phân theo u (không còn x); tích phân theo u bằng các quy tắc cơ bản; và với tích phân **bất định**, thay u trở lại bằng $g(x)$ ở bước cuối để đưa đáp án về biến x ban đầu.

Ví dụ mẫu · Indefinite integral by u-substitution

Evaluate $\int x\sqrt{x^2+1} dx$.

Let $u = x^2 + 1$, so $du = 2x dx$, which gives $x dx = \frac{du}{2}$. Substituting,

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \int \sqrt{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{1}{3} u^{3/2} + C.$$

Substituting $u = x^2 + 1$ back in (since this is an indefinite integral):

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{3} (x^2+1)^{3/2} + C.$$

Check: $\frac{d}{dx} \left[\frac{1}{3} (x^2+1)^{3/2} \right] = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (x^2+1)^{1/2} \cdot 2x = x(x^2+1)^{1/2} = x\sqrt{x^2+1}$, matching the original integrand.

6.9.2 Definite integrals: changing the limits

When u -substitution is applied to a **definite** integral, there are two valid strategies: substitute back to x at the end and evaluate at the original x -limits (as in an indefinite integral), or – more efficiently – **convert the limits of integration to u -values** at the moment of substitution, so the entire remaining computation stays in terms of u and no back-substitution is ever needed.

For $\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx$ with $u = g(x)$: once $du = g'(x) dx$ is substituted, also replace the limits of integration – the new lower limit is $u = g(a)$ and the new upper limit is $u = g(b)$ – and evaluate the resulting u -integral directly at these new limits:

$$\int_a^b f(g(x)) g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

(!) Lỗi thường gặp: The single most common error in definite-integral u -substitution is finding the antiderivative in terms of u and then plugging the **original x -limits** directly into it, without converting them to u -limits and without substituting back to x first. Both of the following are correct: (1) change the limits to $u = g(a)$ and $u = g(b)$ and evaluate the u -antiderivative at those u -values, or (2) substitute back to get the antiderivative in terms of x and evaluate at the original x -limits. Mixing the two – a u -antiderivative evaluated at x -limits – silently produces a wrong numeric answer with no error message to warn you.

Ví dụ mẫu · Definite integral with changed limits

Evaluate $\int_0^1 6x^2(x^3 + 2)^4 dx$.

Let $u = x^3 + 2$, so $du = 3x^2 dx$, which gives $x^2 dx = \frac{du}{3}$. Convert the limits: when $x = 0$, $u = 0^3 + 2 = 2$; when $x = 1$, $u = 1^3 + 2 = 3$. Substituting everything, including the new limits,

$$\begin{aligned} \int_0^1 6x^2(x^3 + 2)^4 dx &= \int_2^3 6u^4 \cdot \frac{du}{3} = \int_2^3 2u^4 du = \left[\frac{2}{5} u^5 \right]_2^3 \\ &= \frac{2}{5} (3^5 - 2^5) = \frac{2}{5} (243 - 32) = \frac{2}{5} (211) = \frac{422}{5}. \end{aligned}$$

Notice the final numerical evaluation used only u -limits (2 and 3) – the original x -limits (0 and 1) were never needed again once they were converted.

Ví dụ mẫu · A second definite u -substitution

Evaluate $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx$.

Let $u = \ln x$, so $du = \frac{dx}{x}$. Convert the limits: when $x = 1$, $u = \ln 1 = 0$; when $x = e$, $u = \ln e = 1$. Then

$$\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x} dx = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$$

6.10 Algebraic Manipulation Before Integrating

Not every integrand is ready to integrate in the form it is given. A short algebraic rewrite – dividing, splitting a fraction into separate terms, or converting a radical to a fractional power – often turns an intractable-looking expression into a sum of pieces that each match a basic rule directly.

Three algebraic rewriting techniques

- **Polynomial long division:** if the integrand is an "improper" rational function (degree of numerator $\geq$ degree of denominator), divide first to rewrite it as $\text{polynomial} + \frac{\text{remainder}}{\text{divisor}}$, a sum the basic rules (including $\ln|x|$ -type terms) can each handle separately.
- **Splitting a fraction:** if the numerator is a sum but the denominator is a single term, split $\frac{A+B+C}{D}$ into $\frac{A}{D} + \frac{B}{D} + \frac{C}{D}$ and simplify each piece into a power of x .
- **Rewriting radicals as fractional powers:** replace $\sqrt[n]{x^m}$ with $x^{m/n}$ (and $\frac{1}{\sqrt[n]{x^m}}$ with $x^{-m/n}$) so the reverse power rule applies directly.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Không phải biểu thức nào cũng sẵn sàng để lấy nguyên hàm ngay – đôi khi cần biến đổi đại số trước: **chia đa thức** khi tử có bậc $\geq$ bậc mẫu (phân thức "không thực sự"), đưa về dạng đa thức cộng với phân thức đơn giản hơn; **tách phân thức** khi mẫu chỉ có một số hạng nhưng tử có nhiều số hạng, tách thành tổng các phân thức lũy thừa của x ; và **viết căn thức dưới dạng lũy thừa phân số** ($\sqrt[n]{x^m} = x^{m/n}$) để áp dụng trực tiếp quy tắc lũy thừa ngược.

Ví dụ mẫu · Algebraic manipulation before integrating

(a) Evaluate $\int \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} dx$, then use the result to evaluate $\int_0^2 \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} dx$.

(b) Evaluate $\int \frac{2x^3 - 5x + 7}{x^2} dx$.

(c) Evaluate $\int_1^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{3}{\sqrt{x}} \right) dx$.

(a) Long division: $x^2 + 3x + 5$ divided by $x + 1$ gives quotient $x + 2$ with remainder 3 (check: $(x + 1)(x + 2) + 3 = x^2 + 3x + 2 + 3 = x^2 + 3x + 5$), so

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} = x + 2 + \frac{3}{x + 1} \implies \int \frac{x^2 + 3x + 5}{x + 1} dx = \frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x + 1| + C.$$

Evaluating from 0 to 2:

$$\left[\frac{x^2}{2} + 2x + 3 \ln|x + 1| \right]_0^2 = (2 + 4 + 3 \ln 3) - (0 + 0 + 3 \ln 1) = 6 + 3 \ln 3.$$

(b) Split the fraction term by term: $\frac{2x^3 - 5x + 7}{x^2} = 2x - \frac{5}{x} + 7x^{-2}$, so

$$\int \left(2x - \frac{5}{x} + 7x^{-2} \right) dx = x^2 - 5 \ln|x| - \frac{7}{x} + C.$$

(c) Rewrite the radicals: $2\sqrt{x} = 2x^{1/2}$ and $\frac{3}{\sqrt{x}} = 3x^{-1/2}$, so an antiderivative is

$$F(x) = \frac{4}{3}x^{3/2} - 6x^{1/2} + C.$$

Evaluating (with $4^{3/2} = 8$, $4^{1/2} = 2$, $1^{3/2} = 1^{1/2} = 1$):

$$F(4) - F(1) = \left(\frac{4}{3}(8) - 6(2)\right) - \left(\frac{4}{3}(1) - 6(1)\right) = \left(\frac{32}{3} - 12\right) - \left(\frac{4}{3} - 6\right) = \left(-\frac{4}{3}\right) - \left(-\frac{14}{3}\right) = \frac{10}{3}.$$

6.11 Problem Bank

Bài tập luyện tập

A particle moves along a line with velocity $v(t) = 6 - 2t$ (m/s) for $0 \leq t \leq 3$. Using geometry, the particle's displacement over $[0, 3]$ is:

- (A) 9 (C) 6
(B) 18 (D) 12

Lời giải chi tiết

$v(t)$ is linear with $v(0) = 6$ and $v(3) = 0$, and $v(t) \geq 0$ throughout $[0, 3]$, so the region under the graph is a triangle with base 3 and height 6. Area = $\frac{1}{2}(3)(6) = 9$. (A).

Bài tập luyện tập

On an interval where a function f is decreasing, the left Riemann sum L_n and right Riemann sum R_n satisfy:

- (A) L_n underestimates, R_n overestimates (C) Both overestimate
(B) L_n overestimates, R_n underestimates (D) Both underestimate

Lời giải chi tiết

On a decreasing interval, the left endpoint of each subinterval gives the largest function value there (rectangle sits above the curve, overestimate), while the right endpoint gives the smallest value (rectangle sits below the curve, underestimate). (B).

Bài tập luyện tập

The rate of change $h(x)$ of a quantity is recorded at $x = 0, 3, 6, 9, 12$:

x	0	3	6	9	12
$h(x)$	2	5	9	14	20

Use a left Riemann sum with $n = 4$ and a right Riemann sum with $n = 4$ to estimate $\int_0^{12} h(x) dx$, and state which is the over- and which is the underestimate.

Lời giải chi tiết

$\Delta x = 3$. Left sum: $L_4 = 3(2 + 5 + 9 + 14) = 3(30) = 90$. Right sum: $R_4 = 3(5 + 9 + 14 + 20) = 3(48) = 144$. Since h is increasing throughout, $L_4 = 90$ **underestimates** and $R_4 = 144$

overestimates $\int_0^{12} h(x) dx$.

Bài tập luyện tập

Values of $p(x)$ are given at $x = 1.5, 4.5, 7.5, 10.5$, the midpoints of four subintervals of width 3 covering $[0, 12]$:

x	1.5	4.5	7.5	10.5
$p(x)$	3	6	11	15

Estimate $\int_0^{12} p(x) dx$ using a midpoint Riemann sum.

Lời giải chi tiết

Each subinterval has width $\Delta x = 3$, and the given values are already the midpoint values, so $M_4 = 3(3 + 6 + 11 + 15) = 3(35) = 105$.

Bài tập luyện tập

Using the data $x = 0, 2, 4, 6$ with $f(x) = 3, 7, 12, 20$, the Trapezoidal Rule estimate for $\int_0^6 f(x) dx$ (with $n = 3, \Delta x = 2$) is:

- (A) 61
(B) 44
(C) 55
(D) 70

Lời giải chi tiết

(A). $T_3 = \frac{\Delta x}{2}[f(0) + 2f(2) + 2f(4) + f(6)] = \frac{2}{2}[3 + 2(7) + 2(12) + 20] = 1[3 + 14 + 24 + 20] = 61.$

Bài tập luyện tập

A rainfall-rate sensor $r(t)$ (mm/hr) is recorded every 2 hours:

t (hr)	0	2	4	6	8
$r(t)$ (mm/hr)	10	8	5	3	1

Compute L_4 , R_4 , and T_4 for $\int_0^8 r(t) dt$, and verify that $T_4 = \frac{1}{2}(L_4 + R_4)$.

Lời giải chi tiết

$$\Delta t = 2. \quad L_1 = 2(10 + 8 + 5 + 3) = 2(26) = 52. \quad R_1 = 2(8 + 5 + 3 + 1) = 2(17) = 34.$$

$$T_4 = \frac{2}{9}[10 + 2(8) + 2(5) + 2(3) + 1] = 1[10 + 16 + 10 + 6 + 1] = 43.$$

Check: $\frac{1}{2}(L_4 + R_4) = \frac{1}{2}(52 + 34) = \frac{1}{2}(86) = 43$, which matches T_4 exactly.

Bài tập luyện tập

The expression $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(2 + \frac{3i}{n}\right) \frac{3}{n}$ is equal to which definite integral?

(A) $\int_0^3 (2+x) dx$

(C) $\int_0^2 (3+x) dx$

(B) $\int_2^3 x dx$

(D) $\int_0^3 2x dx$

Lời giải chi tiết

Comparing to $\sum f(x_i)\Delta x$ with $\Delta x = \frac{3}{n}$ (so $b-a=3$) and right endpoints $x_i = \frac{3i}{n}$ on $[0, 3]$, the summand $2 + \frac{3i}{n} = 2 + x_i = f(x_i)$ identifies $f(x) = 2 + x$. So the limit equals $\int_0^3 (2+x) dx$. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_0^1 x^3 dx$ using the limit definition of a right Riemann sum. (Use $\sum_{i=1}^n i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.)

Lời giải chi tiết

With $\Delta x = \frac{1}{n}$ and $x_i = \frac{i}{n}$, $f(x_i) = \frac{i^3}{n^3}$, so

$$R_n = \sum_{i=1}^n \frac{i^3}{n^3} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{1}{n^4} \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4n^4} = \frac{(n+1)^2}{4n^2}.$$

As $n \rightarrow \infty$, $\frac{(n+1)^2}{n^2} \rightarrow 1$, so $\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \frac{1}{4}$. (Matches FTC2: $\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{4}$.)

Bài tập luyện tập

If $\int_2^6 f(x) dx = 10$ and $\int_2^6 g(x) dx = -3$, then $\int_2^6 [4f(x) + g(x)] dx =$

(A) 37

(C) 43

(B) 7

(D) 13

Lời giải chi tiết

By linearity: $4(10) + (-3) = 40 - 3 = 37$. (A).

Bài tập luyện tập

Given $\int_1^4 f(x) dx = 9$ and $\int_1^7 f(x) dx = 20$, find $\int_4^7 f(x) dx$ and $\int_7^1 f(x) dx$.

Lời giải chi tiết

By additivity, $\int_4^7 f(x) dx = \int_1^7 f(x) dx - \int_1^4 f(x) dx = 20 - 9 = 11$. By reversing the limits, $\int_7^1 f(x) dx = -\int_1^7 f(x) dx = -20$.

Bài tập luyện tập

If $3 \leq f(x) \leq 7$ for all x in $[2, 9]$, which inequality must be true for $\int_2^9 f(x) dx$?

(A) $21 \leq \int_2^9 f(x) dx \leq 49$

(C) $14 \leq \int_2^9 f(x) dx \leq 42$

(B) $3 \leq \int_2^9 f(x) dx \leq 7$

(D) $\int_2^9 f(x) dx = 35$ exactly

Lời giải chi tiết

The comparison property gives $m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a)$ with $m = 3$, $M = 7$, $b-a = 7$: $3(7) \leq \int \leq 7(7)$, i.e., $21 \leq \int_2^9 f(x) dx \leq 49$. (A).

Bài tập luyện tập

Let $F(x) = \int_0^x (2t^2 - 7) dt$. Find $F'(x)$ and evaluate $F'(4)$.

Lời giải chi tiết

By FTC1, $F'(x) = 2x^2 - 7$. So $F'(4) = 2(16) - 7 = 32 - 7 = 25$.

Bài tập luyện tập

If $G(x) = \int_3^{x^3} \cos(t) dt$, then $G'(x) =$

(A) $3x^2 \cos(x^3)$

(C) $\cos(3x^2)$

(B) $\cos(x^3)$

(D) $3x^2 \cos(x)$

Lời giải chi tiết

By FTC1 with the chain rule, upper limit $g(x) = x^3$ with $g'(x) = 3x^2$: $G'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos(x^3)$. (A).

Bài tập luyện tập

Let $H(x) = \int_{2x}^5 \sqrt{t^3 + 1} dt$. Find $H'(x)$.

Lời giải chi tiết

Reverse the limits first: $H(x) = - \int_5^{2x} \sqrt{t^3 + 1} dt$. By FTC1 with the chain rule (upper limit $2x$, derivative 2):

$$H'(x) = -\sqrt{(2x)^3 + 1} \cdot 2 = -2\sqrt{8x^3 + 1}.$$

Bài tập luyện tập

$\int_0^3 (4x - 1) dx =$

(A) 15

(C) 9

(B) 12

(D) 18

Lời giải chi tiết

Antiderivative: $2x^2 - x$. Evaluate: $[2x^2 - x]_0^3 = (18 - 3) - (0) = 15$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_1^3 \left(2x^2 - \frac{1}{x^2}\right) dx$ and simplify completely.

Lời giải chi tiết

An antiderivative is $F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{x}$ (since the antiderivative of $-x^{-2}$ is x^{-1}). Then

$$F(3) - F(1) = \left(\frac{2}{3}(27) + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{2}{3} + 1\right) = \left(18 + \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{55}{3} - \frac{5}{3} = \frac{50}{3}.$$

Bài tập luyện tập

$\int_0^\pi \sin x dx =$

(A) 2

(C) 1

(B) 0

(D) -2

Lời giải chi tiết

Antiderivative: $-\cos x$. Evaluate: $[-\cos x]_0^\pi = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = (1) - (-1) = 2$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Find $f(x)$ given $f''(x) = 6x - 4$, $f'(0) = 3$, and $f(0) = -2$.

Lời giải chi tiết

Integrate once: $f'(x) = 3x^2 - 4x + C_1$. Using $f'(0) = 3$: $C_1 = 3$, so $f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$.
Integrate again: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + C_2$. Using $f(0) = -2$: $C_2 = -2$, so

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 2.$$

Bài tập luyện tập

$$\int \left(\frac{4}{x} - 3 \sin x \right) dx =$$

(A) $4 \ln |x| + 3 \cos x + C$

(C) $-4 \ln |x| + 3 \cos x + C$

(B) $4 \ln |x| - 3 \cos x + C$

(D) $4 \ln |x| + 3 \sin x + C$

Lời giải chi tiết

$$\int \frac{4}{x} dx = 4 \ln |x|; \int (-3 \sin x) dx = -3(-\cos x) = 3 \cos x. \text{ Sum: } 4 \ln |x| + 3 \cos x + C. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_2^5 \frac{3}{x} dx$, and explain why the reverse power rule cannot be applied directly to this integrand.

Lời giải chi tiết

An antiderivative of $\frac{3}{x}$ is $3 \ln |x|$, so $\int_2^5 \frac{3}{x} dx = [3 \ln |x|]_2^5 = 3 \ln 5 - 3 \ln 2 = 3 \ln \left(\frac{5}{2} \right)$. The reverse power rule $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ requires dividing by $n+1$; here the integrand is x^{-1} , so $n = -1$ and $n+1 = 0$, making the formula undefined. The rule $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C$ must be used instead, since $\frac{d}{dx} \ln |x| = \frac{1}{x}$ for all $x \neq 0$.

Bài tập luyện tập

$$\int 4x(x^2 + 3)^5 dx =$$

(A) $\frac{1}{3}(x^2 + 3)^6 + C$

(C) $(x^2 + 3)^6 + C$

(B) $\frac{1}{6}(x^2 + 3)^6 + C$

(D) $2(x^2 + 3)^6 + C$

Lời giải chi tiết

Let $u = x^2 + 3$, $du = 2x dx$, so $4x dx = 2 du$. Then $\int u^5 \cdot 2 du = 2 \cdot \frac{u^6}{6} + C = \frac{1}{3}u^6 + C = \frac{1}{3}(x^2 + 3)^6 + C$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$ using u -substitution, converting the limits of integration.

Lời giải chi tiết

Let $u = x^3 + 1$, $du = 3x^2 dx$, so $x^2 dx = \frac{du}{3}$. Limits: $x = 0 \Rightarrow u = 1$; $x = 2 \Rightarrow u = 9$. Then

$$\begin{aligned}\int_0^2 x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx &= \int_1^9 \sqrt{u} \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \int_1^9 u^{1/2} du = \frac{1}{3} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^9 \\ &= \frac{2}{9} (9^{3/2} - 1^{3/2}) = \frac{2}{9} (27 - 1) = \frac{2}{9} (26) = \frac{52}{9}.\end{aligned}$$

Bài tập luyện tập

$$\int_0^{\pi/4} \sec^2 x \tan x dx =$$

(A) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{\pi}{4}$

(B) 1

(D) 0

Lời giải chi tiết

Let $u = \tan x$, $du = \sec^2 x dx$. Limits: $x = 0 \Rightarrow u = 0$; $x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow u = 1$. Then $\int_0^1 u du = \left[\frac{u^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} dx$.

Lời giải chi tiết

Let $u = x^2 + 2x + 5$, so $du = (2x + 2) dx = 2(x + 1) dx$, giving $(x + 1) dx = \frac{du}{2}$. Then

$$\int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \int u^{-1/2} du = \frac{1}{2} \cdot 2u^{1/2} + C = u^{1/2} + C = \sqrt{x^2 + 2x + 5} + C.$$

Bài tập luyện tập

Rewriting $\frac{x^2 - 1}{x - 3}$ using polynomial long division gives:

(A) $x + 3 + \frac{8}{x - 3}$

(C) $x + 3 - \frac{8}{x - 3}$

(B) $x - 3 + \frac{8}{x - 3}$

(D) $x + 1 + \frac{2}{x - 3}$

Lời giải chi tiết

Dividing: $(x - 3)(x + 3) = x^2 - 9$, and $(x^2 - 1) - (x^2 - 9) = 8$, so $x^2 - 1 = (x - 3)(x + 3) + 8$, giving $\frac{x^2 - 1}{x - 3} = x + 3 + \frac{8}{x - 3}$. (A).

