



IB Diploma Mathematics: Analysis and Approaches

Giáo trình luyện thi chuyên sâu

Song ngữ Anh-Việt

Lời mở đầu • Foreword

Cuốn sách này thuộc bộ giáo trình luyện thi chương trình quốc tế của **8020 English (8020 Education)** — trung tâm luyện thi trọng điểm **IELTS • SAT • AP • IB • A-level • IGCSE** và sẵn học bổng du học. Toàn bộ nội dung được biên soạn bởi đội ngũ **Giáo sư • Tiến sĩ • Thạc sĩ** tốt nghiệp các trường top đầu thế giới, bám sát khung chương trình chính thức, trình bày đầy đủ lý thuyết, ví dụ mẫu, hình minh họa và hệ thống bài tập có lời giải chi tiết.

This book is part of the 8020 English international exam-prep series: complete English theory with Vietnamese explanations, worked examples, illustrations and fully-solved practice, aligned to the official framework.

Thành tích 8020 English

9.0 IELTS cao nhất

1570 SAT cao nhất

5/5 AP — điểm tuyệt đối

90/100 IB Diploma

100% GV $\geq$ 8.0 IELTS / 1500 SAT

CMU Tiến sĩ ĐH #1 Hoa Kỳ về CS

Đội ngũ tiêu biểu: Thầy Châu Cát Tường (Academic Head, ThS Western Sydney, top 1% IELTS 8.5) · TS Nguyễn Anh Huy (Carnegie Mellon, cựu kỹ sư Amazon) · TS Nguyễn Phước Trường (Toán, ĐH Klagenfurt) · cùng đội ngũ giảng viên SAT 1500–1600, IELTS 8.0–8.5.

Kết quả học viên — điểm thi thật: IELTS 8.0–9.0 · SAT 1550 / 1570 / 1590 · AP 5/5 (Calculus BC, Microeconomics) · IB 90/100 (Economics) · Duolingo 110 · PTE 90 · TOEFL 120. **Bảng vàng SAT:** Khánh Đăng 1510 · Thảo Nguyên 1520 · Tâm Anh 1530.

“Cuối cùng đã đậu vào trường top như mong muốn.” — Phan Thị Thanh Hằng, IELTS Overall 8.5.

Cách dùng sách hiệu quả: mỗi Unit gồm (1) **Lý thuyết trọng tâm** tiếng Anh kèm **giải thích tiếng Việt**; (2) **Ví dụ mẫu** có lời giải; (3) **Hệ thống bài tập** kèm **lời giải chi tiết**. Hãy tự làm bài trước khi xem lời giải để đạt hiệu quả tối đa.

THÀNH TÍCH THỰC TẾ • 8020 ENGLISH

Điểm thi thật • Bảng & bảng điểm thật của giảng viên và học viên 8020 English — Điểm thật • Thầy thật • Kết quả thật

ĐỘI NGŨ

ĐỘI NGŨ GIÁO VIÊN TẬN TÂM

*Tối thiểu 8.0 IELTS Overall



Gv. Nguyễn Nhật Nam
IELTS 8.5 Overall



Gv. Nguyễn Khanh
IELTS 8.0 Overall



Gv. Nguyễn Đan Vy
IELTS 8.0 Overall



Giảng viên 8020 — IELTS 8.5 & 8.0 Overall (British Council • IDP • Cambridge)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

THÀNH TÍCH HỌC VIÊN

Bảng điểm thi thật – chất lượng được giám sát nghiêm ngặt. Một số học viên chỉ cần 1–2 khóa để đạt kết quả mong muốn.



Học viên 8020 — IELTS 8.0 Overall (bảng điểm thật)

ĐỘI NGŨ

ĐỘI NGŨ GIÁO VIÊN TẬN TÂM

*Tối thiểu 1500 SAT Overall

8020
ENGLISH

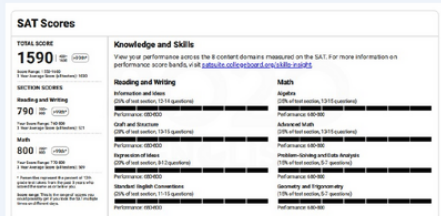
Thầy Quang Minh

Đại học Bách Khoa Hà Nội



SAT 1590

IELTS 8.0



THẾ MẠNH & KINH NGHIỆM

- Học sinh đạt 1450–1560 SAT
- Day nhanh band 1400–1550+
- Chiến thuật làm bài & quản lý thời gian

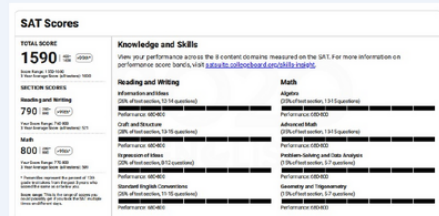
Cô Phương Vy

Đại học Ngoại thương



SAT 1590

IELTS 8.0



THẾ MẠNH & KINH NGHIỆM

- SAT Verbal Instructor (Springboard, QAS)
- Day lớp nhỏ & xây dựng tài liệu riêng
- Chuyên Reading & Writing: Logic – Grammar

Giảng viên 8020 – SAT 1590 (ĐH Bách Khoa Hà Nội & ĐH Ngoại thương)

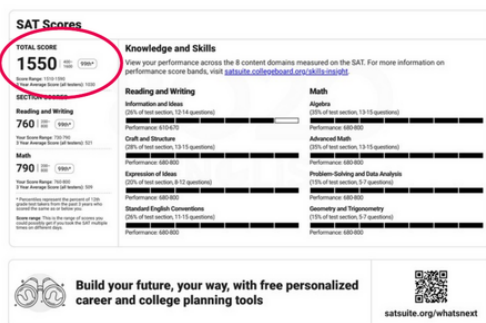
KẾT QUẢ HỌC VIÊN

TUTOR 1-1 – ĐIỂM SỐ ẤN TƯỢNG

8020
ENGLISH

Your Scores

Name: Tam T Nguyen
Grade: 12
Test administration: SAT May 3, 2025
Tested on: May 3, 2025
Record Locator: 410244771



Build your future, your way, with free personalized career and college planning tools

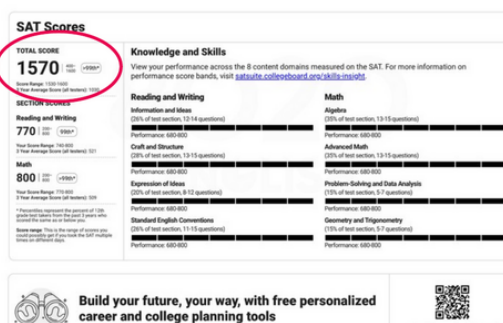


satsuite.org/whatsnext



Your Scores

Name: Linh Pham
Grade: 12
Test administration: SAT December 7, 2024
Tested on: Dec 7, 2024
Record Locator: 409986376



Build your future, your way, with free personalized career and college planning tools



satsuite.org/whatsnext

Học viên 8020 – SAT 1550 & 1570 (College Board)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

BẢNG VÀNG HỌC VIÊN

SAT
CHAU CÁT TƯỜNG
Tư vấn hướng nghiệp học & điểm số8020
ENGLISH

Bảng vàng học viên



Bé Khanh Đăng

SAT Bứt phá + Năng cao Cam kết 140++ => Kết quả 1510



Bé Phan Nguyễn Thảo Nguyễn

SAT Năng cao



Bé Lê Tâm Anh

SAT Bứt phá + Năng cao Cam kết 140++ => Bứt phá kết quả 1530

KHÁNH ĐĂNG – SAT 1510

“SAT Bứt phá + Năng cao cam kết 140++ → 1510”

THẢO NGUYỄN – SAT 1520

“SAT Năng cao → 1520”

TÂM ANH – SAT 1530

“SAT Bứt phá + Năng cao cam kết 140++ → 1530”

Bảng vàng SAT – Học viên đạt 1510 · 1520 · 1530

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ AP

8020
ENGLISH

AP Biology: 4 · AP Chemistry: 4



AP Calculus AB: 5



AP Calculus BC: 5



AP Chemistry: 5

Bảng điểm AP thật của học viên – nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Điểm AP thật – Calculus AB/BC 5/5 · Biology & Chemistry 4–5 (College Board)

Mục lục • Contents

1	Number and Algebra	8
1.1	Number Sets, Standard Form, and Approximation	8
1.2	Sequences	10
1.3	Series: sums of sequences	12
1.4	Sigma notation	13
1.5	Counting principles and the binomial theorem	13
1.6	The Binomial Theorem for Negative and Fractional Indices (AHL)	15
1.7	Exponents and logarithms	17
1.8	Financial applications of sequences and series	18
1.9	Roots of unity (AHL)	19
1.10	Mathematical proof	20
1.11	Complex numbers (AHL)	23
1.12	Loci in the Complex Plane (AHL)	25
1.13	Systems of linear equations (AHL)	26
1.14	Partial fractions (AHL)	27
1.15	Practice: Paper 1 style (no calculator)	30
1.16	Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)	33
1.17	Additional practice: Paper 1 style (no calculator)	38
1.18	Additional practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)	40
1.19	Extra practice: Mixed mastery	43
2	Functions	46
2.1	Functions, domain, and range	46
2.2	Transformations of graphs	47
2.3	The graphs of $y = f(x) $ and $y = f(x)$	48
2.4	Odd and even functions	49
2.5	Linear functions and the equation of a line	51
2.6	Quadratic functions	52
2.7	Quadratic inequalities	53
2.8	Locating Roots by Sign Change	54
2.9	Rational functions	55
2.10	Rational functions with a quadratic denominator (AHL)	56
2.11	The Reciprocal Function $y = \frac{1}{f(x)}$ (AHL)	57
2.12	Exponential and logarithmic functions	59
2.13	Modelling with functions	60
2.14	Composite and inverse functions	61
2.15	Solving $ f(x) = g(x) $ and other equations involving modulus (AHL)	63
2.16	Polynomial functions (AHL)	65
2.17	Practice: Paper 1 style (no calculator)	67
2.18	Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)	70
2.19	Further practice: Paper 1 style (no calculator)	73
2.20	Further practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)	75
2.21	Additional practice: Mixed review	77

2.22 Extra practice: Mixed mastery	81
3 Geometry and Trigonometry	84
3.1 Right-angle trigonometry and radian measure	84
3.2 The unit circle and circular functions	84
3.3 Trigonometric identities	85
3.4 Trigonometric equations and graphs	86
3.5 The Harmonic Form $R \sin(\theta + \alpha)$ (AHL)	87
3.6 Non-right-angled triangle trigonometry	89
3.7 Applications: angles of elevation and depression, and bearings	90
3.8 Three-dimensional trigonometry and geometry of solids	92
3.9 Vectors (AHL)	93
3.10 Vector geometry (AHL)	94
3.11 Classifying pairs of lines in space (AHL)	96
3.12 Angles and Intersections Involving Planes (AHL)	97
3.13 Reciprocal trigonometric function graphs (AHL)	98
3.14 Inverse trigonometric functions (AHL)	99
3.15 Scalar and vector projections (AHL)	101
3.16 Practice: Paper 1 style (no calculator)	103
3.17 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)	106
3.18 Additional practice: Paper 1 style (no calculator)	108
3.19 Additional practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)	110
3.20 Further practice: Paper 1 style (no calculator)	112
3.21 Further practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)	114
3.22 Extra practice: Mixed mastery	117
3.23 Extra practice: Mixed mastery II	122
4 Statistics and Probability	125
4.1 Populations, samples, and sampling techniques	125
4.2 Descriptive statistics	126
4.3 Measures of position: quartiles, percentiles, and box-and-whisker plots	127
4.4 Grouped (frequency table) data with class intervals	129
4.5 Bivariate statistics: correlation and regression	131
4.6 Probability	131
4.7 Counting principles: permutations and combinations	133
4.8 Discrete random variables	134
4.9 The geometric distribution (AHL)	136
4.10 The binomial distribution	138
4.11 The Poisson distribution (AHL)	138
4.12 The normal distribution	140
4.13 Bayes' theorem (AHL)	140
4.14 Expected value in decision-making (AHL)	141
4.15 Continuous random variables (AHL)	143
4.16 Practice: Paper 1 style (no calculator)	143
4.17 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)	146
4.18 Practice: Paper 1 style (no calculator) II	149
4.19 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed) II	151
4.20 Practice: Paper 1 style (no calculator) III	155
4.21 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed) III	157
4.22 Practice: Paper 1 style (no calculator) IV	159
4.23 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed) IV	160
4.24 Additional practice: Mixed review (Set 5)	161

4.25 Extra practice: Mixed mastery (Set 6)	163
4.26 Extra practice: Mixed mastery (Set 7)	167
5 Calculus	169
5.1 Limits and differentiation from first principles	169
5.2 Differentiation rules	170
5.3 Derivatives of further functions (AHL)	171
5.4 Applications of differentiation	172
5.5 Curve sketching	173
5.6 Points of inflection and concavity	175
5.7 Kinematics	176
5.8 Integration and areas	178
5.9 Volumes of revolution (AHL)	179
5.10 Integration by parts (AHL)	180
5.11 Integration using partial fractions (AHL)	181
5.12 Implicit differentiation and related rates (AHL)	183
5.13 Maclaurin series (AHL)	184
5.14 L'Hôpital's rule (AHL)	185
5.15 Differential equations (AHL)	186
5.16 Practice: Paper 1 style (no calculator)	189
5.17 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)	193
5.18 Additional practice: Paper 1 style (no calculator)	198
5.19 Additional practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)	201
5.20 Extra practice: Mixed mastery	203
5.21 Extra practice: Mixed mastery II	208

Number and Algebra

Mục tiêu Unit: Dãy số và cấp số cộng/nhân, ký hiệu tổng Σ , các nguyên lý đếm và khai triển nhị thức, mũ và logarit, các kỹ thuật chứng minh toán học (trực tiếp, phản chứng, phản ví dụ, quy nạp), và (AHL) số phức cùng hệ phương trình tuyến tính.

1.1 Number Sets, Standard Form, and Approximation

Real numbers are built up from smaller nested sets. The **natural numbers** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ are the counting numbers and zero; the **integers** $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ extend these to include negative whole numbers; the **rational numbers** $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} : p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$ are all numbers expressible as a ratio of integers (equivalently, every terminating or recurring decimal); and the **real numbers** $\mathbb{R}$ contain both the rationals and the **irrational numbers** $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ — numbers such as $\sqrt{2}$, π , and e , whose decimal expansions never terminate and never repeat. These sets are nested: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. (A rigorous proof that $\sqrt{2}$ is irrational is given later in this unit, in the section on Mathematical proof.)

1.1.1 Standard (scientific) form

Very large or very small numbers are usually written in **standard form** (scientific notation) to keep track of place value clearly, e.g. $52\,000 = 5.2 \times 10^4$ and $0.00081 = 8.1 \times 10^{-4}$.

Standard form: a number is written as $a \times 10^k$, where $1 \leq |a| < 10$ and $k \in \mathbb{Z}$.

Multiplying/dividing in standard form:

$$(a_1 \times 10^{k_1}) \times (a_2 \times 10^{k_2}) = (a_1 a_2) \times 10^{k_1+k_2}, \quad \frac{a_1 \times 10^{k_1}}{a_2 \times 10^{k_2}} = \frac{a_1}{a_2} \times 10^{k_1-k_2},$$

then **renormalise** (adjust the coefficient and exponent together) if the resulting coefficient is not in $[1, 10)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Dạng chuẩn (standard form) $a \times 10^k$ luôn yêu cầu $1 \leq |a| < 10$ — đây là quy ước bắt buộc chứ không chỉ là cách trình bày đẹp. Khi nhân hoặc chia hai số ở dạng chuẩn, ta nhân/chia phần hệ số a và CỘNG/TRỪ số mũ k tương ứng (vì cùng cơ số 10); nếu hệ số kết quả rơi ra ngoài khoảng $[1, 10)$ (chẳng hạn ra 30 hoặc 0.4), phải chuẩn hoá lại bằng cách dịch dấu phẩy và điều chỉnh số mũ cho khớp.

Ví dụ mẫu • Worked example

Given $p = 6 \times 10^4$ and $q = 5 \times 10^6$, calculate pq and $\frac{p}{q}$, giving each answer in standard form.

$$pq = (6 \times 5) \times 10^{4+6} = 30 \times 10^{10}.$$

Since $30 \notin [1, 10)$, renormalise: $30 \times 10^{10} = 3.0 \times 10^1 \times 10^{10} = 3.0 \times 10^{11}$.

$$\frac{p}{q} = \frac{6}{5} \times 10^{4-6} = 1.2 \times 10^{-2}.$$

(Check: $p = 60\,000$, $q = 5\,000\,000$; $pq = 6 \times 10^4 \times 5 \times 10^6 = 300\,000\,000\,000 = 3.0 \times 10^{11} \checkmark$;
 $p/q = 60\,000 \div 5\,000\,000 = 0.012 = 1.2 \times 10^{-2} \checkmark$.)

1.1.2 Rounding and bounds

A number can be approximated by rounding to a given number of **decimal places** (counting digits after the decimal point) or to a given number of **significant figures** (counting from the first non-zero digit). Any rounded (or truncated) measurement carries an implied **degree of accuracy**: the true value lies within half a unit of the last figure kept.

Upper and lower bounds: if a measurement x is given rounded to a precision p (the place value of the last figure kept – e.g. the nearest whole number, $p = 1$; the nearest 0.1, $p = 0.1$), the true value X satisfies

$$x - \frac{p}{2} \leq X < x + \frac{p}{2}.$$

For example, a length given as 12 cm to 2 significant figures has $p = 1$ cm (the last significant digit is the units digit), so the true length lies in $[11.5, 12.5)$ cm.

Combining bounds: for a sum or product, the *maximum* possible result uses the upper bounds of the quantities involved and the *minimum* uses the lower bounds; for a quotient $\frac{A}{B}$, the maximum uses (upper bound of A) $\div$ (lower bound of B), and the minimum uses (lower bound of A) $\div$ (upper bound of B).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi một số đo được làm tròn, giá trị thật luôn nằm trong một khoảng quanh giá trị đã cho – gọi là **cận trên** (upper bound) và **cận dưới** (lower bound), rộng $\pm \frac{p}{2}$ quanh giá trị đã cho, với p là độ chính xác (giá trị của chữ số cuối cùng được giữ lại). Khi tính toán với các đại lượng có cận (ví dụ tốc độ = quãng đường $\div$ thời gian), để tìm cận TRÊN của kết quả, luôn lấy cận trên của tử số và cận DƯỚI của mẫu số (và ngược lại cho cận dưới) – đây là điểm rất dễ nhầm lẫn nếu không suy luận cẩn thận từng bước.

Ví dụ mẫu · Worked example

A car travels a distance of 180 km, measured to 3 significant figures, in a time of 2.5 hours, measured to 2 significant figures. Find the upper and lower bounds of the average speed
 $\left(\text{speed} = \frac{\text{distance}}{\text{time}} \right).$

Distance 180 km to 3 s.f.: the last significant digit is the units digit, so $p = 1$ km and $179.5 \leq d < 180.5$.

Time 2.5 hours to 2 s.f.: the last significant digit is the first decimal place, so $p = 0.1$ hours and $2.45 \leq t < 2.55$.

Maximum speed uses the upper bound of distance and the *lower* bound of time:

$$\text{speed}_{\max} = \frac{180.5}{2.45} \approx 73.7 \text{ km/h (3 s.f.)}$$

Minimum speed uses the lower bound of distance and the *upper* bound of time:

$$\text{speed}_{\min} = \frac{179.5}{2.55} \approx 70.4 \text{ km/h (3 s.f.)}$$

So $70.4 \text{ km/h} \leq \text{speed} < 73.7 \text{ km/h}$, which contains the point estimate $180 \div 2.5 = 72 \text{ km/h}$, as it should. ✓

Percentage error: if v_A is an approximate (estimated or measured) value and v_E is the exact (true) value,

$$\% \text{ error} = \left| \frac{v_A - v_E}{v_E} \right| \times 100\%.$$

The percentage error is always reported as a non-negative quantity – the modulus removes the sign of the difference, and the *exact* value always goes in the denominator.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Sai số phần trăm (percentage error) đo độ lệch tương đối giữa giá trị gần đúng v_A và giá trị đúng v_E , tính theo công thức $\left| \frac{v_A - v_E}{v_E} \right| \times 100\%$ – luôn chia cho giá trị ĐÚNG (không phải giá trị gần đúng) ở mẫu số, và luôn lấy trị tuyệt đối vì sai số phần trăm không mang dấu.

Ví dụ mẫu · Worked example

A tour company estimates a coach journey will take 45 minutes; it actually takes 48 minutes. Find the percentage error in the estimate.

$$\% \text{ error} = \left| \frac{45 - 48}{48} \right| \times 100\% = \frac{3}{48} \times 100\% = 6.25\%.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A length is measured as 12 cm to 2 significant figures. Find the maximum possible percentage error in this measurement.

From the bounds found above (this level of accuracy gives $p = 1$), the true length lies in $[11.5, 12.5)$, so the maximum possible absolute error is 0.5 cm. The percentage error is largest when the true value in the denominator is *smallest*, i.e. when $v_E = 11.5$:

$$\% \text{ error}_{\max} = \frac{0.5}{11.5} \times 100\% \approx 4.35\% \text{ (3 s.f.)}$$

1.2 Sequences

A **sequence** $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots$ is an ordered list of numbers, each called a **term**. A sequence may be defined by a formula for the general term u_n (an **explicit** definition) or by giving the first term(s) together with a rule linking each term to the one(s) before it (a **recursive** definition, e.g. $u_{n+1} = u_n + 3$). Two families of sequence dominate the syllabus because their terms and sums can be written in closed form.

1.2.1 Arithmetic sequences

An **arithmetic sequence** has a constant **common difference** $d = u_{n+1} - u_n$ between consecutive terms.

General term: $u_n = u_1 + (n-1)d$. **Arithmetic mean:** if a, b, c are consecutive terms of an arithmetic sequence, $b = \frac{a+c}{2}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cấp số cộng (arithmetic sequence) có **hiệu** giữa hai số hạng liên tiếp không đổi, gọi là công sai d . Công thức số hạng tổng quát $u_n = u_1 + (n-1)d$ – chú ý số mũ $(n-1)$ chứ không phải n , vì u_1 ứng với "0 bước nhảy". Nếu a, b, c liên tiếp là cấp số cộng thì b chính là trung bình cộng của a và c .

Ví dụ mẫu · Worked example

The 5th term of an arithmetic sequence is 23 and the 12th term is 58. Find u_1 , d , and S_{15} .
 $u_{12} - u_5 = 7d = 58 - 23 = 35 \Rightarrow d = 5$. Then $u_5 = u_1 + 4d = 23 \Rightarrow u_1 = 23 - 20 = 3$.

$$S_{15} = \frac{15}{2}(2(3) + 14(5)) = \frac{15}{2}(6 + 70) = \frac{15}{2}(76) = 570.$$

(The sum formula is derived below.)

1.2.2 Geometric sequences

A **geometric sequence** has a constant **common ratio** $r = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ($r \neq 0$) between consecutive terms.

General term: $u_n = u_1 r^{n-1}$. **Geometric mean:** if a, b, c are consecutive positive terms of a geometric sequence, $b = \sqrt{ac}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A geometric sequence has $u_2 = 6$ and $u_5 = 48$. Find r , u_1 , and S_{10} .

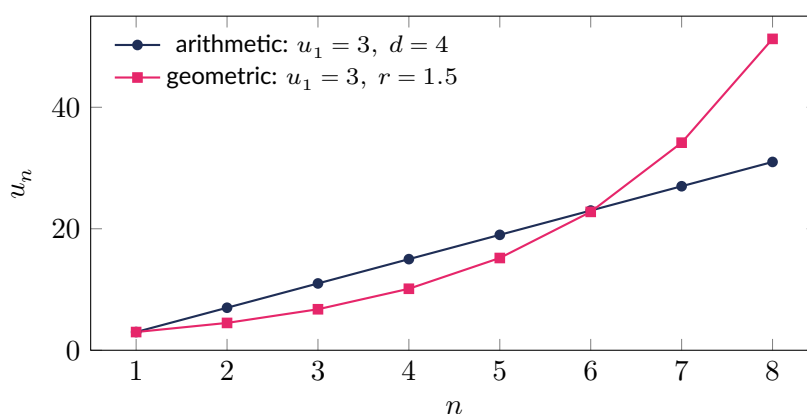
$$\frac{u_5}{u_2} = r^3 = \frac{48}{6} = 8 \Rightarrow r = 2. \text{ Then } u_2 = u_1 r = 6 \Rightarrow u_1 = 3.$$

$$S_{10} = \frac{u_1(r^{10} - 1)}{r - 1} = \frac{3(1024 - 1)}{1} = 3 \times 1023 = 3069.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cấp số nhân (geometric sequence) có **tỉ số** giữa hai số hạng liên tiếp không đổi, gọi là công bội r . Khi $r < 0$, dãy số sẽ **dao động** dấu (âm, dương, âm, dương,...). Trung bình nhân $b = \sqrt{ac}$ chỉ áp dụng khi a, c cùng dấu (thường xét với số hạng dương).



Arithmetic growth is linear (constant increments); geometric growth is exponential (the increments themselves grow).

1.3 Series: sums of sequences

A **series** is the sum of the terms of a sequence. $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ denotes the sum of the first n terms.

Arithmetic series: $S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ (either form; the second says “average of first and last term, times the number of terms”).

Geometric series: $S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r}$ ($r \neq 1$).

Sum to infinity: if $|r| < 1$, the geometric series **converges** and $S_\infty = \frac{u_1}{1 - r}$. If $|r| \geq 1$, S_∞ does not exist (the series diverges, or oscillates without settling).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức $S_\infty = \frac{u_1}{1 - r}$ CHỈ dùng được khi $|r| < 1$ – đây là điều kiện hội tụ bắt buộc phải kiểm tra trước, vì nếu $|r| \geq 1$ thì tổng vô hạn không tồn tại (tổng các số hạng ngày càng lớn hoặc dao động không giảm). Đề IB thường “gài” học sinh quên kiểm tra điều kiện này.

Ví dụ mẫu · Worked example

An infinite geometric series has $u_1 = 10$ and $u_6 = \frac{10}{243}$. Find r , and evaluate S_∞ .