Bài tập luyện tập

Using the division from the previous problem, evaluate $\int_4^5 \frac{x^2 - 1}{x - 3} dx$.

Lời giải chi tiết

From the previous problem, $\frac{x^2 - 1}{x - 3} = x + 3 + \frac{8}{x - 3}$, with antiderivative $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x + 8 \ln|x - 3|$. Then

$$\begin{aligned} F(5) - F(4) &= \left(\frac{25}{2} + 15 + 8 \ln 2 \right) - \left(\frac{16}{2} + 12 + 8 \ln 1 \right) \\ &= (27.5 + 8 \ln 2) - (20 + 0) = 7.5 + 8 \ln 2 = \frac{15}{2} + 8 \ln 2. \end{aligned}$$

Bài tập luyện tập

$$\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3} dx =$$

(A) $x - 2 \ln|x| - \frac{2}{x^2} + C$

(C) $x + 2 \ln|x| - \frac{2}{x^2} + C$

(B) $x - 2 \ln|x| + \frac{2}{x^2} + C$

(D) $1 - \frac{2}{x^2} - \frac{12}{x^4} + C$

Lời giải chi tiết

Split the fraction: $\frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3} = 1 - \frac{2}{x} + 4x^{-3}$. Integrating: $x - 2 \ln|x| + 4 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + C = x - 2 \ln|x| - \frac{2}{x^2} + C$. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_1^9 \left(5\sqrt{x} - \frac{4}{\sqrt{x}} \right) dx$.

Lời giải chi tiết

Rewrite as $5x^{1/2} - 4x^{-1/2}$, with antiderivative $F(x) = \frac{10}{3}x^{3/2} - 8x^{1/2}$. Using $9^{3/2} = 27$, $9^{1/2} = 3$, $1^{3/2} = 1^{1/2} = 1$:

$$\begin{aligned} F(9) - F(1) &= \left(\frac{10}{3}(27) - 8(3) \right) - \left(\frac{10}{3}(1) - 8(1) \right) = (90 - 24) - \left(\frac{10}{3} - 8 \right) \\ &= 66 - \left(-\frac{14}{3} \right) = 66 + \frac{14}{3} = \frac{212}{3}. \end{aligned}$$

Bài tập luyện tập

If $F(x) = \int_1^x \sqrt{t^2 + 1} dt$, then $F'(2) =$

- (A) $\sqrt{5}$ (C) 5
(B) $\sqrt{3}$ (D) 2

Lời giải chi tiết

By FTC1, $F'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, so $F'(2) = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$. (A).

Bài tập luyện tập

The rate of water flow into a tank, $R(t)$ (gal/min), is recorded every 4 minutes:

t (min)	0	4	8	12	16
$R(t)$ (gal/min)	20	26	31	35	38

(a) Use a right Riemann sum with 4 subintervals to approximate $\int_0^{16} R(t) dt$, and state whether it over- or underestimates the total gallons that flowed in. (b) Use the Trapezoidal Rule with the same data to approximate $\int_0^{16} R(t) dt$.

Lời giải chi tiết

(a) $\Delta t = 4$. $R_4 = 4(26 + 31 + 35 + 38) = 4(130) = 520$ gallons. Since $R(t)$ is increasing throughout, the right endpoint of each subinterval gives the larger value, so R_4 **overestimates** the total volume.

(b)

$$T_4 = \frac{4}{2} [20 + 2(26) + 2(31) + 2(35) + 38] = 2[20 + 52 + 62 + 70 + 38] = 2(242) = 484 \text{ gallons.}$$

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 4} dx$.

(A) $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right)$

(C) $\frac{1}{4} \ln 5$

(B) $\ln\left(\frac{5}{4}\right)$

(D) $\frac{1}{2} \ln 5$

Lời giải chi tiết

Let $u = x^2 + 4$, $du = 2x dx$, so $x dx = \frac{du}{2}$. Limits: $x = 0 \Rightarrow u = 4$; $x = 1 \Rightarrow u = 5$. Then

$$\int_4^5 \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} [\ln |u|]_4^5 = \frac{1}{2} (\ln 5 - \ln 4) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{4}\right).$$

(A).

Bài tập luyện tập

Given $\int_0^4 f(x) dx = 6$, find $\int_0^4 [5f(x) + 3] dx$.

Lời giải chi tiết

Split using linearity and the fact that $\int_0^4 3 dx$ is the area of a rectangle of height 3 and width 4:

$$\int_0^4 [5f(x) + 3] dx = 5 \int_0^4 f(x) dx + \int_0^4 3 dx = 5(6) + 3(4) = 30 + 12 = 42.$$

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_0^2 |x - 1| dx$ by splitting the integral at the point where the absolute value changes definition.

Lời giải chi tiết

For $x < 1$, $|x - 1| = 1 - x$; for $x \geq 1$, $|x - 1| = x - 1$. Split at $x = 1$:

$$\int_0^2 |x - 1| dx = \int_0^1 (1 - x) dx + \int_1^2 (x - 1) dx.$$

First piece: $\left[x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 0 = \frac{1}{2}$. Second piece: $\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^2 = (2 - 2) - \left(\frac{1}{2} - 1\right) = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$. Total: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} dx$ using a geometric interpretation rather than an antiderivative.

Lời giải chi tiết

The graph of $y = \sqrt{4 - x^2}$ on $[0, 2]$ is the upper-right quarter of the circle $x^2 + y^2 = 4$ (radius 2, centered at the origin), since $x \geq 0, y \geq 0$ there. The area under this quarter-circle arc equals one quarter of the full circle's area: $\frac{1}{4}\pi(2)^2 = \frac{1}{4}(4\pi) = \pi$.

Differential Equations

Mục tiêu Unit: Xây dựng phương trình vi phân từ phát biểu bằng lời; kiểm chứng một hàm số có phải là nghiệm của phương trình vi phân; vẽ và đọc trường độ dốc (slope field) để suy luận hình dạng nghiệm mà không cần giải phương trình; xấp xỉ nghiệm bằng phương pháp Euler; tìm nghiệm tổng quát bằng phương pháp tách biến (separation of variables), kể cả khi nghiệm phải ở dạng ẩn (implicit); dùng điều kiện đầu để tìm nghiệm riêng; mô hình tăng trưởng – phân rã mũ $\frac{dy}{dt} = ky$, bán chu kỳ phóng xạ, và định luật làm nguội Newton; và giới thiệu định tính phương trình vi phân logistic cùng sức chứa môi trường (carrying capacity) và hình dạng đường cong chữ S.

7.1 Modeling Situations with Differential Equations

A **differential equation** is an equation that relates an unknown function to one or more of its derivatives. Instead of solving for a number, solving a differential equation means finding a *function* $y = g(x)$ whose derivative (or derivatives) make the equation true for every x in its domain. For example, $\frac{dy}{dx} = 2x$ is a differential equation whose solutions are all functions of the form $y = x^2 + C$ – an entire **family** of functions, one for each choice of the constant C . This family is called the **general solution**. If we additionally require the solution curve to pass through a specific point, such as $y(0) = 5$, exactly one member of the family satisfies that requirement; this single function is called a **particular solution**.

Differential equations are classified by their **order**: the order is the order of the highest derivative that appears. Every equation studied in this unit is **first order** – it involves $\frac{dy}{dx}$ (or $\frac{dy}{dt}$) but no higher derivative. An equation such as $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$ would be second order and requires different techniques not covered here.

Vocabulary: *order* = highest derivative present; *general solution* = the whole family of functions satisfying the differential equation, written with an arbitrary constant C ; *particular solution* = the one member of that family singled out by an *initial condition* $y(x_0) = y_0$.

This unit develops two complementary ways to work with a first-order differential equation once it is written down. The first is **graphical and numerical**: slope fields (Section 7.3) and Euler's Method (Section 7.5) work for virtually any first-order equation and never require solving anything symbolically – they trade an exact formula for a picture or a table of estimates. The second is **algebraic**: separation of variables (Sections 7.6–7.7) produces an exact formula for y , but only when the equation can be written in the special separable form $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$. Recognizing which approach a given equation calls for is itself an important skill, since not every differential equation that arises from a modeling situation is separable.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương trình vi phân (differential equation) là một phương trình chứa đạo hàm của một hàm số chưa biết – thay vì tìm một con số, ta cần tìm cả một **hàm số** $y = g(x)$ sao cho đạo hàm của nó thỏa mãn phương trình đã cho. **Cấp (order)** của phương trình vi phân là cấp cao nhất của

đạo hàm xuất hiện trong đó; chương này chỉ xét các phương trình **cấp một** (chỉ chứa $\frac{dy}{dx}$). Khi “dịch” một câu phát biểu bằng lời sang phương trình vi phân, cụm từ “tốc độ thay đổi của X tỉ lệ thuận với Y ” luôn được viết thành $\frac{dX}{dt} = kY$, trong đó k là hằng số tỉ lệ (có thể dương hoặc âm tùy ngữ cảnh).

Many real situations are described first in words, and the key skill is translating a verbal statement about a *rate of change* into symbols. The phrase “the rate of change of X is proportional to Y ” always becomes $\frac{dX}{dt} = kY$, where k is an unknown constant of proportionality (its sign and size are usually determined later from data). Watch for variations: “proportional to the square of,” “proportional to the product of ...and ...,” or “proportional to the difference between ...and ...” each change the right-hand side accordingly, but the left-hand side is always the derivative of the quantity that is changing.

Translating words into symbols

- “The rate of change of P is proportional to P itself” $\Rightarrow \frac{dP}{dt} = kP$ (unrestricted growth/decay).
- “The rate of change of y is proportional to the product of y and $(N-y)$ ” $\Rightarrow \frac{dy}{dt} = ky(N-y)$ (growth limited by a fixed total N).
- “The rate of change of T is proportional to the difference between T and a fixed value T_{amb} ” $\Rightarrow \frac{dT}{dt} = k(T - T_{amb})$ (approach to equilibrium).

Ví dụ mẫu · Translating verbal statements

Translate each statement into a differential equation.

- (a) A population of fish P grows at a rate proportional to the current population.
 (b) In a school of N students, a rumor spreads at a rate proportional to the product of the number of students who have heard it, y , and the number who have not, $(N - y)$.
 (c) The temperature T of a metal rod changes at a rate proportional to the difference between its temperature and the temperature of the surrounding air, T_a .

Reasoning: in each case, identify the quantity that is changing (this becomes the derivative on the left) and identify exactly what that rate is said to be proportional to (this becomes the right-hand side, multiplied by an unknown constant k).

$$(a) \frac{dP}{dt} = kP \quad (b) \frac{dy}{dt} = ky(N - y) \quad (c) \frac{dT}{dt} = k(T - T_a)$$

These three equations reappear later in this unit: (a) leads to the exponential model, (b) is the *logistic* model, and (c) is Newton’s Law of Cooling.

7.2 Verifying Solutions of Differential Equations

Given a candidate function $y(x)$, we can check whether it actually solves a given differential equation without solving anything: differentiate $y(x)$ to get $y'(x)$ (and $y''(x)$ if the equation is second order), substitute both y and its derivative(s) into the differential equation, and simplify. If the resulting statement is true for every x in the domain, $y(x)$ is a solution; if it is only true for isolated values of x , or never true, $y(x)$ is **not** a solution.

To verify $y(x)$ solves a differential equation: (1) compute $y'(x)$ (and higher derivatives if needed); (2) substitute y and y' into both sides of the equation; (3) simplify each side independently; (4) check that the two sides are *identical as functions of x* — not just equal at one point.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Để kiểm chứng một hàm số $y(x)$ có phải là nghiệm của một phương trình vi phân hay không, ta tính đạo hàm $y'(x)$ (và $y''(x)$ nếu cần), rồi thay cả y lẫn y' vào hai vế của phương trình. Nếu hai vế bằng nhau với **mọi** x trong miền xác định thì $y(x)$ là một nghiệm; nếu chỉ đúng tại một vài giá trị x riêng lẻ (hoặc không đúng chút nào) thì $y(x)$ **không** phải là nghiệm. Đây thuần túy là một phép thay thế và rút gọn đại số, không cần giải phương trình.

Ví dụ mẫu · Verifying candidate solutions

Consider the differential equation $\frac{dy}{dx} = -2y + 6$.

(a) Verify that $y = Ce^{-2x} + 3$ is a solution for every constant C .

(b) Determine whether $y = e^{-2x} + 5$ is a solution.

(a) Differentiate: $\frac{dy}{dx} = -2Ce^{-2x}$ (the derivative of the constant 3 is 0). Substitute into the right-hand side:

$$-2y + 6 = -2(Ce^{-2x} + 3) + 6 = -2Ce^{-2x} - 6 + 6 = -2Ce^{-2x}.$$

This matches $\frac{dy}{dx} = -2Ce^{-2x}$ exactly, for *any* value of C — so $y = Ce^{-2x} + 3$ is a solution for every constant C ; it is the general solution. (Verification is exactly the tool needed later in this unit whenever a separable equation produces an *implicit* solution that cannot be solved for y : instead of isolating y , we differentiate the implicit equation and confirm it reproduces the original differential equation, as in Section 7.7.)

(b) Differentiate: $\frac{dy}{dx} = -2e^{-2x}$. Substitute into the right-hand side:

$$-2y + 6 = -2(e^{-2x} + 5) + 6 = -2e^{-2x} - 10 + 6 = -2e^{-2x} - 4.$$

Comparing, $-2e^{-2x} \neq -2e^{-2x} - 4$ (the two sides differ by 4 for every x), so $y = e^{-2x} + 5$ is **not** a solution. The additive constant must be exactly 3 (the value that makes the right-hand side vanish, $-2(3) + 6 = 0$), not an arbitrary number — only the coefficient of e^{-2x} is free to vary.

7.3 Slope Fields

7.3.1 Sketching a Slope Field

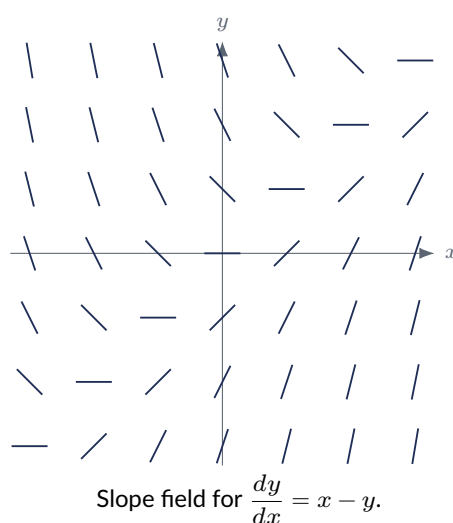
A **slope field** (also called a *direction field*) is a picture of a differential equation $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ built entirely without solving it. At each point (x, y) on a grid, we evaluate $f(x, y)$ and draw a short line segment through that point with exactly that slope. Because $f(x, y)$ can be evaluated at any grid point using only arithmetic, a slope field can always be constructed even when the differential equation cannot be solved by any technique in this course.

Procedure: choose a grid of points (x, y) ; at each point, substitute the coordinates into the right-hand side $f(x, y)$ of $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ to get a numerical slope; draw a short segment of that slope centered at the point. Repeat for every grid point. The completed picture shows the direction every solution curve must travel as it passes through each point, without ever solving for y .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trường độ dốc (slope field, còn gọi là direction field) là một tập hợp các đoạn thẳng ngắn vẽ tại nhiều điểm lưới (x, y) , mỗi đoạn có độ dốc đúng bằng giá trị $\frac{dy}{dx}$ mà phương trình vi phân quy định tại điểm đó – hoàn toàn **không cần giải** phương trình. Để vẽ, ta chỉ cần thay toạ độ (x, y) của từng điểm lưới vào vế phải của phương trình để tính độ dốc, rồi vẽ một đoạn thẳng ngắn có độ dốc đó tại đúng điểm lưới ấy.



Ví dụ mẫu · Computing slope field values

For the differential equation $\frac{dy}{dx} = x - y$, compute the slope at each of the nine grid points with $x \in \{-1, 0, 1\}$ and $y \in \{-1, 0, 1\}$, and organize the results in a table.

Substitute each pair (x, y) directly into $x - y$:

x	y	$x - y$	slope of segment
-1	-1	0	horizontal
-1	0	-1	falls at 45°
-1	1	-2	steep, falling
0	-1	1	rises at 45°
0	0	0	horizontal
0	1	-1	falls at 45°
1	-1	2	steep, rising
1	0	1	rises at 45°
1	1	0	horizontal

Notice that every point with $y = x$ produces a slope of 0 – this line is where segments are horizontal in the figure above, no matter which of these nine points we started from. This systematic substitution, repeated over a full grid, is exactly how the slope field figure was produced.

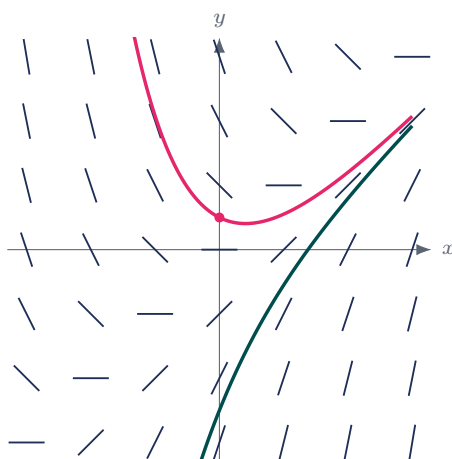
7.3.2 Reasoning Using Slope Fields

Two exam-style skills follow directly from being able to read a slope field. First, **matching**: given several differential equations and several slope-field pictures, identify which field belongs to which equation by looking for distinguishing features — where the slope is 0 (the **nullcline**, found by solving $f(x, y) = 0$), where the slope is undefined (usually where a denominator vanishes), whether the pattern depends on x only, on y only, or on both, and any symmetry (for instance, $f(x, y) = f(-x, y)$ gives a field symmetric about the y -axis). Second, **sketching a particular solution curve**: starting from a given point, follow the direction of the nearby segments, moving in small steps in both the increasing- x and decreasing- x directions, always keeping the curve locally tangent to the surrounding segments. A solution curve can never cross itself, and at any point it must be tangent to the segment drawn there.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi cho một phương trình vi phân và yêu cầu chọn đúng trường độ dốc tương ứng (trong nhiều lựa chọn), hãy tìm những đặc điểm dễ nhận ra: nơi độ dốc bằng 0 (đường *nullcline*, giải $\frac{dy}{dx} = 0$), nơi độ dốc không xác định (thường là mẫu số bằng 0), và độ dốc có phụ thuộc vào x , vào y , hay cả hai. Để vẽ một nghiệm riêng đi qua một điểm cho trước, xuất phát từ điểm đó và “đi theo” hướng của các đoạn thẳng lân cận, di chuyển từng bước nhỏ theo cả hai chiều x tăng và x giảm.



Slope field for $\frac{dy}{dx} = x - y$ with two particular solution curves traced through the field; the marked point is $(0, 0.5)$.

Ví dụ mẫu · Tracing a solution curve

Using the slope field for $\frac{dy}{dx} = x - y$ shown above, describe the shape of the solution curve through the point $(0, 0.5)$ (the pink curve, marked with a dot).

At $(0, 0.5)$, the slope is $x - y = 0 - 0.5 = -0.5$: negative, so the curve initially heads down and to the right. As x increases and y decreases along the curve, the value $x - y$ increases toward 0 (both changes push it in the same direction), so the curve flattens out as it approaches the line $y = x$ — the nullcline, where every segment in the field is horizontal. Just below that line, $x - y > 0$, so the curve is pulled back upward, and it settles into a gentle rise that continues to track the surrounding segments as $x \rightarrow \infty$. This is exactly the qualitative behavior the pink curve in the figure displays: a shallow dip followed by a steady climb, staying close to the direction of the field at every point it passes through.

(!) Lỗi thường gặp: When matching a differential equation to a slope field, do not just look at one or two segments — check whether the *pattern as a whole* matches. A field for $\frac{dy}{dx} = x - y$ and one for $\frac{dy}{dx} = x + y$ can look similar near the origin (both have slope 0 at $(0, 0)$) but differ sharply elsewhere: the first has slope 0 along the whole line $y = x$, the second along the whole line $y = -x$. Always identify the full nullcline, not just a single matching point.

The table below organizes this reasoning for four common differential equations, to make the matching process concrete.