$u_6 = u_1 r^5 \Rightarrow \frac{10}{243} = 10r^5 \Rightarrow r^5 = \frac{1}{243} = \frac{1}{3^5} \Rightarrow r = \frac{1}{3}$. Since $|r| < 1$, S_∞ exists:

$$S_\infty = \frac{u_1}{1 - r} = \frac{10}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{10}{\frac{2}{3}} = 15.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A theatre's front row has 18 seats. Each successive row has 3 more seats than the row in front of it, and there are 25 rows in total. Find the number of seats in the back row and the total number of seats in the theatre.

This is arithmetic with $u_1 = 18$, $d = 3$, $n = 25$.

$$u_{25} = 18 + 24(3) = 18 + 72 = 90 \text{ seats.}$$

$$S_{25} = \frac{25}{2}(u_1 + u_{25}) = \frac{25}{2}(18 + 90) = \frac{25}{2}(108) = 1350 \text{ seats.}$$

Ví dụ mẫu · Worked example

The first three terms of a geometric sequence are $k - 1$, $k + 1$, $2k + 2$. Find all possible values of k and the corresponding common ratio.

For a geometric sequence, the middle term squared equals the product of the outer two: $(k + 1)^2 = (k - 1)(2k + 2)$.

$$k^2 + 2k + 1 = 2k^2 - 2 \Rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow (k - 3)(k + 1) = 0 \Rightarrow k = 3 \text{ or } k = -1.$$

If $k = 3$: terms are 2, 4, 8, so $r = 2$ – valid. If $k = -1$: terms are $-2, 0, 0$; a geometric sequence cannot have a zero term (division by zero in r), so $k = -1$ is **rejected**. Answer: $k = 3, r = 2$.

(!) Lỗi thường gặp: Two very common slips: (1) using $S_\infty = \frac{u_1}{1-r}$ without first checking $|r| < 1$; (2) mixing up u_n (the n -th term) with S_n (the sum of the first n terms) – always re-read which one the question asks for.

1.4 Sigma notation

Sigma notation writes a sum compactly: $\sum_{k=1}^n u_k = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, where k is the (dummy) index running from the lower limit to the upper limit.

Linearity: $\sum_{k=1}^n (au_k + bv_k) = a \sum_{k=1}^n u_k + b \sum_{k=1}^n v_k$. A constant sums to itself n times: $\sum_{k=1}^n c = nc$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Evaluate $\sum_{r=1}^4 (2r^2 - 1)$, and evaluate $\sum_{k=1}^6 (5 + \frac{1}{2}(k - 1))$ by recognising it as an arithmetic series.

First sum directly: $r = 1: 1, r = 2: 7, r = 3: 17, r = 4: 31$, giving total $1 + 7 + 17 + 31 = 56$.

Second sum: this is arithmetic with $u_1 = 5, d = \frac{1}{2}, n = 6$, so $u_6 = 5 + 5(\frac{1}{2}) = 7.5$.

$$S_6 = \frac{6}{2}(5 + 7.5) = 3(12.5) = 37.5.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ký hiệu Σ chỉ là cách viết gọn của một tổng – khi gặp $\sum_{k=1}^n (...)$, luôn hỏi: đây có phải cấp số cộng/nhân không? Nếu đúng, dùng công thức S_n có sẵn sẽ nhanh hơn nhiều so với cộng từng số hạng, đặc biệt khi n lớn.

1.5 Counting principles and the binomial theorem

1.5.1 Permutations and combinations

Factorial: $n! = n(n-1)(n-2) \cdots (2)(1)$, with $0! = 1$.

Permutations (order matters): the number of ways to arrange r objects chosen from n distinct objects is ${}^n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$.

Combinations (order does not matter): the number of ways to choose r objects from n distinct objects is $\binom{n}{r} = {}^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Sự khác biệt cốt lõi: **chỉnh hợp** (P) dùng khi **thứ tự có ý nghĩa** (ví dụ: xếp huy chương vàng/bạc/đồng), **tổ hợp** (C) dùng khi **thứ tự không quan trọng** (ví dụ: chọn một nhóm bạn để đi chơi). Luôn tự hỏi "nếu đổi thứ tự thì kết quả có được xem là khác không?" trước khi chọn công thức.

Ví dụ mẫu · Worked example

A committee of 3 people is chosen from 8 candidates. In how many ways can this be done if (a) the three positions are identical (an ordinary committee), and (b) the committee has three distinct roles – president, secretary, treasurer?

(a) Order does not matter: $\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$.

(b) Order matters (each role is different): ${}^8P_3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A password consists of 4 *distinct* letters (from the 26-letter alphabet) followed by 2 *distinct* digits (from 0–9). How many different passwords are possible?

Letters: ${}^{26}P_4 = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$. **Digits:** ${}^{10}P_2 = 10 \cdot 9 = 90$. By the multiplication principle: total = $358\,800 \times 90 = 32\,292\,000$ passwords.

1.5.2 The binomial theorem

For a positive integer n : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. The **general (or $(k+1)$ -th) term** is $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$. The coefficients $\binom{n}{k}$ form **Pascal's triangle**, where each entry is the sum of the two entries above it: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

$$\begin{array}{ccccccc}
n=0 & & & & & & 1 \\
n=1 & & & & 1 & 1 & \\
n=2 & & & 1 & 2 & 1 & \\
n=3 & & 1 & 3 & 3 & 1 & \\
n=4 & & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
n=5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
n=6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}$$

Pascal's triangle: row n lists the coefficients $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$. Each entry is the sum of the two entries above it.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the coefficient of x^5 in the expansion of $(x + 2)^8$.

General term $T_{k+1} = \binom{8}{k} x^{8-k} 2^k$. Need $8 - k = 5 \Rightarrow k = 3$.

$$T_4 = \binom{8}{3} x^5 (2)^3 = 56 \cdot 8 \cdot x^5 = 448x^5.$$

Coefficient = 448.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the term independent of x (the constant term) in the expansion of $\left(x - \frac{3}{x}\right)^4$.

General term: $T_{k+1} = \binom{4}{k} x^{4-k} \left(\frac{-3}{x}\right)^k = \binom{4}{k} (-3)^k x^{4-2k}$. Need $4 - 2k = 0 \Rightarrow k = 2$.

$$T_3 = \binom{4}{2} (-3)^2 x^0 = 6 \cdot 9 = 54.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Use the binomial theorem to approximate $(1.02)^{10}$ correct to 4 decimal places, keeping terms up to x^3 in the expansion of $(1 + x)^{10}$ with $x = 0.02$.

$(1 + x)^{10} \approx 1 + 10x + 45x^2 + 120x^3$ (using $\binom{10}{1} = 10$, $\binom{10}{2} = 45$, $\binom{10}{3} = 120$). With $x = 0.02$:

$$1 + 10(0.02) + 45(0.0004) + 120(0.000008) = 1 + 0.2 + 0.018 + 0.00096 = 1.21896 \approx 1.2190.$$

(The true value, $1.02^{10} = 1.21899 \dots$, agrees to 4 d.p. — the terms in x^4 and beyond are negligible here.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Số hạng tổng quát $T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ — chú ý chỉ số $(k+1)$ ứng với k (không phải số hạng thứ k), vì k bắt đầu từ 0. Khi tìm "hệ số của x^m " hoặc "số hạng không chứa x ", luôn lập phương trình cho số mũ của x bằng m (hoặc bằng 0) rồi giải ra k trước khi thay vào công thức.

1.6 The Binomial Theorem for Negative and Fractional Indices (AHL)

The binomial theorem established above is a *finite* expansion of $n + 1$ terms, valid for every value of x , whenever n is a non-negative integer. When the index n is negative or a fraction (any rational number), the same-looking formula still generates the correct coefficients term by term, but the expansion no longer terminates — it becomes an **infinite series**, and it only equals $(1 + x)^n$ for a restricted range of x .

AHL only. For any rational number n and $|x| < 1$,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots,$$

an infinite series (it terminates, and reduces to the ordinary binomial theorem, only when n is a non-negative integer). For $(a+bx)^n$ with $a \neq 0$, factor out a^n first:

$$(a+bx)^n = a^n \left(1 + \frac{b}{a}x\right)^n = a^n \left[1 + n\left(\frac{b}{a}x\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{b}{a}x\right)^2 + \dots\right], \quad \text{valid for } \left|\frac{b}{a}x\right| < 1.$$

(!) Lỗi thường gặp: (AHL) The expansion $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \dots$ only represents $(1+x)^n$ when $|x| < 1$. This is different from the ordinary binomial theorem for a positive integer n , which is an exact, *finite* identity true for *all* x : here, whenever n is negative or fractional, the series is infinite and it diverges (fails to represent the function) outside $|x| < 1$. Always state the validity range as part of the answer – it is the single most commonly forgotten step.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Công thức khai triển nhị thức cho n âm hoặc phân số có DẠNG giống hệt công thức đã học, nhưng bản chất khác hẳn: đây là một **chuỗi vô hạn** (không bao giờ dừng lại), và chỉ đúng khi $|x| < 1$ – điều kiện hội tụ này bắt buộc phải nêu rõ trong câu trả lời, vì đề IB thường hỏi thẳng "khai triển này đúng với những giá trị nào của x ?". Với $(a+bx)^n$, luôn đưa a^n ra ngoài trước để đưa biểu thức về dạng $(1 + (\text{cái gì đó nhỏ}))^n$ rồi mới áp dụng công thức.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the first four terms of the expansion of $(1-2x)^{-1}$ in ascending powers of x , stating the range of values of x for which the expansion is valid.

Here $n = -1$, applied with x replaced by $-2x$:

$$\begin{aligned}(1-2x)^{-1} &= 1 + (-1)(-2x) + \frac{(-1)(-2)}{2!}(-2x)^2 + \frac{(-1)(-2)(-3)}{3!}(-2x)^3 + \dots \\ &= 1 + 2x + \frac{2}{2}(4x^2) + \frac{-6}{6}(-8x^3) + \dots = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots\end{aligned}$$

Valid for $|-2x| < 1$, i.e. $|x| < \frac{1}{2}$.

(Check: this is exactly the geometric series $\sum_{k=0}^{\infty} (2x)^k = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots$ with common ratio $2x$, which converges precisely when $|2x| < 1 \iff |x| < \frac{1}{2}$. ✓)

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the first three terms of the expansion of $(1+x)^{1/2}$ in ascending powers of x . Hence approximate $\sqrt{1.02}$, and compare with the true value.

Here $n = \frac{1}{2}$:

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \dots = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \dots \quad (|x| < 1).$$

Set $x = 0.02$ (so $\sqrt{1.02} = (1 + 0.02)^{1/2}$):

$$\sqrt{1.02} \approx 1 + \frac{1}{2}(0.02) - \frac{1}{8}(0.02)^2 = 1 + 0.01 - 0.00005 = 1.00995.$$

A calculator gives $\sqrt{1.02} = 1.00995049 \dots$, which rounds to 1.00995 to 5 decimal places – identical to the binomial approximation at that accuracy. ✓

1.7 Exponents and logarithms

Laws of exponents: $a^m a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Laws of logarithms ($a, x, y > 0$, base $a > 0$, $a \neq 1$): $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$; $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$; $\log_a(x^n) = n \log_a x$.

Change of base: $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$. **Inverse relationship:** $a^{\log_a x} = x$ and $\log_a(a^x) = x$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Logarit và hàm mũ là hai phép toán ngược nhau: $y = a^x \iff x = \log_a y$. Ba quy tắc log (cộng khi nhân, trừ khi chia, nhân hệ số khi có lũy thừa) chỉ áp dụng khi các biểu thức bên trong log đều **dương** – đây là điều kiện xác định phải luôn kiểm tra khi giải phương trình log.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $9^x - 4(3^x) - 45 = 0$.

Note $9^x = (3^x)^2$. Let $u = 3^x$ (so $u > 0$): $u^2 - 4u - 45 = 0 \Rightarrow (u - 9)(u + 5) = 0 \Rightarrow u = 9$ (reject $u = -5$, since $3^x > 0$).

$$3^x = 9 = 3^2 \Rightarrow x = 2.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $\log_5 x + \log_5(x - 4) = 1$.

Combine: $\log_5 [x(x - 4)] = 1 \Rightarrow x(x - 4) = 5^1 = 5 \Rightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow (x - 5)(x + 1) = 0$. So $x = 5$ or $x = -1$. Domain requires $x > 0$ and $x - 4 > 0$, i.e. $x > 4$. Reject $x = -1$ (and note $x = -1$ also fails $x > 0$). **Answer:** $x = 5$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $3^{2x+1} = 5^{x-1}$, giving the exact answer and a value correct to 3 significant figures.

Take $\ln$ of both sides: $(2x + 1) \ln 3 = (x - 1) \ln 5$.

$$2x \ln 3 + \ln 3 = x \ln 5 - \ln 5 \Rightarrow x(2 \ln 3 - \ln 5) = -(\ln 3 + \ln 5) \Rightarrow x = -\frac{\ln 15}{\ln 1.8}.$$

Numerically, $x = -\frac{2.70805}{0.58779} \approx -4.607$, so $x \approx -4.61$ (3 s.f.).

Ví dụ mẫu · Worked example

A radioactive substance decays according to $N(t) = N_0 e^{-kt}$, where $N_0 = 200$ mg and the half-life is 5 days. Find k , and the mass remaining after 12 days.

Half-life: $N(5) = 100 \Rightarrow 200e^{-5k} = 100 \Rightarrow e^{-5k} = 0.5 \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{5} \approx 0.1386$ per day.

$$N(12) = 200e^{-0.1386(12)} = 200e^{-1.6636} \approx 200(0.1894) \approx 37.9 \text{ mg.}$$

(!) Lỗi thường gặp: $\log_a(x+y) \neq \log_a x + \log_a y$ – the addition law only applies to a **product** xy , never a sum $x + y$. Also, $(\log_a x)^n \neq \log_a(x^n) = n \log_a x$: the power law moves an exponent n on x out in front, but does not create a power of the whole logarithm.

1.8 Financial applications of sequences and series

Geometric sequences model quantities that grow or shrink by a constant *ratio* each period – exactly how compound interest behaves.

Compound interest: if principal PV earns interest rate r per annum compounded k times per year for t years, the future value is

$$FV = PV \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt} = PV(1 + i)^n,$$

where $i = \frac{r}{k}$ is the interest rate per period and $n = kt$ is the total number of periods.

Loan repayment (annuity): a loan of present value PV , repaid in n equal instalments R at interest rate i per period, satisfies

$$PV = \frac{R}{1+i} + \frac{R}{(1+i)^2} + \dots + \frac{R}{(1+i)^n} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

– a geometric series of discounted payments with common ratio $(1+i)^{-1}$, summed using the geometric series formula.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Lãi kép (compound interest) chính là một cấp số nhân: mỗi kỳ, số dư được nhân với hệ số $(1+i)$ không đổi. Công thức trả góp (loan repayment) là tổng của MỘT cấp số nhân gồm n khoản thanh toán đã được "chiết khấu" (discounted) về thời điểm hiện tại – đây là lý do vì sao chương "dãy số và chuỗi số" luôn có phần ứng dụng tài chính trong đề IB AA.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the future value of \$5000 invested at 6% per annum, compounded monthly, for 4 years.

$$i = \frac{0.06}{12} = 0.005, n = 12(4) = 48.$$

$$FV = 5000(1.005)^{48} \approx 5000(1.27049) \approx \$6352.46.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Derive the loan repayment formula, then find the monthly repayment on a \$200 000 loan at 4.8% per annum (compounded monthly) over 25 years (300 monthly instalments).

Derivation: each repayment R made j months from now has present value $R(1+i)^{-j}$. Summing over $j = 1, \dots, n$ gives a geometric series with first term $R(1+i)^{-1}$ and common ratio $(1+i)^{-1}$:

$$PV = \frac{R(1+i)^{-1}[1 - (1+i)^{-n}]}{1 - (1+i)^{-1}} = R \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \Rightarrow R = \frac{PV \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}}.$$

Calculation: $i = \frac{0.048}{12} = 0.004, n = 300. (1.004)^{-300} \approx 0.30192.$

$$R = \frac{200\,000(0.004)}{1 - 0.30192} = \frac{800}{0.69808} \approx \$1146.03 \text{ per month.}$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A retiree has \$300 000 in a fund earning 5% per annum, and withdraws a fixed amount R at the end of each year so that the fund is reduced to exactly zero after 20 years. Find R .

Using the annuity formula with $PV = 300\,000, i = 0.05, n = 20: (1.05)^{-20} \approx 0.37689.$

$$R = \frac{300\,000(0.05)}{1 - 0.37689} = \frac{15\,000}{0.62311} \approx \$24\,072.68 \text{ per year.}$$

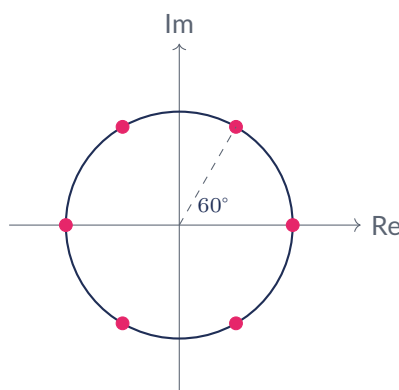
(!) Lỗi thường gặp: The interest rate i and number of periods n in every compound-interest or annuity formula must use the **same time unit** (e.g. both monthly, or both annual) — a very common error is mixing an annual rate with a monthly period count without first dividing r by k .

1.9 Roots of unity (AHL)

AHL only. The n -th roots of unity are the n solutions of $z^n = 1$. Writing $1 = 1(\cos 0 + i \sin 0)$ and applying De Moivre's theorem (as for any n -th root), the roots are

$$z_k = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

evenly spaced around the unit circle — the vertices of a regular n -gon inscribed in it.



The six 6th roots of unity: vertices of a regular hexagon inscribed in the unit circle, spaced 60° apart.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) List all six 6th roots of unity in the form $a + bi$.

Angles $\theta_k = \frac{2\pi k}{6} = 60^\circ k$ for $k = 0, \dots, 5$: $0^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 180^\circ, 240^\circ, 300^\circ$.

$$1, \quad \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -1, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Prove that the n -th roots of unity ($n \geq 2$) sum to zero.

The roots are $z_k = \omega^k$ for $k = 0, \dots, n-1$, where $\omega = e^{2\pi i/n}$. This is a **geometric series** with first term 1, common ratio ω , and n terms:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1}.$$

Since $\omega = e^{2\pi i/n}$, we have $\omega^n = e^{2\pi i} = 1$, so the numerator is $1 - 1 = 0$. The denominator $\omega - 1 \neq 0$ for $n \geq 2$ (as $\omega \neq 1$), so the sum equals $\frac{0}{\omega - 1} = 0$. ■

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

(AHL) Căn bậc n của đơn vị (roots of unity) chia đều đường tròn đơn vị thành n phần bằng nhau, tạo thành đỉnh của một đa giác đều nội tiếp. Kết quả "tổng các căn bậc n của đơn vị bằng 0" là một ứng dụng đẹp của công thức tổng cấp số nhân đã học ở đầu chương — minh họa mối liên hệ chặt chẽ giữa đại số (chuỗi số) và hình học (số phức).

1.10 Mathematical proof

Mathematics requires **rigorous justification**, not just numerical evidence. Four standard proof techniques recur throughout the AA course.

Techniques of proof

- **Direct proof:** start from known definitions/facts and reason forward, step by logical step, to the desired conclusion.
- **Proof by exhaustion:** when a statement covers only a finite number of cases (or can be

reduced to finitely many cases, e.g. by considering every possible remainder on division by a fixed integer), check that the statement holds in *every* case.

- **Proof by contradiction:** assume the *negation* of the statement is true, and show this assumption leads to a logical impossibility; hence the original statement must be true.
- **Disproof by counterexample:** to show a "for all" statement is *false*, it suffices to exhibit just *one* case where it fails.
- **Proof by mathematical induction:** to prove $P(n)$ for all integers $n \geq n_0$: (1) **base case** – verify $P(n_0)$; (2) **inductive step** – assume $P(k)$ (the inductive hypothesis) and prove $P(k+1)$ follows from it; (3) **conclusion** – state that by induction, $P(n)$ holds for all $n \geq n_0$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bốn kỹ thuật chứng minh cốt lõi: **trực tiếp** (đi thẳng từ giả thiết đến kết luận), **phản chứng** (giả sử điều ngược lại đúng rồi suy ra vô lý), **phản ví dụ** (chỉ cần TÌM RA một trường hợp sai để bác bỏ một phát biểu "với mọi"), và **quy nạp** (chứng minh đúng cho một số nhỏ nhất, rồi chứng minh "nếu đúng với k thì đúng với $k+1$ "). Thiếu bước kết luận trong quy nạp – dù các bước trước đúng – vẫn bị trừ điểm trong đề IB.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Direct proof) Prove that the product of two consecutive integers is always even.

Let the integers be n and $n+1$. Among any two consecutive integers, exactly one is even; write the even one as $2m$ for some integer m . Then the product $n(n+1)$ contains the factor $2m$, so $n(n+1) = 2m \cdot (\text{integer})$, which is divisible by 2. Hence $n(n+1)$ is always even. ■

Ví dụ mẫu · Worked example

(Proof by exhaustion) Prove that the square of any integer, when divided by 4, leaves remainder 0 or 1 (never 2 or 3).

Every integer n can be written in exactly one of four forms, corresponding to the possible remainders on division by 4: $4k$, $4k+1$, $4k+2$, $4k+3$, for some integer k . Check each case in turn:

$$(4k)^2 = 16k^2 = 4(4k^2) \quad \text{— remainder 0.}$$

$$(4k+1)^2 = 16k^2 + 8k + 1 = 4(4k^2 + 2k) + 1 \quad \text{— remainder 1.}$$

$$(4k+2)^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4(4k^2 + 4k + 1) \quad \text{— remainder 0.}$$

$$(4k+3)^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4(4k^2 + 6k + 2) + 1 \quad \text{— remainder 1.}$$

These four cases exhaust every possibility for the integer n , and each one gives remainder 0 or 1, so the statement is proved for all integers n . ■

Ví dụ mẫu · Worked example

(Proof by contradiction) Prove that $\sqrt{2}$ is irrational.

Assume, for contradiction, that $\sqrt{2}$ is rational. Then $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ for integers p, q with no common factor ($\gcd(p, q) = 1$), $q \neq 0$. Squaring: $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow p^2 = 2q^2$, so p^2 is even, which forces p itself

to be even (odd^2 is odd). Write $p = 2r$. Then $(2r)^2 = 2q^2 \Rightarrow 4r^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2r^2$, so q^2 is even, forcing q to be even too. But then both p and q are even, contradicting $\gcd(p, q) = 1$. This contradiction shows the original assumption is false, so $\sqrt{2}$ is irrational. ■

Ví dụ mẫu · Worked example

(Disproof by counterexample) Disprove the statement: “For every positive integer n , $n^2 + n + 41$ is prime.”

Test $n = 40$: $40^2 + 40 + 41 = 1600 + 40 + 41 = 1681 = 41^2 = 41 \times 41$, which is **not** prime (it factors as 41×41). Since a single counterexample suffices, the statement is false – even though it happens to hold for every integer $n = 0, 1, \dots, 39$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Proof by induction) Prove by induction that $\sum_{r=1}^n r(r+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ for all $n \geq 1$.

Base case ($n = 1$): LHS = $1(2) = 2$; RHS = $\frac{1(2)(3)}{3} = 2$. True.

Inductive step: assume $\sum_{r=1}^k r(r+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$. Then

$$\sum_{r=1}^{k+1} r(r+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2) = (k+1)(k+2) \left[\frac{k}{3} + 1 \right] = \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3},$$

which is the claimed formula with $n = k + 1$. **Conclusion:** by mathematical induction, the formula holds for all integers $n \geq 1$. ■

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL style) (Proof by induction – an inequality) Prove by induction that $2^n > n^2$ for all integers $n \geq 5$.

Base case ($n = 5$): $2^5 = 32$, $5^2 = 25$, and $32 > 25$. True.

Inductive step: assume $2^k > k^2$ for some $k \geq 5$. Then

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2.$$

It remains to show $2k^2 \geq (k+1)^2$ for $k \geq 5$: $2k^2 - (k+1)^2 = k^2 - 2k - 1$, and for $k \geq 5$ this equals at least $25 - 10 - 1 = 14 > 0$ and is increasing in k , so $2k^2 > (k+1)^2$ for all $k \geq 5$. Combining, $2^{k+1} > 2k^2 > (k+1)^2$.

Conclusion: by mathematical induction, $2^n > n^2$ for all integers $n \geq 5$. ■

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với chứng minh bằng **liệt kê hết trường hợp** (exhaustion), phải chỉ ra rằng các trường hợp xét đến bao trùm TOÀN BỘ khả năng có thể xảy ra (ví dụ: mọi số dư khi chia cho 4 chỉ có thể là 0, 1, 2, 3) – thiếu dù chỉ một trường hợp thì phép chứng minh không hoàn chỉnh. Trong phản chứng, mấu chốt là tìm ra một **mâu thuẫn logic** (ví dụ: một số vừa chẵn vừa không có ước

chung, mâu thuẫn với giả thiết ban đầu). Trong phần ví dụ, KHÔNG cần chứng minh gì cả – chỉ cần một con số cụ thể làm phát biểu sai. Với quy nạp bất đẳng thức, bước khó nhất thường là chứng minh bất đẳng thức phụ (ví dụ $2k^2 \geq (k+1)^2$) – hãy trình bày rõ bước này, đừng bỏ qua.

1.11 Complex numbers (AHL)

AHL only. A complex number is $z = a + bi$, where $a = \operatorname{Re}(z)$, $b = \operatorname{Im}(z)$, and $i^2 = -1$. Arithmetic follows the usual algebra rules with $i^2 = -1$ substituted in; division uses the **conjugate** $\bar{z} = a - bi$, since $z\bar{z} = a^2 + b^2$ is real.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Simplify $(3 + 2i)(1 - 4i)$, and compute $\frac{5 + i}{2 - 3i}$ in the form $x + yi$.

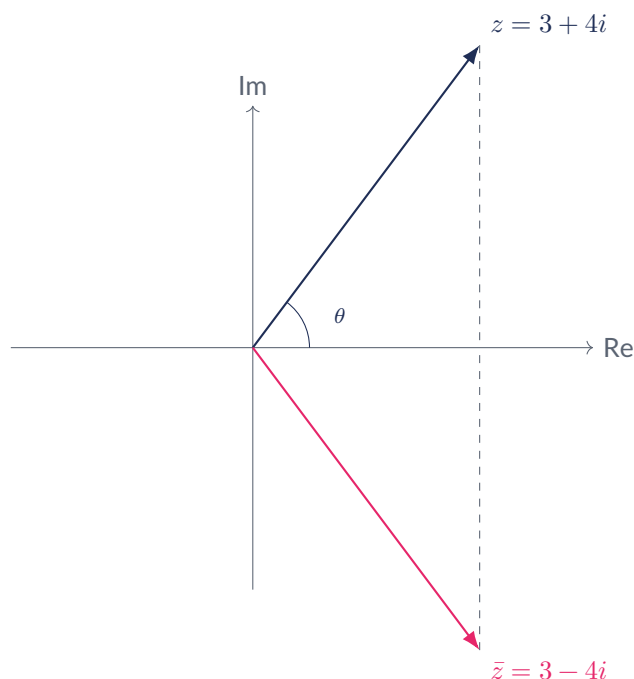
$(3 + 2i)(1 - 4i) = 3 - 12i + 2i - 8i^2 = 3 - 10i + 8 = 11 - 10i$ (using $i^2 = -1$).

Multiply top and bottom by the conjugate $2 + 3i$:

$$\frac{5 + i}{2 - 3i} \cdot \frac{2 + 3i}{2 + 3i} = \frac{(5 + i)(2 + 3i)}{4 + 9} = \frac{10 + 15i + 2i + 3i^2}{13} = \frac{7 + 17i}{13} = \frac{7}{13} + \frac{17}{13}i.$$

AHL only. Polar (trigonometric) form: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$ (Euler form), where $r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ (modulus) and $\theta = \arg z$ (argument, usually $-\pi < \theta \leq \pi$).

De Moivre's theorem: $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ for any integer n .



Argand diagram: $z = 3 + 4i$ has modulus $|z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ and argument $\theta = \arctan(4/3) \approx 53.1^\circ$. The conjugate $\bar{z}$ is the reflection of z in the real axis.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Write $z = 4 - 4\sqrt{3}i$ in polar form, and hence find z^3 .

$r = \sqrt{4^2 + (4\sqrt{3})^2} = \sqrt{16 + 48} = \sqrt{64} = 8$. Since $\operatorname{Re}(z) > 0$, $\operatorname{Im}(z) < 0$, z lies in the fourth quadrant; reference angle $\arctan(\frac{4\sqrt{3}}{4}) = \arctan \sqrt{3} = 60^\circ$, so $\theta = -60^\circ$.

$$z = 8(\cos(-60^\circ) + i \sin(-60^\circ)).$$

By De Moivre: $z^3 = 8^3(\cos(-180^\circ) + i \sin(-180^\circ)) = 512(-1 + 0i) = -512$.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

(AHL) Dạng cực (polar/Euler) giúp tính lũy thừa và khai căn số phức dễ dàng qua định lý De Moivre: môđun được lũy thừa (nhân lặp), còn góc được nhân với số mũ. Luôn xác định đúng góc phần tư của θ dựa vào dấu của phần thực và phần ảo — không chỉ áp dụng $\arctan$ một cách máy móc, vì $\arctan$ chỉ cho góc trong khoảng $(-90^\circ, 90^\circ)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the three cube roots of $z = 8i$.

Write $8i = 8(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$. The cube roots have modulus $8^{1/3} = 2$ and arguments $\frac{90^\circ + 360^\circ k}{3}$ for $k = 0, 1, 2$: that is $30^\circ, 150^\circ, 270^\circ$.

$$w_0 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i, \quad w_1 = 2(\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ) = -\sqrt{3} + i, \quad w_2 = 2(\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) = -2i$$

(Check: $(\sqrt{3} + i)^2 = 3 + 2\sqrt{3}i - 1 = 2 + 2\sqrt{3}i$, and $(2 + 2\sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) = 2\sqrt{3} + 2i + 6i + 2\sqrt{3}i^2 = 2\sqrt{3} + 8i - 2\sqrt{3} = 8i$. ✓)

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Given that $P(x) = x^3 - 7x^2 + 17x - 15$ has $2 - i$ as a root, find all three roots of P .

Since P has real coefficients, complex roots occur in conjugate pairs, so $2 + i$ is also a root. The corresponding quadratic factor is

$$(x - (2 - i))(x - (2 + i)) = x^2 - 4x + (4 + 1) = x^2 - 4x + 5$$

(using sum of roots 4, product $(2 - i)(2 + i) = 4 + 1 = 5$). Dividing $P(x)$ by $x^2 - 4x + 5$:

$$x^3 - 7x^2 + 17x - 15 = (x^2 - 4x + 5)(x - 3).$$

So the third root is $x = 3$. **Roots:** 3, $2 - i$, $2 + i$.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

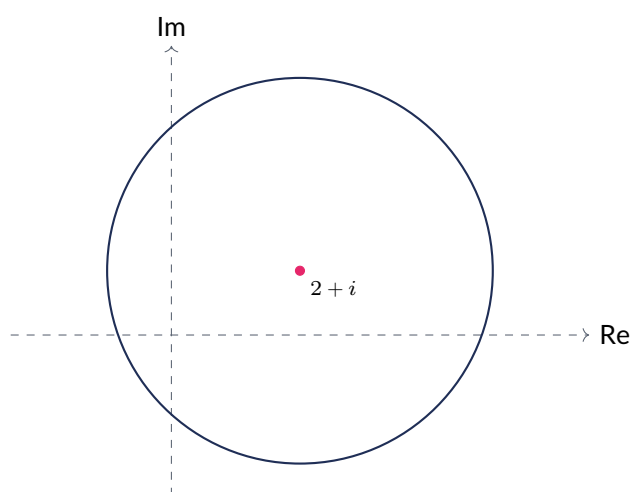
(AHL) Với đa thức có hệ số thực, nghiệm phức LUÔN xuất hiện theo cặp liên hợp ($a + bi$) và ($a - bi$) — đây gọi là **định lý nghiệm liên hợp phức**. Biết một nghiệm phức, ta suy ra ngay nghiệm liên hợp, nhân hai nhân tử bậc nhất tương ứng để được một nhân tử bậc hai với hệ số thực, sau đó chia đa thức ban đầu cho nhân tử này để tìm các nghiệm còn lại.

1.12 Loci in the Complex Plane (AHL)

Since $|z - a|$ is the distance, in the Argand plane, between the point representing z and the point representing a , equations and inequalities involving moduli and arguments describe familiar geometric shapes — a **locus** being the set of all points z satisfying a given condition.

AHL only. Let $a, b \in \mathbb{C}$ be fixed complex numbers and θ a fixed real angle.

- $|z - a| = r$ (constant $r > 0$) is a **circle** of radius r centred at the point representing a .
- $|z - a| = |z - b|$ is the **perpendicular bisector** of the line segment joining the points representing a and b — the set of points equidistant from both.
- $\arg(z - a) = \theta$ is a **ray** starting from, but *excluding*, the point representing a , making an angle θ with the positive real axis.



The locus $|z - 2 - i| = 3$: a circle of radius 3 centred at the point representing $2 + i$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Ba loại quỹ tích (locus) cơ bản trong mặt phẳng phức: $|z - a| = r$ là **đường tròn** tâm a bán kính r (vì $|z - a|$ chính là khoảng cách từ điểm z đến điểm a); $|z - a| = |z - b|$ là **đường trung trực** của đoạn nối a và b (tập hợp các điểm cách đều hai điểm); và $\arg(z - a) = \theta$ là một **tia** xuất phát từ a (KHÔNG bao gồm chính điểm a , vì góc của số 0 không xác định) theo hướng góc θ . Khi giải, luôn đặt $z = x + iy$ rồi bình phương hai vế (với đường tròn/trung trực) hoặc dùng $\tan \theta$ kèm điều kiện đúng dấu của phần thực/ảo (với tia), thay vì áp dụng công thức một cách máy móc.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) State the centre and radius of the circle $|z - 3 + 2i| = 4$.

Write the equation in the form $|z - a| = r$: since $z - 3 + 2i = z - (3 - 2i)$, we have $a = 3 - 2i$ and $r = 4$. **Centre** $(3, -2)$, **radius** 4.

(Check: the point $z = 7 - 2i$ should lie on the circle, a distance 4 from the centre along the positive real direction: $|z - 3 + 2i| = |7 - 2i - 3 + 2i| = |4| = 4$ ✓.)

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the Cartesian equation of the locus $|z - 1| = |z - i|$, writing $z = x + iy$, and confirm it is a straight line.

$|z - 1| = |(x - 1) + iy|$ and $|z - i| = |x + i(y - 1)|$. Squaring both (both sides are non-negative):

$$(x - 1)^2 + y^2 = x^2 + (y - 1)^2.$$

Expanding: $x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 + y^2 - 2y + 1$. The x^2 , y^2 , and 1 terms cancel, leaving

$$-2x = -2y \Rightarrow x = y.$$

This is the straight line $y = x$ – the perpendicular bisector of the segment joining $(1, 0)$ and $(0, 1)$: its midpoint $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ lies on $y = x$ ✓, and the segment has gradient -1 , perpendicular to the gradient 1 of $y = x$ ✓.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Describe the locus $\arg(z - 2) = \frac{\pi}{4}$, and verify that $z = 3 + i$ lies on it.

This is a ray starting from, but excluding, the point $2 + 0i = (2, 0)$, at angle $\frac{\pi}{4}$ (45°) to the positive real axis; equivalently, $y = x - 2$ for $x > 2$.

Check $z = 3 + i$: $z - 2 = 1 + i$, which lies in the first quadrant (real part $1 > 0$) with $\arg(1 + i) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$, confirming $z = 3 + i$ satisfies $\arg(z - 2) = \frac{\pi}{4}$. ✓

1.13 Systems of linear equations (AHL)

AHL only. A system of linear equations in three unknowns can be solved by **elimination**: combine pairs of equations to eliminate one variable at a time, reducing to a 2×2 system, then back-substitute. Three outcomes are possible:

- **Unique solution** – the three planes meet at exactly one point.
- **Infinitely many solutions** – the equations are dependent (e.g. one equation is a multiple of another, or the planes intersect in a common line); the solution set can be written using a parameter.
- **No solution** – the equations are inconsistent (e.g. parallel planes, or a contradiction such as $0 = 1$ appears during elimination).

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Solve the system: $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x + 2y - 3z = -4$.

From equation 1: $y = 6 - x - z$. Substitute into equation 2:

$$2x - (6 - x - z) + z = 3 \Rightarrow 3x + 2z = 9. \quad (\text{A})$$

Substitute into equation 3:

$$x + 2(6 - x - z) - 3z = -4 \Rightarrow -x - 5z = -16 \Rightarrow x = 16 - 5z. \quad (\text{B})$$

Substitute (B) into (A): $3(16 - 5z) + 2z = 9 \Rightarrow 48 - 13z = 9 \Rightarrow z = 3$. Then $x = 16 - 15 = 1$,

and $y = 6 - 1 - 3 = 2$.

Solution: $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

(Check in equation 2: $2(1) - 2 + 3 = 3$ ✓; equation 3: $1 + 4 - 9 = -4$ ✓.)

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Show that the system $x + 2y - z = 3$, $2x + 4y - 2z = 6$, $3x - y + z = 4$ has infinitely many solutions, and give the general solution.

Equation 2 is exactly twice equation 1 ($2 \times \text{eq.1} = 2x + 4y - 2z = 6$ ✓), so it carries no new information – only two independent equations remain: $x + 2y - z = 3$ and $3x - y + z = 4$. Adding these to eliminate z : $4x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - 4x$. Substituting back: $z = x + 2y - 3 = x + 2(7 - 4x) - 3 = 11 - 7x$.

General solution: $(x, y, z) = (t, 7 - 4t, 11 - 7t)$ for any $t \in \mathbb{R}$.

Geometrically, the three planes intersect along a common line.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Show that the system $x + y + z = 4$, $2x + 2y + 2z = 9$, $x - y + z = 1$ has no solution. Equation 2 is $2 \times$ equation 1 in its left-hand side ($2x + 2y + 2z = 2(x + y + z)$), so consistency would require the right-hand side to also double: $2 \times 4 = 8$. But equation 2 states this expression equals $9 \neq 8$ – a direct contradiction. **The system is inconsistent; there is no solution** (the corresponding planes do not share a common point).

(!) Lỗi thường gặp: Before declaring a 3×3 system has a unique solution, check that no pair of equations is a scalar multiple of another (which would signal dependency, not three independent constraints) – and if elimination produces a statement like $0 = k$ for $k \neq 0$, stop: the system is inconsistent (no solution), not an error in your algebra.

1.14 Partial fractions (AHL)

A **proper** rational function (the degree of the numerator is strictly less than the degree of the denominator) can be rewritten as a sum of simpler fractions – the reverse process of combining fractions over a common denominator. This decomposition makes many rational expressions far easier to integrate (see Unit 5, Calculus) or to analyse.

AHL only. Distinct linear factors: $\frac{f(x)}{(ax+b)(cx+d)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$.

Repeated linear factor: $\frac{f(x)}{(ax+b)^2} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{(ax+b)^2}$ (every power of the repeated factor, from 1 up to its multiplicity, contributes one term).

Irreducible quadratic factor: $\frac{f(x)}{(ax+b)(x^2+px+q)} = \frac{A}{ax+b} + \frac{B}{x^2+px+q}$, where x^2+px+q does not factor over the reals (negative discriminant), and the numerator placed over it is a constant.

If the fraction is **improper** (numerator degree $\geq$ denominator degree), perform polynomial long division first to write it as (polynomial) + (proper fraction), then decompose the proper fraction as above.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Phân tích thành phân thức đơn giản (partial fractions) là quá trình NGƯỢC với việc quy đồng mẫu số: thay vì gộp nhiều phân thức thành một, ta tách một phân thức phức tạp thành tổng các phân thức đơn giản hơn. Ba dạng mẫu số cần nhớ: (1) các nhân tử bậc nhất khác nhau – mỗi nhân tử cho một hằng số ở tử; (2) nhân tử bậc nhất lặp lại (như $(ax+b)^2$) – PHẢI viết đủ mọi lũy thừa từ 1 đến số lần lặp lại, không chỉ viết một số hạng duy nhất; (3) nhân tử bậc hai vô nghiệm thực – tử số tương ứng chỉ là một hằng số (không phải $Ax+B$) trong chương trình AA. Nếu bậc tử $\geq$ bậc mẫu (phân thức không thực sự – improper), phải chia đa thức trước để tách phần nguyên ra, rồi mới phân tích phần phân thức thực sự còn lại.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Express $\frac{5x+7}{(x+1)(x+3)}$ in partial fractions.

Write $\frac{5x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+3}$, so $5x+7 = A(x+3) + B(x+1)$.

Set $x = -1$: $5(-1)+7 = 2 = A(2) \Rightarrow A = 1$. Set $x = -3$: $5(-3)+7 = -8 = B(-2) \Rightarrow B = 4$.

$$\frac{5x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+3}.$$

Check: $\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+3} = \frac{(x+3) + 4(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \frac{5x+7}{(x+1)(x+3)} \checkmark$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Express $\frac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2}$ in partial fractions.

Write $\frac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$, so

$$3x^2+5x+1 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1).$$

Set $x = 1$: $9 = A(9) \Rightarrow A = 1$. Set $x = -2$: $3(4) - 10 + 1 = 3 = C(-3) \Rightarrow C = -1$.

Comparing x^2 coefficients: $3 = A + B \Rightarrow B = 3 - 1 = 2$.

$$\frac{3x^2 + 5x + 1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}.$$

Check (constant term): $4A - 2B - C = 4(1) - 2(2) - (-1) = 4 - 4 + 1 = 1 \checkmark$ (matches the constant term of the numerator).

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Express $\frac{2x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+1)}$ in partial fractions.

Since $x^2 + 1$ has discriminant $-4 < 0$ (irreducible over the reals), write $\frac{2x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x^2+1}$, so

$$2x^2 + x + 1 = A(x^2 + 1) + B(x - 1).$$

Set $x = 1$: $4 = A(2) \Rightarrow A = 2$. Comparing constant terms: $1 = A - B = 2 - B \Rightarrow B = 1$.

$$\frac{2x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x^2+1}.$$

Check at $x = 0$: LHS = $\frac{1}{(-1)(1)} = -1$; RHS = $\frac{2}{-1} + \frac{1}{1} = -2 + 1 = -1 \checkmark$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Express $\frac{x^2 + 3x + 5}{x+1}$ in the form (polynomial) + $\frac{k}{x+1}$.

Since the numerator's degree (2) is not less than the denominator's degree (1), the fraction is improper: divide first.

$$x^2 + 3x + 5 = (x+1)(x+2) + 3$$

(check: $(x+1)(x+2) = x^2 + 3x + 2$, plus 3 gives $x^2 + 3x + 5 \checkmark$), so

$$\frac{x^2 + 3x + 5}{x+1} = x + 2 + \frac{3}{x+1}.$$

(!) Lỗi thường gặp: (AHL) For a **repeated** linear factor $(ax+b)^2$, you must include *both* $\frac{A}{ax+b}$ and $\frac{B}{(ax+b)^2}$ – omitting the first-power term is one of the most common errors. Also, always check whether the fraction is improper (numerator degree $\geq$ denominator degree) *before* decomposing; skipping the polynomial division step leads to an incorrect decomposition.

1.15 Practice: Paper 1 style (no calculator)**Bài tập luyện tập**

An arithmetic sequence has $u_1 = 5$ and $d = 3$. Find u_{10} and S_{10} .

Lời giải chi tiết

$$u_{10} = 5 + 9(3) = 32. \quad S_{10} = \frac{10}{2}(2(5) + 9(3)) = 5(10 + 27) = 5(37) = 185.$$

Bài tập luyện tập

A geometric sequence has first term 4 and common ratio 3. Find S_6 .

Lời giải chi tiết

$$S_6 = \frac{4(3^6 - 1)}{3 - 1} = \frac{4(729 - 1)}{2} = \frac{4(728)}{2} = 1456.$$

Bài tập luyện tập

An infinite geometric series has $u_1 = 10$ and $r = -\frac{1}{2}$. Find S_∞ .

(A) $\frac{20}{3}$

(C) 20

(B) $\frac{10}{3}$

(D) $\frac{15}{2}$

Lời giải chi tiết

$$S_\infty = \frac{10}{1 - (-\frac{1}{2})} = \frac{10}{\frac{3}{2}} = \frac{20}{3}. \text{ (A)}$$

Bài tập luyện tập

An arithmetic series has first term 2 and 20th term 78. Find the common difference and S_{20} .

Lời giải chi tiết

$$d = \frac{78 - 2}{19} = \frac{76}{19} = 4. \quad S_{20} = \frac{20}{2}(2 + 78) = 10(80) = 800.$$

Bài tập luyện tập

Find the coefficient of x^5 in the expansion of $(x + 2)^8$.

(A) 448

(C) 112

(B) 224

(D) 56

Lời giải chi tiết

$T_{k+1} = \binom{8}{k} x^{8-k} 2^k$; need $8 - k = 5 \Rightarrow k = 3$. $\binom{8}{3} = 56$, $2^3 = 8$. Coefficient = $56 \times 8 = 448$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Find the term independent of x in the expansion of $\left(x - \frac{3}{x}\right)^4$.

(A) 54**(C)** 36**(B)** -54**(D)** 81

Lời giải chi tiết

$T_{k+1} = \binom{4}{k} (-3)^k x^{4-2k}$; need $4 - 2k = 0 \Rightarrow k = 2$. $T_3 = \binom{4}{2} (-3)^2 = 6(9) = 54$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Solve $\log_3(x+2) - \log_3(x-1) = 1$.

Lời giải chi tiết

$\log_3\left(\frac{x+2}{x-1}\right) = 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x-1} = 3 \Rightarrow x+2 = 3x-3 \Rightarrow 5 = 2x \Rightarrow x = 2.5$. Domain $x > 1$: valid.
 $x = 2.5$.

Bài tập luyện tập

Solve $4^x = 2^{x+3}$.

(A) $x = 3$ **(C)** $x = 1.5$ **(B)** $x = 6$ **(D)** $x = 2$

Lời giải chi tiết

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$, so $2^{2x} = 2^{x+3} \Rightarrow 2x = x+3 \Rightarrow x = 3$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Solve $9^x - 4(3^x) - 45 = 0$.

Lời giải chi tiết

Let $u = 3^x > 0$: $u^2 - 4u - 45 = 0 \Rightarrow (u-9)(u+5) = 0 \Rightarrow u = 9$ (reject $u = -5$). $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$.

Bài tập luyện tập

Prove directly that the product of two consecutive integers is always even. (Full proof required.)

Lời giải chi tiết

Let the integers be $n, n + 1$. One of any two consecutive integers is even, say it equals $2m$ for integer m . Then $n(n + 1)$ has $2m$ as a factor, so $n(n + 1) = 2 \times (\text{integer})$ — divisible by 2, hence even. ■

Bài tập luyện tập

Prove by contradiction that there is no smallest positive rational number.

Lời giải chi tiết

Suppose, for contradiction, a smallest positive rational number r exists. Then $\frac{r}{2}$ is also a positive rational number, and $\frac{r}{2} < r$. This contradicts r being the smallest positive rational. Hence no smallest positive rational number exists. ■

Bài tập luyện tập

Disprove the statement: “For every positive integer n , $n^2 + 1$ is prime.”

Lời giải chi tiết

Counterexample $n = 3$: $3^2 + 1 = 10 = 2 \times 5$, which is not prime. The statement is false.

Bài tập luyện tập

Prove by induction that $4^n - 1$ is divisible by 3 for all positive integers n .

Lời giải chi tiết

Base ($n = 1$): $4 - 1 = 3$, divisible by 3. **Inductive step**: assume $4^k - 1 = 3m$ for integer m , i.e. $4^k = 3m + 1$. Then

$$4^{k+1} - 1 = 4 \cdot 4^k - 1 = 4(3m + 1) - 1 = 12m + 3 = 3(4m + 1),$$

divisible by 3. **Conclusion**: by induction, $4^n - 1$ is divisible by 3 for all $n \geq 1$. ■

Bài tập luyện tập

Evaluate $\sum_{r=1}^4 (2r^2 - 1)$.

(A) 56

(C) 60

(B) 48

(D) 52

Lời giải chi tiết

$r = 1:1, r = 2:7, r = 3:17, r = 4:31$. Sum = $1 + 7 + 17 + 31 = 56$. (A).

Bài tập luyện tập

The first three terms of a geometric sequence are $k - 1$, $k + 1$, $2k + 2$. Find all possible k and the valid common ratio.

Lời giải chi tiết

$(k+1)^2 = (k-1)(2k+2) \Rightarrow k^2 + 2k + 1 = 2k^2 - 2 \Rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow (k-3)(k+1) = 0 \Rightarrow k = 3$ or $k = -1$. $k = -1$ gives terms $-2, 0, 0$ (invalid, zero term). $k = 3, r = 2$.

1.16 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)**Bài tập luyện tập**

A company's annual profit forms an arithmetic sequence: \$50 000 in year 1, increasing by \$8 000 each year. Find the profit in year 12 and the total profit over the first 12 years.

Lời giải chi tiết

$u_{12} = 50\,000 + 11(8000) = 138\,000$. $S_{12} = \frac{12}{2}(2(50\,000) + 11(8000)) = 6(188\,000) = 1\,128\,000$.
Profit in year 12: \$138 000; total: \$1 128 000.

Bài tập luyện tập

A ball is dropped from 10 m and rebounds to 70% of its previous height on each bounce. Find the height reached after the 5th bounce, and the total vertical distance travelled (theoretically) before it comes to rest.

Lời giải chi tiết

Height after n th bounce: $10(0.7)^n$. After 5th bounce: $10(0.7)^5 = 10(0.16807) \approx 1.68$ m.
Total distance = $10 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} 10(0.7)^n = 10 + 2(10) \cdot \frac{0.7}{1 - 0.7} = 10 + 20(2.3333) = 10 + 46.67 \approx 56.7$ m.

Bài tập luyện tập

A geometric series has $u_1 = 8$ and $r = 0.6$. Find S_{∞} , and the least n for which $S_{\infty} - S_n < 0.01$.

Lời giải chi tiết

$S_{\infty} = \frac{8}{1 - 0.6} = 20$. $S_{\infty} - S_n = 20(0.6)^n$. Need $20(0.6)^n < 0.01 \Rightarrow (0.6)^n < 0.0005$. Testing:
 $(0.6)^{14} \approx 0.000784 \Rightarrow 20(0.6)^{14} \approx 0.0157$ (too big); $(0.6)^{15} \approx 0.00047 \Rightarrow 20(0.6)^{15} \approx 0.0094 < 0.01$. **Least** $n = 15$.

Bài tập luyện tập

A quality-control sample of 5 items is drawn (order irrelevant) from a batch of 20 items, of which 8 are defective. In how many ways can the sample contain exactly 2 defective items?

(A) 6160

(C) 5040

(B) 3080

(D) 8568

Lời giải chi tiết

Choose 2 defective from 8: $\binom{8}{2} = 28$. Choose 3 good from 12: $\binom{12}{3} = 220$. Total = $28 \times 220 = 6160$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $5^x = 2 \cdot 3^{x+1}$, giving your answer correct to 3 significant figures.

Lời giải chi tiết

$$x \ln 5 = \ln 2 + (x+1) \ln 3 \Rightarrow x(\ln 5 - \ln 3) = \ln 2 + \ln 3 = \ln 6 \Rightarrow x = \frac{\ln 6}{\ln(5/3)} = \frac{1.79176}{0.51083} \approx 3.5076.$$
$$x \approx 3.51.$$

Bài tập luyện tập

A bacteria population grows as $P(t) = P_0 e^{kt}$. Given $P_0 = 500$ and the population doubles every 3 hours, find k and the population after 10 hours.

Lời giải chi tiết

$$2 = e^{3k} \Rightarrow k = \frac{\ln 2}{3} \approx 0.2310 \text{ per hour. } P(10) = 500e^{0.2310(10)} = 500e^{2.3105} \approx 500(10.08) \approx 5040 \text{ bacteria.}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the modulus and argument of $z = 4 - 4\sqrt{3}i$, and use De Moivre's theorem to find z^3 .

Lời giải chi tiết

$$r = \sqrt{16 + 48} = 8; \text{ Q4, reference angle } \arctan \sqrt{3} = 60^\circ, \text{ so } \theta = -60^\circ. z^3 = 8^3(\cos(-180^\circ) + i \sin(-180^\circ)) = 512(-1) = -512.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $z^2 = -5 + 12i$ for $z = a + bi$ (find both square roots) using the algebraic method.