Equation	Nullcline (slope = 0)	Notable feature
$\frac{dy}{dx} = x$	the line $x = 0$	slope depends only on x ; every point on a given vertical line has the same slope
$\frac{dy}{dx} = y$	the line $y = 0$	slope depends only on y ; every point on a given horizontal line has the same slope
$\frac{dy}{dx} = xy$	both axes, $x = 0$ or $y = 0$	180° rotational symmetry about the origin, since $f(-x, -y) = (-x)(-y) = xy = f(x, y)$
$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2$	only the single point $(0, 0)$	slope is never negative (a sum of squares), so every solution curve is non-decreasing

7.4 Approximating Solutions Using Euler's Method

Slope fields show the *shape* of solutions without solving the equation; **Euler's Method** goes one step further and produces *numerical estimates* of a particular solution, again without ever solving the differential equation symbolically. The idea is to start at the known point (x_0, y_0) and repeatedly step forward along the tangent line direction given by the differential equation itself.

Euler's Method: given $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, a starting point (x_0, y_0) , and a step size Δx , generate successive approximations by

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x, \quad y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x.$$

At each step, the slope $f(x_n, y_n)$ is evaluated using the *current* point (x_n, y_n) — never the point being predicted. Smaller Δx gives a more accurate approximation but requires more steps.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương pháp Euler xấp xỉ nghiệm của một phương trình vi phân bằng cách đi theo đường tiếp tuyến từng bước nhỏ: tại mỗi bước, ta dùng độ dốc hiện tại $f(x_n, y_n) = \frac{dy}{dx}$ tại điểm đang đứng để dự đoán điểm tiếp theo, theo công thức $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n) \cdot \Delta x$. Bước nhảy Δx càng nhỏ, xấp xỉ càng chính xác — nhưng với Δx lớn, sai số có thể đáng kể, đặc biệt khi đường cong nghiệm thật cong nhiều (độ lõm/lồi lớn).

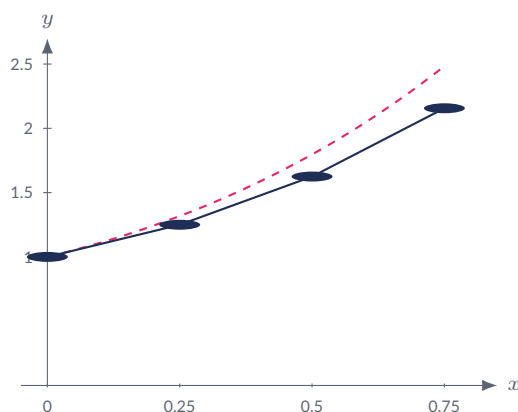
Ví dụ mẫu · Euler's Method by hand

Use Euler's Method with step size $\Delta x = 0.25$ to approximate $y(0.75)$ for $\frac{dy}{dx} = x + y$, given $y(0) = 1$. Show three steps in a table.

Here $f(x, y) = x + y$. Apply $y_{n+1} = y_n + f(x_n, y_n)(0.25)$ three times:

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = x_n + y_n$	$y_{n+1} = y_n + f \cdot (0.25)$
0	0	1	1	$1 + 1(0.25) = 1.25$
1	0.25	1.25	1.5	$1.25 + 1.5(0.25) = 1.625$
2	0.5	1.625	2.125	$1.625 + 2.125(0.25) = 2.15625$

So $y(0.75) \approx 2.156$. For comparison, this equation can actually be solved exactly (it is linear, using a technique beyond this unit): the exact solution is $y = 2e^x - x - 1$, giving $y(0.75) = 2e^{0.75} - 1.75 \approx 2.484$. The Euler estimate (2.156) is noticeably below the exact value (2.484) because $y'' = 2e^x > 0$ everywhere — the true curve is concave up, so each tangent-line step lies *below* the curve it is approximating, and the error accumulates in the same direction at every step.



Euler's Method (solid polyline, $\Delta x = 0.25$) approximating the exact solution (dashed) of $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$. Because the exact solution is concave up, every tangent-line step falls below the true curve.

(!) Lỗi thường gặp: The single most common Euler's Method error is evaluating the slope f at the *new* point (x_{n+1}, y_{n+1}) instead of the *current* point (x_n, y_n) — but y_{n+1} is not known yet until after that slope is used. Always compute $f(x_n, y_n)$ first, using values already in hand, and only then step forward. A second common error is adding the raw slope $f(x_n, y_n)$ instead of $f(x_n, y_n) \cdot \Delta x$ — forgetting to scale the slope by the step size.

Reducing Δx always brings the Euler approximation closer to the exact value, since more (smaller) tangent-line steps track the true curve more faithfully. The table below repeats the estimate of $y(0.75)$ for $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$, from the worked example above, using progressively smaller step sizes (and correspondingly more steps) to reach the same target $x = 0.75$:

Δx	Number of steps	Euler estimate of $y(0.75)$	Exact value
0.75	1	1.75	2.484
0.375	2	2.03125	2.484
0.25	3	2.15625	2.484

As Δx shrinks from 0.75 to 0.25, the Euler estimate climbs steadily from 1.75 toward the exact value 2.484 — exactly the behavior expected of a convergent numerical method, though full convergence to three decimal places would require far smaller steps than are practical to compute by hand.

7.5 Finding General Solutions Using Separation of Variables

Many first-order differential equations that arise from the modeling situations in Section 7.1 have the special form $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$ — the right-hand side factors into a piece depending only on x times a piece depending only on y . Such equations are called **separable**, and they can be solved completely using algebra and integration.

Separation of variables: to solve $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, divide both sides by $h(y)$ (assuming $h(y) \neq 0$) and multiply by dx to separate the variables:

$$\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx,$$

then integrate each side independently:

$$\int \frac{dy}{h(y)} = \int g(x) dx.$$

Each integration introduces its own constant of integration; combine them into a single constant C on one side. The result is the **general solution** — a family of functions, one for every value of C .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tách biến (separation of variables) áp dụng cho phương trình có dạng $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$: ta đưa tất cả các biểu thức chứa y (kể cả dy) sang một vế, tất cả biểu thức chứa x (kể cả dx) sang vế còn lại — $\frac{dy}{h(y)} = g(x) dx$ — rồi lấy nguyên hàm hai vế **độc lập**. Mỗi lần lấy nguyên hàm sinh ra một hằng số cộng; gộp hai hằng số đó lại thành một hằng số C duy nhất ở nghiệm tổng quát.

Ví dụ mẫu · Separable equation, exponential form

Find the general solution of $\frac{dy}{dx} = x^2 y$.

Separate (assuming $y \neq 0$):

$$\frac{dy}{y} = x^2 dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx \Rightarrow \ln |y| = \frac{x^3}{3} + C.$$

Exponentiate both sides: $|y| = e^{x^3/3+C} = e^C e^{x^3/3}$, so $y = \pm e^C e^{x^3/3}$. Writing $A = \pm e^C$ for the arbitrary nonzero constant (and noting $y = 0$ is also a solution, absorbed into $A = 0$):

$$y = A e^{x^3/3}.$$

Check: $\frac{dy}{dx} = A \cdot x^2 e^{x^3/3} = x^2 (A e^{x^3/3}) = x^2 y$. ✓

Ví dụ mẫu · Separable equation, power form

Find the general solution of $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y^2}$.

Separate:

$$y^2 dy = (x + 1) dx \Rightarrow \int y^2 dy = \int (x + 1) dx \Rightarrow \frac{y^3}{3} = \frac{x^2}{2} + x + C.$$

Multiply by 3 and rename the constant: $y^3 = \frac{3}{2}x^2 + 3x + K$, so

$$y = \left(\frac{3}{2}x^2 + 3x + K \right)^{1/3}.$$

Check: let $u = \frac{3}{2}x^2 + 3x + K$, so $y = u^{1/3}$ and $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}u^{-2/3} \cdot (3x + 3) = (x + 1)u^{-2/3}$. Meanwhile $\frac{x + 1}{y^2} = \frac{x + 1}{u^{2/3}} = (x + 1)u^{-2/3}$ – the two match. ✓

Ví dụ mẫu · Separable equation, logarithmic form

Find the general solution of $\frac{dy}{dx} = xe^{-y}$.

Separate:

$$e^y dy = x dx \Rightarrow \int e^y dy = \int x dx \Rightarrow e^y = \frac{x^2}{2} + C.$$

Solve for y by taking a logarithm of both sides:

$$y = \ln\left(\frac{x^2}{2} + C\right),$$

valid wherever $\frac{x^2}{2} + C > 0$.

Check: $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2/2 + C}$, while $xe^{-y} = x \cdot e^{-\ln(x^2/2 + C)} = \frac{x}{x^2/2 + C}$ – matches. ✓

(!) Lỗi thường gặp: When separating $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$, every term must carry its correct sign to the correct side. A frequent mistake: rewriting $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ as $y dy = x dx$ (dropping the minus sign) instead of the correct $y dy = -x dx$. The dropped sign turns a family of *circles* ($x^2 + y^2 = K$) into a family of *hyperbolas* ($y^2 - x^2 = K$) – an entirely different geometric answer, not just a numerically wrong constant.

(!) Lỗi thường gặp: Because $\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C$, the correct intermediate step is $\ln|y| = \dots$, never $\ln y = \dots$ (which silently assumes $y > 0$ for every x under consideration). Dropping the absolute value can produce a solution with the wrong sign or an artificially restricted domain. The safe habit: always write $|y| = e^{\dots}$, then convert to $y = \pm e^{\dots} = Ae^{\dots}$, where A ranges over all nonzero constants (and sometimes $A = 0$ also works, recovering the constant solution $y = 0$).

7.6 Finding Particular Solutions Using Initial Conditions

Once a general solution is found, an **initial condition** $y(x_0) = y_0$ pins down the value of the arbitrary constant, producing a single **particular solution**. Sometimes, after integrating, the equation relating x and y can be solved cleanly for y – this is an **explicit** solution. Other times the equation cannot (or need not) be rearranged into the form $y = \dots$, most often because y appears raised to a power of 3 or higher, or in a combination of terms that cannot be isolated; the answer is then left as an **implicit** equation relating x and y , which is still a complete and valid solution.

A subtlety arises whenever solving for y requires taking a square root: algebra alone gives two possible branches, $y = +\sqrt{\dots}$ and $y = -\sqrt{\dots}$, but only one of them can pass through the given initial point. The initial condition itself decides which branch is correct – if $y_0 > 0$, the positive branch is required; if $y_0 < 0$, the negative branch is required. Once the correct branch is chosen, the domain of the particular solution is also restricted to the interval around x_0 on which the expression under the square root stays non-negative.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Sau khi có nghiệm tổng quát (chứa hằng số C), ta thay tọa độ của **điều kiện đầu** (initial condition) $y(x_0) = y_0$ vào để giải ra giá trị cụ thể của C , thu được **nghiệm riêng** (particular solution). Đôi khi, sau khi lấy nguyên hàm, phương trình thu được không thể (hoặc không cần) giải tường minh cho y theo x – ta để nguyên dạng **ẩn** (implicit), ví dụ $y^3 - y^2 = \frac{x^3}{3}$, và đó vẫn là một câu trả lời hoàn chỉnh, hợp lệ.

Ví dụ mẫu · Particular solution, explicit

Solve the initial value problem $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$, $y(1) = -1$.

Separate:

$$\frac{dy}{y^2} = 2x \, dx \implies \int y^{-2} \, dy = \int 2x \, dx \implies -\frac{1}{y} = x^2 + C.$$

Apply the initial condition $x = 1$, $y = -1$: $-\frac{1}{-1} = 1 + C \implies 1 = 1 + C \implies C = 0$. So

$$-\frac{1}{y} = x^2 \implies y = -\frac{1}{x^2}.$$

Check: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{x^3}$, and $2xy^2 = 2x \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{2}{x^3}$ – matches. Since the solution is undefined at $x = 0$ and the initial condition is at $x = 1$, this particular solution is valid on the interval $x > 0$.

Ví dụ mẫu · Particular solution, implicit

Solve the initial value problem $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y - y^2}$, $y(0) = 2$, leaving the answer in implicit form.

Separate:

$$(y - y^2) \, dy = x^2 \, dx \implies \int (y - y^2) \, dy = \int x^2 \, dx \implies \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} + C.$$

Apply $x = 0$, $y = 2$: $\frac{4}{2} - \frac{8}{3} = 2 - \frac{8}{3} = -\frac{2}{3}$, and the right side is $0 + C$, so $C = -\frac{2}{3}$. The particular solution is

$$\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}, \quad \text{or, clearing denominators,} \quad 3y^2 - 2y^3 = 2x^3 - 4.$$

This cubic in y cannot practically be solved for y in terms of x , so the implicit form is the final answer. **Check** by implicit differentiation: differentiating $3y^2 - 2y^3 = 2x^3 - 4$ gives $6yy' - 6y^2y' = 6x^2$, so $y'(6y - 6y^2) = 6x^2$, and dividing by 6: $y' = \frac{x^2}{y - y^2}$ – exactly the original differential equation. ✓ Also, $(0, 2)$ satisfies the implicit equation: $3(4) - 2(8) = 12 - 16 = -4$, and $2(0) - 4 = -4$. ✓

(!) Lỗi thường gặp: Solve first, *then* apply the initial condition – never the reverse. A common error is to integrate one side, immediately substitute the initial values, and only afterward integrate the other side; this loses track of the constant of integration and typically makes it impossible to determine C correctly (or silently sets $C = 0$ without justification). Always finish separating and integrating *both* sides completely, producing exactly one combined constant C in the general solution, before touching the initial condition at all.

7.7 Exponential Models with Differential Equations

7.7.1 The Exponential Growth and Decay Model

The differential equation $\frac{dy}{dt} = ky$ – “the rate of change of y is proportional to y itself” – is separable and appears throughout the sciences. Separating variables:

$$\frac{dy}{y} = k dt \implies \ln |y| = kt + C \implies y = Ae^{kt}.$$

Applying the initial condition $y(0) = y_0$ gives $A = y_0$, so the particular solution is always

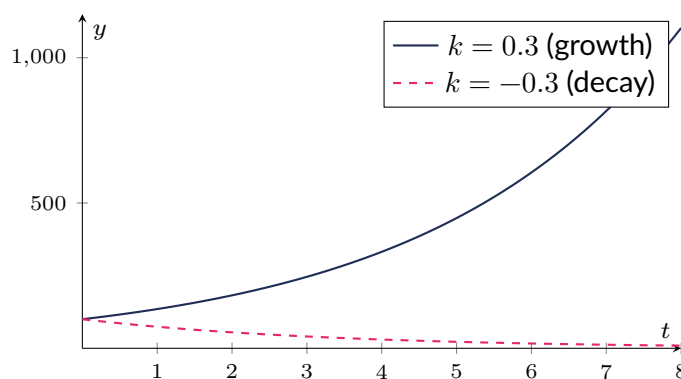
$$y = y_0 e^{kt}.$$

Exponential model: $\frac{dy}{dt} = ky \iff y = y_0 e^{kt}$. If $k > 0$, y grows without bound (population growth, compound interest); if $k < 0$, y decays toward 0 (radioactive decay). The **half-life** of a decaying quantity is the fixed time $t_{1/2}$ required for y to fall to half its value, independent of the starting amount; it satisfies $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|k|}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương trình $\frac{dy}{dt} = ky$ (tốc độ thay đổi tỉ lệ thuận với chính đại lượng đó) luôn có nghiệm $y = y_0 e^{kt}$, trong đó y_0 là giá trị tại $t = 0$. Nếu $k > 0$, đại lượng **tăng trưởng mũ** (ví dụ số lượng vi khuẩn); nếu $k < 0$, đại lượng **phân rã mũ** (ví dụ khối lượng chất phóng xạ). **Bán chu kỳ** (half-life) là khoảng thời gian để đại lượng giảm còn một nửa – không phụ thuộc vào giá trị ban đầu.



Solutions of $\frac{dy}{dt} = ky$ with $y_0 = 100$: exponential growth ($k = 0.3 > 0$) versus exponential decay ($k = -0.3 < 0$).

Ví dụ mẫu · Exponential growth and half-life

(a) A bacterial culture grows according to $\frac{dP}{dt} = kP$. At $t = 0$ there are 500 bacteria; after 3 hours there are 1400. Find k , then predict the population after 8 hours.

$P(t) = 500e^{kt}$. Using $P(3) = 1400$: $1400 = 500e^{3k} \Rightarrow e^{3k} = 2.8 \Rightarrow k = \frac{\ln 2.8}{3} \approx \frac{1.02962}{3} \approx 0.3432$ per hour.

$$P(8) = 500e^{8k} = 500(2.8)^{8/3} \approx 500(15.575) \approx 7787 \text{ bacteria.}$$

(b) A radioactive isotope has a half-life of 12 days. Starting with 80 mg, how much remains after 30 days?

Rather than solving for k numerically, use the half-life directly: 30 days is $30/12 = 2.5$ half-lives, so the remaining fraction is $(1/2)^{2.5}$:

$$y(30) = 80 \left(\frac{1}{2}\right)^{2.5} = \frac{80}{2^{2.5}} = \frac{80}{4\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2} \approx 14.14 \text{ mg.}$$

(Equivalently, $k = -\frac{\ln 2}{12} \approx -0.05776$ per day, and $y(30) = 80e^{30k} = 80e^{-2.5 \ln 2} = 80 \cdot 2^{-2.5}$, the same result.)

7.7.2 Newton's Law of Cooling

A related model describes how the temperature of an object changes as it approaches the temperature of its surroundings. **Newton's Law of Cooling** states that the rate of change of an object's temperature T is proportional to the difference between T and the ambient (surrounding) temperature T_{amb} :

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_{amb}).$$

This is separable, with $g(t) = k$ and $h(T) = T - T_{amb}$:

$$\frac{dT}{T - T_{amb}} = k dt \Rightarrow \ln |T - T_{amb}| = kt + C \Rightarrow T - T_{amb} = Ae^{kt} \Rightarrow T = T_{amb} + Ae^{kt},$$

where $A = T_0 - T_{amb}$ is the initial temperature difference. Because T must approach T_{amb} as $t \rightarrow \infty$ (an object left long enough always settles to room temperature), the term Ae^{kt} must shrink to 0, which forces $k < 0$ — **always**, whether the object is cooling down toward T_{amb} or warming up toward it. A positive k would make T diverge away from T_{amb} without bound, which does not describe cooling or warming toward equilibrium at all.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định luật làm nguội Newton mô tả tốc độ thay đổi nhiệt độ của một vật tỉ lệ với **hiệu** giữa nhiệt độ của vật và nhiệt độ môi trường xung quanh: $\frac{dT}{dt} = k(T - T_{amb})$. Đây là một dạng đặc biệt của phương trình tách biến, với nghiệm $T = T_{amb} + Ae^{kt}$ – nhiệt độ luôn tiến dần về T_{amb} khi $t \rightarrow \infty$, vì vậy hằng số k trong quy ước này luôn **âm**, bất kể vật đang nguội đi hay đang ấm lên.

Ví dụ mẫu · Newton's Law of Cooling

A cup of coffee at 90°C is placed in a room kept at 20°C . After 10 minutes, the coffee has cooled to 60°C . **(a)** Find k . **(b)** Find the coffee's temperature after 20 minutes.

(a) Here $T_{amb} = 20$ and $A = T_0 - T_{amb} = 90 - 20 = 70$, so $T(t) = 20 + 70e^{kt}$. Using $T(10) = 60$:

$$60 = 20 + 70e^{10k} \Rightarrow 40 = 70e^{10k} \Rightarrow e^{10k} = \frac{4}{7} \Rightarrow k = \frac{\ln(4/7)}{10} \approx -0.05596 \text{ per minute.}$$

As expected, $k < 0$. **(b)** Since $20 = 2 \times 10$, we can reuse $e^{10k} = 4/7$ directly: $e^{20k} = (e^{10k})^2 = \left(\frac{4}{7}\right)^2 = \frac{16}{49}$.

$$T(20) = 20 + 70 \cdot \frac{16}{49} = 20 + \frac{1120}{49} = 20 + 22.857 \approx 42.9^\circ\text{C}.$$

As $t \rightarrow \infty$, $T \rightarrow 20^\circ\text{C}$ – the coffee approaches, but never exactly reaches, room temperature.

(!) Lỗi thường gặp: Two mix-ups are common with Newton's Law of Cooling, $\frac{dT}{dt} = k(T - T_{amb})$: (1) forgetting the ambient term entirely and writing $\frac{dT}{dt} = kT$, which models unrestricted exponential growth or decay toward zero rather than toward room temperature; (2) assuming $k > 0$ describes cooling. In this convention k is **always negative**, whether the object is losing heat toward T_{amb} or gaining heat toward T_{amb} – only the sign of the initial difference $A = T_0 - T_{amb}$ changes between the two cases, never the sign of k .