Lời giải chi tiết

$$a^2 - b^2 = -5, 2ab = 12 \Rightarrow b = 6/a. \text{ Then } a^2 - \frac{36}{a^2} = -5 \Rightarrow a^4 + 5a^2 - 36 = 0 \Rightarrow (a^2 + 9)(a^2 - 4) = 0 \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2. a = 2 \Rightarrow b = 3; a = -2 \Rightarrow b = -3. z = 2 + 3i \text{ or } z = -2 - 3i. \text{ (Check: } (2 + 3i)^2 = 4 + 12i - 9 = -5 + 12i \checkmark.)$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve the system $x + y + z = 6$, $2x - y + z = 3$, $x + 2y - 3z = -4$.

(A) (1, 2, 3)

(C) (3, 2, 1)

(B) (2, 1, 3)

(D) (1, 3, 2)

Lời giải chi tiết

Elimination gives $z = 3$, $x = 1$, $y = 2$ (full working as in the worked example above). **(A)**.

Bài tập luyện tập

(AHL) Determine whether the system $x + 2y - z = 3$, $2x + 4y - 2z = 6$, $3x - y + z = 4$ has a unique solution, infinitely many, or none – justify your answer.

Lời giải chi tiết

Equation 2 = $2 \times$ equation 1 (consistent, but dependent), leaving only two independent equations. Solving them gives a one-parameter family $(x, y, z) = (t, 7 - 4t, 11 - 7t)$. **Infinitely many solutions** (the three planes share a common line).

Bài tập luyện tập

A car's value depreciates as $V(t) = 32\,000(0.85)^t$ (dollars, t in years). Find the least whole number of years for the value to drop below \$10 000.

Lời giải chi tiết

Need $0.85^t < 0.3125 \Rightarrow t > \frac{\ln 0.3125}{\ln 0.85} = \frac{-1.16315}{-0.16252} \approx 7.16$. Testing integers: $t = 7$ gives $V \approx \$10\,260$ (not yet below); $t = 8$ gives $V \approx \$8721$ (below). **Least whole number of years: 8.**

Bài tập luyện tập

A theatre's weekly ticket revenue follows a geometric sequence: $u_1 = \$12\,000$, with 20% growth each week ($r = 1.2$). Find the revenue in week 6 and the total revenue over the first 10 weeks.

Lời giải chi tiết

$u_6 = 12\,000(1.2)^5 = 12\,000(2.48832) \approx \$29\,859.84$. $S_{10} = 12\,000 \frac{(1.2^{10} - 1)}{0.2} = 12\,000 \frac{(6.19174 - 1)}{0.2} \approx \$311\,504$.

Bài tập luyện tập

A password consists of 4 distinct letters followed by 2 distinct digits, as in the worked example. If instead repetition of letters and digits is allowed, how many passwords are possible?

(A) $26^4 \times 10^2 = 45\,697\,600$

(C) ${}^{26}P_4 \times 10^2$

(B) $26^4 \times 10^2 = 32\,292\,000$

(D) $26^4 + 10^2$

Lời giải chi tiết

With repetition allowed, each of the 4 letter-slots has 26 independent choices and each of the 2 digit-slots has 10 independent choices: $26^4 \times 10^2 = 456\,976 \times 100 = 45\,697\,600$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(AHL) Prove by induction that $2^n > n^2$ for all integers $n \geq 5$. (Full proof required.)

Lời giải chi tiết

As in the worked example: base case $n = 5$ gives $32 > 25$ (true); inductive step uses $2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2k^2 \geq (k+1)^2$ for $k \geq 5$ (since $k^2 - 2k - 1 > 0$ there), giving $2^{k+1} > (k+1)^2$. By induction the result holds for all $n \geq 5$. ■

Bài tập luyện tập

Write down (do not evaluate) an expression for the future value of $\$P$ invested at annual rate r , compounded monthly, for t years.

Lời giải chi tiết

$$FV = P \left(1 + \frac{r}{12}\right)^{12t}.$$

Bài tập luyện tập

State the three cube roots of unity in exact form $a + bi$.

Lời giải chi tiết

$$1, \quad -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) If $\omega = e^{2\pi i/5}$ (a primitive 5th root of unity), evaluate $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$.

(A) 0

(C) 5

(B) 1

(D) -1

Lời giải chi tiết

By the sum-of-roots-of-unity result ($n = 5$), the sum is 0. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(AHL) If ω is a non-real cube root of unity, evaluate $1 + \omega + \omega^2$ and ω^3 .

Lời giải chi tiết

$1 + \omega + \omega^2 = 0$ (sum of the 3 cube roots of unity). $\omega^3 = 1$ (by definition, ω is a cube root of unity).

Bài tập luyện tập

Find the future value of \$8000 invested at 5% p.a. compounded quarterly for 6 years, correct to the nearest cent.

Lời giải chi tiết

$i = 0.0125, n = 24$: $FV = 8000(1.0125)^{24} \approx 8000(1.34737) \approx \$10\,778.96$.

Bài tập luyện tập

Find the monthly repayment on a \$50 000 car loan at 7.2% p.a. (compounded monthly) over 5 years (60 instalments), correct to the nearest cent.

Lời giải chi tiết

$i = 0.006, n = 60$: $(1.006)^{-60} \approx 0.69841$. $R = \frac{50\,000(0.006)}{1 - 0.69841} = \frac{300}{0.30159} \approx \994.73 .

Bài tập luyện tập

A car worth \$18 000 today depreciates at 12% per year (compound depreciation). Find its value in 5 years, correct to the nearest dollar.

(A) \$9498

(C) \$8500

(B) \$10 584

(D) \$11 200

Lời giải chi tiết

$V = 18\,000(0.88)^5 \approx 18\,000(0.52765) \approx \9498 . (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Find all six 6th roots of unity, and verify directly that they sum to zero.

Lời giải chi tiết

Roots: $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Pairing terms: the four non-real roots cancel in imaginary parts symmetrically and the real parts $(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = 0$, plus $1 + (-1) = 0$, giving total sum 0.

Bài tập luyện tập

A retiree's fund of \$300 000 earns 5% p.a. Using the annuity formula, find how much larger the annual withdrawal could be if the fund only needed to last 15 years instead of 20 years.

Lời giải chi tiết

For $n = 15$: $(1.05)^{-15} \approx 0.48102$, $R = \frac{300\,000(0.05)}{1 - 0.48102} = \frac{15\,000}{0.51898} \approx \$28\,902.60$. Compared to $\$24\,072.68$ for $n = 20$, the increase is $\approx \$4829.92$ per year.

1.17 Additional practice: Paper 1 style (no calculator)**Bài tập luyện tập**

The 3rd term of an arithmetic sequence is 11 and the 7th term is 27. Find the first term, the common difference, and S_{10} .

Lời giải chi tiết

$4d = u_7 - u_3 = 27 - 11 = 16 \Rightarrow d = 4$. Then $u_1 = u_3 - 2d = 11 - 8 = 3$.

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2(3) + 9(4)) = 5(6 + 36) = 5(42) = 210.$$

Bài tập luyện tập

An infinite geometric series has first term 12 and sum to infinity 16. Find the common ratio r , and the 4th term u_4 .

Lời giải chi tiết

$S_{\infty} = \frac{u_1}{1-r} \Rightarrow 16 = \frac{12}{1-r} \Rightarrow 1-r = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{1}{4}$. Then $u_4 = u_1 r^3 = 12 \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{12}{64} = \frac{3}{16}$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\sum_{k=1}^5 (3k - 2)$.

(A) 35

(C) 40

(B) 30

(D) 45

Lời giải chi tiết

This is arithmetic with $u_1 = 1$, $d = 3$, $n = 5$, so $u_5 = 1 + 4(3) = 13$. $S_5 = \frac{5}{2}(1+13) = \frac{5}{2}(14) = 35$.
(A).

Bài tập luyện tập

Find the coefficients of x^3 and of x^2 in the expansion of $(2x - 1)^5$.

Lời giải chi tiết

General term $T_{k+1} = \binom{5}{k} (2x)^{5-k} (-1)^k$.

For x^3 : $5 - k = 3 \Rightarrow k = 2$. $T_3 = \binom{5}{2} (2x)^3 (-1)^2 = 10(8x^3) = 80x^3$. Coefficient = 80.

For x^2 : $5 - k = 2 \Rightarrow k = 3$. $T_4 = \binom{5}{3} (2x)^2 (-1)^3 = 10(4x^2)(-1) = -40x^2$. Coefficient = -40.

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the first three terms of the expansion of $(1+3x)^{-2}$ in ascending powers of x , stating the range of values of x for which the expansion is valid.

Lời giải chi tiết

Here $n = -2$, applied with x replaced by $3x$:

$$(1+3x)^{-2} = 1 + (-2)(3x) + \frac{(-2)(-3)}{2!}(3x)^2 + \dots = 1 - 6x + \frac{6}{2}(9x^2) + \dots = 1 - 6x + 27x^2 + \dots$$

Valid for $|3x| < 1$, i.e. $|x| < \frac{1}{3}$.

Bài tập luyện tập

Solve $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$.

Lời giải chi tiết

$\log_2 [x(x-2)] = 3 \Rightarrow x(x-2) = 2^3 = 8 \Rightarrow x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow (x-4)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 4$ or $x = -2$. Domain requires $x > 2$: reject $x = -2$. $x = 4$. (Check: $\log_2 4 + \log_2 2 = 2 + 1 = 3$ ✓.)

Bài tập luyện tập

Write 0.0000723 in standard form. Hence evaluate $(2 \times 10^3)(3.5 \times 10^{-6})$, giving your answer in standard form.

Lời giải chi tiết

$$0.0000723 = 7.23 \times 10^{-5}.$$

$$(2 \times 10^3)(3.5 \times 10^{-6}) = (2 \times 3.5) \times 10^{3-6} = 7 \times 10^{-3}.$$

Bài tập luyện tập

Prove by contradiction that there is no largest even integer.

Lời giải chi tiết

Suppose, for contradiction, that a largest even integer N exists. Then $N+2$ is also even (since N is even), and $N+2 > N$. This contradicts N being the largest even integer. Hence no largest even integer exists. ■

Bài tập luyện tập

Prove by induction that $\sum_{r=1}^n r \cdot 2^r = (n-1)2^{n+1} + 2$ for all integers $n \geq 1$.

Lời giải chi tiết

Base ($n = 1$): LHS = $1(2) = 2$; RHS = $(0)(2^2) + 2 = 2$. True.

Inductive step: assume $\sum_{r=1}^k r \cdot 2^r = (k-1)2^{k+1} + 2$. Then

$$\sum_{r=1}^{k+1} r \cdot 2^r = (k-1)2^{k+1} + 2 + (k+1)2^{k+1} = 2^{k+1}[(k-1) + (k+1)] + 2 = 2^{k+1}(2k) + 2 = k \cdot 2^{k+2} + 2,$$

which is the claimed formula with $n = k + 1$. **Conclusion:** by induction, the formula holds for all $n \geq 1$. ■

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve the system $x + y + z = 5$, $x - y + 2z = 8$, $2x + y - z = 1$.

(A) (2, 0, 3)

(C) (3, 2, 0)

(B) (0, 2, 3)

(D) (2, 3, 0)

Lời giải chi tiết

From eq. 1: $y = 5 - x - z$. Substituting into eq. 2: $x - (5 - x - z) + 2z = 8 \Rightarrow 2x + 3z = 13$ (A). Substituting into eq. 3: $2x + (5 - x - z) - z = 1 \Rightarrow x - 2z = -4 \Rightarrow x = 2z - 4$ (B). Substituting (B) into (A): $2(2z - 4) + 3z = 13 \Rightarrow 7z = 21 \Rightarrow z = 3$, so $x = 2, y = 5 - 2 - 3 = 0$. (A). (Check: eq. 2: $2 - 0 + 6 = 8$ ✓; eq. 3: $4 + 0 - 3 = 1$ ✓.)

1.18 Additional practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)**Bài tập luyện tập**

Find the future value of \$12 000 invested at 4.5% per annum, compounded semi-annually, for 8 years.

Lời giải chi tiết

$$i = \frac{0.045}{2} = 0.0225, n = 2(8) = 16.$$

$$FV = 12\,000(1.0225)^{16} \approx 12\,000(1.42762) \approx \$17\,131.46.$$

Bài tập luyện tập

Find the monthly repayment on a \$120 000 loan at 6% per annum (compounded monthly) over 15 years (180 monthly instalments).

Lời giải chi tiết

$$i = \frac{0.06}{12} = 0.005, n = 180. (1.005)^{180} \approx 2.45409 \Rightarrow (1.005)^{-180} \approx 0.40748.$$

$$R = \frac{120\,000(0.005)}{1 - 0.40748} = \frac{600}{0.59252} \approx \$1012.63 \text{ per month.}$$

Bài tập luyện tập

The mass of a hydrogen atom is approximately 1.67×10^{-27} kg. Find, in standard form, the total mass of 2.5×10^{24} hydrogen atoms.

Lời giải chi tiết

$$\text{Total mass} = (1.67 \times 10^{-27})(2.5 \times 10^{24}) = (1.67 \times 2.5) \times 10^{-27+24} = 4.175 \times 10^{-3} \text{ kg.}$$

Bài tập luyện tập

A rectangular field has length 45 m and width 30 m, each measured to the nearest metre. Find the upper and lower bounds of the perimeter and of the area.

Lời giải chi tiết

Length bounds: $44.5 \leq l < 45.5$. Width bounds: $29.5 \leq w < 30.5$.

Perimeter = $2(l + w)$: max = $2(45.5 + 30.5) = 2(76) = 152$ m; min = $2(44.5 + 29.5) = 2(74) = 148$ m.

Area = lw : max = $45.5 \times 30.5 = 1387.75 \text{ m}^2$; min = $44.5 \times 29.5 = 1312.75 \text{ m}^2$.

Bài tập luyện tập

Solve $2^{x+1} = 3^{2x-1}$, giving your answer correct to 3 significant figures.

Lời giải chi tiết

$$\text{Take ln: } (x+1)\ln 2 = (2x-1)\ln 3 \Rightarrow x(\ln 2 - 2\ln 3) = -\ln 2 - \ln 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 2 + \ln 3}{2\ln 3 - \ln 2} = \frac{1.79176}{1.50408} \approx 1.19126. \quad x \approx 1.19.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Given $z = 5(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)$, find z^4 in the form $a + bi$, correct to 3 significant figures.

Lời giải chi tiết

By De Moivre: $z^4 = 5^4(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ) = 625(\cos 160^\circ + i \sin 160^\circ)$.

$$z^4 \approx 625(-0.93969) + 625(0.34202)i \approx -587 + 214i \text{ (3 s.f.)}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the product of the four 4th roots of unity.

- (A) -1 (C) i
(B) 1 (D) $-i$

Lời giải chi tiết

The four 4th roots of unity are $1, i, -1, -i$. Their product is $1 \times i \times (-1) \times (-i) = (-i) \times (-i) = i^2 = -1$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the Cartesian equation of the locus $|z - 3| = |z + 3i|$, and identify it.

Lời giải chi tiết

With $z = x + iy$: $(x - 3)^2 + y^2 = x^2 + (y + 3)^2 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = x^2 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow -6x = 6y \Rightarrow y = -x$. This is a straight line – the perpendicular bisector of the segment joining $(3, 0)$ and $(0, -3)$ (midpoint $(1.5, -1.5)$ lies on $y = -x$ ✓).

Bài tập luyện tập

Which value of n disproves the statement “for every positive integer n , $2^n - 1$ is prime”?

- (A) $n = 4$ (C) $n = 3$
(B) $n = 2$ (D) $n = 5$

Lời giải chi tiết

$2^4 - 1 = 15 = 3 \times 5$, which is not prime. ($2^2 - 1 = 3$, $2^3 - 1 = 7$, and $2^5 - 1 = 31$ are all prime, so they do not disprove the statement.) (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Use the expansion of $(1 - x)^{-3}$ up to the x^2 term to approximate $\frac{1}{(0.98)^3}$, and compare with the true value.

Lời giải chi tiết

With $n = -3$ and x replaced by $-x$:

$$(1 - x)^{-3} = 1 + (-3)(-x) + \frac{(-3)(-4)}{2!}(-x)^2 + \dots = 1 + 3x + 6x^2 + \dots \quad (|x| < 1).$$

Set $x = 0.02$ (since $\frac{1}{(0.98)^3} = (1 - 0.02)^{-3}$):

$$\frac{1}{(0.98)^3} \approx 1 + 3(0.02) + 6(0.02)^2 = 1 + 0.06 + 0.0024 = 1.0624.$$

A calculator gives $0.98^3 = 0.941192$, so $\frac{1}{0.941192} \approx 1.06248$, which rounds to 1.0625 (4 d.p.) — matching the approximation to 3 decimal places. ✓

1.19 Extra practice: Mixed mastery

Bài tập luyện tập

A car's fuel efficiency is estimated at 14.5 km/L, but careful testing shows the true value is 15.2 km/L. Find the percentage error in the estimate, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\% \text{ error} = \left| \frac{14.5 - 15.2}{15.2} \right| \times 100\% = \frac{0.7}{15.2} \times 100\% \approx 4.61\%.$$

Bài tập luyện tập

A time is recorded as 15 seconds, correct to the nearest second. Find the maximum possible percentage error in this measurement, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Bounds: $14.5 \leq t < 15.5$, so the maximum absolute error is 0.5 s. The percentage error is greatest when the true value is smallest (14.5):

$$\% \text{ error}_{\max} = \frac{0.5}{14.5} \times 100\% \approx 3.45\%.$$

Bài tập luyện tập

Prove by exhaustion that $n^2 + n$ is even for every integer n .

Lời giải chi tiết

Every integer is either even or odd — these two cases exhaust all possibilities.

Case 1 ($n = 2k$): $n^2 + n = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$, even.

Case 2 ($n = 2k + 1$): $n^2 + n = (2k + 1)^2 + (2k + 1) = 4k^2 + 4k + 1 + 2k + 1 = 4k^2 + 6k + 2 = 2(2k^2 + 3k + 1)$, even.

Both cases give an even result, so $n^2 + n$ is even for every integer n . ■

Bài tập luyện tập

Express $\frac{7x + 1}{(x - 2)(x + 1)}$ in partial fractions.

Lời giải chi tiết

$\frac{7x+1}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \Rightarrow 7x+1 = A(x+1) + B(x-2)$. Set $x = 2$: $15 = 3A \Rightarrow A = 5$.
Set $x = -1$: $-6 = -3B \Rightarrow B = 2$.

$$\frac{7x+1}{(x-2)(x+1)} = \frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+1}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Express $\frac{5x-2}{(x-1)^2}$ in partial fractions.

(A) $\frac{5}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$

(C) $\frac{3}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$

(B) $\frac{5}{x-1} - \frac{3}{(x-1)^2}$

(D) $\frac{5}{(x-1)^2}$

Lời giải chi tiết

$5x-2 = A(x-1) + B$. Comparing x coefficients: $A = 5$. Set $x = 1$: $3 = B$. (A): $\frac{5}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$.
(Check constant term: $-A + B = -5 + 3 = -2 \checkmark$.)

Bài tập luyện tập

The sum of the first n terms of an arithmetic sequence is $S_n = 3n^2 + 2n$. Find u_1 and the common difference d .

Lời giải chi tiết

$u_1 = S_1 = 3 + 2 = 5$. $S_2 = 12 + 4 = 16 \Rightarrow u_2 = S_2 - S_1 = 11 \Rightarrow d = u_2 - u_1 = 6$. (Check: $S_n = \frac{n}{2}(2(5) + (n-1)6) = \frac{n}{2}(6n+4) = 3n^2 + 2n \checkmark$.)

Bài tập luyện tập

Find the coefficient of x^4 in the expansion of $(2x-1)^7$.

(A) -560

(C) -280

(B) 560

(D) 280

Lời giải chi tiết

$T_{k+1} = \binom{7}{k}(2x)^{7-k}(-1)^k$; need $7-k = 4 \Rightarrow k = 3$. $T_4 = \binom{7}{3}(2x)^4(-1)^3 = 35(16x^4)(-1) = -560x^4$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Given that $1+2i$ is a root of $x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = 0$, find all three roots.

Lời giải chi tiết

By the conjugate root theorem, $1 - 2i$ is also a root. Quadratic factor: $(x - (1 + 2i))(x - (1 - 2i)) = x^2 - 2x + 5$ (sum of roots 2, product $1 + 4 = 5$). Dividing:

$$x^3 - 4x^2 + 9x - 10 = (x^2 - 2x + 5)(x - 2).$$

Roots: 2, $1 + 2i$, $1 - 2i$.

Bài tập luyện tập

Solve $2^{2x} - 3(2^x) - 4 = 0$.

Lời giải chi tiết

Let $u = 2^x > 0$: $u^2 - 3u - 4 = 0 \Rightarrow (u - 4)(u + 1) = 0 \Rightarrow u = 4$ (reject $u = -1$). $2^x = 4 = 2^2 \Rightarrow x = 2$.

Bài tập luyện tập

Find the future value of \$6000 invested at 4% per annum, compounded semi-annually, for 5 years, correct to the nearest cent.

Lời giải chi tiết

$i = 0.02$, $n = 10$: $FV = 6000(1.02)^{10} \approx 6000(1.218994) \approx \7313.97 .

Functions

Mục tiêu Unit: Khái niệm hàm số, tập xác định/tập giá trị, phép biến đổi đồ thị, hàm bậc hai, hàm phân thức, hàm hợp và hàm ngược, và (AHL) hàm đa thức bậc cao cùng định lý nhân tử/số dư.

2.1 Functions, domain, and range

A **function** $f: x \mapsto f(x)$ is a rule that assigns to each input x exactly one output $f(x)$. The **domain** is the set of all valid inputs; the **range** is the set of all resulting outputs. A graph represents a function precisely when it passes the **vertical line test** (no vertical line cuts the graph more than once).

f is **one-to-one (injective)** iff it passes the **horizontal line test** — no horizontal line cuts the graph more than once. This is exactly the condition under which f^{-1} exists as a function on the same domain.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tập xác định (domain) là tập các giá trị x hợp lệ (ví dụ: biểu thức trong căn phải ≥ 0 , mẫu số phải $\neq 0$, biểu thức trong log phải > 0). Tập giá trị (range) là tập các giá trị $y = f(x)$ có thể đạt được. Một hàm số có hàm ngược (trên miền đó) khi và chỉ khi nó là **đơn ánh** (mỗi giá trị y chỉ ứng với đúng một x) — kiểm tra bằng "phép thử đường thẳng ngang".

Ví dụ mẫu • Worked example

State the domain and range of $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Domain: need $9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$.

Range: as x ranges over $[-3, 3]$, $9 - x^2$ ranges over $[0, 9]$, so $\sqrt{9 - x^2}$ ranges over $[0, 3]$. Range: $0 \leq y \leq 3$.

Ví dụ mẫu • Worked example

Determine whether $f(x) = x^3 - 3x$ is one-to-one on $\mathbb{R}$.

Factor: $f(x) = x(x^2 - 3) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$, so $f(-\sqrt{3}) = f(0) = f(\sqrt{3}) = 0$. Three different inputs give the *same* output 0, so f fails the horizontal line test: f is **not** one-to-one on $\mathbb{R}$, and has no inverse function on this domain.

(!) Lỗi thường gặp: A common domain-finding slip: treating $\sqrt{}$, $\log$, and denominators as independent restrictions to be applied *one at a time* instead of combined with AND (intersection). If a function has both a square root and a logarithm, the domain is the **intersection** of both individual conditions, not just one of them.

2.2 Transformations of graphs

For $y = af(b(x - h)) + k$, starting from $y = f(x)$:

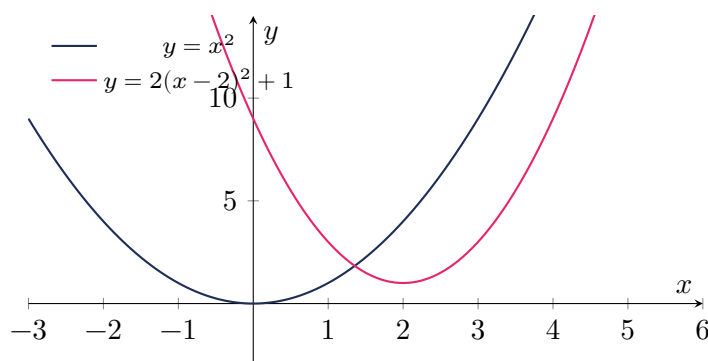
- $y = f(x) + k$: vertical shift up k (down if $k < 0$). $y = f(x - h)$: horizontal shift right h (left if $h < 0$).
- $y = af(x)$: vertical stretch by factor a (reflection in the x -axis if $a < 0$).
- $y = f(bx)$: horizontal stretch by factor $\frac{1}{b}$ (reflection in the y -axis if $b < 0$).

Transformations *inside* the brackets (affecting x) act in reverse order and reverse sense to intuition; transformations *outside* (affecting y) act exactly as they appear.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Biến đổi BÊN TRONG dấu ngoặc (theo x) có thứ tự và dấu "ngược trực giác": $f(x - h)$ dịch sang phải h đơn vị (không phải trái); $f(bx)$ co lại theo hệ số $\frac{1}{b}$ (không phải nhân b). Biến đổi BÊN NGOÀI (theo y) thì trực giác hơn: $f(x) + k$ dịch lên, $af(x)$ giãn theo hệ số a . Khi có nhiều biến đổi kết hợp như $y = af(x - h) + k$, áp dụng lần lượt cho một **điểm cụ thể**: trước tiên dịch theo x (cộng h vào hoành độ), rồi nhân a vào tung độ, cuối cùng cộng k vào tung độ.



$y = 2(x - 2)^2 + 1$ is $y = x^2$ shifted right 2, stretched vertically by factor 2, and shifted up 1 (vertex moves from $(0, 0)$ to $(2, 1)$).

Ví dụ mẫu · Worked example

The graph of $y = f(x)$ has a maximum point at $(2, 5)$ and passes through $(1, 4)$. State the coordinates of (a) the maximum point of $y = f(x - 3) + 2$; (b) the point on $y = 3f(x) - 1$ corresponding to $x = 1$.

(a) Shift right 3, then up 2: $(2 + 3, 5 + 2) = (5, 7)$.

(b) At $x = 1$, $f(1) = 4$, so $y = 3(4) - 1 = 11$: the point is $(1, 11)$ (only the output is transformed here).

Ví dụ mẫu · Worked example

The graph of $y = f(x)$ has a *minimum* point at $(4, -3)$. Find the corresponding turning point of $y = -2f(x - 1) + 5$, and state whether it is now a maximum or minimum.

Apply the transformations to the point $(4, -3)$ in order: horizontal shift right 1 gives $x = 4 + 1 = 5$; vertical stretch/reflection by -2 gives $y = -2(-3) = 6$; vertical shift up 5 gives $y = 6 + 5 = 11$.