7.8 The Logistic Differential Equation

The exponential model $\frac{dy}{dt} = ky$ predicts growth (or decay) without limit, which is unrealistic for most real populations: food, space, and resources eventually cap how large a population can get. The **logistic differential equation** builds in such a limit:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{L}\right),$$

where L is the **carrying capacity** – the maximum population the environment can sustain in the long run – and $k > 0$ is a growth-rate constant. When P is small compared to L , the factor $(1 - \frac{P}{L})$ is close to 1, so $\frac{dP}{dt} \approx kP$ and the population grows nearly exponentially, just as in the unrestricted model. As P approaches L , the factor $(1 - \frac{P}{L})$ shrinks toward 0, so growth slows and eventually stops.

Ví dụ mẫu · Logistic equilibria and max growth

For $\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right)$: (a) verify that $P = 0$ and $P = L$ are both equilibrium (constant) solutions; (b) find the population level at which the growth rate $\frac{dP}{dt}$ is largest, and its value there.

(a) A constant function $P = c$ is an equilibrium solution exactly when $\frac{dP}{dt} = 0$ at that value. At $P = 0$: $kP(1 - P/L) = k(0)(1 - 0) = 0$. ✓ At $P = L$: $kL(1 - L/L) = kL(1 - 1) = kL(0) = 0$. ✓ Both are equilibrium solutions.

(b) Write $g(P) = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right) = kP - \frac{k}{L}P^2$ – a downward-opening parabola in P (since $k > 0$). Its maximum occurs where $g'(P) = 0$:

$$g'(P) = k - \frac{2k}{L}P = 0 \implies P = \frac{L}{2}.$$

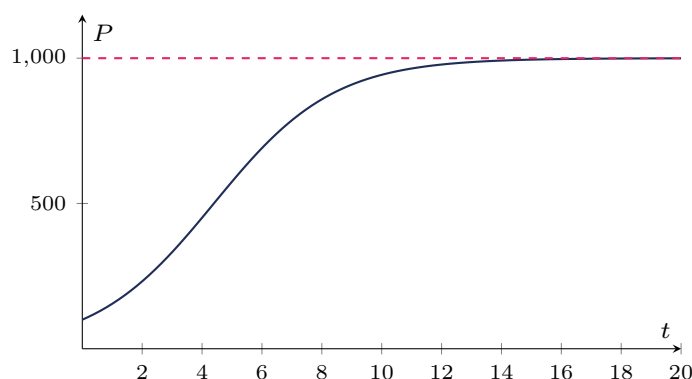
The maximum growth rate is $g\left(\frac{L}{2}\right) = k \cdot \frac{L}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = k \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{kL}{4}$. So the population grows fastest exactly halfway to capacity, at $P = L/2$, and that fastest rate is $\frac{kL}{4}$.

Logistic behavior: $P = 0$ and $P = L$ are equilibrium solutions; for $0 < P < L$, $\frac{dP}{dt} > 0$ and the population increases toward L ; for $P > L$, $\frac{dP}{dt} < 0$ and the population decreases back toward L (the population can never cross L , only approach it). Growth is fastest at $P = L/2$, giving the graph of P versus t its characteristic **S-shape**: nearly exponential at first, an inflection point at $P = L/2$, then leveling off toward L . It can be shown that the closed-form solution has the shape $P(t) = \frac{L}{1 + Ae^{-kt}}$ for a constant A determined by the initial population.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương trình vi phân logistic $\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{L}\right)$ mô tả tăng trưởng có giới hạn: hằng số L gọi là **sức chứa môi trường** (carrying capacity) – giá trị lớn nhất mà quần thể có thể đạt tới lâu dài. Khi P còn nhỏ so với L , phương trình gần giống $\frac{dP}{dt} \approx kP$ (tăng gần như hàm mũ); khi P tiến gần L , tốc độ tăng trưởng chậm dần về 0. Tốc độ tăng trưởng đạt **lớn nhất** khi $P = \frac{L}{2}$, tạo nên hình dạng đường cong chữ **S** đặc trưng.



Logistic growth $\frac{dP}{dt} = kP(1 - P/L)$ with $L = 1000$, $k = 0.5$: the S-shaped curve rises fastest near $P = L/2 = 500$ (around $t \approx 4.4$) and levels off toward the carrying capacity $L = 1000$ (dashed).

Exponential versus logistic growth: both models start out looking similar for small P , but they describe very different long-term behavior.

	Exponential $\frac{dy}{dt} = ky$	Logistic $\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{L}\right)$
Equilibrium solution(s)	only $y = 0$	$P = 0$ and $P = L$
Long-term behavior	unbounded growth (or decay to 0)	levels off at the carrying capacity L
Shape of graph	purely convex (for $k > 0$)	S-shaped: convex, then concave, with an inflection at $P = L/2$

Summary of solution techniques in this unit:

Technique	What it produces	Requires the equation to be separable?
Slope field	a picture of the direction of every solution curve; used to sketch or match shapes	no – works for any $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
Euler's Method	a numerical table of estimated y -values at chosen x -values	no – works for any $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$
Separation of variables	an exact formula for y (explicit or implicit), the general or a particular solution	yes – only when $f(x, y) = g(x)h(y)$

Slope fields and Euler's Method are the fallback tools when an equation is not separable (such as $\frac{dy}{dx} = x - y$ or $\frac{dy}{dx} = x + y$, used throughout Sections 7.3–7.5); separation of variables is reserved for equations with the special product structure, but when it applies it gives an exact answer rather than an approximation.

7.9 Problem Bank

Bài tập luyện tập

What is the order of the differential equation $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} - y = \sin x$?

- (A) 1 (C) 3
(B) 2 (D) Cannot be determined

Lời giải chi tiết

The order of a differential equation is the order of the highest derivative present. Here the highest derivative is $\frac{d^2y}{dx^2}$, a second derivative, so the equation is order 2. **(B)**.

Bài tập luyện tập

The rate at which a rumor spreads through a school of N students is proportional to the product of the number of students who have heard it, y , and the number who have not, $(N - y)$.

Write a differential equation for $\frac{dy}{dt}$.

Lời giải chi tiết

“Proportional to the product of y and $(N - y)$ ” translates directly to $\frac{dy}{dt} = ky(N - y)$, where k is the constant of proportionality. This is a logistic-type equation.

Bài tập luyện tập

A tank drains so that the rate of change of the volume of water V is proportional to the square root of V . Which differential equation models this?

(A) $\frac{dV}{dt} = kV$

(C) $\frac{dV}{dt} = kV^2$

(B) $\frac{dV}{dt} = k\sqrt{V}$

(D) $\frac{dV}{dt} = \frac{k}{V}$

Lời giải chi tiết

“Proportional to the square root of V ” means the right-hand side is $k\sqrt{V}$, so $\frac{dV}{dt} = k\sqrt{V}$. (B).

Bài tập luyện tập

Show that $y = 5e^{3x} - 4$ is not a solution of $\frac{dy}{dx} = 3y$.

Lời giải chi tiết

Differentiate: $\frac{dy}{dx} = 15e^{3x}$. Substitute into the right-hand side: $3y = 3(5e^{3x} - 4) = 15e^{3x} - 12$. Since $15e^{3x} \neq 15e^{3x} - 12$ (the two sides differ by 12 for every x), $y = 5e^{3x} - 4$ is not a solution.

Bài tập luyện tập

Which of the following functions is a solution of $\frac{dy}{dx} = 2xy$?

(A) $y = e^{x^2}$

(C) $y = x^2$

(B) $y = e^{2x}$

(D) $y = 2x^2 + C$

Lời giải chi tiết

Test (A): $y = e^{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} = 2xy$. ✓ This matches exactly. (Quick checks confirm the others fail: for $y = e^{2x}$, $\frac{dy}{dx} = 2e^{2x} \neq 2xe^{2x}$ in general; for $y = x^2$, $\frac{dy}{dx} = 2x \neq 2x^3$; for $y = 2x^2 + C$, $\frac{dy}{dx} = 4x \neq 2x(2x^2 + C)$.) (A).

Bài tập luyện tập

For the differential equation $\frac{dy}{dx} = y - x$, compute the slope at each of the points $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, and present the results in a table.

Lời giải chi tiết

Substitute each (x, y) into $y - x$:

(x, y)	$(0, 0)$	$(0, 1)$	$(0, 2)$	$(1, 0)$	$(1, 1)$	(x, y)	$(2, 0)$
slope	0	1	2	-1	0	slope	-2

Bài tập luyện tập

In the slope field for $\frac{dy}{dx} = x - y$, the line along which every segment is horizontal (slope 0) is:

- (A) $y = x$ (C) $y = 0$
(B) $y = -x$ (D) $x = 0$

Lời giải chi tiết

Slope is 0 exactly where $x - y = 0$, i.e., $y = x$. (A).

Bài tập luyện tập

A slope field has horizontal segments along the entire x -axis, with segments becoming steeper and positive as y increases above 0, and steeper and negative as y decreases below 0; at any fixed height y , all segments look identical regardless of x . Which differential equation produces this field: (i) $\frac{dy}{dx} = x$, (ii) $\frac{dy}{dx} = y$, (iii) $\frac{dy}{dx} = x + y$, (iv) $\frac{dy}{dx} = x - y$?

Lời giải chi tiết

The field is horizontal exactly on $y = 0$ and depends only on y , not x (segments at a given height look the same for every x -value) — this matches $\frac{dy}{dx} = y$, equation (ii). Equations (i), (iii), (iv) all involve x explicitly, so their segments would change as x varies at a fixed y , which contradicts the description.

Bài tập luyện tập

For the differential equation $\frac{dy}{dx} = x - y$: (a) find the equation of the nullcline (where the slope is 0); (b) for a solution curve starting at a point where $y > x$, state whether the curve is initially increasing or decreasing, and describe what happens to the curve as it approaches the nullcline.

Lời giải chi tiết

(a) Set $x - y = 0$, giving the nullcline $y = x$. (b) If $y > x$, then $x - y < 0$, so $\frac{dy}{dx} < 0$ and the curve is initially **decreasing**. As the curve approaches the nullcline, $x - y \rightarrow 0$, so the slope

approaches 0 and the curve flattens out (its rate of decrease slows down as it nears the line $y = x$).

Bài tập luyện tập

Use Euler's Method with step size $\Delta x = 0.5$ to approximate $y(2)$ for $\frac{dy}{dx} = x - y$, given $y(0) = 2$. Show your work in a table with four steps.

Lời giải chi tiết

With $f(x, y) = x - y$:

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = x_n - y_n$	$y_{n+1} = y_n + f(0.5)$
0	0	2	-2	$2 + (-2)(0.5) = 1$
1	0.5	1	-0.5	$1 + (-0.5)(0.5) = 0.75$
2	1.0	0.75	0.25	$0.75 + 0.25(0.5) = 0.875$
3	1.5	0.875	0.625	$0.875 + 0.625(0.5) = 1.1875$

So $y(2) \approx 1.1875$.

Bài tập luyện tập

The exact solution to a differential equation is known to be concave down throughout the interval used for an Euler's Method approximation, with x increasing at each step. Compared to the exact solution, the Euler approximation will:

- (A) Always overestimate (C) Match exactly
(B) Always underestimate (D) Cannot be determined

Lời giải chi tiết

If the exact solution is concave down, its tangent lines lie above the curve. Since Euler's Method steps along tangent-line directions, each step lands above the true curve, so the approximation always overestimates. (A).

Bài tập luyện tập

Given $\frac{dy}{dx} = 2y$, $y(0) = 1$, use Euler's Method with $\Delta x = 0.1$ to estimate $y(0.2)$. Show two steps.

Lời giải chi tiết

$f(x, y) = 2y$. Step 0: $f(0, 1) = 2$, so $y_1 = 1 + 2(0.1) = 1.2$ at $x_1 = 0.1$. Step 1: $f(0.1, 1.2) = 2.4$, so $y_2 = 1.2 + 2.4(0.1) = 1.44$ at $x_2 = 0.2$. Euler estimate: $y(0.2) \approx 1.44$. (The exact solution is $y = e^{2x}$, giving $y(0.2) = e^{0.4} \approx 1.4918$, showing the approximation is reasonably close but slightly low.)

Bài tập luyện tập

The general solution of $\frac{dy}{dx} = xy$ is:

(A) $y = Ce^{x^2/2}$

(C) $y = \frac{Cx^2}{2}$

(B) $y = Ce^{x^2}$

(D) $y = Ce^{2x}$

Lời giải chi tiết

Separate: $\frac{dy}{y} = x dx \Rightarrow \ln|y| = \frac{x^2}{2} + C_1 \Rightarrow y = Ce^{x^2/2}$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve the initial value problem $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{y}$, $y(0) = -4$. Express y explicitly in terms of x .

Lời giải chi tiết

Separate: $y dy = 6x^2 dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = 2x^3 + C \Rightarrow y^2 = 4x^3 + K$. Using $y(0) = -4$: $16 = 0 + K \Rightarrow K = 16$, so $y^2 = 4x^3 + 16$. Since $y(0) = -4 < 0$, take the negative branch:

$$y = -\sqrt{4x^3 + 16}.$$

Check: $\frac{dy}{dx} = -\frac{12x^2}{2\sqrt{4x^3 + 16}} = -\frac{6x^2}{\sqrt{4x^3 + 16}} = \frac{6x^2}{-\sqrt{4x^3 + 16}} = \frac{6x^2}{y}$. ✓

Bài tập luyện tập

Solve the initial value problem $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+1}$, $y(0) = 3$. Express y explicitly in terms of x .

Lời giải chi tiết

Separate: $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x+1} \Rightarrow \ln|y| = \ln|x+1| + C \Rightarrow y = A(x+1)$. Using $y(0) = 3$: $3 = A(1) \Rightarrow A = 3$, so

$$y = 3(x+1) = 3x+3.$$

Check: $\frac{dy}{dx} = 3$, and $\frac{y}{x+1} = \frac{3x+3}{x+1} = 3$. ✓

Bài tập luyện tập

Solve the initial value problem $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{3y^2 - 2y}$, $y(0) = 1$, leaving the answer in implicit form.

Lời giải chi tiết

Separate: $(3y^2 - 2y) dy = x^2 dx \Rightarrow \int (3y^2 - 2y) dy = \int x^2 dx \Rightarrow y^3 - y^2 = \frac{x^3}{3} + C$. Using $x = 0, y = 1$: $1 - 1 = 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$. Implicit solution:

$$y^3 - y^2 = \frac{x^3}{3}, \quad \text{or} \quad 3y^3 - 3y^2 - x^3 = 0.$$

Check by implicit differentiation: $9y^2 y' - 6yy' = 3x^2 \Rightarrow y'(9y^2 - 6y) = 3x^2 \Rightarrow y' = \frac{3x^2}{9y^2 - 6y} = \frac{x^2}{3y^2 - 2y}$, matching the original equation. ✓

Bài tập luyện tập

After separating variables in a differential equation, a student needs to evaluate $\int \frac{dy}{y}$. This integral equals:

(A) $\ln |y| + C$

(C) $\frac{1}{y} + C$

(B) $\frac{y^2}{2} + C$

(D) $e^y + C$

Lời giải chi tiết

$\int \frac{dy}{y} = \ln |y| + C$, by the standard antiderivative of $1/y$ (absolute value required since y may be negative). (A).

Bài tập luyện tập

A student solves $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ and writes the general solution as $y = x^2 + C$. Identify the student's error and give the correct general solution.

Lời giải chi tiết

The student appears to have ignored the $\frac{1}{y}$ factor and simply integrated $dy = -x dx$ as if the equation were $\frac{dy}{dx} = -x$, skipping the separation step entirely. The correct approach: separate as $y dy = -x dx$, then integrate: $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \Rightarrow x^2 + y^2 = K$ (where $K = 2C$) – a family of circles centered at the origin, not a family of parabolas.

Bài tập luyện tập

A colony of bacteria grows according to $\frac{dP}{dt} = kP$. Initially there are 200 bacteria, and after 4 hours there are 650. (a) Find k . (b) Find the population after 10 hours.

Lời giải chi tiết

(a) $P(t) = 200e^{kt}$. Using $P(4) = 650$: $e^{4k} = 650/200 = 3.25 \Rightarrow k = \frac{\ln 3.25}{4} \approx \frac{1.17865}{4} \approx 0.2947$ per hour.

(b) $P(10) = 200e^{10k} = 200(3.25)^{10/4} = 200(3.25)^{2.5} \approx 200(19.04) \approx 3808$ bacteria.

Bài tập luyện tập

If a radioactive substance decays according to $\frac{dy}{dt} = ky$ with $k = -0.1$ per year, its half-life is closest to:

(A) 5 years

(C) 10 years

(B) 6.93 years

(D) 14 years

Lời giải chi tiết

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{|k|} = \frac{0.6931}{0.1} \approx 6.93 \text{ years. (B).}$$

Bài tập luyện tập

A radioactive isotope has a half-life of 8 years. Starting with 50 grams, how much remains after 20 years?

Lời giải chi tiết

Number of half-lives elapsed: $20/8 = 2.5$. Remaining amount:

$$50 \left(\frac{1}{2}\right)^{2.5} = \frac{50}{2^{2.5}} = \frac{50}{4\sqrt{2}} = \frac{12.5}{\sqrt{2}} \approx 8.84 \text{ grams.}$$

Bài tập luyện tập

A metal rod at 150°C is placed in a room kept at 25°C . After 5 minutes, the rod's temperature is 100°C . (a) Find k in $\frac{dT}{dt} = k(T - 25)$. (b) Find the rod's temperature after 15 minutes.

Lời giải chi tiết

(a) $T(t) = 25 + Ae^{kt}$, $A = 150 - 25 = 125$. Using $T(5) = 100$: $75 = 125e^{5k} \Rightarrow e^{5k} = \frac{3}{5} \Rightarrow k = \frac{\ln(3/5)}{5} \approx -0.1022$ per minute.

(b) Since $15 = 3 \times 5$, $e^{15k} = (e^{5k})^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{125} = 0.216$.

$$T(15) = 25 + 125(0.216) = 25 + 27 = 52^\circ\text{C}.$$

Bài tập luyện tập

In the model $\frac{dT}{dt} = k(T - T_{amb})$, for an object that is warmer than its surroundings and cooling over time, the constant k must be:

- (A) Positive (C) Zero
(B) Negative (D) Cannot be determined

Lời giải chi tiết

Since $T > T_{amb}$, we have $T - T_{amb} > 0$; for the object to cool, $\frac{dT}{dt}$ must be negative, which requires $k < 0$. (B).

Bài tập luyện tập

For the logistic differential equation $\frac{dP}{dt} = 0.4P \left(1 - \frac{P}{2000}\right)$, verify that $P = 0$ and $P = 2000$ are equilibrium solutions, and find the population at which the growth rate is maximized, along with that maximum rate.

Lời giải chi tiết

At $P = 0$: $0.4(0)(1 - 0) = 0$. ✓ At $P = 2000$: $0.4(2000)(1 - 1) = 0$. ✓ Both are equilibria. Maximum growth occurs at $P = L/2 = 1000$; the maximum rate is $\frac{kL}{4} = \frac{0.4(2000)}{4} = 200$. Check directly: at $P = 1000$, $0.4(1000)(1 - 0.5) = 0.4(1000)(0.5) = 200$. ✓

Bài tập luyện tập

For the logistic model $\frac{dP}{dt} = 0.05P \left(1 - \frac{P}{8000}\right)$, the carrying capacity of this population is:

- (A) 0.05 (C) 4000
(B) 8000 (D) 400

Lời giải chi tiết

The carrying capacity L is the value that makes the $(1 - P/L)$ factor vanish; here $L = 8000$. (B).

Bài tập luyện tập

A population modeled by $\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{L}\right)$ currently has $P < L/2$. Is the growth rate $\frac{dP}{dt}$ currently increasing or decreasing as P increases toward $L/2$? Explain using the shape of $\frac{dP}{dt}$ as a function of P .

Lời giải chi tiết

As a function of P , $\frac{dP}{dt} = kP - \frac{k}{L}P^2$ is a downward-opening parabola in P with vertex (max-

imum) at $P = L/2$. For $P < L/2$, the parabola is still rising, so $\frac{dP}{dt}$ is **increasing** as P increases toward $L/2$ – the population's growth rate keeps speeding up until P reaches $L/2$, after which it begins to slow down.

Bài tập luyện tập

Show that the equation $x^2 + y^2 = 25$ implicitly defines a solution to $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (for $y \neq 0$), by differentiating implicitly.

Lời giải chi tiết

Differentiate both sides of $x^2 + y^2 = 25$ with respect to x : $2x + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$, which is exactly the given differential equation. ✓

Bài tập luyện tập

Which of the following differential equations is *not* separable?

(A) $\frac{dy}{dx} = xy$

(C) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$

(B) $\frac{dy}{dx} = x + y$

(D) $\frac{dy}{dx} = e^x y^2$

Lời giải chi tiết

A separable equation must factor as $g(x)h(y)$. Choices (A), (C), (D) all factor this way (xy , $x \cdot \frac{1}{y}$, $e^x \cdot y^2$), but $x + y$ is a *sum*, not a product, and cannot be split into a function of x times a function of y . (B).

Bài tập luyện tập

Solve the initial value problem $\frac{dy}{dx} = y \cos x$, $y(0) = 1$. Express y explicitly in terms of x .

Lời giải chi tiết

Separate: $\frac{dy}{y} = \cos x \, dx \Rightarrow \ln |y| = \sin x + C \Rightarrow y = Ae^{\sin x}$. Using $y(0) = 1$: $1 = Ae^0 = A \Rightarrow A = 1$, so

$$y = e^{\sin x}.$$

Check: $\frac{dy}{dx} = \cos x \cdot e^{\sin x} = y \cos x$. ✓

Bài tập luyện tập

For the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{4y}$, find the general solution and describe the family of curves it represents.

Lời giải chi tiết

Separate: $4y \, dy = x \, dx \Rightarrow 2y^2 = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow 4y^2 - x^2 = K$ (where $K = 4C$). This is a family of hyperbolas centered at the origin, opening along the y -axis (for $K > 0$) or the x -axis (for $K < 0$).

Applications of Integration

Mục tiêu Unit: Giá trị trung bình của hàm số và Định lý Giá trị Trung bình cho tích phân; chuyển động thẳng (vị trí – vận tốc – gia tốc) bằng tích phân, phân biệt độ dời (displacement) và quãng đường đi được (total distance); Định lý Biến thiên Ròng (Net Change Theorem) và các bài toán tích lũy tốc độ vào/ra (bồn nước, dữ liệu dạng bảng, hàm từng khúc); diện tích giữa hai đường cong theo biến x lẫn biến y , kể cả khi hai đường cắt nhau nhiều lần; thể tích khối có thiết diện đã biết (hình vuông, hình chữ nhật, tam giác đều, nửa hình tròn); và phương pháp đĩa (disk) cùng phương pháp vành khăn (washer) khi quay quanh trục hoành, trục tung, và các đường thẳng khác.

8.1 Average Value of a Function and the Mean Value Theorem for Integrals

8.1.1 Defining the average value of a function

For finitely many numbers $y_1, y_2, \dots, y_n$, the average is $\frac{y_1 + y_2 + \dots + y_n}{n}$. Calculus extends this idea to a function f that is continuous on a closed interval $[a, b]$, where there are infinitely many values $f(x)$ to average over. Partition $[a, b]$ into n equal subintervals of width $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ and sample f at a point x_i^* in each subinterval; the average of these n sampled values is

$$\frac{f(x_1^*) + f(x_2^*) + \dots + f(x_n^*)}{n} = \frac{1}{b-a} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x,$$

since $n = \frac{b-a}{\Delta x}$. As $n \rightarrow \infty$ the Riemann sum $\sum f(x_i^*) \Delta x$ converges to $\int_a^b f(x) dx$, which motivates the definition:

Average Value of a Function

If f is continuous (or at least integrable) on $[a, b]$, the **average value of f on $[a, b]$** is

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Equivalently, $\int_a^b f(x) dx = f_{\text{avg}} \cdot (b-a)$.

Geometric meaning. If $f(x) \geq 0$ on $[a, b]$, then $\int_a^b f(x) dx$ is the area of the region between the graph of f and the x -axis. The equation $\int_a^b f(x) dx = f_{\text{avg}}(b-a)$ says that f_{avg} is exactly the **height of the rectangle with base $[a, b]$ that has the same area** as that region — a single flat height that “levels out” all the peaks and valleys of f while preserving the total accumulated area.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Giá trị trung bình của hàm số $f_{\text{avg}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ là phép mở rộng của khái niệm “trung bình cộng” sang trường hợp có vô số giá trị (một cho mỗi điểm x trong $[a, b]$), thay vì chỉ hữu hạn số hạng. Về mặt hình học, đây chính là **chiều cao của hình chữ nhật** có đáy $[a, b]$ sao cho

diện tích hình chữ nhật đó bằng đúng diện tích miền giữa đồ thị f và trục hoành trên $[a, b]$ — nói cách khác, ta "san phẳng" các đoạn lên xuống của đồ thị thành một mức chiều cao không đổi mà vẫn giữ nguyên tổng diện tích.

8.1.2 The Mean Value Theorem for Integrals

Because f_{avg} is defined as an average of the continuous function's own values, it is natural to ask whether f actually *attains* this average value somewhere on $[a, b]$. The answer is yes, guaranteed by continuity.

Mean Value Theorem for Integrals

If f is continuous on $[a, b]$, then there exists at least one number c in $[a, b]$ such that

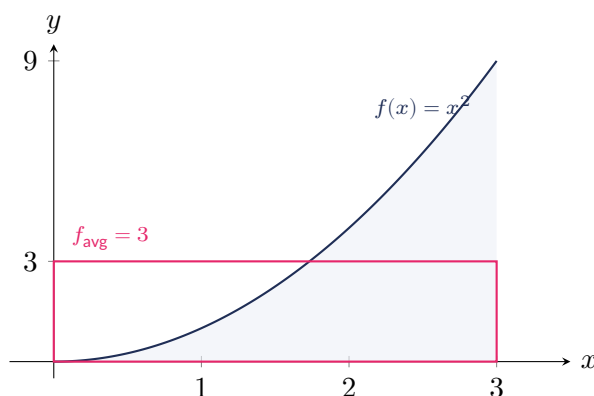
$$f(c) = f_{\text{avg}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx, \quad \text{equivalently} \quad \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Sketch of proof: by the Extreme Value Theorem, f attains a minimum m and maximum M on $[a, b]$, so $m \leq f(x) \leq M$ for all $x \in [a, b]$. Integrating this inequality over $[a, b]$ gives $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$, i.e. $m \leq f_{\text{avg}} \leq M$. Since f is continuous, the Intermediate Value Theorem guarantees some $c \in [a, b]$ with $f(c) = f_{\text{avg}}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý Giá trị Trung bình cho tích phân (MVT for Integrals) khẳng định rằng nếu f liên tục trên $[a, b]$ thì tồn tại ít nhất một điểm c sao cho $f(c)$ bằng đúng giá trị trung bình f_{avg} — nghĩa là hàm số thực sự "đạt được" giá trị trung bình của chính nó tại một thời điểm nào đó, chứ không chỉ là một con số trừu tượng. Ý tưởng chứng minh: vì f liên tục nên bị chặn bởi giá trị nhỏ nhất m và lớn nhất M trên $[a, b]$; lấy tích phân bất đẳng thức $m \leq f(x) \leq M$ suy ra f_{avg} cũng nằm giữa m và M ; theo Định lý Giá trị Trung gian (IVT), f phải đạt giá trị f_{avg} tại một điểm c nào đó.



The shaded region under $f(x) = x^2$ on $[0, 3]$ and the pink rectangle of height $f_{\text{avg}} = 3$ and base 3 have exactly the same area, 9.

Ví dụ mẫu · Average value and the guaranteed value of c

Let $f(x) = x^2$ on $[0, 3]$. Find the average value of f on this interval, and find the value(s) of c guaranteed by the Mean Value Theorem for Integrals.

Average value:

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{3-0} \int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{3} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{27}{3} = \frac{1}{3} \cdot 9 = 3.$$

Finding c : we need $f(c) = 3$, i.e. $c^2 = 3$, so $c = \pm\sqrt{3}$. Only $c = \sqrt{3} \approx 1.732$ lies in $[0, 3]$ (the negative root is outside the interval), so the theorem is satisfied by $\boxed{c = \sqrt{3}}$.

(!) Lỗi thường gặp: Đừng nhầm giá trị trung bình f_{avg} với trung bình cộng của hai giá trị đầu mút $\frac{f(a)+f(b)}{2}$ — hai đại lượng này chỉ trùng nhau khi f là hàm bậc nhất (tuyến tính). Với $f(x) = x^2$ trên $[0, 3]$: $\frac{f(0)+f(3)}{2} = \frac{0+9}{2} = 4.5$, hoàn toàn khác với $f_{\text{avg}} = 3$ tính đúng theo công thức tích phân. Một lỗi khác thường gặp là **quên chia cho** $(b-a)$ — nhớ rằng $\int_a^b f(x) dx$ chỉ là diện tích (hoặc diện tích có dấu), còn giá trị trung bình luôn cần chia thêm cho độ dài khoảng $b-a$.

8.2 Motion Along a Line

8.2.1 Position, velocity, and acceleration as integrals

If a particle moves along a line with acceleration $a(t)$ and velocity $v(t)$, both continuous, the Net Change Theorem (Section 3) lets us reconstruct velocity from acceleration and position from velocity:

Reconstructing motion by integration

$$v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, \quad s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau.$$

That is: velocity at time t equals the initial velocity plus the net accumulated change in velocity (the integral of acceleration); position at time t equals the initial position plus the net accumulated change in position (the integral of velocity).

Two very different quantities can be extracted from $v(t)$ over an interval $[a, b]$:

- **Net displacement** (signed change in position) $= \int_a^b v(t) dt = s(b) - s(a)$. This allows positive and negative contributions (forward and backward motion) to cancel.
- **Total distance traveled** $= \int_a^b |v(t)| dt$. This treats every interval of motion as a positive contribution regardless of direction, so backward motion *adds* to the total rather than canceling forward motion.

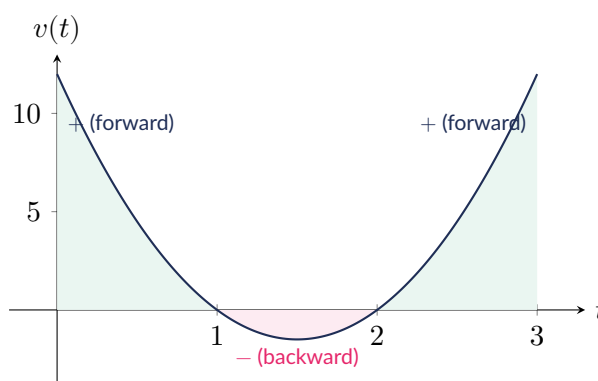
When $v(t)$ does not change sign on $[a, b]$, the two quantities are equal (up to sign). When $v(t)$ changes sign, they differ, and computing total distance requires splitting the interval at every zero of $v(t)$, integrating v (not $|v|$) on each piece, and adding the *absolute values* of those pieces.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vận tốc $v(t)$ được dựng lại từ **gia tốc** $a(t)$ bằng tích phân, và **vị trí** $s(t)$ được dựng lại từ vận tốc theo đúng cách tương tự — đây chính là ứng dụng trực tiếp của Định lý Biến thiên Rộng. Điểm mấu chốt cần phân biệt: **độ dời (displacement)** $= \int_a^b v(t) dt$ là sự thay đổi vị trí có dấu (có thể dương, âm, hoặc bằng 0 nếu vật quay về điểm xuất phát), trong khi **quãng đường đi được**

(total distance) $= \int_a^b |v(t)| dt$ luôn không âm và luôn *cộng dồn* mọi đoạn chuyển động, bất kể chiều. Khi vận tốc đổi dấu trên đoạn đang xét, hai đại lượng này chắc chắn khác nhau.



$v(t) = 6t^2 - 18t + 12$ on $[0, 3]$: mint-shaded regions (where $v > 0$) and the pink-shaded dip (where $v < 0$) all contribute positively to total distance, but the pink region subtracts from net displacement.

Ví dụ mẫu · Displacement vs. total distance

A particle moves along a line with velocity $v(t) = 6t^2 - 18t + 12$ (meters per second) for $0 \leq t \leq 3$. Find (a) the particle's net displacement, and (b) the total distance it travels, on $[0, 3]$.

Step 1 — locate direction changes. Factor: $v(t) = 6(t^2 - 3t + 2) = 6(t - 1)(t - 2)$, so $v(t) = 0$ at $t = 1$ and $t = 2$. Testing signs: $v(0) = 12 > 0$, $v(1.5) = 6(0.25)(-0.5) = -0.75 < 0$, $v(2.5) = 6(1.5)(0.5) = 4.5 > 0$. So $v > 0$ on $[0, 1)$, $v < 0$ on $(1, 2)$, $v > 0$ on $(2, 3]$.

Step 2 — an antiderivative. $\int v(t) dt = 2t^3 - 9t^2 + 12t = P(t)$. Evaluate: $P(0) = 0$, $P(1) = 2 - 9 + 12 = 5$, $P(2) = 16 - 36 + 24 = 4$, $P(3) = 54 - 81 + 36 = 9$.

(a) Net displacement $= \int_0^3 v(t) dt = P(3) - P(0) = 9 - 0 = \boxed{9 \text{ meters}}$.

(b) Total distance: sum the absolute value of the net change on each monotonic-sign piece:

$$|P(1) - P(0)| + |P(2) - P(1)| + |P(3) - P(2)| = |5 - 0| + |4 - 5| + |9 - 4| = 5 + 1 + 5 = \boxed{11 \text{ meters}}.$$

Notice $9 \neq 11$: on $(1, 2)$ the particle backtracks 1 meter, which *reduces* net displacement but still *adds* to total distance.

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi cực kỳ phổ biến: tính $\int_a^b v(t) dt$ rồi coi đó luôn là quãng đường đi được. Điều này **chỉ đúng khi** $v(t)$ **không đổi dấu** trên $[a, b]$. Nếu $v(t)$ đổi dấu, $\int_a^b v(t) dt$ chỉ cho **độ dời** (các đoạn tiến và lùi triệt tiêu lẫn nhau); muốn tính **quãng đường**, bắt buộc phải: (1) tìm mọi nghiệm của $v(t) = 0$ trong $[a, b]$; (2) tách tích phân tại các nghiệm đó; (3) lấy **trị tuyệt đối** của từng mảnh rồi cộng lại — tức là tính $\int_a^b |v(t)| dt$, không phải $\left| \int_a^b v(t) dt \right|$ (hai biểu thức này nói chung khác nhau).

8.3 Net Change and Accumulation in Applied Contexts

8.3.1 The Net Change Theorem

The Fundamental Theorem of Calculus, applied to a rate function f' , gives one of the most useful results in applied calculus:

Net Change Theorem

If F has a continuous derivative $F' = f$ on $[a, b]$, then

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

In words: **the definite integral of a rate of change equals the total (net) change in the quantity itself** over that interval. Whatever F represents — position, volume, population, revenue — integrating its **rate** F' over $[a, b]$ recovers exactly how much F changed, without needing to know F 's actual value at either endpoint (only the change).

This single idea unifies displacement-from-velocity (Section 2) with a huge range of applied "accumulation" problems: whenever a quantity $Q(t)$ changes at some given rate $R(t) = Q'(t)$, the net change in Q over $[a, b]$ is $\int_a^b R(t) dt$, and the value at a later time is $Q(b) = Q(a) + \int_a^b R(t) dt$.

8.3.2 Rate in minus rate out

A common applied setting has a quantity (water in a tank, cars in a parking garage, chemical in a solution) governed by two competing rates: an **inflow rate** $R_{\text{in}}(t)$ and an **outflow rate** $R_{\text{out}}(t)$. The **net rate of change** is $R_{\text{net}}(t) = R_{\text{in}}(t) - R_{\text{out}}(t)$, and the Net Change Theorem gives

$$Q(b) = Q(a) + \int_a^b [R_{\text{in}}(t) - R_{\text{out}}(t)] dt.$$

Since $Q'(t) = R_{\text{net}}(t)$, the usual first-derivative-test logic applies directly to Q : Q is **increasing** exactly where $R_{\text{net}}(t) > 0$ (inflow exceeds outflow) and **decreasing** where $R_{\text{net}}(t) < 0$. A local maximum of Q occurs where R_{net} changes from positive to negative; a local minimum occurs where R_{net} changes from negative to positive.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý Biến thiên Ròng (Net Change Theorem) là cách phát biểu lại FTC theo ngôn ngữ ứng dụng: tích phân của **tốc độ thay đổi** trên $[a, b]$ chính là **tổng lượng thay đổi** của đại lượng gốc, bất kể đại lượng đó là gì (thể tích nước, dân số, doanh thu...). Trong bài toán "tốc độ vào trừ tốc độ ra" ($R_{\text{in}} - R_{\text{out}}$), lượng tích lũy $Q(t)$ tăng khi tốc độ ròng dương (vào nhiều hơn ra) và giảm khi tốc độ ròng âm — vì vậy cực trị của $Q(t)$ xảy ra đúng tại thời điểm tốc độ ròng **đổi dấu**, hoàn toàn tương tự cách tìm cực trị bằng đạo hàm cấp một.

Ví dụ mẫu · A water tank with competing inflow and outflow

Water flows into a tank at rate $R_{\text{in}}(t) = 20 - 2t$ liters per minute and is pumped out at a constant rate $R_{\text{out}}(t) = 8$ liters per minute, for $0 \leq t \leq 10$ minutes. At $t = 0$ the tank holds 50 liters. (a) At what time is the volume of water in the tank at a maximum, and what is that maximum volume? (b) How much water is in the tank at $t = 10$?

Net rate: $R_{\text{net}}(t) = (20 - 2t) - 8 = 12 - 2t$. This is positive (tank filling) for $t < 6$ and negative (tank draining) for $t > 6$, so the volume $Q(t)$ increases then decreases — a maximum occurs at $t = 6$ minutes, where the net rate switches from positive to negative.

(a) **Maximum volume:**

$$Q(6) = 50 + \int_0^6 (12 - 2t) dt = 50 + \left[12t - t^2 \right]_0^6 = 50 + (72 - 36) = 50 + 36 = \boxed{86 \text{ liters}}.$$

(b) **Volume at $t = 10$:**

$$Q(10) = 50 + \int_0^{10} (12 - 2t) dt = 50 + \left[12t - t^2 \right]_0^{10} = 50 + (120 - 100) = 50 + 20 = \boxed{70 \text{ liters}}.$$

The tank fills from 50 up to a peak of 86 liters at $t = 6$, then drains back down to 70 liters by $t = 10$ – consistent with $70 < 86$ but still above the starting volume of 50.

8.3.3 Rates given by a table or a piecewise function

On the AP exam, a rate is often given not as a clean formula but as a **table of values** at unevenly spaced times, or as a **piecewise function**. For tabular data, the definite integral (total accumulated change) is estimated using a **trapezoidal sum**: on each subinterval $[t_i, t_{i+1}]$, approximate the area under the rate curve by a trapezoid,

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} R(t) dt \approx (t_{i+1} - t_i) \cdot \frac{R(t_i) + R(t_{i+1})}{2},$$

and sum these trapezoids across all subintervals – the subintervals do *not* need to be equally spaced. For a piecewise rate function, split the integral at every breakpoint and integrate each piece with its own formula.

Ví dụ mẫu · Rate given by a table, and rate given piecewise

(a) **Table.** During a 6-hour storm, the rate at which water flows into a retention pond, $R(t)$ (in thousands of liters per hour), is recorded at selected times:

t (hours)	0	2	5	7	8
$R(t)$ (thousand L/hr)	3	9	15	6	2

Use a trapezoidal sum with these four subintervals to estimate $\int_0^8 R(t) dt$, the total inflow (in thousand liters) over the 8 hours.

$$\begin{aligned} \int_0^8 R(t) dt &\approx (2-0) \cdot \frac{3+9}{2} + (5-2) \cdot \frac{9+15}{2} + (7-5) \cdot \frac{15+6}{2} + (8-7) \cdot \frac{6+2}{2} \\ &= 2(6) + 3(12) + 2(10.5) + 1(4) = 12 + 36 + 21 + 4 = \boxed{73 \text{ thousand liters}}. \end{aligned}$$

(b) **Piecewise.** A water tower's net fill rate (in thousand gallons per minute) is

$$R(t) = \begin{cases} 5, & 0 \leq t < 3 \\ -2t + 11, & 3 \leq t \leq 8 \end{cases}$$

(Notice R is continuous at $t = 3$: both pieces give $R(3) = 5$.) Find the total net change in the tower's volume over $[0, 8]$.

$$\begin{aligned} \int_0^8 R(t) dt &= \int_0^3 5 dt + \int_3^8 (-2t + 11) dt = [5t]_0^3 + \left[-t^2 + 11t \right]_3^8 \\ &= 15 + [(-64 + 88) - (-9 + 33)] = 15 + (24 - 24) = \boxed{15 \text{ thousand gallons}}. \end{aligned}$$

The second piece happens to contribute a net change of exactly 0 (the rate decreases linearly from 5 at $t = 3$ down through 0 at $t = 5.5$ to -5 at $t = 8$, and the positive and negative areas cancel), so the entire net gain comes from the first three minutes.