New point: $(5, 11)$.

Since $a = -2 < 0$, the reflection flips a minimum into a **maximum** — so $(5, 11)$ is now a maximum point.

2.3 The graphs of $y = |f(x)|$ and $y = f(|x|)$

Two further transformations combine a function f with the absolute value, and although they look similar in notation, they act in completely different ways.

$y = |f(x)|$ — modulus applied *outside* f : wherever $f(x) \geq 0$, the graph of $y = |f(x)|$ is identical to $y = f(x)$; wherever $f(x) < 0$, that part is **reflected in the x -axis** (replace y by $-y$). The resulting graph never lies below the x -axis, and typically has sharp corners (not smooth turning points) exactly at the x -intercepts of the original graph.

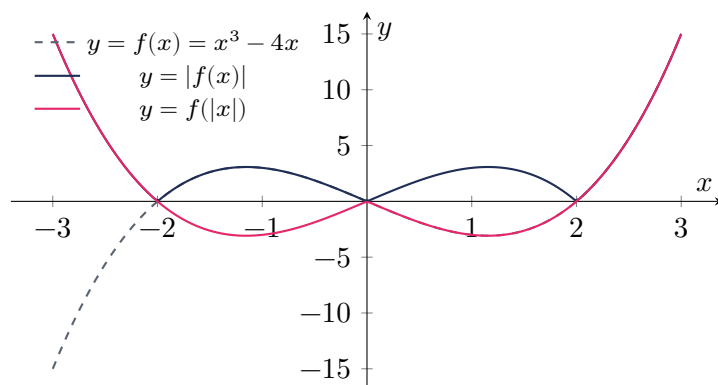
$y = f(|x|)$ — modulus applied *inside* f : for $x \geq 0$, $|x| = x$, so the graph is unchanged from $y = f(x)$ on $x \geq 0$. For $x < 0$, $|x| = -x > 0$, so $f(|x|) = f(-x)$: the branch of the *original* graph for $x < 0$ is discarded and replaced by the reflection in the y -axis of the $x \geq 0$ branch. The result is always an **even function**, regardless of the symmetry of f itself.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$y = |f(x)|$: giữ nguyên phần đồ thị nằm trên trục x (nơi $f(x) \geq 0$); phần nằm dưới trục x ($f(x) < 0$) thì **lật lên trên** qua trục x . Đồ thị kết quả luôn nằm trên hoặc chạm trục hoành, có các "góc gãy" đúng tại những điểm cắt trục x của đồ thị gốc.

$y = f(|x|)$: giữ nguyên phần đồ thị gốc với $x \geq 0$, sau đó **bỏ hẳn** phần $x < 0$ của đồ thị gốc và thay bằng ảnh phản chiếu của phần $x \geq 0$ qua trục y . Kết quả luôn là một hàm **chẵn**, bất kể hàm ban đầu có đối xứng gì hay không.



For $f(x) = x^3 - 4x$ (roots $x = -2, 0, 2$): $y = |f(x)|$ reflects the dips below the x -axis upward, producing corners at the roots; $y = f(|x|)$ keeps only the $x \geq 0$ branch and mirrors it into $x < 0$, giving an even function with a corner at $x = 0$.

Ví dụ mẫu · Worked example

The function $f(x) = x - 2$ has x -intercept $(2, 0)$ and y -intercept $(0, -2)$. Describe the graph of $y = |f(x)| = |x - 2|$.

$f(x) = x - 2 \geq 0$ for $x \geq 2$, so that part of the line is unchanged. $f(x) < 0$ for $x < 2$, so that part is reflected in the x -axis, becoming $y = -(x - 2) = 2 - x$.

$$|x - 2| = \begin{cases} x - 2, & x \geq 2 \\ 2 - x, & x < 2 \end{cases}$$

The graph is a V-shape with vertex (minimum point) at $(2, 0)$: gradient -1 for $x < 2$, gradient $+1$ for $x \geq 2$, and the graph never goes below the x -axis.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $|x^2 - 4| = 3$.

Case 1: $x^2 - 4 = 3 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7}$.

Case 2: $x^2 - 4 = -3 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$.

Check: at $x = \pm\sqrt{7}$: $x^2 - 4 = 7 - 4 = 3$, so $|3| = 3 \checkmark$. At $x = \pm 1$: $x^2 - 4 = 1 - 4 = -3$, so $|-3| = 3 \checkmark$.

Solutions: $x = \pm 1, \pm\sqrt{7}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Let $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Find the roots of $y = f(|x|)$, and explain why they differ from the roots of $y = f(x)$.

Factoring: $f(x) = (x - 3)(x + 1)$, so $f(x) = 0$ at $x = 3$ and $x = -1$.

Since $|x|^2 = x^2$, $f(|x|) = |x|^2 - 2|x| - 3 = x^2 - 2|x| - 3$. Setting $f(|x|) = 0$ and letting $u = |x| \geq 0$:

$$u^2 - 2u - 3 = 0 \Rightarrow (u - 3)(u + 1) = 0 \Rightarrow u = 3 \text{ (} u = -1 \text{ rejected, since } u \geq 0 \text{)}.$$

So $|x| = 3 \Rightarrow x = \pm 3$. The roots of $y = f(|x|)$ are $x = 3$ and $x = -3$: the positive root $x = 3$ of the original f is kept, but the negative root $x = -1$ is **discarded** (it came from the $x < 0$ branch of the original graph) and **replaced** by its mirror image $x = -3$ across the y -axis – exactly as the theory predicts.

2.4 Odd and even functions

A function f is **even** if $f(-x) = f(x)$ for every x in its domain – the graph is symmetric about the y -axis. A function f is **odd** if $f(-x) = -f(x)$ for every x in its domain – the graph is symmetric about the origin (invariant under a 180° rotation).

To classify a function algebraically: compute $f(-x)$, simplify, and compare with $f(x)$ (even) and with $-f(x)$ (odd). Many functions are **neither** even nor odd.

Products: even $\times$ even = even; odd $\times$ odd = even; even $\times$ odd = odd.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hàm chẵn: $f(-x) = f(x)$ với mọi x – đồ thị đối xứng qua trục y (ví dụ $y = x^2$, $y = \cos x$). **Hàm lẻ:** $f(-x) = -f(x)$ với mọi x – đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ (ví dụ $y = x^3$, $y = \sin x$). Cách kiểm tra: thay $-x$ vào biểu thức của $f(x)$, rút gọn, rồi so sánh với $f(x)$ (chẵn) hoặc $-f(x)$ (lẻ). Rất nhiều hàm số không chẵn cũng không lẻ.

Ví dụ mẫu · Worked example

Classify $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$.

$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 1 = x^4 - 3x^2 + 1 = f(x)$. Since $f(-x) = f(x)$ for every x : f is **even**.

Ví dụ mẫu · Worked example

Classify $g(x) = x^3 - 4x$.

$g(-x) = (-x)^3 - 4(-x) = -x^3 + 4x = -(x^3 - 4x) = -g(x)$. Since $g(-x) = -g(x)$ for every x : g is **odd**.

Ví dụ mẫu · Worked example

Classify $h(x) = x^2 + x$.

$h(-x) = (-x)^2 + (-x) = x^2 - x$. This is not equal to $h(x) = x^2 + x$ (unless $x = 0$), and not equal to $-h(x) = -x^2 - x$ either: h is **neither even nor odd**.

Mở rộng: phân tách chẵn - lẻ

Every function f (with domain symmetric about 0) can be written uniquely as the sum of an even part and an odd part:

$$f(x) = f_{\text{even}}(x) + f_{\text{odd}}(x), \quad f_{\text{even}}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad f_{\text{odd}}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Verification: $f_{\text{even}}(-x) = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = f_{\text{even}}(x)$ (even); $f_{\text{odd}}(-x) = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -\frac{f(x) - f(-x)}{2} = -f_{\text{odd}}(x)$ (odd); adding the two definitions recovers $f(x)$.

Applied to $f(x) = e^x$: $f_{\text{even}}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x$, and $f_{\text{odd}}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Classify $k(x) = x \sin x$, using the product rule for even/odd functions.

$k(-x) = (-x) \sin(-x) = (-x)(-\sin x) = x \sin x = k(x)$. So k is **even**. This matches the product rule: x is odd and $\sin x$ is odd, and odd $\times$ odd = even.

Function	Classification	Reason
$x^2, x^4, x^6, \dots$	even	$(-x)^n = x^n$ for even n
$x, x^3, x^5, \dots$	odd	$(-x)^n = -x^n$ for odd n
$\cos x$	even	$\cos(-x) = \cos x$
$\sin x, \tan x$	odd	$\sin(-x) = -\sin x$
$ x $	even	$ -x = x $
constant $c \neq 0$	even	value c for every x

2.5 Linear functions and the equation of a line

Gradient between two points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) : $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ($x_1 \neq x_2$).

Forms of the equation of a line: **slope-intercept** $y = mx + c$ (c is the y -intercept); **point-gradient** $y - y_1 = m(x - x_1)$; **general form** $ax + by + d = 0$.

Parallel lines: $m_1 = m_2$. **Perpendicular lines:** $m_1 m_2 = -1$ (equivalently $m_2 = -\frac{1}{m_1}$).

Midpoint of (x_1, y_1) and (x_2, y_2) : $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$. **Distance:** $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Độ dốc (gradient) m đo độ "nghiêng" của đường thẳng: $m = \frac{\text{thay đổi theo } y}{\text{thay đổi theo } x}$. Hai đường thẳng **song song** có cùng độ dốc; hai đường thẳng **vuông góc** có tích độ dốc bằng -1 (độ dốc này là nghịch đảo âm của độ dốc kia). Khi đề cho hai điểm, luôn tính độ dốc trước, rồi chọn dạng phương trình phù hợp nhất (thường dùng dạng điểm-độ dốc khi biết một điểm cụ thể).

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the equation of the line through $A(1, 2)$ and $B(4, 11)$, in the form $y = mx + c$.

$$m = \frac{11 - 2}{4 - 1} = \frac{9}{3} = 3.$$

Using point A : $y - 2 = 3(x - 1) \Rightarrow y = 3x - 1$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the equation of the line through $(3, -2)$ that is perpendicular to the line $2x + 4y = 8$.

Rewrite the given line as $y = -\frac{1}{2}x + 2$, so its gradient is $-\frac{1}{2}$. A perpendicular line has gradient $m = -\frac{1}{-1/2} = 2$.

$$y - (-2) = 2(x - 3) \Rightarrow y + 2 = 2x - 6 \Rightarrow y = 2x - 8.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

$A(2, 5)$ and $B(8, 1)$ are two points. Find the midpoint of $[AB]$, and the equation of the line through this midpoint that is parallel to AB .

Midpoint: $\left(\frac{2+8}{2}, \frac{5+1}{2}\right) = (5, 3)$. Gradient of AB : $m = \frac{1-5}{8-2} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$.

A line parallel to AB through $(5, 3)$ has the same gradient $-\frac{2}{3}$:

$$y - 3 = -\frac{2}{3}(x - 5) \Rightarrow 3y - 9 = -2x + 10 \Rightarrow 2x + 3y = 19.$$

(!) Lỗi thường gặp: The perpendicular-gradient condition is $m_1 m_2 = -1$, *not* $m_1 = -m_2$ – always take the negative *reciprocal* of the original gradient, not just its negation. A common special case: any horizontal line ($m = 0$) is perpendicular to any vertical line (undefined gradient), which the formula $m_1 m_2 = -1$ cannot itself capture.

2.6 Quadratic functions

For $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), completing the square gives **vertex form** $f(x) = a(x - h)^2 + k$ with $h = -\frac{b}{2a}$, $k = f(h)$.

Quadratic formula: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. The **discriminant** $\Delta = b^2 - 4ac$ determines the nature of the roots: $\Delta > 0$ – two distinct real roots; $\Delta = 0$ – one repeated real root (the parabola is tangent to the x -axis); $\Delta < 0$ – no real roots (a complex conjugate pair).

Sum and product of roots (α, β): $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Dạng đỉnh $f(x) = a(x - h)^2 + k$ cho ngay tọa độ đỉnh (h, k) mà không cần đạo hàm. Biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$ là "chìa khóa" phân loại nghiệm: dương – hai nghiệm phân biệt; bằng 0 – nghiệm kép (đỉnh nằm trên trục x); âm – không có nghiệm thực (khi đó chuyển sang xét nghiệm phức – xem Unit 1, phần AHL).

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the vertex of $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$ by completing the square.

$f(x) = 2(x^2 - 4x) + 9 = 2[(x - 2)^2 - 4] + 9 = 2(x - 2)^2 - 8 + 9 = 2(x - 2)^2 + 1$. **Vertex:** $(2, 1)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find k such that $x^2 + (k - 2)x + (k + 1) = 0$ has equal (repeated) roots.

$\Delta = (k - 2)^2 - 4(k + 1) = k^2 - 4k + 4 - 4k - 4 = k^2 - 8k = 0 \Rightarrow k(k - 8) = 0 \Rightarrow k = 0$ or $k = 8$.

Ví dụ mẫu · Worked example

If α, β are the roots of $2x^2 - 5x + 3 = 0$, find $\alpha^2 + \beta^2$ without solving for α, β individually.

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}, \alpha\beta = \frac{3}{2}.$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \frac{25}{4} - 3 = \frac{25}{4} - \frac{12}{4} = \frac{13}{4}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A rectangle has perimeter 40 m. Express the area A as a function of the width x , and hence find the width that maximizes the area.

With width x and length $20 - x$ (since $2(x + \ell) = 40$): $A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$. This is a

downward parabola with vertex (maximum) at $x = -\frac{20}{2(-1)} = 10$. So width 10 m gives length $20 - 10 = 10$ m (a square), with maximum area $A(10) = 100 \text{ m}^2$.

2.7 Quadratic inequalities

To solve $ax^2 + bx + c > 0$ (or $< 0, \geq 0, \leq 0$): find the roots of $ax^2 + bx + c = 0$, then use the **shape** of the parabola (upward if $a > 0$, downward if $a < 0$) to read off where the expression is positive or negative. For an upward parabola, the expression is negative *between* the roots and positive *outside* them (the reverse for a downward parabola).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Để giải bất phương trình bậc hai, luôn tìm nghiệm của phương trình bậc hai tương ứng trước, sau đó dựa vào **hình dạng của parabol** (hướng lên nếu $a > 0$, hướng xuống nếu $a < 0$) để xác định dấu của biểu thức trên từng khoảng. Cách trực quan nhất: vẽ phác một parabol đơn giản và đánh dấu hai nghiệm trên trục x – phần đồ thị nằm **TRÊN** trục x ứng với biểu thức dương, nằm **DƯỚI** ứng với âm.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $x^2 - 5x + 6 > 0$.

Factor: $(x - 2)(x - 3) > 0$, with roots $x = 2, 3$. Since $a = 1 > 0$ (upward parabola), the expression is positive *outside* the roots:

$$x < 2 \quad \text{or} \quad x > 3.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $-x^2 + 2x + 8 \geq 0$.

Multiply by -1 (reversing the inequality): $x^2 - 2x - 8 \leq 0 \Rightarrow (x - 4)(x + 2) \leq 0$, with roots $x = -2, 4$. Since the coefficient of x^2 is now positive, the expression is ≤ 0 *between* the roots:

$$-2 \leq x \leq 4.$$

(Check at $x = 0$, inside this interval, in the *original* inequality: $-0 + 0 + 8 = 8 \geq 0 \checkmark$.)

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $(x - 1)(x + 3) < 0$.

Roots $x = 1, -3$; upward parabola ($a = 1 > 0$), so the expression is negative *between* the roots:

$$-3 < x < 1.$$

(!) Lỗi thường gặp: Multiplying or dividing a quadratic inequality by a **negative** number reverses the inequality sign – exactly as with linear inequalities. Also, the solution set for a strict inequality ($<, >$) excludes the roots themselves, while $\leq, \geq$ includes them.

2.8 Locating Roots by Sign Change

Many equations built from familiar functions cannot be solved exactly by algebraic methods – for instance, equations that mix polynomial, exponential, or logarithmic terms. Before solving such an equation numerically (e.g. with a GDC), it is useful to first confirm *where* a root lies, using nothing more than the sign of the function at a few points.

If f is continuous on the closed interval $[a, b]$, and $f(a)$ and $f(b)$ have opposite signs (that is, $f(a) \cdot f(b) < 0$), then the equation $f(x) = 0$ has **at least one** root c with $a < c < b$.

This test only guarantees *existence* of a root in (a, b) (there could be more than one) – it does not by itself pin down the exact value. However, evaluating f at a point inside (a, b) and checking its sign against the two endpoints lets the interval containing a root be **narrowed** repeatedly, to any desired level of accuracy.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nếu f liên tục trên đoạn $[a, b]$ và $f(a), f(b)$ trái dấu (tích $f(a) \cdot f(b) < 0$), thì phương trình $f(x) = 0$ chắc chắn có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng (a, b) – vì đồ thị của một hàm liên tục không thể “nhảy” từ giá trị âm sang giá trị dương (hay ngược lại) mà không cắt trục hoành ở đâu đó bên trong khoảng đó. Đây là công cụ hữu ích để định vị nghiệm của các phương trình không thể giải chính xác bằng đại số: chỉ cần tính giá trị của f tại một vài điểm, xét dấu, rồi thu hẹp dần khoảng chứa nghiệm bằng cách kiểm tra thêm các điểm ở giữa.

Ví dụ mẫu • Worked example

Show that $x^3 - x - 3 = 0$ has a root between $x = 1$ and $x = 2$, then use $x = 1.5$ to narrow down the interval containing it.

Let $f(x) = x^3 - x - 3$. Then

$$f(1) = 1 - 1 - 3 = -3 < 0, \quad f(2) = 8 - 2 - 3 = 3 > 0.$$

Since $f(1)$ and $f(2)$ have opposite signs, f has at least one root in $(1, 2)$.

Testing the midpoint: $f(1.5) = 3.375 - 1.5 - 3 = -0.125 < 0$. Since $f(1.5) < 0$ and $f(2) > 0$ (opposite signs), the root lies in the narrower interval $(1.5, 2)$.

Ví dụ mẫu • Worked example

Show that $e^x = 3 - x$ has a root between $x = 0$ and $x = 1$, then narrow the interval using $x = 0.5$.

Rearrange as $g(x) = e^x + x - 3 = 0$ (so that solving $g(x) = 0$ is equivalent to solving the original equation). Then

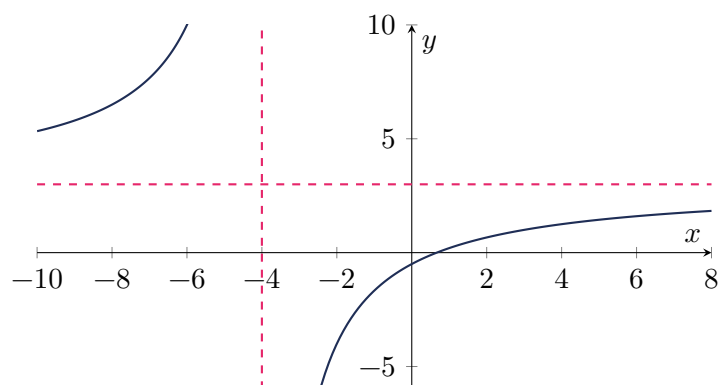
$$g(0) = e^0 + 0 - 3 = 1 - 3 = -2 < 0, \quad g(1) = e^1 + 1 - 3 = 2.71828 \dots + 1 - 3 \approx 0.718 > 0.$$

Since $g(0)$ and $g(1)$ have opposite signs, g has at least one root in $(0, 1)$.

Testing the midpoint: $g(0.5) = e^{0.5} + 0.5 - 3 \approx 1.6487 + 0.5 - 3 = -0.851 < 0$. Since $g(0.5) < 0$ and $g(1) > 0$, the root lies in the narrower interval $(0.5, 1)$.

2.9 Rational functions

For $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad \neq bc$), the graph is a hyperbola with **vertical asymptote** $x = -\frac{d}{c}$ (where the denominator vanishes) and **horizontal asymptote** $y = \frac{a}{c}$ (the ratio of leading coefficients, since numerator and denominator have equal degree).



$f(x) = \frac{3x-2}{x+4}$: vertical asymptote $x = -4$ (dashed), horizontal asymptote $y = 3$ (dashed).

Ví dụ mẫu · Worked example

State the asymptotes, and the x - and y -intercepts, of $f(x) = \frac{3x-2}{x+4}$.

VA: $x = -4$. **HA:** $y = \frac{3}{1} = 3$.

y -intercept: $f(0) = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$. **x -intercept:** $3x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hàm phân thức bậc nhất/bậc nhất: tiệm cận đứng tại nghiệm của mẫu số (giá trị x làm mẫu bằng 0), tiệm cận ngang là tỉ số hệ số bậc cao nhất của tử và mẫu (vì tử và mẫu cùng bậc 1). Đồ thị luôn gồm hai nhánh hyperbol đối xứng qua giao điểm của hai đường tiệm cận.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) By performing polynomial division, express $f(x) = \frac{x^2-1}{x-2}$ in the form $x+2 + \frac{c}{x-2}$, and state the equations of its asymptotes.

Dividing: $x^2 - 1 = (x-2)(x+2) + 3$ (check: $(x-2)(x+2) = x^2 - 4$, and $x^2 - 4 + 3 = x^2 - 1$ ✓). So

$$f(x) = x + 2 + \frac{3}{x-2}.$$

As $x \rightarrow 2$, the fraction term dominates: **vertical asymptote** $x = 2$. As $|x| \rightarrow \infty$, $\frac{3}{x-2} \rightarrow 0$, so $f(x) \rightarrow x+2$: **oblique (slant) asymptote** $y = x+2$.

2.10 Rational functions with a quadratic denominator (AHL)

AHL only. For $f(x) = \frac{ax + b}{x^2 + cx + d}$ (linear numerator, quadratic denominator):

Vertical asymptotes occur at the real roots of $x^2 + cx + d = 0$. The discriminant $\Delta = c^2 - 4d$ determines how many: $\Delta > 0$ gives **two** vertical asymptotes; $\Delta = 0$ gives **one** (a repeated root); $\Delta < 0$ gives **none** – the denominator is never zero, so f is defined and continuous for every real x .

Horizontal asymptote: since the numerator has smaller degree than the denominator, $f(x) \rightarrow 0$ as $x \rightarrow \pm\infty$, so the horizontal asymptote is always $y = 0$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hàm phân thức có tử bậc nhất, mẫu bậc hai: số tiệm cận đứng phụ thuộc biệt thức $\Delta = c^2 - 4d$ của mẫu số – $\Delta > 0$ cho hai tiệm cận đứng, $\Delta = 0$ cho một tiệm cận đứng (nghiệm kép), $\Delta < 0$ thì **không có** tiệm cận đứng nào (mẫu số luôn khác 0 với mọi x thực). Vì bậc tử nhỏ hơn bậc mẫu, tiệm cận ngang luôn là $y = 0$.

(!) Lỗi thường gặp: If a root of the denominator is *also* a root of the numerator, the common factor cancels and that location is a **hole** (removable discontinuity), not a vertical asymptote – always factor the numerator too before declaring a vertical asymptote.

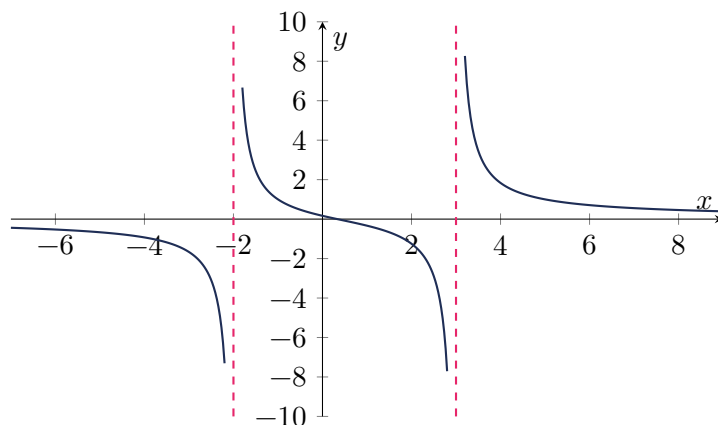
Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) For $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6}$, find the vertical and horizontal asymptotes, and the x - and y -intercepts.

Factor the denominator: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$ (check: $(x - 3)(x + 2) = x^2 + 2x - 3x - 6 = x^2 - x - 6$ ✓). Discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4(-6) = 1 + 24 = 25 > 0$, confirming two real roots; the numerator $3x - 1$ is nonzero at both $x = 3$ and $x = -2$, so both give genuine asymptotes.

Vertical asymptotes: $x = 3$ and $x = -2$. **Horizontal asymptote:** $y = 0$.

x -intercept: $3x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. **y -intercept:** $f(0) = \frac{-1}{-6} = \frac{1}{6}$.



$f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 - x - 6} = \frac{3x - 1}{(x - 3)(x + 2)}$: vertical asymptotes $x = -2$ and $x = 3$ (dashed), horizontal asymptote $y = 0$ (the x -axis).

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) For $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+5}$, show that the graph has no vertical asymptote, and find the horizontal asymptote and both intercepts.

Discriminant of the denominator: $\Delta = 2^2 - 4(5) = 4 - 20 = -16 < 0$, so $x^2 + 2x + 5 = 0$ has no real roots – the denominator is never zero, so f has **no vertical asymptote**.

Horizontal asymptote: $y = 0$ (numerator degree < denominator degree).

x -intercept: $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$. **y -intercept:** $f(0) = \frac{1}{5}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) For $f(x) = \frac{x-1}{x^2-6x+9}$, find the vertical asymptote(s), and the x - and y -intercepts.

Denominator: $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$ (check: $(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$ ✓), a **repeated** root at $x = 3$; discriminant $\Delta = (-6)^2 - 4(9) = 36 - 36 = 0$, confirming this. The numerator $x - 1$ is nonzero at $x = 3$ (it equals 2), so this repeated root still gives a genuine vertical asymptote – just a single one.

Vertical asymptote: $x = 3$ (only one). **Horizontal asymptote:** $y = 0$.

x -intercept: $x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1$. **y -intercept:** $f(0) = \frac{-1}{9} = -\frac{1}{9}$.

2.11 The Reciprocal Function $y = \frac{1}{f(x)}$ (AHL)

Given the graph of $y = f(x)$, the graph of $y = \frac{1}{f(x)}$ can be sketched directly from it, without finding a new formula each time, by tracking a few correspondences between the two graphs.