8.4 Area Between Two Curves

8.4.1 Integrating with respect to x

If $f(x) \geq g(x)$ on $[a, b]$, the vertical distance between the two curves at a given x is $f(x) - g(x)$. Summing these thin vertical strips of width dx over $[a, b]$ gives the area of the region enclosed between the curves:

Area Between Curves — with respect to x

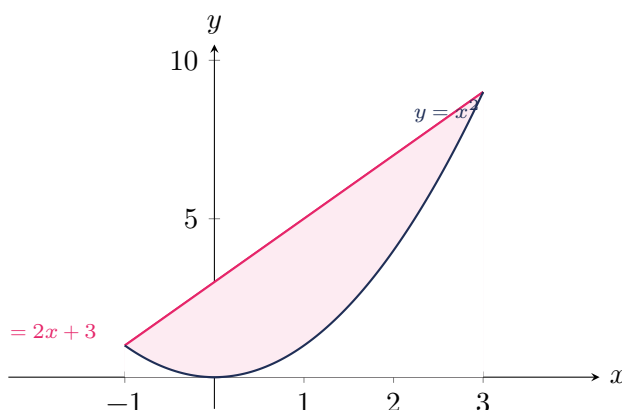
$$A = \int_a^b [\text{top}(x) - \text{bottom}(x)] dx,$$

where $\text{top}(x)$ and $\text{bottom}(x)$ are whichever of the two functions has the larger, resp. smaller, y -value on (a, b) . If the two curves are given without explicit bounds, the bounds a and b are usually their **points of intersection**, found by solving $f(x) = g(x)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Diện tích giữa hai đường cong theo biến x luôn là "đường trên trừ đường dưới, rồi lấy tích phân": $A = \int_a^b [\text{top}(x) - \text{bottom}(x)] dx$. Bước quan trọng nhất — và dễ bị bỏ sót nhất — là **tìm giao điểm** của hai đường trước khi thiết lập tích phân, vì các giao điểm chính là cận a, b (trừ khi đề bài đã cho sẵn cận). Sau khi có cận, cần kiểm tra (bằng cách thử một điểm bất kỳ nằm giữa a và b) xem đường nào thực sự nằm trên để đặt đúng thứ tự trừ.



The shaded region between $y = 2x + 3$ (top) and $y = x^2$ (bottom), bounded by their intersection points $x = -1$ and $x = 3$.

Ví dụ mẫu · Area between a parabola and a line

Find the area of the region enclosed by $y = x^2$ and $y = 2x + 3$.

Step 1 — intersections: $x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$.

Step 2 — which curve is on top? Test $x = 0$: $y = 2(0) + 3 = 3$ versus $y = 0^2 = 0$. So the line $y = 2x + 3$ is on top throughout $(-1, 3)$.

Step 3 — integrate:

$$A = \int_{-1}^3 [(2x + 3) - x^2] dx = \left[x^2 + 3x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^3.$$

At $x = 3$: $9 + 9 - 9 = 9$. At $x = -1$: $1 - 3 - \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - 3 + \frac{1}{3} = -\frac{5}{3}$.

$$A = 9 - \left(-\frac{5}{3}\right) = 9 + \frac{5}{3} = \frac{27}{3} + \frac{5}{3} = \boxed{\frac{32}{3}}.$$

(!) Lỗi thường gặp: Đừng thiết lập tích phân diện tích trước khi tìm giao điểm. Nếu đề không cho sẵn cận a, b , hãy giải $f(x) = g(x)$ trước tiên — đây chính là cận tích phân. Lỗi thứ hai thường gặp: đặt sai thứ tự trừ (lấy "đường dưới trừ đường trên"), khiến kết quả ra âm. Nếu tính ra diện tích âm, đó là dấu hiệu rõ ràng cần đảo lại thứ tự hai hàm — luôn thử một giá trị x ở giữa khoảng $[a, b]$ để xác định chắc chắn đường nào thực sự nằm trên trước khi viết tích phân.

8.4.2 Integrating with respect to y

Some regions are far easier to describe as functions of y — bounded left and right by curves $x = p(y)$ and $x = q(y)$ — than as functions of x . This happens, for instance, whenever a curve like $x = y^2$ is not a function of x (it fails the vertical line test) but is a function of y . The same idea applies with the roles of the axes swapped:

Area Between Curves — with respect to y

$$A = \int_c^d [\text{right}(y) - \text{left}(y)] dy,$$

where $\text{right}(y)$ and $\text{left}(y)$ are whichever curve has the larger, resp. smaller, x -value, and $[c, d]$ is the y -range of the region (again typically found from the curves' intersection points, but now solved for y).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi miền cần tính diện tích bị chặn **trái-phải** bởi hai đường cong (thay vì trên-dưới), việc lấy tích phân theo y thường đơn giản hơn nhiều so với cố gắng lấy tích phân theo x (nhất là khi một trong hai đường không phải là hàm số của x , ví dụ $x = y^2$). Công thức hoàn toàn tương tự, chỉ đổi vai trò: $A = \int_c^d [\text{right}(y) - \text{left}(y)] dy$, với cận c, d tìm được bằng cách giải giao điểm theo biến y .

Ví dụ mẫu · Area using horizontal strips

Find the area of the region enclosed by $x = y^2$ and $x = y + 2$.

Step 1 — intersections (solve for y): $y^2 = y + 2 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow (y - 2)(y + 1) = 0 \Rightarrow y = -1, 2$.

Step 2 — which curve is to the right? Test $y = 0$: $x = y + 2 = 2$ versus $x = y^2 = 0$. So $x = y + 2$ is to the right (larger x) throughout $(-1, 2)$.

Step 3 — integrate with respect to y :

$$A = \int_{-1}^2 [(y + 2) - y^2] dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2.$$

At $y = 2$: $2 + 4 - \frac{8}{3} = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$. At $y = -1$: $\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} = -\frac{7}{6}$.

$$A = \frac{10}{3} - \left(-\frac{7}{6}\right) = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \boxed{\frac{27}{6} = \frac{9}{2}}.$$

Attempting this same region as an integral with respect to x would require splitting into two pieces (since $x = y^2$ is not a single function of x on the whole region) – integrating with respect to y avoids that split entirely.

8.4.3 Regions where the curves cross more than once

If $f(x) - g(x)$ changes sign more than once on the interval of interest, the "top" and "bottom" curves swap roles partway through, and a single integral of $f(x) - g(x)$ over the whole interval would let positive and negative pieces cancel – giving the wrong (net signed) area instead of the true enclosed area. The fix is the same idea used for total distance in Section 2: split the interval at every crossing point, and add the absolute value of each piece.

Area with multiple crossings

If f and g cross at $x = a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, the total enclosed area is

$$A = \sum_{i=1}^n \left| \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x) - g(x)] dx \right| = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi hai đường cong cắt nhau **nhều hơn một lần** trong đoạn đang xét, hàm hiệu $f(x) - g(x)$ sẽ đổi dấu tại mỗi giao điểm – nghĩa là "đường trên" và "đường dưới" hoán đổi vai trò cho nhau. Nếu chỉ lấy một tích phân duy nhất trên cả đoạn mà không tách nhỏ, các phần diện tích dương và âm sẽ triệt tiêu lẫn nhau, cho ra **diện tích có dấu (net area)** thay vì tổng diện tích thực sự bị bao bởi hai đường. Cách xử lý đúng: tìm **tất cả** giao điểm, tách tích phân tại từng giao điểm, lấy trị tuyệt đối của mỗi mảnh rồi cộng lại – hoàn toàn giống logic tính quãng đường đi được từ vận tốc đổi dấu.

Ví dụ mẫu · Two curves that cross three times

Find the total area of the region(s) enclosed between $f(x) = x^3 - 3x$ and $g(x) = x$.

Step 1 – find all crossings: $x^3 - 3x = x \Rightarrow x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = -2, 0, 2$. Three crossing points, so **two** separate regions.

Step 2 – determine top/bottom on each piece. Let $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 - 4x$. Test $x = -1$: $h(-1) = -1 + 4 = 3 > 0$, so $f > g$ on $(-2, 0)$. Test $x = 1$: $h(1) = 1 - 4 = -3 < 0$, so $g > f$ on $(0, 2)$.

Step 3 – integrate each piece separately. An antiderivative of $h(x) = x^3 - 4x$ is $H(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$, with $H(-2) = 4 - 8 = -4$, $H(0) = 0$, $H(2) = 4 - 8 = -4$.

$$\int_{-2}^0 (f - g) dx = H(0) - H(-2) = 0 - (-4) = 4,$$

$$\int_0^2 (g - f) dx = -[H(2) - H(0)] = -(-4 - 0) = 4.$$

Step 4 – total area:

$$A = 4 + 4 = \boxed{8}.$$

8.5 Volumes with Known Cross-Sections

8.5.1 Squares and rectangles

Some solids are not solids of revolution at all: instead, we are told the shape of every **cross-section** perpendicular to a given axis, and that shape's size is built from the distance between two bounding curves. If $A(x)$ denotes the area of the cross-section at position x , slicing the solid into thin slabs of thickness dx and summing their volumes gives:

Volume by Known Cross-Sections

$$V = \int_a^b A(x) dx.$$

If the cross-sections perpendicular to the x -axis are **squares** whose side length equals the distance $s(x)$ between two bounding curves, then $A(x) = [s(x)]^2$. If the cross-sections are **rectangles** whose height is some fixed multiple k of the base $s(x)$ (e.g. "height twice the base"), then $A(x) = k[s(x)]^2$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán **thiết diện đã biết (known cross-sections)**, khối không phải là khối tròn xoay — thay vào đó, mỗi lát cắt vuông góc với một trục có hình dạng cho trước (vuông, chữ nhật, tam giác, nửa hình tròn...) với kích thước xây dựng từ **khoảng cách giữa hai đường cong biên**. Luôn bắt đầu bằng cách xác định độ dài cạnh đáy $s(x)$ (khoảng cách giữa hai đường), sau đó suy ra diện tích thiết diện $A(x)$ theo đúng công thức hình học của hình đó, rồi lấy tích phân $V = \int_a^b A(x) dx$ — hoàn toàn không có π trong công thức trừ khi hình thiết diện là hình tròn hoặc nửa hình tròn.

Ví dụ mẫu · Square cross-sections

The base of a solid is the region between $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$ on $[0, 1]$. Cross-sections perpendicular to the x -axis are squares whose side length equals the distance between the two curves. Find the volume of the solid.

Side length: $s(x) = \sqrt{x} - x^2$ (valid since $\sqrt{x} \geq x^2$ on $[0, 1]$).

Cross-sectional area: $A(x) = (\sqrt{x} - x^2)^2 = x - 2x^{5/2} + x^4$.

Volume:

$$V = \int_0^1 (x - 2x^{5/2} + x^4) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{4}{7}x^{7/2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{4}{7} + \frac{1}{5}.$$

Common denominator 70: $\frac{35}{70} - \frac{40}{70} + \frac{14}{70} = \boxed{\frac{9}{70}}.$

8.5.2 Equilateral triangles and semicircles

The same method applies to any cross-sectional shape, as long as we can express that shape's area in terms of a single length taken from the bounding curves. Two shapes appear constantly on the AP exam:

Deriving the area formulas

Equilateral triangle with side length s : drop an altitude to split it into two 30° – 60° – 90° triangles, giving height $h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$, so

$$A_{\triangle} = \frac{1}{2} \cdot s \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}s = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2.$$

Semicircle whose *diameter* equals the base length s (so radius $r = \frac{s}{2}$):

$$A_{\text{semi}} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8}s^2.$$

Cross-section shape	Governing length	Area formula $A(x)$
Square	side $s(x)$	$[s(x)]^2$
Rectangle, height = $k \times$ base	base $s(x)$	$k[s(x)]^2$
Equilateral triangle	side $s(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{4}[s(x)]^2$
Semicircle (diameter = $s(x)$)	diameter $s(x)$	$\frac{\pi}{8}[s(x)]^2$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với tam giác đều cạnh s , hạ đường cao chia thành hai tam giác vuông 30° – 60° – 90° để suy ra chiều cao $h = \frac{\sqrt{3}}{2}s$, từ đó $A_{\triangle} = \frac{\sqrt{3}}{4}s^2$. Với nửa hình tròn, điểm dễ nhầm nhất là: độ dài $s(x)$ lấy được từ hai đường cong biên thường đóng vai trò là **đường kính** (không phải bán kính!) của nửa hình tròn, nên bán kính thực sự là $r = s/2$, và diện tích nửa hình tròn là $A_{\text{semi}} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{\pi}{8}s^2$ – chứ không phải $\frac{1}{2}\pi s^2$.

Ví dụ mẫu · Equilateral-triangle cross-sections

The base of a solid is the region under $y = \sqrt{x}$ from $x = 0$ to $x = 4$ (bounded below by the x -axis). Cross-sections perpendicular to the x -axis are equilateral triangles with side length equal to $\sqrt{x}$. Find the volume.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{x})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}x, \quad V = \int_0^4 \frac{\sqrt{3}}{4}x \, dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 8 = \boxed{2\sqrt{3}}.$$

Ví dụ mẫu · Semicircular cross-sections

The base of a solid is the region under $y = 4 - x^2$ from $x = -2$ to $x = 2$ (where the parabola meets the x -axis). Cross-sections perpendicular to the x -axis are semicircles whose diameter equals the height of the base region, $4 - x^2$. Find the volume.

Radius: $r(x) = \frac{4 - x^2}{2}$, so $A(x) = \frac{\pi}{8}(4 - x^2)^2$.

Expand: $(4 - x^2)^2 = 16 - 8x^2 + x^4$.

$$V = \frac{\pi}{8} \int_{-2}^2 (16 - 8x^2 + x^4) \, dx = \frac{\pi}{8} \left[16x - \frac{8x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2.$$

By symmetry, evaluate at $x = 2$ and double: $16(2) - \frac{8(8)}{3} + \frac{32}{5} = 32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}$. Common

denominator 15: $\frac{480}{15} - \frac{320}{15} + \frac{96}{15} = \frac{256}{15}$; doubling gives $\frac{512}{15}$.

$$V = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{512}{15} = \boxed{\frac{64\pi}{15}}.$$

8.6 The Disk Method

8.6.1 Volumes of revolution by disks

When a plane region is revolved 360° about a line (the **axis of revolution**), it sweeps out a three-dimensional solid. If the region is bounded on one side by that axis (no gap between the region and the axis), each cross-section perpendicular to the axis is a solid circular **disk**, and the known-cross-sections formula with $A(x) = \pi[R(x)]^2$ becomes:

Disk Method

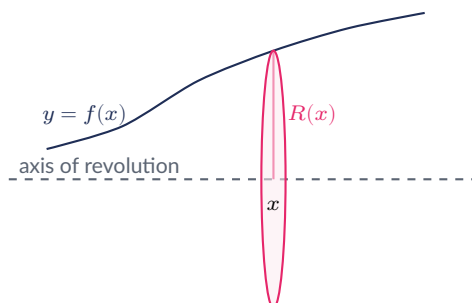
$$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx,$$

where $R(x)$ is the **radius** of the disk at position x — the perpendicular distance from the axis of revolution to the bounding curve. When revolving about the x -axis, $R(x) = f(x)$ (the curve's own y -value). When revolving about the y -axis (integrating in y), $R(y)$ is the curve's x -value. When revolving about **any other horizontal or vertical line** $y = k$ or $x = k$, the radius must be recomputed as the *distance from that line to the curve*: $R(x) = f(x) - k$ (or $k - f(x)$, whichever is positive) for a horizontal axis $y = k$, and analogously for a vertical axis $x = k$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương pháp **đĩa (disk)** áp dụng khi miền được quay quanh một trục và **chạm trực tiếp** vào trục đó (không có khoảng hở) — mỗi lát cắt vuông góc với trục là một hình tròn đặc, bán kính $R(x)$ chính là khoảng cách từ trục quay đến đường cong biên. Khi quay quanh trục hoành, $R(x)$ đơn giản là $f(x)$; khi quay quanh trục tung, $R(y)$ là giá trị x của đường cong. Nhưng khi quay quanh một đường thẳng **khác** (ví dụ $y = k$ hoặc $x = k$), bắt buộc phải **tính lại bán kính là khoảng cách đến đường đó** — không được dùng thẳng giá trị $f(x)$ như thể trục vẫn là trục hoành.



Side view of a solid of revolution about the axis (dashed): the vertical segment of length $R(x)$ sweeps out the circular disk (shown edge-on as a thin ellipse) at position x .

Ví dụ mẫu · Disk method about the x -axis

The region under $y = \sqrt{x}$ from $x = 0$ to $x = 4$ is revolved about the x -axis. Find the volume of the resulting solid.

Since the region touches the x -axis directly, $R(x) = \sqrt{x}$, so $[R(x)]^2 = x$.

$$V = \pi \int_0^4 x \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi \cdot \frac{16}{2} = \boxed{8\pi}.$$

Ví dụ mẫu · Disk method about the y -axis

The region bounded by $x = y^2$, the y -axis, and $y = 2$ is revolved about the y -axis. Find the volume.

Here we integrate with respect to y , and since the region touches the y -axis directly, $R(y) = y^2$, so $[R(y)]^2 = y^4$.

$$V = \pi \int_0^2 y^4 \, dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^2 = \pi \cdot \frac{32}{5} = \boxed{\frac{32\pi}{5}}.$$

Ví dụ mẫu · Disk method about a line other than an axis

The region bounded above by $y = \sqrt{x}$, below by the line $y = -1$, and on the right by $x = 4$ is revolved about the line $y = -1$. Find the volume.

The region's lower boundary is exactly the axis of revolution $y = -1$, so this is a genuine disk (no gap). The radius is the **vertical distance from $y = -1$ up to the curve**:

$$R(x) = \sqrt{x} - (-1) = \sqrt{x} + 1.$$

$$[R(x)]^2 = (\sqrt{x} + 1)^2 = x + 2\sqrt{x} + 1.$$

$$V = \pi \int_0^4 (x + 2\sqrt{x} + 1) \, dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} + \frac{4}{3}x^{3/2} + x \right]_0^4.$$

$$\text{At } x = 4: \frac{16}{2} + \frac{4}{3}(8) + 4 = 8 + \frac{32}{3} + 4 = 12 + \frac{32}{3} = \frac{36}{3} + \frac{32}{3} = \frac{68}{3}.$$

$$V = \boxed{\frac{68\pi}{3}}.$$

Note how different this is from revolving the same curve about the x -axis: shifting the axis down to $y = -1$ makes every radius 1 unit longer, and because the radius gets squared, that shift changes the volume by far more than a simple constant.

(!) Lỗi thường gặp: Khi trục quay **không phải** là trục hoành hay trục tung, bán kính $R(x)$ **không còn bằng** $f(x)$ nữa — đây là lỗi sai bán kính phổ biến nhất trong các bài toán thể tích. Bán kính luôn phải là **khoảng cách từ trục quay đến đường cong**: nếu quay quanh $y = k$ và đường cong nằm phía trên k , thì $R(x) = f(x) - k$; nếu đường cong nằm phía dưới k , thì $R(x) = k - f(x)$. Tương tự với trục dọc $x = k$: $R(y) = g(y) - k$ hoặc $k - g(y)$ tùy vị trí. Luôn vẽ (hoặc hình dung) một lát cắt và đo khoảng cách thực tế từ trục đến đường cong trước khi viết công thức — tuyệt đối không mặc định dùng $f(x)$ hay $g(y)$ một cách máy móc.

8.7 The Washer Method

8.7.1 Volumes of revolution with a gap

If the region being revolved does *not* touch the axis of revolution — there is a gap between the axis and the nearer boundary curve — each cross-section is not a solid disk but an **annulus** (a washer): a disk with a smaller disk removed from its center.

Washer Method

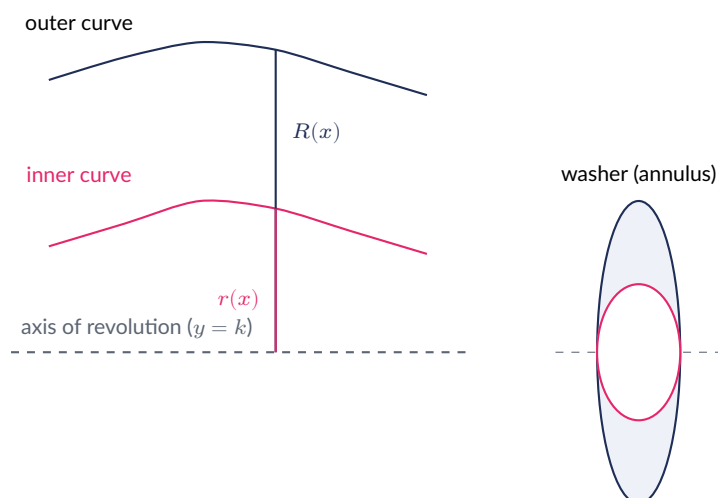
$$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx,$$

where $R(x)$ is the **outer radius** (distance from the axis to the *farther* bounding curve) and $r(x)$ is the **inner radius** (distance from the axis to the *nearer* bounding curve). As with the disk method, if the axis of revolution is not the x -axis or y -axis, both $R(x)$ and $r(x)$ must be recomputed as distances to that specific line.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương pháp **vành khăn (washer)** dùng khi miền được quay **không chạm** vào trục quay — luôn có một "lỗ hổng" ở giữa. Mỗi lát cắt lúc này là một hình vành khăn (đĩa lớn trừ đĩa nhỏ), với $R(x)$ là bán kính **ngoài** (khoảng cách từ trục đến đường cong xa trục hơn) và $r(x)$ là bán kính **trong** (khoảng cách đến đường cong gần trục hơn). Thể tích luôn là $V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$ — bình phương **từng bán kính riêng biệt** rồi mới trừ, tuyệt đối không được trừ hai bán kính trước rồi mới bình phương.



Side view: outer radius $R(x)$ reaches the farther curve, inner radius $r(x)$ reaches the nearer curve. The washer (shown edge-on, right) is a disk of radius $R(x)$ with a hole of radius $r(x)$ removed.

Ví dụ mẫu · Washer method about the x -axis

The region between $y = \sqrt{x}$ and $y = x^2$ on $[0, 1]$ is revolved about the x -axis. Find the volume.

On $[0, 1]$, $\sqrt{x} \geq x^2$, so the outer radius is $R(x) = \sqrt{x}$ (farther from the x -axis) and the inner radius is $r(x) = x^2$ (nearer, since the region does not include the strip between $y = 0$ and $y = x^2$).

$$V = \pi \int_0^1 [(\sqrt{x})^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^1 (x - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) = \pi \cdot \frac{3}{10} = \boxed{\frac{3\pi}{10}}.$$

Ví dụ mẫu · Washer method about a line other than an axis

The region bounded by $y = x^2$ and $y = 2x$ is revolved about the line $y = 5$. Find the volume.

Intersections: $x^2 = 2x \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$.

Radii, measured from $y = 5$: on $(0, 2)$, $2x \geq x^2$ (test $x = 1$: $2 > 1$), so $y = 2x$ is the *upper* curve, closer to the axis $y = 5$; $y = x^2$ is the *lower* curve, farther from the axis. Since distance is measured *down* from $y = 5$, the farther (lower) curve gives the larger radius:

$$R(x) = 5 - x^2 \quad (\text{outer, to the lower curve}), \quad r(x) = 5 - 2x \quad (\text{inner, to the upper curve}).$$

$$[R(x)]^2 - [r(x)]^2 = (5 - x^2)^2 - (5 - 2x)^2 = (25 - 10x^2 + x^4) - (25 - 20x + 4x^2) = x^4 - 14x^2 + 20x.$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^4 - 14x^2 + 20x) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{14x^3}{3} + 10x^2 \right]_0^2.$$

$$\text{At } x = 2: \frac{32}{5} - \frac{112}{3} + 40. \text{ Common denominator 15: } \frac{96}{15} - \frac{560}{15} + \frac{600}{15} = \frac{136}{15}.$$

$$V = \boxed{\frac{136\pi}{15}}.$$

(!) Lỗi thường gặp: Sai lầm kinh điển trong phương pháp vành khăn: viết $(R(x) - r(x))^2$ thay vì $[R(x)]^2 - [r(x)]^2$. Hai biểu thức này **hoàn toàn khác nhau** về mặt đại số — ví dụ nếu $R = 5, r = 3$ thì $[R]^2 - [r]^2 = 25 - 9 = 16$, trong khi $(R - r)^2 = 2^2 = 4$. Luôn **biên phương từng bán kính một cách riêng biệt trước**, rồi mới lấy hiệu: $\pi \int ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$. Ngoài ra, khi trục quay không phải trục hoành/trục tung, hãy luôn kiểm tra lại xem đường cong nào cho bán kính **lớn hơn** (bán kính ngoài R) và đường nào cho bán kính **nhỏ hơn** (bán kính trong r) — thứ tự này có thể đảo ngược so với thứ tự "trên/dưới" quen thuộc, tùy vào vị trí của trục quay.

8.7.2 Summary: choosing a volume method

Before starting any volume problem, decide which of the three formulas actually applies. All three are built from the same idea — slice, find the cross-sectional area $A(x)$, integrate — but the shape and the presence of π differ:

Method	When to use	Formula
Known cross-sections	Non-circular slabs (square, rectangle, triangle, semicircle) built from the gap between two curves	$V = \int_a^b A(x) dx$, with $A(x)$ from the shape's own area formula
Disk	Region touches the axis of revolution directly (no gap)	$V = \pi \int_a^b [R(x)]^2 dx$
Washer	Region has a gap between it and the axis of revolution	$V = \pi \int_a^b ([R(x)]^2 - [r(x)]^2) dx$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trước khi bắt tay vào bài toán thể tích, hãy tự hỏi: (1) Thiết diện có phải hình tròn/nửa hình tròn không? Nếu không (vuông, chữ nhật, tam giác) thì **không có** π trong công thức. (2) Nếu là hình tròn (do quay quanh một trục), miền có **chạm trực tiếp** vào trục quay không? Nếu có $\Rightarrow$ dùng **đĩa**; nếu có khoảng hở $\Rightarrow$ dùng **vành khăn**. Trả lời đúng hai câu hỏi này trước khi viết bất kỳ công thức nào sẽ tránh được phần lớn lỗi sai trong chương này.

8.8 Problem Bank

Bài tập luyện tập

The average value of $f(x) = 3x^2$ on $[0, 2]$ is:

- (A) 4 (C) 2
(B) 8 (D) 6

Lời giải chi tiết

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{2-0} \int_0^2 3x^2 dx = \frac{1}{2} [x^3]_0^2 = \frac{1}{2}(8) = 4. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = 6 - x^2$ on $[-1, 2]$. Find the average value of f on this interval, and find every value of c guaranteed by the Mean Value Theorem for Integrals.

Lời giải chi tiết

$$f_{\text{avg}} = \frac{1}{3} \int_{-1}^2 (6 - x^2) dx = \frac{1}{3} \left[6x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3} \left[(12 - \frac{8}{3}) - (-6 + \frac{1}{3}) \right] = \frac{1}{3} \left[\frac{28}{3} + \frac{17}{3} \right] = \frac{1}{3} \cdot 15 = 5.$$

Solve $6 - c^2 = 5 \Rightarrow c^2 = 1 \Rightarrow c = \pm 1$; both lie in $[-1, 2]$, so $c = 1$ or $c = -1$ both satisfy the theorem.

Bài tập luyện tập

A cyclist's speed over a 4-hour ride is modeled by $v(t) = -t^2 + 4t + 3$ (mph) for $0 \leq t \leq 4$. Find the average speed over the ride.

Lời giải chi tiết

$$v_{\text{avg}} = \frac{1}{4} \int_0^4 (-t^2 + 4t + 3) dt = \frac{1}{4} \left[-\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 3t \right]_0^4 = \frac{1}{4} \left[-\frac{64}{3} + 32 + 12 \right] = \frac{1}{4} \left[44 - \frac{64}{3} \right] = \frac{1}{4} \cdot \frac{68}{3} = \frac{68}{12} = \frac{17}{3} \text{ mph.}$$

Bài tập luyện tập

A particle moves with velocity $v(t) = t^2 - 2t - 3$ on $[0, 4]$. The total distance traveled is:

(A) $\frac{34}{3}$

(C) $-\frac{20}{3}$

(B) $\frac{20}{3}$

(D) 4

Lời giải chi tiết

$v(t) = (t-3)(t+1)$; on $[0, 4]$ the only relevant zero is $t = 3$. Test: $v(0) = -3 < 0$, $v(4) = 5 > 0$, so $v < 0$ on $[0, 3)$ and $v > 0$ on $(3, 4]$. With antiderivative $P(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t$: $P(0) = 0$, $P(3) = 9 - 9 - 9 = -9$, $P(4) = \frac{64}{3} - 16 - 12 = -\frac{20}{3}$. Distance = $|P(3) - P(0)| + |P(4) - P(3)| = |-9| + |-\frac{20}{3} + 9| = 9 + \frac{7}{3} = \frac{27}{3} + \frac{7}{3} = \frac{34}{3}$. (A). (Net displacement is $P(4) - P(0) = -\frac{20}{3}$ – do not confuse it with total distance.)

Bài tập luyện tập

A particle has acceleration $a(t) = 2t - 6$ (m/s²), initial velocity $v(0) = 5$ m/s, and initial position $s(0) = 0$. (a) Find $v(t)$ and $s(t)$. (b) Find the particle's displacement and total distance traveled on $[0, 6]$.

Lời giải chi tiết

$$v(t) = 5 + \int_0^t (2\tau - 6) d\tau = 5 + (t^2 - 6t) = t^2 - 6t + 5 = (t-1)(t-5). \quad s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 5t.$$

Zeros of v : $t = 1, 5$; on $[0, 6]$, $v > 0$ on $[0, 1)$, $v < 0$ on $(1, 5)$, $v > 0$ on $(5, 6]$. Values: $s(0) = 0$, $s(1) = \frac{1}{3} - 3 + 5 = \frac{7}{3}$, $s(5) = \frac{125}{3} - 75 + 25 = -\frac{25}{3}$, $s(6) = 72 - 108 + 30 = -6$.

Displacement = $s(6) - s(0) = -6$ m. **Total distance** = $|s(1) - s(0)| + |s(5) - s(1)| + |s(6) - s(5)| = \frac{7}{3} + |-\frac{25}{3} - \frac{7}{3}| + |-6 + \frac{25}{3}| = \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{46}{3}$ m.

Bài tập luyện tập

The velocity of a particle moving along a line is negative and increasing on the interval $(2, 5)$. Which must be true on $(2, 5)$?

(A) Position increasing, speed increasing

(C) Position increasing, speed decreasing

(B) Position decreasing, speed decreasing

(D) Position decreasing, speed increasing

Lời giải chi tiết

$v < 0$ means position is decreasing. Speed is $|v|$; since v is negative and increasing (moving toward 0 from below), $|v|$ is decreasing. (B).

Bài tập luyện tập

Given $f'(x) = 3x^2 - 2$ and $f(1) = 5$, find $f(4)$.

Lời giải chi tiết

By the Net Change Theorem, $f(4) = f(1) + \int_1^4 (3x^2 - 2) dx = 5 + \left[x^3 - 2x \right]_1^4 = 5 + [(64 - 8) - (1 - 2)] = 5 + (56 + 1) = 5 + 57 = 62$.

Bài tập luyện tập

During a storm, the rate of water flowing into a retention pond, $R(t)$ (thousand liters/hour), is: $R(0) = 12$, $R(3) = 9$, $R(5) = 4$, $R(6) = 1$. Use a trapezoidal sum over these subintervals to estimate the total inflow over $[0, 6]$ hours.

Lời giải chi tiết

$$\begin{aligned} \int_0^6 R(t) dt &\approx (3-0)\frac{12+9}{2} + (5-3)\frac{9+4}{2} + (6-5)\frac{4+1}{2} \\ &= 3(10.5) + 2(6.5) + 1(2.5) = 31.5 + 13 + 2.5 = 47 \text{ thousand liters.} \end{aligned}$$

Bài tập luyện tập

A city water tower has inflow rate $R_{\text{in}}(t) = t + 7$ and outflow rate $R_{\text{out}}(t) = 15$ (thousand gallons/min), for $0 \leq t \leq 10$. At $t = 0$ the tower holds 50 thousand gallons. Find the time at which the tower's volume is at a *minimum*, and find that minimum volume.

Lời giải chi tiết

Net rate: $R_{\text{net}}(t) = (t + 7) - 15 = t - 8$, negative (draining) for $t < 8$ and positive (filling) for $t > 8$, so volume is minimized at $t = 8$.

$$Q(8) = 50 + \int_0^8 (t - 8) dt = 50 + \left[\frac{t^2}{2} - 8t \right]_0^8 = 50 + (32 - 64) = 50 - 32 = 18 \text{ thousand gallons.}$$

Bài tập luyện tập

A tank's inflow and outflow rates satisfy $\int_2^5 [R_{\text{in}}(t) - R_{\text{out}}(t)] dt = -120$ (liters). Which must be true?

- | | |
|--|---|
| (A) The tank gained 120 liters on $[2, 5]$ | (C) Inflow exceeded outflow for the entire interval |
| (B) The tank lost 120 liters on $[2, 5]$ | (D) The tank's volume was constant on $[2, 5]$ |

Lời giải chi tiết

The integral of (rate in – rate out) equals the net change in volume; a value of -120 means the volume decreased by 120 liters over $[2, 5]$. **(B)**.

Bài tập luyện tập

Find the area enclosed by $y = 8 - x^2$ and $y = x^2$.

(A) $\frac{64}{3}$

(C) $\frac{16}{3}$

(B) $\frac{32}{3}$

(D) 8

Lời giải chi tiết

Intersections: $8 - x^2 = x^2 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. Top curve is $y = 8 - x^2$ (test $x = 0$: $8 > 0$).

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 [(8 - x^2) - x^2] dx = \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^2 \\ &= \left(16 - \frac{16}{3} \right) - \left(-16 + \frac{16}{3} \right) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

(A).

Bài tập luyện tập

Find the total area enclosed between $y = x^3$ and $y = 4x$.

Lời giải chi tiết

Intersections: $x^3 = 4x \Rightarrow x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = -2, 0, 2$. Test $x = -1$: $x^3 - 4x = -1 + 4 = 3 > 0$ so $x^3 > 4x$ on $(-2, 0)$; test $x = 1$: $1 - 4 = -3 < 0$ so $4x > x^3$ on $(0, 2)$. Using $H(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$: $H(-2) = 4 - 8 = -4$, $H(0) = 0$, $H(2) = -4$.

$$A = |H(0) - H(-2)| + |H(2) - H(0)| = |0 - (-4)| + |-4 - 0| = 4 + 4 = 8.$$

Bài tập luyện tập

Find the area of the region bounded by $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, and $x = 9$.

(A) 18

(C) 9

(B) 27

(D) 6

Lời giải chi tiết

$$A = \int_0^9 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^9 = \frac{2}{3} (27) = 18. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find the area enclosed by $x = 4 - y^2$ and $x = 0$.

Lời giải chi tiết

Intersections: $4 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 2$. On $(-2, 2)$, $x = 4 - y^2 \geq 0$, so it lies to the right of $x = 0$.

$$A = \int_{-2}^2 [(4 - y^2) - 0] dy = \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

Bài tập luyện tập

Find the area enclosed by $x = y^2 - 2$ and $x = y$.

(A) $\frac{9}{2}$

(C) 5

(B) 4

(D) $\frac{7}{2}$

Lời giải chi tiết

Intersections: $y^2 - 2 = y \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow (y - 2)(y + 1) = 0 \Rightarrow y = -1, 2$. Test $y = 0$: $x = y = 0$ versus $x = y^2 - 2 = -2$, so $x = y$ is to the right.

$$A = \int_{-1}^2 [y - (y^2 - 2)] dy = \int_{-1}^2 (y - y^2 + 2) dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} + 2y \right]_{-1}^2.$$

At $y = 2$: $2 - \frac{8}{3} + 4 = 6 - \frac{8}{3} = \frac{10}{3}$. At $y = -1$: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 = -\frac{7}{6}$. $A = \frac{10}{3} + \frac{7}{6} = \frac{20}{6} + \frac{7}{6} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the total area enclosed between $y = x^3 - 9x$ and the x -axis, for $-3 \leq x \leq 3$.

Lời giải chi tiết

Zeros: $x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = -3, 0, 3$. Antiderivative $H(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{9x^2}{2}$: $H(-3) = \frac{81}{4} - \frac{81}{2} = -\frac{81}{4}$, $H(0) = 0$, $H(3) = -\frac{81}{4}$.

$$A = |H(0) - H(-3)| + |H(3) - H(0)| = \left| \frac{81}{4} \right| + \left| -\frac{81}{4} \right| = \frac{81}{4} + \frac{81}{4} = \frac{81}{2}.$$

Bài tập luyện tập

The base of a solid is the region between $y = x$ and $y = x^2$ on $[0, 1]$. Cross-sections perpendicular to the x -axis are squares with side equal to the distance between the curves. Find the volume.

Lời giải chi tiết

Side $s(x) = x - x^2$ (since $x \geq x^2$ on $[0, 1]$). $A(x) = (x - x^2)^2 = x^2 - 2x^3 + x^4$.

$$V = \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4) dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{10}{30} - \frac{15}{30} + \frac{6}{30} = \frac{1}{30}.$$

Bài tập luyện tập

The base of a solid is the triangular region bounded by $y = 3 - x$ and the axes, for $0 \leq x \leq 3$. Cross-sections perpendicular to the x -axis are squares with side $y = 3 - x$. The volume is:

- (A) 9 (C) 3
(B) 27 (D) 18

Lời giải chi tiết

$$V = \int_0^3 (3 - x)^2 dx. \text{ Substituting } u = 3 - x: \int_0^3 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^3 = 9. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

The base of a solid is the region under $y = \sqrt{x}$ on $[0, 4]$. Cross-sections perpendicular to the x -axis are rectangles whose height is twice the base, where the base equals $\sqrt{x}$. Find the volume.

Lời giải chi tiết

Base = $\sqrt{x}$, height = $2\sqrt{x}$, so $A(x) = \sqrt{x} \cdot 2\sqrt{x} = 2x$.

$$V = \int_0^4 2x dx = \left[x^2 \right]_0^4 = 16.$$

Bài tập luyện tập

The base of a solid is bounded by $y = 2 - \frac{x}{2}$ and the x -axis, for $0 \leq x \leq 4$. Cross-sections perpendicular to the x -axis are equilateral triangles with side $2 - \frac{x}{2}$. Find the volume.

Lời giải chi tiết

$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(2 - \frac{x}{2} \right)^2$. Let $w = 2 - \frac{x}{2}$, so $dx = -2 dw$; as $x : 0 \rightarrow 4$, $w : 2 \rightarrow 0$.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4} \int_0^4 \left(2 - \frac{x}{2} \right)^2 dx = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2 \int_0^2 w^2 dw = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[\frac{w^3}{3} \right]_0^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Bài tập luyện tập

The base of a solid is bounded by $y = x$ and $y = -x$, for $0 \leq x \leq 2$. Cross-sections perpendicular to the x -axis are semicircles with diameter equal to the distance between the two lines, $2x$. The volume is:

- (A) $\frac{4\pi}{3}$ (C) $\frac{2\pi}{3}$
(B) $\frac{8\pi}{3}$ (D) 4π

Lời giải chi tiết

Radius = x , so $A(x) = \frac{1}{2}\pi x^2$.

$$V = \int_0^2 \frac{\pi}{2} x^2 dx = \frac{\pi}{2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{8}{3} = \frac{4\pi}{3}.$$

(A).

Bài tập luyện tập

The region under $y = x^3$ on $[0, 1]$ is revolved about the x -axis. The volume is:

(A) $\frac{\pi}{7}$

(C) $\frac{\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{4}$

(D) $\frac{\pi}{3}$

Lời giải chi tiết

$V = \pi \int_0^1 (x^3)^2 dx = \pi \int_0^1 x^6 dx = \pi \left[\frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{\pi}{7}$. (A). (Squaring x^3 gives x^6 , not x^3 again — a common exponent slip.)

Bài tập luyện tập

The region bounded by $x = \sqrt{y}$, the y -axis, and $y = 4$ is revolved about the y -axis. Find the volume.