AHL only. At every x where $f(x) \neq 0$, the graphs of $y = f(x)$ and $y = \frac{1}{f(x)}$ are related as follows:

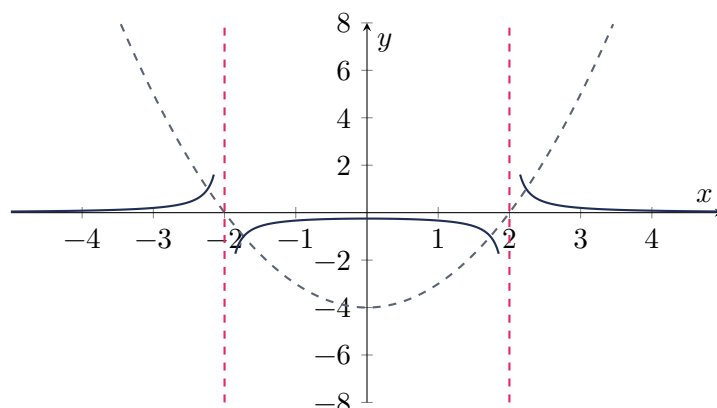
- Every **zero** of f becomes a **vertical asymptote** of $\frac{1}{f(x)}$.
- Every **vertical asymptote** of f becomes a point where $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$ (the graph of $\frac{1}{f(x)}$ approaches the x -axis there).
- A **local maximum** of f at $x = x_0$ becomes a **local minimum** of $\frac{1}{f(x)}$ at the same x_0 , with y -value $\frac{1}{f(x_0)}$; a **local minimum** of f becomes a **local maximum** of $\frac{1}{f(x)}$ – the x -coordinate is unchanged, only the y -value is replaced by its reciprocal and the type of extremum swaps.
- $\frac{1}{f(x)}$ has **exactly the same sign** as $f(x)$ at every x in the domain (both positive or both negative) – taking a reciprocal never changes sign.

If $f(x) \rightarrow L \neq 0$ as $x \rightarrow \pm\infty$, then $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \frac{1}{L}$ (a horizontal asymptote); if $f(x) \rightarrow \pm\infty$, then $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hàm số $y = \frac{1}{f(x)}$: mỗi **nghiệm** của f (nơi $f(x) = 0$) trở thành **tiệm cận đứng** của $\frac{1}{f(x)}$; ngược lại, mỗi **tiệm cận đứng** của f khiến $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$ (đồ thị tiến sát trục hoành). Một **cực đại** của f tại $x = x_0$ trở thành **cực tiểu** của $\frac{1}{f(x)}$ tại cùng hoành độ x_0 (tung độ là nghịch đảo của tung độ cũ), và một **cực tiểu** của f trở thành **cực đại** – hoành độ không đổi, chỉ tung độ bị nghịch đảo và loại cực trị bị đảo ngược. Dấu của $\frac{1}{f(x)}$ luôn **giống hệt** dấu của $f(x)$ tại mọi điểm, vì phép nghịch đảo không bao giờ làm đổi dấu.



For $f(x) = x^2 - 4$ (dashed grey), the zeros $x = -2, 2$ of f become vertical asymptotes (dashed pink) of $y = \frac{1}{f(x)}$ (solid navy); the local minimum of f at $(0, -4)$ becomes a local maximum of $\frac{1}{f(x)}$ at $(0, -\frac{1}{4})$; and since $f(x) \rightarrow +\infty$ as $|x| \rightarrow \infty$, $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) The graph of $y = f(x)$ has a zero at $x = 5$, a vertical asymptote at $x = -1$, and a local maximum at $(2, 3)$ (with $f(x) > 0$ throughout a neighbourhood of $x = 2$). Describe the corresponding features of $y = \frac{1}{f(x)}$.

Zero at $x = 5$: becomes a **vertical asymptote of $\frac{1}{f(x)}$ at $x = 5$.**

Vertical asymptote at $x = -1$: becomes a point where $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$ as $x \rightarrow -1$.

Local maximum $(2, 3)$: becomes a **local minimum of $\frac{1}{f(x)}$ at $(2, \frac{1}{3})$** (same x -coordinate, reciprocal y -value, type of extremum swapped).

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) For $f(x) = x - 3$, find and justify the vertical asymptote and the sign behaviour of $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x-3}$.

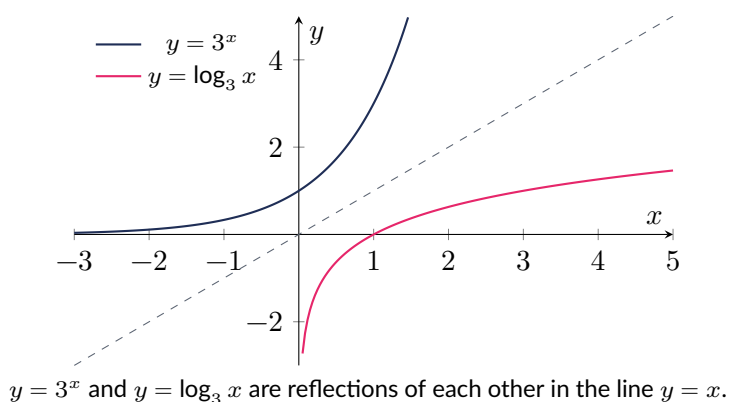
$f(x) = x - 3$ has a single zero at $x = 3$ ($f(3) = 0$), so $\frac{1}{f(x)}$ has a **vertical asymptote at $x = 3$.**

Sign: for $x > 3$, $f(x) = x - 3 > 0$, so $\frac{1}{x-3} > 0$ (matching the sign of f); for $x < 3$, $f(x) = x - 3 < 0$, so $\frac{1}{x-3} < 0$ (again matching). As $x \rightarrow 3^+$, $f(x) \rightarrow 0^+$ so $\frac{1}{x-3} \rightarrow +\infty$; as $x \rightarrow 3^-$, $f(x) \rightarrow 0^-$ so $\frac{1}{x-3} \rightarrow -\infty$.

As $x \rightarrow \pm\infty$, $f(x) \rightarrow \pm\infty$, so $\frac{1}{x-3} \rightarrow 0$: the **horizontal asymptote is $y = 0$.**

2.12 Exponential and logarithmic functions

$f(x) = a^x$ ($a > 0, a \neq 1$) has domain $\mathbb{R}$, range $y > 0$, and horizontal asymptote $y = 0$. Its inverse is $f^{-1}(x) = \log_a x$, with domain $x > 0$, range $\mathbb{R}$, and vertical asymptote $x = 0$. Since f^{-1} is the inverse of f , their graphs are reflections of each other in the line $y = x$.



Ví dụ mẫu · Worked example

A bacteria colony is modelled by $N(t) = 200 \cdot 3^{t/4}$ (t in hours). Find $N(0)$, $N(10)$ (to the nearest whole number), and the time for the population to reach 5000 (to the nearest 0.1 hour).

$$N(0) = 200 \cdot 3^0 = 200.$$

$$N(10) = 200 \cdot 3^{2.5} = 200 \cdot 9\sqrt{3} = 200(15.5885) \approx 3118.$$

$$\text{Solve } 200 \cdot 3^{t/4} = 5000 \Rightarrow 3^{t/4} = 25 \Rightarrow \frac{t}{4} \ln 3 = \ln 25 \Rightarrow t = \frac{4 \ln 25}{\ln 3} = \frac{4(3.21888)}{1.09861} \approx 11.7 \text{ hours.}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hàm mũ a^x và hàm log $\log_a x$ là hai hàm ngược của nhau, nên đồ thị của chúng đối xứng qua đường thẳng $y = x$. Khi giải bài toán mô hình hoá tăng trưởng/suy giảm, luôn xác định rõ: đề cho **hệ số tăng trưởng theo đơn vị thời gian** nào (giờ, ngày, năm...) để đặt đúng biến số mũ.

2.13 Modelling with functions

Real situations are modelled by choosing the function type whose key feature matches the situation: a constant rate of change suggests **linear**; a constant percentage change per unit time suggests **exponential**; a quantity proportional to another (or to a power of another) suggests **direct or inverse variation**; a repeating pattern suggests a **sinusoidal** model.

Direct variation: $y = kx^n$ (k constant) – y increases as x increases (for $n > 0$); $k = \frac{y}{x^n}$ is found from one data pair.

Inverse variation: $y = \frac{k}{x^n}$ – y decreases as x increases; $k = yx^n$.

Exponential model: $y = ab^x$ or $y = ae^{kx}$, for constant percentage growth/decay per unit x .

Sinusoidal model: $y = a \sin(b(x - c)) + d$, for a quantity that oscillates periodically (e.g. tide height, temperature over a year).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Chọn đúng **LOẠI** mô hình là bước quan trọng nhất: tốc độ thay đổi không đổi → mô hình **tuyến tính**; tỉ lệ phần trăm thay đổi không đổi mỗi đơn vị thời gian → mô hình **mũ**; đại lượng lặp lại theo chu kỳ (thủy triều, nhiệt độ theo mùa) → mô hình **hình sin**; một đại lượng tỉ lệ thuận/ngược với đại lượng khác → mô hình **biến thiên (variation)**. Luôn dùng dữ kiện đề bài để tìm hằng số ($k, a, b, \dots$) trước khi dùng mô hình để dự đoán.

Ví dụ mẫu · Worked example

The cost C of ribbon varies directly with its length L . If 5 m of ribbon costs \$12.50, find the constant of variation and the cost of 8 m.

$$C = kL \Rightarrow k = \frac{C}{L} = \frac{12.50}{5} = 2.5 \text{ (\$ per metre). Cost of 8 m: } C = 2.5(8) = \$20.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

The pressure P of a fixed amount of gas at constant temperature varies inversely with its volume V (Boyle's law). Given $P = 200$ kPa when $V = 3$ L, find P when $V = 5$ L.

$$PV = k \Rightarrow k = 200(3) = 600. \text{ When } V = 5: P = \frac{600}{5} = 120 \text{ kPa.}$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A population is modelled by $P(t) = P_0 e^{kt}$. Given $P(0) = 1000$ and $P(4) = 1500$, find k correct to 4 s.f., and predict $P(10)$ correct to 3 s.f.

$$P(4) = 1000e^{4k} = 1500 \Rightarrow e^{4k} = 1.5 \Rightarrow k = \frac{\ln 1.5}{4} \approx 0.1014.$$

$$P(10) = 1000e^{0.1014(10)} = 1000e^{1.014} \approx 2760 \text{ (3 s.f.)}.$$

2.14 Composite and inverse functions

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$; the domain of $f \circ g$ requires x to be in the domain of g , and $g(x)$ to be in the domain of f . To find f^{-1} : write $y = f(x)$, swap x and y , then solve for y .

Composition is generally **not commutative**: $(f \circ g)(x) \neq (g \circ f)(x)$. Also $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$ – the inverse function is not the reciprocal function.

Ví dụ mẫu · Worked example

Let $f(x) = \frac{2x-5}{3}$. Find $f^{-1}(x)$, and verify by evaluating $f(f^{-1}(2))$.

$$y = \frac{2x-5}{3} \Rightarrow 3y = 2x-5 \Rightarrow x = \frac{3y+5}{2}. \text{ Swap: } f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{2}.$$

$$\text{Check: } f^{-1}(2) = \frac{6+5}{2} = 5.5, \text{ and } f(5.5) = \frac{2(5.5)-5}{3} = \frac{6}{3} = 2. \checkmark$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Let $f(x) = x^2 + 1$ and $g(x) = x - 2$. Find $(f \circ g)(x)$ and $(g \circ f)(x)$, and confirm they are different.

$$(f \circ g)(x) = f(x-2) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5.$$

$$(g \circ f)(x) = g(x^2 + 1) = (x^2 + 1) - 2 = x^2 - 1.$$

Since $x^2 - 4x + 5 \neq x^2 - 1$ in general, $f \circ g \neq g \circ f$: composition is not commutative here.

Ví dụ mẫu · Worked example

Let $g(x) = e^{2x} + 1$ and $f(x) = \ln(x-1)$. Find $(f \circ g)(x)$ and state its domain.

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln((e^{2x} + 1) - 1) = \ln(e^{2x}) = 2x$. Since $e^{2x} + 1 > 1$ for every real x , the argument of f is always positive, so the **domain is all real x** (even though the simplified result $2x$ looks unrestricted, this domain check is still required from the composition).

Ví dụ mẫu · Worked example

Let $f(x) = x^2 - 4x + 3$ with restricted domain $x \geq 2$ (chosen to make f one-to-one). Find $f^{-1}(x)$ and state its domain.

Complete the square: $f(x) = (x-2)^2 - 1$. Let $y = (x-2)^2 - 1 \Rightarrow (x-2)^2 = y+1 \Rightarrow x-2 = \pm\sqrt{y+1}$. Since $x \geq 2$, take the **positive root**: $x = 2 + \sqrt{y+1}$. Swap:

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}, \quad \text{domain: } x \geq -1$$

(the range of the restricted f , which becomes the domain of f^{-1}).

(!) Lỗi thường gặp: Restricting the domain of a many-to-one function (like $x^2 - 4x + 3$ on all of $\mathbb{R}$) is exactly what makes an inverse function possible – always check which branch (root sign) matches the stated domain before writing f^{-1} .

2.14.1 Self-inverse functions

For most functions, f^{-1} is a genuinely different function from f . Occasionally, however, applying f twice returns the original input – such a function is its own inverse.

f is **self-inverse** (an **involution**) if $f = f^{-1}$, equivalently

$$f(f(x)) = x \quad \text{for every } x \text{ in the domain of } f.$$

Since the graphs of f and f^{-1} are always reflections of each other in the line $y = x$, the graph of a self-inverse function is **symmetric about the line** $y = x$ (reflecting it in $y = x$ maps the graph onto itself).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hàm số f được gọi là **tự nghịch đảo** (self-inverse, hay involution) nếu $f = f^{-1}$, tức là $f(f(x)) = x$ với mọi x thuộc tập xác định – áp dụng f hai lần liên tiếp sẽ trả lại đúng giá trị ban đầu. Vì đồ thị của f và f^{-1} luôn đối xứng qua đường thẳng $y = x$, nên đồ thị của một hàm tự nghịch đảo phải **tự đối xứng** qua chính đường thẳng đó.

Ví dụ mẫu · Worked example

Verify that $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) is self-inverse.

$$f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x \quad \text{for every } x \neq 0.$$

Since $f(f(x)) = x$ identically, $f = f^{-1}$: f is self-inverse. (Graphically: swapping x and y in $y = \frac{1}{x}$ gives $x = \frac{1}{y}$, i.e. $y = \frac{1}{x}$ again – the same curve, confirming the symmetry about $y = x$.)

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the value of k for which $f(x) = \frac{x-2}{x-k}$ (domain $x \neq k$) is self-inverse.

Compute $f(f(x))$. Let $y = f(x) = \frac{x-2}{x-k}$.

$$y-2 = \frac{(x-2) - 2(x-k)}{x-k} = \frac{2k-2-x}{x-k}, \quad y-k = \frac{(x-2) - k(x-k)}{x-k} = \frac{(1-k)x + (k^2-2)}{x-k}.$$

$$f(f(x)) = \frac{y-2}{y-k} = \frac{2k-2-x}{(1-k)x + (k^2-2)}.$$

For f to be self-inverse, $f(f(x)) = x$ for every valid x , so

$$2k-2-x = x[(1-k)x + (k^2-2)] = (1-k)x^2 + (k^2-2)x.$$

The left side has no x^2 term, so matching coefficients of x^2 requires $1-k=0 \Rightarrow k=1$. Substituting $k=1$ back: the right side becomes $(1-2)x = -x$, and the left side becomes $2(1)-2-x = -x$ — both sides equal $-x$ ✓, so $k=1$ works for every x , confirming it is the required value.

$$\text{Answer: } k=1, \quad f(x) = \frac{x-2}{x-1}.$$

Check by direct substitution: with $k=1$, let $y = f(x) = \frac{x-2}{x-1}$. Then $y-2 = \frac{-x}{x-1}$ and $y-1 = \frac{-1}{x-1}$, so

$$f(f(x)) = \frac{y-2}{y-1} = \frac{-x/(x-1)}{-1/(x-1)} = x \quad \checkmark$$

confirming f is indeed self-inverse.

2.15 Solving $|f(x)| = |g(x)|$ and other equations involving modulus (AHL)

AHL only. Key modulus identity: $|A| = |B|$ if and only if $A = B$ or $A = -B$ (equivalently, $A^2 = B^2$). Because both sides of $|A| = |B|$ are automatically non-negative, squaring is always safe, and **every** solution produced this way satisfies the original equation — no extraneous-root check is needed.

For an equation of the form $|A| = B$, where B is *not* itself written as a modulus, the right-hand side must be non-negative ($B \geq 0$) for any solution to exist. Split into $A = B$ or $A = -B$ as before, but now **every candidate must be checked** in the original equation, since squaring a quantity that isn't guaranteed non-negative can introduce extraneous roots.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với phương trình dạng $|A| = |B|$ (cả hai vế đều là trị tuyệt đối): chỉ cần xét hai trường hợp $A = B$ hoặc $A = -B$, và **không cần kiểm tra lại** vì cả hai vế luôn không âm nên không thể có nghiệm ngoại lai. Nhưng với phương trình dạng $|A| = B$ (vế phải *không* phải trị tuyệt đối): trước tiên cần điều kiện $B \geq 0$, sau đó xét hai trường hợp như trên, và **bắt buộc kiểm tra lại** từng nghiệm vào phương trình gốc vì có thể xuất hiện nghiệm ngoại lai.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Solve $|2x-1| = |x+4|$.

Case 1: $2x-1 = x+4 \Rightarrow x=5$.

Case 2: $2x-1 = -(x+4) = -x-4 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1$.

Check: $x=5$: LHS = $|10-1| = 9$, RHS = $|5+4| = 9$ ✓. $x=-1$: LHS = $|-2-1| = 3$, RHS = $|-1+4| = 3$ ✓.

Solutions: $x=5$ and $x=-1$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Solve $|x - 3| = 2x + 1$.The left side is a modulus, so the right side must be non-negative: $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$.**Case 1:** $x - 3 = 2x + 1 \Rightarrow -x = 4 \Rightarrow x = -4$. This fails $x \geq -\frac{1}{2}$, so it is **rejected** (directly: LHS = $|-4 - 3| = 7$, RHS = $2(-4) + 1 = -7$; $7 \neq -7$).**Case 2:** $x - 3 = -(2x + 1) = -2x - 1 \Rightarrow 3x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$. This satisfies $x \geq -\frac{1}{2}$; directly: LHS = $|\frac{2}{3} - 3| = \frac{7}{3}$, RHS = $2(\frac{2}{3}) + 1 = \frac{7}{3}$ ✓.**Solution:** $x = \frac{2}{3}$ only.

AHL only. For an equation containing a **sum** of modulus terms, such as $|x - a| + |x - b| = k$, identify **all** critical values (here $x = a$ and $x = b$) where an individual expression changes sign. These divide $\mathbb{R}$ into intervals; within each interval every modulus can be removed according to its known sign there, giving an ordinary linear equation to solve – then check that the resulting x actually lies inside that interval.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với phương trình chứa **tổng** nhiều biểu thức trị tuyệt đối (ví dụ $|x - a| + |x - b| = k$), cần xác định **tất cả** các điểm tới hạn (nơi từng biểu thức bên trong đổi dấu), chia trục số thành các khoảng, rồi trên mỗi khoảng bỏ dấu trị tuyệt đối theo đúng dấu đã biết để được phương trình bậc nhất, giải ra x rồi kiểm tra x có thực sự nằm trong khoảng đang xét hay không.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Solve $|x + 1| + |x - 2| = 5$.Critical values: $x = -1$ and $x = 2$, giving three intervals.**Interval** $x < -1$: both $x + 1 < 0$ and $x - 2 < 0$, so $|x + 1| = -x - 1$, $|x - 2| = 2 - x$.

$$(-x - 1) + (2 - x) = 5 \Rightarrow -2x + 1 = 5 \Rightarrow x = -2.$$

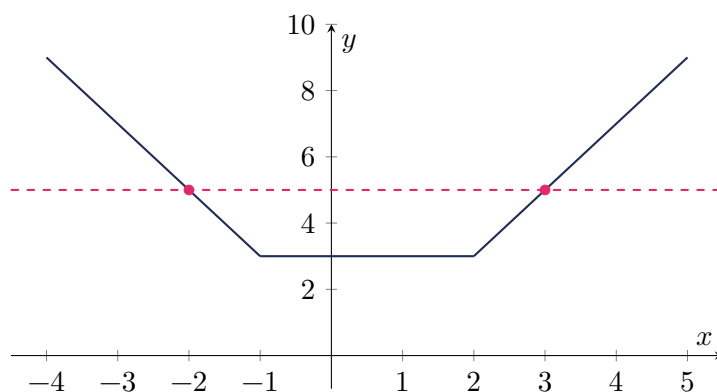
Check: $-2 < -1$ ✓; directly $|-2 + 1| + |-2 - 2| = 1 + 4 = 5$ ✓.**Interval** $-1 \leq x < 2$: $x + 1 \geq 0$, $x - 2 < 0$, so $|x + 1| = x + 1$, $|x - 2| = 2 - x$.

$$(x + 1) + (2 - x) = 3 \neq 5 \quad (\text{no solution in this interval}).$$

Interval $x \geq 2$: both $x + 1 > 0$ and $x - 2 \geq 0$, so $|x + 1| = x + 1$, $|x - 2| = x - 2$.

$$(x + 1) + (x - 2) = 5 \Rightarrow 2x - 1 = 5 \Rightarrow x = 3.$$

Check: $3 \geq 2$ ✓; directly $|3 + 1| + |3 - 2| = 4 + 1 = 5$ ✓.**Solutions:** $x = -2$ and $x = 3$.



$y = |x + 1| + |x - 2|$ (piecewise linear) meets the line $y = 5$ (dashed) exactly at $x = -2$ and $x = 3$.

2.16 Polynomial functions (AHL)

AHL only. Factor theorem: $(x - a)$ is a factor of polynomial $P(x)$ if and only if $P(a) = 0$.

Remainder theorem: when $P(x)$ is divided by $(x - a)$, the remainder equals $P(a)$.

Vieta's formulas (cubic): if $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ has roots α, β, γ , then

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

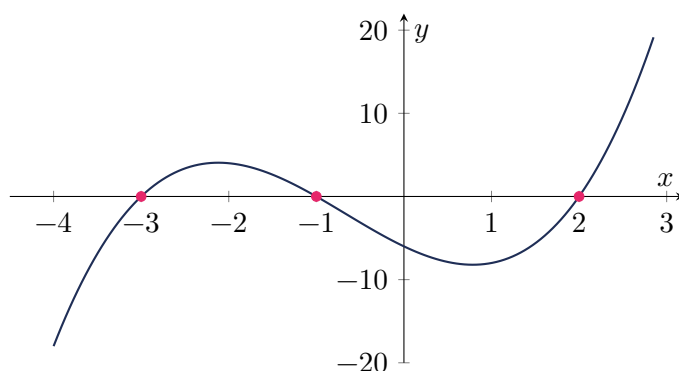
(AHL) Định lý nhân tử (factor theorem) và định lý số dư (remainder theorem) là hai công cụ song song: định lý nhân tử cho biết $(x - a)$ có là nhân tử hay không (kiểm tra $P(a) = 0$), còn định lý số dư cho biết số dư của phép chia $P(x)$ cho $(x - a)$ chính là $P(a)$ – không cần thực hiện phép chia đa thức đầy đủ chỉ để tìm số dư.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Show that $(x - 2)$ is a factor of $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$, and factor $P(x)$ fully.

$P(2) = 8 + 8 - 10 - 6 = 0$, so $(x - 2)$ is a factor (factor theorem). Dividing: $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$. Factoring the quadratic: $x^2 + 4x + 3 = (x + 1)(x + 3)$.

$$P(x) = (x - 2)(x + 1)(x + 3), \quad \text{roots: } x = 2, -1, -3.$$



$P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x - 2)(x + 1)(x + 3)$: the three x -intercepts are exactly the three roots.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the remainder when $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ is divided by $(x + 1)$.

By the remainder theorem, the remainder is $P(-1) = 2(-1) - 3(1) + 4(-1) - 1 = -2 - 3 - 4 - 1 = -10$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) $P(x) = x^3 + ax + b$ has $(x - 1)$ as a factor, and leaves remainder -12 when divided by $(x + 1)$. Find a and b , then find all roots of P .

$$P(1) = 0: 1 + a + b = 0 \Rightarrow a + b = -1. \quad (\text{i})$$

$$P(-1) = -12: -1 - a + b = -12 \Rightarrow b - a = -11. \quad (\text{ii})$$

Adding (i)+(ii) after rearranging (i) as $b = -1 - a$ and substituting into (ii): $(-1 - a) - a = -11 \Rightarrow -1 - 2a = -11 \Rightarrow a = 5$, so $b = -6$.

$$P(x) = x^3 + 5x - 6 = (x - 1)(x^2 + x + 6)$$

(check: $(x - 1)(x^2 + x + 6) = x^3 + x^2 + 6x - x^2 - x - 6 = x^3 + 5x - 6$ ✓). The quadratic factor has $\Delta = 1 - 24 = -23 < 0$, so the remaining roots are complex:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{23}}{2}i \approx -0.5 \pm 2.398i.$$

Roots: $x = 1$ and $x \approx -0.5 \pm 2.398i$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) The cubic equation $2x^3 + px^2 + qx - 12 = 0$ has roots $1, 2, r$. Find p, q , and r .

Product of roots: $1 \cdot 2 \cdot r = -\frac{-12}{2} = 6 \Rightarrow r = 3$.

Sum of roots: $1 + 2 + 3 = -\frac{p}{2} \Rightarrow 6 = -\frac{p}{2} \Rightarrow p = -12$.

Sum of pairwise products: $1(2) + 2(3) + 1(3) = \frac{q}{2} \Rightarrow 11 = \frac{q}{2} \Rightarrow q = 22$.

Check by expansion: $2(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 2(x^3 - 6x^2 + 11x - 6) = 2x^3 - 12x^2 + 22x - 12$
✓ matches $p = -12, q = 22$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Solve the inequality $\frac{(x - 1)(x + 2)}{x - 3} \geq 0$ using a sign diagram.

Critical values: $x = -2, 1, 3$ (zeros of numerator, zero of denominator). Testing a point in each interval:

Interval	$x < -2$	$-2 < x < 1$	$1 < x < 3$	$x > 3$
Test point	$x = -3$	$x = 0$	$x = 2$	$x = 4$
Sign of expression	—	+	—	+

The expression equals 0 at $x = -2, 1$ (included, since ≥ 0) and is undefined at $x = 3$ (excluded).