Lời giải chi tiết

$R(y) = \sqrt{y}$, so $[R(y)]^2 = y$.

$$V = \pi \int_0^4 y dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^4 = \pi(8) = 8\pi.$$

Bài tập luyện tập

The region bounded above by $y = x^2$, below by the line $y = -3$, and on the right by $x = 2$ (for $0 \leq x \leq 2$) is revolved about the line $y = -3$. Find the volume.

Lời giải chi tiết

The region's lower boundary is the axis itself, so this is a disk: $R(x) = x^2 - (-3) = x^2 + 3$.

$$[R(x)]^2 = x^4 + 6x^2 + 9, \quad V = \pi \int_0^2 (x^4 + 6x^2 + 9) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} + 2x^3 + 9x \right]_0^2.$$

At $x = 2$: $\frac{32}{5} + 16 + 18 = \frac{32}{5} + 34 = \frac{202}{5}$. $V = \frac{202\pi}{5}$.

Bài tập luyện tập

The region bounded on the right by $x = \sqrt{y}$, on the left by the line $x = -2$, for $0 \leq y \leq 4$, is revolved about the line $x = -2$. Find the volume.

Lời giải chi tiết

The region's left boundary is the axis itself, so this is a disk: $R(y) = \sqrt{y} - (-2) = \sqrt{y} + 2$.

$$[R(y)]^2 = y + 4\sqrt{y} + 4, \quad V = \pi \int_0^4 (y + 4\sqrt{y} + 4) dy = \pi \left[\frac{y^2}{2} + \frac{8}{3}y^{3/2} + 4y \right]_0^4.$$

$$\text{At } y = 4: 8 + \frac{8}{3}(8) + 16 = 8 + \frac{64}{3} + 16 = 24 + \frac{64}{3} = \frac{136}{3}. \quad V = \frac{136\pi}{3}.$$

Bài tập luyện tập

The region between $y = x$ and $y = x^2$ on $[0, 1]$ is revolved about the x -axis. The volume is:

(A) $\frac{2\pi}{15}$

(C) $\frac{2\pi}{5}$

(B) $\frac{\pi}{15}$

(D) $\frac{\pi}{5}$

Lời giải chi tiết

Outer radius $R(x) = x$ (since $x \geq x^2$ on $[0, 1]$), inner radius $r(x) = x^2$.

$$V = \pi \int_0^1 (x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = \pi \cdot \frac{2}{15} = \frac{2\pi}{15}.$$

(A).

Bài tập luyện tập

The region bounded by $y = 4 - x^2$ and $y = 0$ is revolved about the line $y = -2$. Find the volume.

Lời giải chi tiết

Curve meets axis at $x = \pm 2$. Outer radius (to the farther curve $y = 4 - x^2$): $R(x) = (4 - x^2) - (-2) = 6 - x^2$. Inner radius (to the nearer boundary $y = 0$): $r(x) = 0 - (-2) = 2$.

$$[R(x)]^2 - [r(x)]^2 = (6 - x^2)^2 - 4 = 36 - 12x^2 + x^4 - 4 = 32 - 12x^2 + x^4.$$

$$V = \pi \int_{-2}^2 (32 - 12x^2 + x^4) dx = \pi \left[32x - 4x^3 + \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2.$$

$$\text{At } x = 2: 64 - 32 + \frac{32}{5} = 32 + \frac{32}{5} = \frac{192}{5}; \text{ by symmetry double this: } V = \pi \cdot \frac{384}{5} = \frac{384\pi}{5}.$$

Bài tập luyện tập

The region bounded by $x = y^2$ and $x = 2y$ (for $0 \leq y \leq 2$) is revolved about the y -axis. Find the volume.

Lời giải chi tiết

Since $2y \geq y^2$ on $[0, 2]$, outer radius $R(y) = 2y$, inner radius $r(y) = y^2$.

$$V = \pi \int_0^2 [(2y)^2 - (y^2)^2] dy = \pi \int_0^2 (4y^2 - y^4) dy = \pi \left[\frac{4y^3}{3} - \frac{y^5}{5} \right]_0^2.$$

$$\text{At } y = 2: \frac{32}{3} - \frac{32}{5} = 32 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) = 32 \cdot \frac{2}{15} = \frac{64}{15}. \quad V = \frac{64\pi}{15}.$$

Bài tập luyện tập

Let R be the region enclosed by $y = x^2$ and $y = 2x$. (a) Find the area of R . (b) Find the volume when R is revolved about the x -axis.

Lời giải chi tiết

Intersections: $x^2 = 2x \Rightarrow x = 0, 2$. On $(0, 2)$, $2x \geq x^2$.

$$\text{(a)} \quad A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

(b) Washer about the x -axis: outer $R(x) = 2x$, inner $r(x) = x^2$.

$$V = \pi \int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \pi \cdot \frac{64}{15} = \frac{64\pi}{15}.$$

Bài tập luyện tập

Let R be the same region enclosed by $y = x^2$ and $y = 2x$ from the previous problem. Find the volume when R is revolved about the line $y = -1$.

Lời giải chi tiết

Since the axis $y = -1$ lies below the entire region, distances increase by 1: outer radius (to the lower curve $y = x^2$, farther from $y = -1$) is $R(x) = x^2 + 1$; inner radius (to the upper curve $y = 2x$, nearer to $y = -1$) is $r(x) = 2x + 1$.

$$[R(x)]^2 - [r(x)]^2 = (x^2 + 1)^2 - (2x + 1)^2 = (x^4 + 2x^2 + 1) - (4x^2 + 4x + 1) = x^4 - 2x^2 - 4x.$$

$$V = \pi \int_0^2 (x^4 - 2x^2 - 4x) dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 \right]_0^2.$$

$$\text{At } x = 2: \frac{32}{5} - \frac{16}{3} - 8. \text{ Common denominator 15: } \frac{96}{15} - \frac{80}{15} - \frac{120}{15} = -\frac{104}{15}. \text{ Taking the (necessarily positive) volume integral: } V = \pi \cdot \frac{104}{15} = \frac{104\pi}{15}.$$

Bài tập luyện tập

Let R be the region bounded by $y = \sqrt{x}$, the x -axis, and $x = 4$. (a) Find the area of R . (b) Find the volume when R is revolved about the line $x = 4$.

Lời giải chi tiết

$$(a) A = \int_0^4 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^4 = \frac{2}{3}(8) = \frac{16}{3}.$$

(b) Revolving about the vertical line $x = 4$ requires integrating in y ; rewrite the curve as $x = y^2$, with y ranging from 0 to 2 (since $y = \sqrt{4} = 2$). The region's right boundary is the axis $x = 4$ itself, so this is a disk with radius $R(y) = 4 - y^2$ (distance from the curve to the line $x = 4$).

$$[R(y)]^2 = 16 - 8y^2 + y^4, \quad V = \pi \int_0^2 (16 - 8y^2 + y^4) dy = \pi \left[16y - \frac{8y^3}{3} + \frac{y^5}{5} \right]_0^2.$$

$$\text{At } y = 2: 32 - \frac{64}{3} + \frac{32}{5}. \text{ Common denominator 15: } \frac{480}{15} - \frac{320}{15} + \frac{96}{15} = \frac{256}{15}. V = \frac{256\pi}{15}.$$

Bài tập luyện tập

Let R be the region bounded by $y = x^2$ and $y = 4$. (a) Find the area of R . (b) Find the volume when R is revolved about the x -axis.

Lời giải chi tiết

Intersections: $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

$$(a) A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

(b) Even though the lower curve $y = x^2$ touches the x -axis at $x = 0$, the region R itself is bounded *below* by $y = x^2$, not by $y = 0$ — so revolving about the x -axis produces a **washer**, not a disk, with outer radius $R(x) = 4$ (constant, the horizontal line) and inner radius $r(x) = x^2$:

$$V = \pi \int_{-2}^2 [4^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_{-2}^2 (16 - x^4) dx = \pi \left[16x - \frac{x^5}{5} \right]_{-2}^2.$$

$$\text{At } x = 2: 32 - \frac{32}{5} = \frac{128}{5}; \text{ by symmetry double this: } V = \pi \cdot \frac{256}{5} = \frac{256\pi}{5}.$$

Bài tập luyện tập

A solid has known cross-sections perpendicular to the x -axis that are squares, with base region between $y = f(x)$ and $y = g(x)$ on $[a, b]$, where $f(x) > g(x)$ throughout. Which integral gives the volume?

$$(A) \pi \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

$$(C) \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx$$

$$(B) \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$$

$$(D) \pi \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx$$

Lời giải chi tiết

The cross-sections are squares, not circles, so there is **no factor of π** anywhere in the formula – π only appears for circular cross-sections (disks/washers). The side length of each square is the distance between the curves, $f(x) - g(x)$, so the cross-sectional area is $[f(x) - g(x)]^2$ and $V = \int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx$. **(B)**. (Choice (C) is the mistake of subtracting before squaring in a washer-style setup, which does not apply here at all since this is not a solid of revolution.)

Ôn tập nhanh – toàn bộ chương trình:

- **Giới hạn & liên tục:** luôn thử thế trực tiếp trước; nếu gặp $\frac{0}{0}$ thì phân tích nhân tử, nhân liên hợp, hoặc dùng các giới hạn đặc biệt $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; giới hạn hai phía tồn tại khi và chỉ khi hai giới hạn một phía bằng nhau.
- **Đạo hàm cơ bản & quy tắc chuỗi:** áp dụng quy tắc chuỗi cho mọi hàm hợp, kể cả khi ẩn dưới dạng đạo hàm ẩn (implicit) hay đạo hàm hàm ngược; với đạo hàm ẩn, luôn nhân thêm $\frac{dy}{dx}$ mỗi khi đạo hàm một biểu thức chứa y .
- **Ứng dụng đạo hàm theo ngữ cảnh:** tốc độ liên quan (related rates) luôn bắt đầu từ một phương trình liên hệ các đại lượng rồi lấy đạo hàm theo t ; xấp xỉ tuyến tính dùng $f(a) + f'(a)(x - a)$; luôn ghi rõ đơn vị của đạo hàm trong bài toán thực tế.
- **Phân tích đồ thị hàm số:** $f' > 0 \Rightarrow f$ tăng, $f' < 0 \Rightarrow f$ giảm; $f'' > 0 \Rightarrow$ lồi (concave up), $f'' < 0 \Rightarrow$ lõm (concave down); điểm uốn chỉ được công nhận khi f'' **thực sự đổi dấu** qua điểm đó, không chỉ đơn thuần $f'' = 0$.
- **Tích phân & Định lý cơ bản (FTC):** $\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a)$; luôn cộng hằng số $+C$ với tích phân bất định; kiểm tra lại đạo hàm của đáp số để chắc chắn tính đúng.
- **Phương trình vi phân:** tách biến rồi lấy tích phân hai vế; mô hình tăng trưởng/phân rã mũ $\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow y = y_0 e^{kt}$; luôn dùng điều kiện đầu để tìm hằng số C (hoặc y_0) cụ thể.
- **Chuyển động & tích lũy:** độ dời = $\int v dt$ (có dấu), quãng đường = $\int |v| dt$ (luôn không âm) – hai đại lượng này khác nhau bất cứ khi nào v đổi dấu trên đoạn đang xét.
- **Diện tích giữa hai đường cong:** luôn tìm giao điểm trước; kiểm tra đường nào ở trên bằng cách thử một điểm ở giữa; nếu hai đường cắt nhau nhiều lần, tách tích phân tại từng giao điểm rồi lấy trị tuyệt đối từng mảnh.
- **Thể tích khối:** luôn hình dung (hoặc vẽ) một lát cắt đại diện trước khi lập tích phân; với thiết diện đã biết, xác định đúng độ dài cạnh/đường kính rồi mới áp công thức diện tích hình học tương ứng; với đĩa/vành khăn, đo bán kính là khoảng cách **thực sự** từ trục quay đến đường cong (không mặc định $R = f(x)$ nếu trục không phải là trục hoành); với vành khăn, luôn bình phương từng bán kính **trước** khi trừ.

Đồng hành cùng 8020 English

Cảm ơn bạn đã học cùng bộ giáo trình quốc tế 8020. **Điểm thật · Thầy thật · Kết quả thật** — nhiều học viên chỉ cần 1–2 khoá để đạt kết quả mong muốn.

Chương trình đào tạo tại 8020 English

IELTS Academic/General · SAT · PTE · Duolingo · TOEFL | AP (College Board) · IB Diploma · Cambridge IGCSE / A-Level | sẵn học bổng du học.

Vì sao chọn 8020 English?

- **100% giáo viên** đạt tối thiểu 8.0 IELTS hoặc 1500 SAT — đội ngũ Giáo sư · Tiến sĩ · Thạc sĩ tốt nghiệp trường top đầu thế giới (Carnegie Mellon — #1 Hoa Kỳ về Khoa học Máy tính).
- **Kèm 1–1** mọi độ tuổi; lớp sĩ số nhỏ 2–5 bạn (đa số dưới 10 bạn/lớp).
- Lộ trình cá nhân hoá, theo sát tiến độ từng học viên; lớp OFFLINE tại TP.HCM & ONLINE toàn quốc.

Bảng vàng học viên

AP 5/5 — Calculus AB/BC
SAT 1590 / 1570 / 1550

AP 4–5 — Biology, Chemistry
IELTS 8.0–9.0

IB 90/100 — Economics
Duolingo 110 · PTE 90

Cảm nhận học viên & phụ huynh

"Bạn đã cải thiện được tư duy Writing — kỹ năng từng là nỗi sợ lớn nhất — và cuối cùng đã đậu vào trường top như mong muốn. Thái độ học tập cực kỳ nghiêm túc; ngay cả khi nằm viện vẫn cố gắng học đều đặn."

— Phan Thị Thanh Hằng • IELTS Overall 8.5

"Cần tất cả kỹ năng trên 7.5 để xét vào trường top 1 Anh Quốc về Y học (chương trình UKFPO của NHS) — và đã đạt mục tiêu sau khi học Writing 1-1."

— Trần Hoàng Bảo Ngọc • IELTS Overall 8.0 (Writing 6.0 → 7.5)

"Gia đình và bé xin cảm ơn thầy cô đã giúp con có hành trang chín chu khi qua Mỹ. Đạt điểm 5 môn Giải tích trong thời gian ngắn là quá mãn nguyện."

— Phụ huynh • AP Calculus BC 5/5

"Em cảm ơn thầy đã luôn đồng hành. Nhờ thầy, em học vững hơn rất nhiều dù thời gian ôn không dài."

— Học viên • AP Calculus AB 4

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

FEEDBACK PHỤ HUYNH & HỌC VIÊN AP



Phụ huynh • AP Calculus BC: 5

"Gia đình cảm ơn thầy cô đã giúp con có hành trang chín chu khi qua Mỹ. Đạt điểm 5 môn Giải tích trong thời gian ngắn là quá mãn nguyện."



Phụ huynh • AP Calculus BC

"Mẹ con xin gửi lời cảm ơn chân thành tới thầy và cả nhóm. Thời gian ôn rất ngắn nhưng con nhận được rất nhiều sự hỗ trợ."



Học viên • AP Calculus AB: 4 • Statistics: 3

"Em cảm ơn thầy Steven đã luôn đồng hành. Nhờ thầy, em học vững hơn rất nhiều dù thời gian không dài."

Feedback phụ huynh & học viên AP — nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Điểm thi thật của học viên

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ AP





AP Biology: 4 · AP Chemistry: 4



AP Calculus AB: 5



AP Calculus BC: 5



AP Chemistry: 5

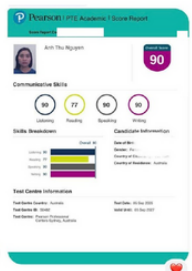
Bảng điểm AP thật của học viên – nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Bảng điểm AP thật – Calculus AB/BC 5/5 · Biology & Chemistry 4-5 (College Board)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ PTE



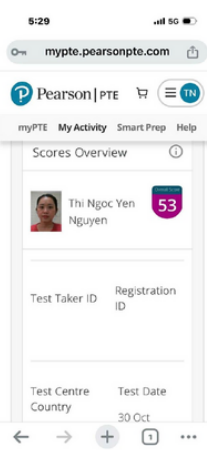


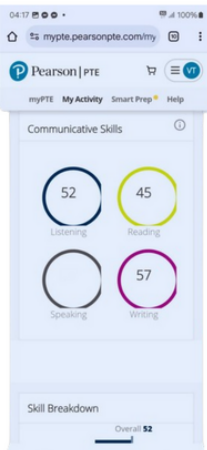
Em báo điểm nha c

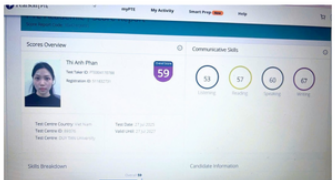
trời ơi!!!

duới vậy luôn do haaaaa

chúc mừng e nhaaaa





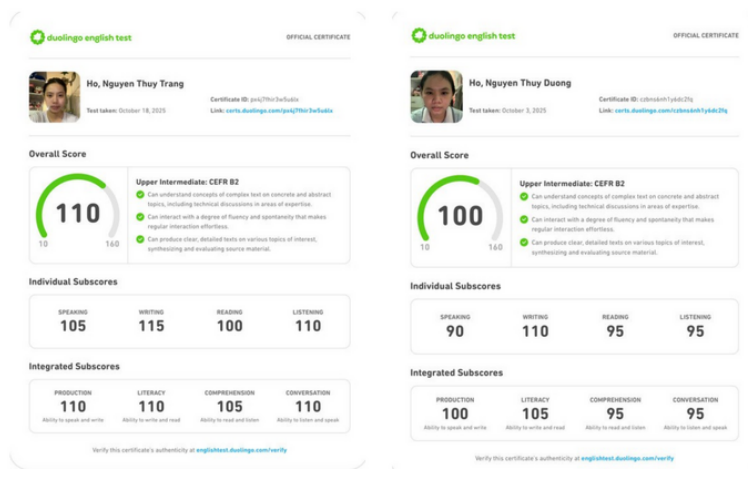


Bảng điểm PTE thật của học viên

Học viên 8020 – PTE Academic 90

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ DUOLINGO



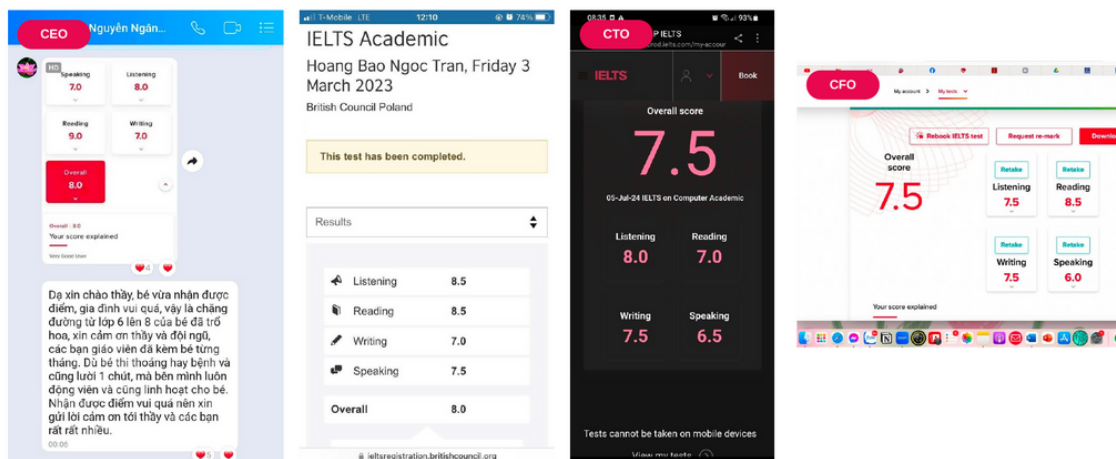
Duolingo English Test – 110 & 100

Học viên 8020 – Duolingo English Test 110 & 100

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

THÀNH TÍCH HỌC VIÊN

Bảng điểm thi thật – chất lượng được giám sát nghiêm ngặt. Một số học viên chỉ cần 1–2 khóa để đạt kết quả mong muốn.



Học viên 8020 – IELTS 8.0 / 7.5 / 8.5 (báo điểm thật)

**8020 ENGLISH – CHƯƠNG TRÌNH QUỐC TẾ**

Test đầu vào & tư vấn lộ trình MIỄN PHÍ

Hotline Thầy Tường (Head of 8020): 0332 747 169
Cô Nancy: 0983 422 692 · 0772 631 496

Offline Trần Phú, P.4, Q.5, TP.HCM

Online Lớp trực tuyến toàn quốc

Web luyenthi8020.com