Solution: $-2 \leq x \leq 1$ or $x > 3$.

(!) Lỗi thường gặp: When solving rational inequalities, never multiply both sides by an expression containing x (its sign is unknown) — instead move everything to one side, combine into a single fraction, and use a sign diagram over the critical values (zeros of numerator *and* of denominator).

2.17 Practice: Paper 1 style (no calculator)

Bài tập luyện tập

State the domain and range of $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$.

Lời giải chi tiết

Domain: $16 - x^2 \geq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 4$. Range: $0 \leq y \leq 4$.

Bài tập luyện tập

The graph of $y = f(x)$ has a maximum point at $(2, 5)$. State the coordinates of the maximum point of $y = f(x - 3) + 2$.

(A) $(5, 7)$

(C) $(5, 3)$

(B) $(-1, 7)$

(D) $(-1, 3)$

Lời giải chi tiết

Shift right 3, up 2: $(2 + 3, 5 + 2) = (5, 7)$. **(A).**

Bài tập luyện tập

The graph of $y = f(x)$ passes through $(1, 4)$. Find the corresponding point on $y = 3f(x) - 1$.

Lời giải chi tiết

Only the output changes: $y = 3(4) - 1 = 11$. Point: $(1, 11)$.

Bài tập luyện tập

Find the vertex of $f(x) = 2x^2 - 8x + 9$ by completing the square.

(A) $(2, 1)$

(C) $(2, 9)$

(B) $(4, 1)$

(D) $(-2, 1)$

Lời giải chi tiết

$f(x) = 2(x - 2)^2 + 1$. Vertex $(2, 1)$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Find k such that $x^2 + (k - 2)x + (k + 1) = 0$ has equal roots.

Lời giải chi tiết

$$\Delta = (k-2)^2 - 4(k+1) = k^2 - 8k = 0 \Rightarrow k = 0 \text{ or } k = 8.$$

Bài tập luyện tập

If α, β are the roots of $2x^2 - 5x + 3 = 0$, find $\alpha^2 + \beta^2$.

(A) $\frac{13}{4}$

(C) $\frac{19}{4}$

(B) $\frac{25}{4}$

(D) $\frac{7}{4}$

Lời giải chi tiết

$$\alpha + \beta = \frac{5}{2}, \alpha\beta = \frac{3}{2}. \alpha^2 + \beta^2 = \frac{25}{4} - 3 = \frac{13}{4}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

State the equations of the vertical and horizontal asymptotes of $f(x) = \frac{3x-2}{x+4}$.

Lời giải chi tiết

$$\text{VA: } x = -4. \text{ HA: } y = 3.$$

Bài tập luyện tập

State the x - and y -intercepts of $f(x) = \frac{3x-2}{x+4}$.

Lời giải chi tiết

$$x\text{-intercept: } x = \frac{2}{3}. \quad y\text{-intercept: } f(0) = -\frac{1}{2}.$$

Bài tập luyện tập

Determine whether $f(x) = x^3 - 3x$ is one-to-one on $\mathbb{R}$. Justify your answer.

Lời giải chi tiết

No: $f(x) = x(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})$, so $f(-\sqrt{3}) = f(0) = f(\sqrt{3}) = 0$ – three inputs share an output, failing the horizontal line test.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = x - 2$. Find $(f \circ g)(x)$ and $(g \circ f)(x)$, and state whether they are equal.

Lời giải chi tiết

$(f \circ g)(x) = (x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5$. $(g \circ f)(x) = x^2 + 1 - 2 = x^2 - 1$. Not equal – composition is not commutative here.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = \frac{2x-5}{3}$. Find $f^{-1}(x)$.

(A) $\frac{3x+5}{2}$

(C) $\frac{2x+5}{3}$

(B) $\frac{3x-5}{2}$

(D) $\frac{3}{2x-5}$

Lời giải chi tiết

$y = \frac{2x-5}{3} \Rightarrow x = \frac{3y+5}{2}$. So $f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{2}$. (A).

Bài tập luyện tập

State the nature of the roots of $x^2 - 6x + 13 = 0$, without solving the equation.

Lời giải chi tiết

$\Delta = 36 - 52 = -16 < 0$: no real roots (a complex conjugate pair).

Bài tập luyện tập

$f(x) = x^2 - 4x + 3$ with domain $x \geq 2$. Find $f^{-1}(x)$ and state its domain.

Lời giải chi tiết

$f(x) = (x-2)^2 - 1$. Taking the positive root (since $x \geq 2$): $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$, domain $x \geq -1$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Factor $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ fully, given that $(x-2)$ is a factor.

(A) $(x-2)(x+1)(x+3)$

(C) $(x+2)(x+1)(x+3)$

(B) $(x-2)(x-1)(x-3)$

(D) $(x-2)(x+1)(x-3)$

Lời giải chi tiết

$P(2) = 0$, so dividing gives $x^3 + 2x^2 - 5x - 6 = (x-2)(x^2 + 4x + 3) = (x-2)(x+1)(x+3)$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the remainder when $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ is divided by $(x+1)$.

(A) -10

(C) -8

(B) 10

(D) 8

Lời giải chi tiết

Remainder = $P(-1) = -2 - 3 - 4 - 1 = -10$. (A).

2.18 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)**Bài tập luyện tập**

The graph of $y = f(x)$ has a minimum point at $(4, -3)$. Find the corresponding turning point of $y = -2f(x - 1) + 5$, and state whether it is now a maximum or minimum.

Lời giải chi tiết

$x : 4 + 1 = 5$. $y : -2(-3) = 6$, then $+5 = 11$. New point $(5, 11)$; since $a = -2 < 0$, the minimum becomes a **maximum**.

Bài tập luyện tập

A rectangle has perimeter 40 m. Find the width that maximizes the enclosed area, and state the maximum area.

Lời giải chi tiết

$A(x) = x(20 - x) = -x^2 + 20x$, maximized at $x = 10$: width 10 m, length 10 m, maximum area 100 m^2 .

Bài tập luyện tập

A bacteria colony is modelled by $N(t) = 200 \cdot 3^{t/4}$ (t in hours). Find $N(10)$ (nearest whole number) and the time for the population to reach 5000 (nearest 0.1 hour).

Lời giải chi tiết

$N(10) = 200 \cdot 3^{2.5} \approx 200(15.5885) \approx 3118$. Solve $3^{t/4} = 25 \Rightarrow t = \frac{4 \ln 25}{\ln 3} \approx 11.7$ hours.

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $x^2 - 6x + 13 = 0$ over the complex numbers.

(A) $3 \pm 2i$

(C) $3 \pm 4i$

(B) $6 \pm 4i$

(D) $-3 \pm 2i$

Lời giải chi tiết

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find all roots of $P(x) = x^3 + 5x - 6$, given that $(x - 1)$ is a factor. Give complex roots in the form $a + bi$, correct to 3 decimal places.

Lời giải chi tiết

$P(x) = (x-1)(x^2+x+6)$. Real root $x = 1$. For $x^2+x+6 = 0$: $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{2} \approx -0.5 \pm 2.398i$.

Bài tập luyện tập

(AHL) $P(x) = x^3 + ax + b$ has $(x-1)$ as a factor and leaves remainder -12 when divided by $(x+1)$. Find a and b .

(A) $a = 5, b = -6$

(C) $a = 6, b = -5$

(B) $a = -5, b = 6$

(D) $a = -6, b = 5$

Lời giải chi tiết

$a + b = -1$ and $b - a = -11$ give $a = 5, b = -6$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) The cubic $2x^3 + px^2 + qx - 12 = 0$ has roots $1, 2, r$. Find p, q , and r .

Lời giải chi tiết

Product of roots: $2r = 6 \Rightarrow r = 3$. Sum: $6 = -p/2 \Rightarrow p = -12$. Sum of pairwise products: $11 = q/2 \Rightarrow q = 22$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve the inequality $\frac{(x-1)(x+2)}{x-3} \geq 0$.

Lời giải chi tiết

Sign diagram over critical values $-2, 1, 3$ gives $-2 \leq x \leq 1$ or $x > 3$.

Bài tập luyện tập

$f(x) = \frac{2x-5}{3}$. Evaluate $f^{-1}(7)$.

(A) 13

(C) 9

(B) 11

(D) 16

Lời giải chi tiết

$f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{2} \Rightarrow f^{-1}(7) = \frac{21+5}{2} = 13$. (A).

Bài tập luyện tập

$g(x) = e^{2x} + 1, f(x) = \ln(x-1)$. Find $(f \circ g)(x)$ and state its domain.

Lời giải chi tiết

$(f \circ g)(x) = \ln(e^{2x}) = 2x$. Domain: all real x (since $e^{2x} + 1 > 1$ always).

Bài tập luyện tập

Solve $\frac{x^2 - 1}{x + 3} = 2$ for x , correct to 3 decimal places.

Lời giải chi tiết

$x^2 - 1 = 2x + 6 \Rightarrow x^2 - 2x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{32}}{2} = 1 \pm 2\sqrt{2}$. So $x \approx 3.828$ or $x \approx -1.828$.

Bài tập luyện tập

A cubic function has zeros at $x = -3, -1, 2$ and passes through $(0, -6)$. Find its equation in expanded form.

Lời giải chi tiết

$f(x) = a(x+3)(x+1)(x-2)$; $f(0) = -6a = -6 \Rightarrow a = 1$. Expanding: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Express $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 2}$ in the form $x + 2 + \frac{c}{x - 2}$, and state its asymptotes.

(A) $c = 3$; $x = 2$, $y = x + 2$

(C) $c = 3$; $x = -2$, $y = x - 2$

(B) $c = -3$; $x = 2$, $y = x + 2$

(D) $c = 1$; $x = 2$, $y = x + 2$

Lời giải chi tiết

$x^2 - 1 = (x - 2)(x + 2) + 3$, so $c = 3$. VA $x = 2$; oblique asymptote $y = x + 2$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the x -intercepts of $f(x) = x^3 - 4x$ and describe the symmetry of its graph.

Lời giải chi tiết

$x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, 2, -2$. Since $f(-x) = -f(x)$, f is **odd** (symmetric about the origin).

Bài tập luyện tập

Find the largest possible domain of $f(x) = \ln(6 - 2x) + \sqrt{x + 1}$.

Lời giải chi tiết

Need $6 - 2x > 0 \Rightarrow x < 3$, and $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$. Domain: $-1 \leq x < 3$.

2.19 Further practice: Paper 1 style (no calculator)**Bài tập luyện tập**

The graph of $y = f(x)$ is the line $f(x) = 2x - 8$. What is the minimum value of $y = |f(x)|$, and at which x does it occur?

- (A) 0 at $x = 4$ (C) 0 at $x = 0$
(B) -8 at $x = 0$ (D) 8 at $x = 4$

Lời giải chi tiết

$f(x) = 2x - 8$ has x -intercept $x = 4$ (where $f(x) = 0$). Since $|f(x)| \geq 0$ always, and $|f(4)| = 0$, the minimum value of $|f(x)|$ is 0, occurring at $x = 4$. (A).

Bài tập luyện tập

Which of the following functions is odd?

- (A) $x^4 + 1$ (C) $x^2 + x$
(B) $x^3 - 2x$ (D) $|x|$

Lời giải chi tiết

Test (B): let $g(x) = x^3 - 2x$. $g(-x) = -x^3 + 2x = -(x^3 - 2x) = -g(x)$, so g is odd. (The others are even, neither, and even respectively.) (B).

Bài tập luyện tập

Determine whether $f(x) = x^4 - 2x^2$ is even, odd, or neither. Show your reasoning.

Lời giải chi tiết

$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2 = f(x)$. Since $f(-x) = f(x)$ for all x : f is even.

Bài tập luyện tập

Solve $|x^2 - 9| = 7$.

- (A) $x = \pm 4, \pm\sqrt{2}$ (C) $x = \pm\sqrt{2}$ only
(B) $x = \pm 4$ only (D) $x = \pm 4, \pm\sqrt{7}$

Lời giải chi tiết

Case 1: $x^2 - 9 = 7 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$. Case 2: $x^2 - 9 = -7 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Check: $16 - 9 = 7 \checkmark$; $2 - 9 = -7 \checkmark$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $|3x + 2| = |x - 6|$.

Lời giải chi tiết

Case 1: $3x + 2 = x - 6 \Rightarrow 2x = -8 \Rightarrow x = -4$. Case 2: $3x + 2 = -(x - 6) = -x + 6 \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$. Check $x = -4$: LHS = $|-12 + 2| = 10$, RHS = $|-4 - 6| = 10$ ✓. Check $x = 1$: LHS = $|3 + 2| = 5$, RHS = $|1 - 6| = 5$ ✓. Solutions: $x = -4$ and $x = 1$.

Bài tập luyện tập

(AHL) How many vertical asymptotes does the graph of $f(x) = \frac{2x+1}{x^2-4}$ have?

- (A) 2 (C) 0
(B) 1 (D) 3

Lời giải chi tiết

$x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, roots $x = \pm 2$; discriminant $\Delta = 0 - 4(-4) = 16 > 0$. The numerator $2x+1$ is nonzero at $x = 2$ ($= 5$) and $x = -2$ ($= -3$), so neither cancels: two vertical asymptotes. (A).

Bài tập luyện tập

If α, β are the roots of $3x^2 + 6x - 2 = 0$, find $\alpha + \beta$ and $\alpha\beta$.

- (A) $-2, -\frac{2}{3}$ (C) $-2, \frac{2}{3}$
(B) $2, -\frac{2}{3}$ (D) $6, -2$

Lời giải chi tiết

$\alpha + \beta = -\frac{6}{3} = -2$. $\alpha\beta = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$. (A).

Bài tập luyện tập

State the vertical asymptote, horizontal asymptote, and y -intercept of $f(x) = \frac{5-2x}{x+1}$.

Lời giải chi tiết

VA: $x = -1$. HA: ratio of leading coefficients = $\frac{-2}{1} = -2$, so $y = -2$. y -intercept: $f(0) = \frac{5}{1} = 5$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $|x - 1| + |x + 3| = 8$.

Lời giải chi tiết

Critical values $x = 1, -3$, giving three intervals. For $x < -3$: $(1 - x) + (-x - 3) = -2x - 2 = 8 \Rightarrow x = -5$ (valid, check: $6 + 2 = 8$ ✓). For $-3 \leq x < 1$: $(1 - x) + (x + 3) = 4 \neq 8$, no solution.

For $x \geq 1$: $(x - 1) + (x + 3) = 2x + 2 = 8 \Rightarrow x = 3$ (valid, check: $2 + 6 = 8 \checkmark$). Solutions: $x = -5$ and $x = 3$.

Bài tập luyện tập

Solve $\log_2(x + 3) = 4$ exactly.

(A) $x = 13$

(C) $x = 8$

(B) $x = 16$

(D) $x = 5$

Lời giải chi tiết

$$2^4 = x + 3 \Rightarrow 16 = x + 3 \Rightarrow x = 13. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) $P(x) = x^3 - kx + 6$ has $x = 2$ as a root. Find k .

Lời giải chi tiết

$$P(2) = 8 - 2k + 6 = 14 - 2k = 0 \Rightarrow k = 7.$$

2.20 Further practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)**Bài tập luyện tập**

Solve $|x^2 - 5| = 2$, giving your answers correct to 3 decimal places.

Lời giải chi tiết

Case 1: $x^2 - 5 = 2 \Rightarrow x^2 = 7 \Rightarrow x = \pm\sqrt{7} \approx \pm 2.646$. Case 2: $x^2 - 5 = -2 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3} \approx \pm 1.732$. Check: $7 - 5 = 2 \checkmark$; $3 - 5 = -2 \checkmark$. Solutions: $x \approx \pm 2.646, \pm 1.732$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $|2x + 5| = 3x - 1$.

Lời giải chi tiết

Domain: $3x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{3}$. Case 1: $2x + 5 = 3x - 1 \Rightarrow x = 6$ (valid, $6 \geq \frac{1}{3}$; check: LHS = 17, RHS = 17 $\checkmark$). Case 2: $2x + 5 = -(3x - 1) = -3x + 1 \Rightarrow 5x = -4 \Rightarrow x = -0.8$ (rejected: fails $x \geq \frac{1}{3}$; check: LHS = 3.4, RHS = -3.4, not equal). Solution: $x = 6$ only.

Bài tập luyện tập

(AHL) For $f(x) = \frac{4x - 3}{x^2 + 3x - 10}$, find the vertical asymptotes and evaluate $f(1)$ correct to 3 decimal places.

Lời giải chi tiết

Factor: $x^2 + 3x - 10 = (x + 5)(x - 2)$, so VAs at $x = -5$ and $x = 2$ (numerator nonzero at both). $f(1) = \frac{4 - 3}{1 + 3 - 10} = \frac{1}{-6} \approx -0.167$.

Bài tập luyện tập

$f(x) = x^3 + 2x$ is known to be odd, with $f(2.5) = 20.625$. Find $f(-2.5)$.

(A) -20.625 (C) -15.625 (B) 20.625 (D) 0

Lời giải chi tiết

Since f is odd, $f(-x) = -f(x)$, so $f(-2.5) = -f(2.5) = -20.625$. (A).

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = \frac{3x + 1}{x - 2}$. Find $f^{-1}(x)$ and evaluate $f^{-1}(4.5)$ correct to 3 decimal places.

Lời giải chi tiết

$y = \frac{3x + 1}{x - 2} \Rightarrow y(x - 2) = 3x + 1 \Rightarrow yx - 3x = 1 + 2y \Rightarrow x = \frac{2y + 1}{y - 3}$. So $f^{-1}(x) = \frac{2x + 1}{x - 3}$.
Then $f^{-1}(4.5) = \frac{9 + 1}{1.5} = \frac{10}{1.5} \approx 6.667$.

Bài tập luyện tập

A ball's height is modelled by $h(t) = -4.9t^2 + 15t + 1$ (t in seconds). Find the maximum height, correct to 2 decimal places, and the time at which it occurs, correct to 2 decimal places.

Lời giải chi tiết

Maximum occurs at $t = -\frac{15}{2(-4.9)} = \frac{15}{9.8} \approx 1.53$ s. Maximum height: $h_{\max} = c - \frac{b^2}{4a} = 1 - \frac{225}{-19.6} \approx 12.48$ m.

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $\frac{2x - 1}{x^2 - x - 6} = 0.5$, giving your answers correct to 3 decimal places.

Lời giải chi tiết

Multiply out: $2(2x - 1) = x^2 - x - 6 \Rightarrow 4x - 2 = x^2 - x - 6 \Rightarrow x^2 - 5x - 4 = 0$. So $x = \frac{5 \pm \sqrt{41}}{2}$.
Since $\sqrt{41} \approx 6.403$: $x \approx 5.702$ or $x \approx -0.702$ (neither equals 3 or -2 , so both lie in the domain).

Bài tập luyện tập

(AHL) For $f(x) = \frac{2x-3}{x^2+x-2}$, state the vertical asymptotes and evaluate $f(0.5)$ correct to 3 decimal places.

Lời giải chi tiết

Factor: $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$, so VAs at $x = -2$ and $x = 1$. $f(0.5) = \frac{2(0.5)-3}{(0.5)^2+0.5-2} = \frac{-2}{-1.25} = 1.600$.

Bài tập luyện tập

f is even with $f(3) = 7$; g is odd with $g(3) = -2$. Evaluate $f(-3) + g(-3)$.

(A) 9

(C) -9

(B) 5

(D) -5

Lời giải chi tiết

Even: $f(-3) = f(3) = 7$. Odd: $g(-3) = -g(3) = -(-2) = 2$. Sum: $7 + 2 = 9$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $|2x-1| + |x+2| = 9$, giving your answers correct to 3 decimal places.

Lời giải chi tiết

Critical values $x = \frac{1}{2}, -2$. For $x < -2$: $(1-2x) + (-x-2) = -3x-1 = 9 \Rightarrow x = -\frac{10}{3} \approx -3.333$ (valid; check: $\frac{23}{3} + \frac{4}{3} = 9$ ✓). For $-2 \leq x < \frac{1}{2}$: $(1-2x) + (x+2) = 3-x = 9 \Rightarrow x = -6$, rejected (outside interval). For $x \geq \frac{1}{2}$: $(2x-1) + (x+2) = 3x+1 = 9 \Rightarrow x = \frac{8}{3} \approx 2.667$ (valid; check: $\frac{13}{3} + \frac{14}{3} = 9$ ✓). Solutions: $x \approx -3.333$ and $x \approx 2.667$.

2.21 Additional practice: Mixed review**Bài tập luyện tập**

Find the largest possible domain of $f(x) = \ln(5-x) + \sqrt{x+2}$.

Lời giải chi tiết

Need $5-x > 0 \Rightarrow x < 5$, and $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$. Domain: $-2 \leq x < 5$.

Bài tập luyện tập

The graph of $y = f(x)$ passes through $(-3, 6)$. Find the corresponding point on $y = -f(x+1) - 3$.

(A) $(-4, -9)$ (C) $(-4, -3)$ (B) $(-2, -9)$ (D) $(-2, 3)$ **Lời giải chi tiết**

Horizontal shift left 1: $x = -3 - 1 = -4$. Then $y = -1(6) - 3 = -9$. Point: $(-4, -9)$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = x^2 - 6x + 5$. Find all roots of $y = f(|x|)$, and explain why there are more roots than $y = f(x)$ has.

Lời giải chi tiết

$f(x) = (x - 1)(x - 5)$, roots $x = 1, 5$ (both already ≥ 0). Since $f(|x|) = |x|^2 - 6|x| + 5 = x^2 - 6|x| + 5$, setting $u = |x| \geq 0$: $u^2 - 6u + 5 = 0 \Rightarrow (u - 1)(u - 5) = 0 \Rightarrow u = 1$ or $u = 5$, both valid. So $|x| = 1 \Rightarrow x = \pm 1$ and $|x| = 5 \Rightarrow x = \pm 5$: four roots $x = \pm 1, \pm 5$. Because both original roots were already non-negative, neither is discarded – each is kept *and* mirrored, giving twice as many roots.

Bài tập luyện tập

Classify $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}$ as even, odd, or neither.

(A) Even

(C) Neither

(B) Odd

(D) Cannot be determined

Lời giải chi tiết

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + (-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3 - x}{x^2 + 1} = -\frac{x^3 + x}{x^2 + 1} = -f(x). \text{ (B) odd.}$$

Bài tập luyện tập

Find the range of $f(x) = -3x^2 + 12x - 7$.

Lời giải chi tiết

Vertex at $x = -\frac{12}{2(-3)} = 2$; $f(2) = -3(4) + 24 - 7 = 5$. Since $a = -3 < 0$ (maximum), range: $y \leq 5$.

Bài tập luyện tập

For $f(x) = \frac{4 - x}{2x + 6}$, state the vertical asymptote, horizontal asymptote, and both intercepts.

Lời giải chi tiết

VA: $2x + 6 = 0 \Rightarrow x = -3$. HA: ratio of leading coefficients (writing the numerator as $-x + 4$) $= -\frac{1}{2}$. x -intercept: $4 - x = 0 \Rightarrow x = 4$. y -intercept: $f(0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Bài tập luyện tập

(AHL) How many vertical asymptotes does $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+4x+4}$ have, and what is its horizontal asymptote?

(A) One VA at $x = -2$; HA $y = 0$

(C) One VA at $x = -2$; HA $y = 2$

(B) Two VAs at $x = \pm 2$; HA $y = 0$

(D) No VA; HA $y = 0$

Lời giải chi tiết

Denominator $x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2$ (discriminant $16 - 16 = 0$, a repeated root at $x = -2$). Numerator at $x = -2$: $2(-2) + 3 = -1 \neq 0$, so this repeated root gives one genuine vertical asymptote. Numerator degree $<$ denominator degree, so HA $y = 0$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve $2^{x+1} = 5^{x-2}$ for x , correct to 3 decimal places.

Lời giải chi tiết

Take $\ln$ of both sides: $(x+1)\ln 2 = (x-2)\ln 5 \Rightarrow x(\ln 2 - \ln 5) = -2\ln 5 - \ln 2 \Rightarrow x = \frac{2\ln 5 + \ln 2}{\ln 5 - \ln 2} \approx \frac{3.9120}{0.9163} \approx 4.269$.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = 2x - 1$ and $g(x) = x^2 + 3$. Find $(g \circ f)(x)$ and hence solve $(g \circ f)(x) = 21$, giving exact answers.

Lời giải chi tiết

$(g \circ f)(x) = (2x-1)^2 + 3 = 4x^2 - 4x + 4$. Setting $= 21$: $4x^2 - 4x - 17 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 272}}{8} = \frac{4 \pm 12\sqrt{2}}{8} = \frac{1 \pm 3\sqrt{2}}{2}$.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = \frac{5x+2}{3-x}$. Evaluate $f^{-1}(-1)$.

(A) $-\frac{5}{4}$

(C) $-\frac{4}{5}$

(B) $\frac{5}{4}$

(D) $\frac{4}{5}$

Lời giải chi tiết

$y(3-x) = 5x+2 \Rightarrow 3y-2 = x(5+y) \Rightarrow x = \frac{3y-2}{y+5}$, so $f^{-1}(x) = \frac{3x-2}{x+5}$. Then $f^{-1}(-1) = \frac{-3-2}{4} = -\frac{5}{4}$. Check: $f(-1.25) = \frac{5(-1.25)+2}{3-(-1.25)} = \frac{-4.25}{4.25} = -1 \checkmark$. (A).

Bài tập luyện tập

Which of the following functions is self-inverse?

(A) $f(x) = x + 5$

(C) $f(x) = x^2$

(B) $f(x) = \frac{3}{x}$

(D) $f(x) = 2x$

Lời giải chi tiết

Test (B): $f(f(x)) = \frac{3}{3/x} = x$ for every $x \neq 0$, so f is self-inverse. (Checking the others: (A) gives $f(f(x)) = x + 10$; (C) gives x^4 ; (D) gives $4x$ – none return x .) (B).

Bài tập luyện tập

Show that $x^3 + x - 5 = 0$ has a root between $x = 1$ and $x = 2$, then use $x = 1.5$ to narrow the interval.

Lời giải chi tiết

Let $f(x) = x^3 + x - 5$. $f(1) = 1 + 1 - 5 = -3 < 0$; $f(2) = 8 + 2 - 5 = 5 > 0$: opposite signs, so a root lies in $(1, 2)$. $f(1.5) = 3.375 + 1.5 - 5 = -0.125 < 0$; since $f(1.5) < 0$ and $f(2) > 0$, the root lies in the narrower interval $(1.5, 2)$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $|3x - 2| = |2x + 7|$.

Lời giải chi tiết

Case 1: $3x - 2 = 2x + 7 \Rightarrow x = 9$. Case 2: $3x - 2 = -(2x + 7) \Rightarrow 5x = -5 \Rightarrow x = -1$. Check: $x = 9$: $|27 - 2| = 25 = |18 + 7| \checkmark$. $x = -1$: $|-3 - 2| = 5 = |-2 + 7| \checkmark$. Solutions: $x = 9$ and $x = -1$.

Bài tập luyện tập

(AHL) $P(x) = 2x^3 - x^2 - 13x - 6$ has $(x + 2)$ as a factor. Factor $P(x)$ fully and state all roots.

Lời giải chi tiết

$P(-2) = 2(-8) - 4 + 26 - 6 = 0 \checkmark$. Dividing by $(x + 2)$: $P(x) = (x + 2)(2x^2 - 5x - 3)$. Factoring the quadratic: $2x^2 - 5x - 3 = (2x + 1)(x - 3)$ (check: $2x^2 - 6x + x - 3 = 2x^2 - 5x - 3 \checkmark$).

$$P(x) = (x + 2)(2x + 1)(x - 3), \quad \text{roots: } x = -2, -\frac{1}{2}, 3.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) For $f(x) = x^2 - 9$, describe the vertical asymptotes, the horizontal asymptote, and the local feature at $x = 0$ of $y = \frac{1}{f(x)}$.

Lời giải chi tiết

$f(x) = (x-3)(x+3)$, zeros at $x = \pm 3$, so $\frac{1}{f(x)}$ has vertical asymptotes at $x = \pm 3$. f has a local minimum at $(0, -9)$, which becomes a **local maximum** of $\frac{1}{f(x)}$ at $(0, -\frac{1}{9})$. Since $f(x) \rightarrow +\infty$ as $|x| \rightarrow \infty$, $\frac{1}{f(x)} \rightarrow 0$: horizontal asymptote $y = 0$.

Bài tập luyện tập

The graph of $y = f(x)$ is even and has a local minimum at $(-2, 3)$. State the coordinates of another point that must lie on the graph, and classify the local extremum there.

(A) $(2, 3)$, a local minimum

(C) $(2, 3)$, a local maximum

(B) $(2, -3)$, a local maximum

(D) $(-2, -3)$, a local minimum

Lời giải chi tiết

Since f is even, $f(-x) = f(x)$ for all x , so $f(2) = f(-2) = 3$: the point $(2, 3)$ also lies on the graph. Reflection in the y -axis maps the local minimum at $x = -2$ to a local minimum at $x = 2$ with the same y -value: $(2, 3)$ is also a local minimum. (A).

2.22 Extra practice: Mixed mastery**Bài tập luyện tập**

Find the equation of the line through $(2, -3)$ and $(6, 5)$, in the form $y = mx + c$.

Lời giải chi tiết

$m = \frac{5 - (-3)}{6 - 2} = \frac{8}{4} = 2$. Using $(2, -3)$: $y + 3 = 2(x - 2) \Rightarrow y = 2x - 7$.

Bài tập luyện tập

Find the equation of the line through $(6, 2)$ that is perpendicular to $y = -3x + 4$.

(A) $y = \frac{1}{3}x$

(C) $y = 3x - 16$

(B) $y = -\frac{1}{3}x$

(D) $y = \frac{1}{3}x + 2$

Lời giải chi tiết

Gradient of given line is -3 , so the perpendicular gradient is $\frac{1}{3}$ (since $(-3)(\frac{1}{3}) = -1$). $y - 2 = \frac{1}{3}(x - 6) \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 2 + 2 = \frac{1}{3}x$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Solve $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$.

Lời giải chi tiết

Factor: $2x^2 - 3x - 2 = (2x + 1)(x - 2)$, roots $x = -\frac{1}{2}, 2$. Upward parabola ($a = 2 > 0$), so ≤ 0 between the roots:

$$-\frac{1}{2} \leq x \leq 2.$$

Bài tập luyện tập

Solve $x^2 - 9 > 0$.

(A) $x < -3$ or $x > 3$

(C) $x > 3$ only

(B) $-3 < x < 3$

(D) $x < -3$ only

Lời giải chi tiết

Roots $x = \pm 3$; upward parabola, positive outside the roots. **(A)**.

Bài tập luyện tập

The extension e of a spring varies directly with the force F applied (Hooke's law). A force of 12 N produces an extension of 4 cm. Find the extension produced by a force of 21 N.

Lời giải chi tiết

$e = kF \Rightarrow k = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ cm/N. Extension at $F = 21$: $e = \frac{1}{3}(21) = 7$ cm.

Bài tập luyện tập

y varies inversely with x^2 . Given $y = 5$ when $x = 2$, find y when $x = 5$.

(A) 0.8

(C) 1.25

(B) 2

(D) 12.5

Lời giải chi tiết

$k = yx^2 = 5(4) = 20$. When $x = 5$: $y = \frac{20}{25} = 0.8$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A radioactive sample decays as $N(t) = N_0 e^{-kt}$. Given $N(0) = 800$ and $N(6) = 500$, find k correct to 4 s.f., and find $N(12)$ correct to the nearest whole number.

Lời giải chi tiết

$$e^{-6k} = \frac{500}{800} = 0.625 \Rightarrow k = -\frac{\ln 0.625}{6} = \frac{0.4700}{6} \approx 0.07834.$$
$$N(12) = N(6) \cdot e^{-6k} = 500(0.625) = 312.5 \approx 313 \text{ (using the fact that each further 6 time-units multiplies } N \text{ by the same factor 0.625).}$$

Bài tập luyện tập

State the vertical and horizontal asymptotes of $f(x) = \frac{3x+2}{x-5}$.

Lời giải chi tiết

Vertical asymptote: $x = 5$ (denominator zero). Horizontal asymptote: $y = 3$ (ratio of leading coefficients, since numerator and denominator have equal degree).

Bài tập luyện tập

$f(x) = 2x + 1$ and $g(x) = x^2 - 3$. Find $(f \circ g)(2)$ and $(g \circ f)(2)$.

Lời giải chi tiết

$$(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4 - 3) = f(1) = 2(1) + 1 = 3.$$
$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(5) = 25 - 3 = 22.$$

Bài tập luyện tập

Show that $x = 1$ is a root of $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, and hence factor the cubic completely.

Lời giải chi tiết

$$P(1) = 1 - 6 + 11 - 6 = 0, \text{ so } (x-1) \text{ is a factor. Dividing: } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x^2 - 5x + 6) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

Geometry and Trigonometry

Mục tiêu Unit: Tỷ số lượng giác, radian, độ dài cung và diện tích quạt, đường tròn đơn vị, các hệ thức lượng giác, phương trình lượng giác, định lý sin và cosin, và (AHL) vector cùng hình học vector trong không gian.

3.1 Right-angle trigonometry and radian measure

For a right triangle with angle θ : $\sin \theta = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}}$, $\cos \theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}$, $\tan \theta = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$.

Radians: π radians $= 180^\circ$, so $\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \cdot \frac{\pi}{180}$. For a sector of radius r and angle θ (in radians):
arc length $s = r\theta$; **sector area** $= \frac{1}{2}r^2\theta$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Radian là đơn vị đo góc "tự nhiên" trong toán học vì công thức độ dài cung ($s = r\theta$) và diện tích quạt ($\frac{1}{2}r^2\theta$) chỉ đúng khi θ đo bằng **radian** — nếu đề cho góc bằng độ, **PHẢI** đổi sang radian trước khi áp dụng hai công thức này.

Ví dụ mẫu • Worked example

A sector has radius 6 cm and angle $\frac{\pi}{3}$ radians. Find the exact arc length and area.

$$s = r\theta = 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi \text{ cm.} \quad \text{Area} = \frac{1}{2}(6)^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}(36) \frac{\pi}{3} = 6\pi \text{ cm}^2.$$

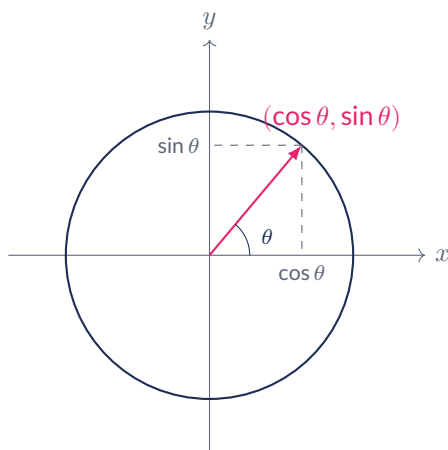
Ví dụ mẫu • Worked example

In a right triangle, angle $A = 41^\circ$ and the side opposite A has length $a = 7$. Find the hypotenuse c and the adjacent side b .

$$\sin 41^\circ = \frac{7}{c} \Rightarrow c = \frac{7}{\sin 41^\circ} = \frac{7}{0.65606} \approx 10.67. \quad b = c \cos 41^\circ \approx 10.67(0.75471) \approx 8.06.$$

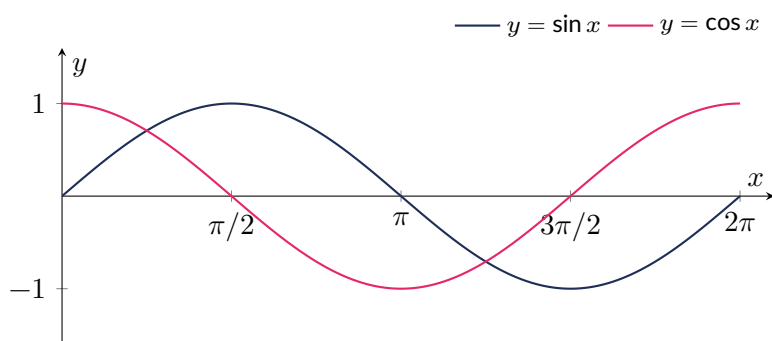
3.2 The unit circle and circular functions

The **unit circle** is the circle of radius 1 centred at the origin. For any angle θ measured anticlockwise from the positive x -axis, the terminal point on the unit circle has coordinates $(\cos \theta, \sin \theta)$ — this defines $\sin \theta$ and $\cos \theta$ for all real θ (not just angles in a right triangle), and $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ ($\cos \theta \neq 0$).



The unit circle: the point where the terminal ray of angle θ meets the circle has coordinates $(\cos \theta, \sin \theta)$, here shown for $\theta = 50^\circ$.

Special values (memorize): $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ (and $\cos$ takes the same values in reverse order). **Periods:** $\sin, \cos$ have period 2π ; $\tan$ has period π . **Signs by quadrant:** all positive in QI; only $\sin$ positive in QII; only $\tan$ positive in QIII; only $\cos$ positive in QIV.



$y = \sin x$ and $y = \cos x$ over $[0, 2\pi]$: both have amplitude 1 and period 2π , and $\cos x$ is $\sin x$ shifted left by $\pi/2$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đường tròn đơn vị mở rộng định nghĩa $\sin, \cos$ cho MỌI góc (không chỉ góc nhọn trong tam giác vuông). Dấu của $\sin, \cos, \tan$ ở từng góc phần tư có thể nhớ qua câu "Tất Sin Tan Cos" (Toàn phần I dương, phần II chỉ Sin dương, phần III chỉ Tan dương, phần IV chỉ Cos dương) – tương đương mnemonic tiếng Anh "CAST" hoặc "All Students Take Calculus".

3.3 Trigonometric identities

Pythagorean identity: $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$.

Double angle formulas: $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$; $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Prove the identity $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$.

$$\text{LHS} = \frac{2 \sin x \cos x}{1 + (2 \cos^2 x - 1)} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \text{RHS.} \blacksquare$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ba dạng của $\cos 2\theta$ đều tương đương — chọn dạng nào để “triệt tiêu” sin hoặc cos tùy vào biểu thức cần chứng minh. Khi chứng minh đẳng thức lượng giác, luôn biến đổi từ vế **phức tạp hơn** về vế đơn giản hơn, và trình bày từng bước rõ ràng (không “nhảy cóc”).

AHL only. Reciprocal functions: $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$, $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$, $\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

Pythagorean variants: $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$; $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$.

Compound angle formulas: $\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$; $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$; $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the exact value of $\sin 75^\circ$ using a compound angle formula.

Write $75^\circ = 45^\circ + 30^\circ$:

$$\sin 75^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Given $\sin \theta = \frac{3}{5}$ with θ in the second quadrant, find $\cos \theta$, $\tan \theta$, $\sec \theta$, $\csc \theta$, $\cot \theta$ exactly.

In QII, cosine is negative: $\cos \theta = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$.

$$\tan \theta = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}, \quad \sec \theta = -\frac{5}{4}, \quad \csc \theta = \frac{5}{3}, \quad \cot \theta = -\frac{4}{3}.$$

(!) Lỗi thường gặp: When using $\sin \theta = k$ (or $\cos \theta = k$) to find the *other* ratios, always determine the correct **sign** from the quadrant first — the Pythagorean identity alone only gives a magnitude (it involves a squared term), never the sign.

3.4 Trigonometric equations and graphs

For $y = a \sin(b(x - c)) + d$ (similarly for cos): **amplitude** = $|a|$, **period** = $\frac{2\pi}{b}$ (or $\frac{360^\circ}{b}$), **phase shift** = c (horizontal shift), **vertical shift** = d (the new “midline” is $y = d$).

Ví dụ mẫu · Worked example

State the amplitude, period, phase shift, and vertical shift of $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

Rewrite as $y = 3 \sin\left(2\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right) + 1$. **Amplitude** = 3; **period** = $\frac{2\pi}{2} = \pi$; **phase shift** = $\frac{\pi}{6}$ to the right; **vertical shift** = 1 up.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $2 \cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ for $0 \leq x \leq 2\pi$.

Let $u = \cos x$: $2u^2 + u - 1 = 0 \Rightarrow (2u - 1)(u + 1) = 0 \Rightarrow u = \frac{1}{2}$ or $u = -1$. $\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$. $\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi$.

Solutions: $x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi giải phương trình lượng giác dạng "bậc hai theo sin/cos", luôn đặt $u = \sin x$ (hoặc $\cos x$) để đưa về phương trình đại số quen thuộc, giải u trước, rồi mới giải x – và luôn nhớ tìm ĐỦ các nghiệm trong miền đề cho (thường có nhiều hơn 1 nghiệm nhờ tính chu kỳ).

3.5 The Harmonic Form $R \sin(\theta + \alpha)$ (AHL)

AHL only. An expression of the form $a \sin \theta + b \cos \theta$ (a sine and a cosine term sharing the *same* angle θ) can always be rewritten as a single sinusoid $R \sin(\theta + \alpha)$. To derive this, expand the target form with the compound angle formula and match coefficients:

$$R \sin(\theta + \alpha) = R \sin \theta \cos \alpha + R \cos \theta \sin \alpha.$$

Comparing this with $a \sin \theta + b \cos \theta$ gives $a = R \cos \alpha$ and $b = R \sin \alpha$. Squaring and adding: $a^2 + b^2 = R^2 \cos^2 \alpha + R^2 \sin^2 \alpha = R^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = R^2$, so (taking $R > 0$) $R = \sqrt{a^2 + b^2}$. Dividing the two relations, $\frac{b}{a} = \frac{R \sin \alpha}{R \cos \alpha} = \tan \alpha$ – but since $\cos \alpha = \frac{a}{R}$ and $\sin \alpha = \frac{b}{R}$ carry the *same signs* as a and b respectively, the correct quadrant for α is fixed by the signs of a and b , not by $\tan \alpha$ alone.

AHL only. $a \sin \theta + b \cos \theta \equiv R \sin(\theta + \alpha)$, where

$$R = \sqrt{a^2 + b^2} \ (R > 0), \quad \cos \alpha = \frac{a}{R}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{R} \quad \left(\text{so } \tan \alpha = \frac{b}{a}, \text{ with the quadrant of } \alpha \text{ fixed by the signs of } a \text{ and } b \right)$$

Use 1 (equations): to solve $a \sin \theta + b \cos \theta = k$, rewrite as $R \sin(\theta + \alpha) = k$, i.e. $\sin(\theta + \alpha) = \frac{k}{R}$, solve for $\theta + \alpha$ first, then subtract α .

Use 2 (max/min): since $-1 \leq \sin(\theta + \alpha) \leq 1$, the **maximum** value of $a \sin \theta + b \cos \theta$ is R (occurring when $\theta + \alpha = 90^\circ + k \cdot 360^\circ$) and the **minimum** is $-R$ (occurring when $\theta + \alpha = 270^\circ + k \cdot 360^\circ$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Dạng điều hòa (harmonic form) biến một tổng " $a \sin \theta + b \cos \theta$ " thành MỘT hàm sin duy nhất $R \sin(\theta + \alpha)$, giúp giải phương trình và tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất dễ dàng hơn nhiều so với làm việc với hai số hạng riêng biệt. R luôn dương và tính như độ dài cạnh huyền của tam giác vuông có hai cạnh góc vuông a, b ; góc α phải được xác định bằng CẢ $\cos \alpha = a/R$

LƯU Ý $\sin \alpha = b/R$ (không chỉ $\tan \alpha = b/a$), vì $\tan \alpha = b/a$ một mình không cho biết α nằm ở góc phần tư nào. Giá trị lớn nhất của biểu thức luôn bằng R , nhỏ nhất bằng $-R$ — không cần dùng đạo hàm.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Express $3 \sin \theta + 4 \cos \theta$ in the form $R \sin(\theta + \alpha)$ with $R > 0$ and $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, stating α correct to 1 d.p. Hence state the maximum value of $3 \sin \theta + 4 \cos \theta$ and the smallest positive value of θ (in degrees, to 1 d.p.) at which it occurs.

Here $a = 3$, $b = 4$: $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ — both positive, so α is in the first quadrant:

$$\alpha = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) \approx 53.1^\circ.$$

So $3 \sin \theta + 4 \cos \theta = 5 \sin(\theta + 53.1^\circ)$. **Maximum value** = $R = 5$, occurring when $\theta + 53.1^\circ = 90^\circ \Rightarrow \theta \approx 36.9^\circ$. (Check: at $\theta = 36.9^\circ$, $3 \sin 36.9^\circ + 4 \cos 36.9^\circ \approx 3(0.6004) + 4(0.7997) \approx 1.801 + 3.199 = 5.00$ ✓.)

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Solve $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = 1$ for $0 \leq \theta \leq 2\pi$, giving exact answers.

Here $a = 1$, $b = \sqrt{3}$: $R = \sqrt{1+3} = 2$. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ — both positive, so $\alpha = \frac{\pi}{3}$ exactly.

$$2 \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Let $\phi = \theta + \frac{\pi}{3}$; as θ ranges over $[0, 2\pi]$, ϕ ranges over $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}\right]$. Since $\sin \phi = \frac{1}{2}$, $\phi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ or $\phi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$; within the required range this gives $\phi = \frac{5\pi}{6}$ or $\phi = \frac{13\pi}{6}$ (i.e. $\frac{\pi}{6} + 2\pi$).

$$\theta = \phi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \quad \text{or} \quad \theta = \frac{13\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}.$$

(Check $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\sin \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{2} = 1 + 0 = 1$ ✓. Check $\theta = \frac{11\pi}{6}$: $\sin \frac{11\pi}{6} + \sqrt{3} \cos \frac{11\pi}{6} = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 1$ ✓.)

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the maximum and minimum values of $5 \sin \theta - 12 \cos \theta$, and the smallest non-negative value of θ (in degrees, to 1 d.p.) at which the maximum occurs.

Here $a = 5$, $b = -12$: $R = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$. $\cos \alpha = \frac{5}{13} > 0$, $\sin \alpha = -\frac{12}{13} < 0$ — so α is in the fourth quadrant:

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{12}{5}\right) \approx -67.4^\circ.$$

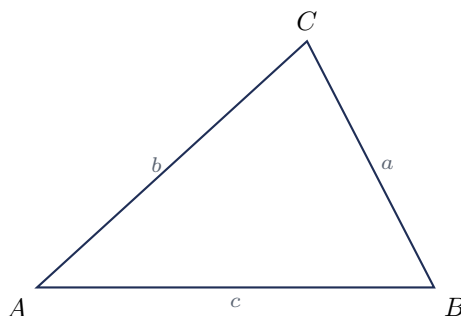
So $5 \sin \theta - 12 \cos \theta = 13 \sin(\theta - 67.4^\circ)$. **Maximum** = 13, **minimum** = -13. The maximum occurs when $\theta - 67.4^\circ = 90^\circ \Rightarrow \theta \approx 157.4^\circ$ (this is already the smallest non-negative solution, since subtracting 360° would give a negative value). (Check: at $\theta = 157.4^\circ$, $5 \sin 157.4^\circ - 12 \cos 157.4^\circ \approx 5(0.3843) - 12(-0.9231) \approx 1.922 + 11.077 = 13.00$ ✓.)

3.6 Non-right-angled triangle trigonometry

Sine rule: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ (use for AAS or SSA – watch for the *ambiguous case*).

Cosine rule: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (use for SAS or SSS); rearranged for an angle: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

Area of a triangle: $\text{Area} = \frac{1}{2}ab \sin C$ (using two sides and the included angle).



Standard triangle labelling: side a is opposite vertex A , side b opposite B , side c opposite C .

Ví dụ mẫu · Worked example

Triangle ABC has $a = 9$, $b = 7$, $C = 55^\circ$. Find c and the area.

Cosine rule: $c^2 = 9^2 + 7^2 - 2(9)(7) \cos 55^\circ = 130 - 126(0.57358) \approx 130 - 72.27 = 57.73 \Rightarrow c \approx 7.60$.
Area = $\frac{1}{2}(9)(7) \sin 55^\circ = 31.5(0.81915) \approx 25.8$ square units.

Ví dụ mẫu · Worked example

Triangle ABC has $a = 8$, $b = 10$, $A = 35^\circ$. Find all possible value(s) of B (the ambiguous case).

Sine rule: $\frac{\sin B}{10} = \frac{\sin 35^\circ}{8} \Rightarrow \sin B = \frac{10 \sin 35^\circ}{8} \approx 0.71697$.

$$B \approx \arcsin(0.71697) \approx 45.8^\circ \quad \text{or} \quad B \approx 180^\circ - 45.8^\circ = 134.2^\circ.$$

Check validity: if $B \approx 134.2^\circ$, then $A + B \approx 35 + 134.2 = 169.2^\circ < 180^\circ$ – still a valid triangle.

Both solutions are valid: $B \approx 45.8^\circ$ or $B \approx 134.2^\circ$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Triangle ABC has sides $a = 6$, $b = 10$, $c = 14$. Find the largest angle.

The largest angle is opposite the largest side ($c = 14$), call it C :

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{36 + 100 - 196}{2(6)(10)} = \frac{-60}{120} = -0.5 \Rightarrow C = \arccos(-0.5) = 120^\circ.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý sin dùng khi biết một cặp góc-cạnh đối diện (AAS hoặc SSA); trường hợp SSA có thể cho **hai** nghiệm hợp lệ ("trường hợp mơ hồ" – ambiguous case) vì $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$. Định lý

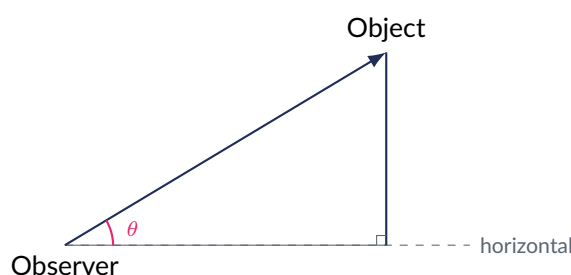
cosin dùng khi biết đủ ba cạnh (SSS) hoặc hai cạnh kèm góc xen giữa (SAS) — không có trường hợp mơ hồ với cosin vì hàm arccos chỉ cho một giá trị duy nhất trong $[0^\circ, 180^\circ]$.

(!) Lỗi thường gặp: The ambiguous (SSA) case only arises with the *sine* rule. Always check $A + B < 180^\circ$ before accepting the second (obtuse) solution for B — if it fails, discard that branch. The cosine rule never has this issue since arccos is single-valued on $[0^\circ, 180^\circ]$.

3.7 Applications: angles of elevation and depression, and bearings

The **angle of elevation** of an object above an observer is measured *upward* from the horizontal to the line of sight; the **angle of depression** of an object below an observer is measured *downward* from the horizontal to the line of sight. Since the horizontal lines at two different positions are parallel, the angle of depression from A to B equals the angle of elevation from B to A (alternate angles).

A **bearing** gives a direction as a **three-figure** angle measured *clockwise from north*, from 000° to 360° — e.g. 065° or 220° . The bearing pointing in exactly the opposite direction is found by adding or subtracting 180° .



The angle of elevation θ is measured upward from the horizontal (dashed) to the line of sight.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Góc nâng (angle of elevation) đo từ đường nằm ngang hướng LÊN đến vật; góc hạ (angle of depression) đo từ đường nằm ngang hướng XUỐNG đến vật — hai góc này bằng nhau khi nhìn từ hai đầu, vì là hai góc so le trong giữa hai đường nằm ngang song song. Bearing (phương vị) luôn viết bằng đúng **ba chữ số**, đo THEO CHIỀU KIM ĐỒNG HỒ tính từ hướng Bắc — ví dụ 065° hoặc 220° — không bao giờ âm hay vượt quá 360° .

Ví dụ mẫu · Worked example

From a point on level ground, the angle of elevation to the top of a tower is 20° . After walking 80 m directly towards the tower, the angle of elevation becomes 35° . Find the height of the tower, correct to 3 s.f.

Let h be the height of the tower and x the distance from the *nearer* point to its base.

$$\tan 35^\circ = \frac{h}{x} \Rightarrow x = \frac{h}{\tan 35^\circ}; \quad \tan 20^\circ = \frac{h}{x + 80} \Rightarrow x + 80 = \frac{h}{\tan 20^\circ}.$$

Subtracting the first equation from the second eliminates x :

$$h \left(\frac{1}{\tan 20^\circ} - \frac{1}{\tan 35^\circ} \right) = 80 \Rightarrow h(2.74748 - 1.42815) = 80 \Rightarrow h(1.31933) = 80 \Rightarrow h \approx 60.6 \text{ m}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A ship sails from port P on a bearing of 070° for 40 km to point Q , then changes course and sails on a bearing of 152° for 25 km to point R . Find the distance PR , and the bearing that would take the ship directly back to P from R , each correct to 3 s.f.

The bearing from Q back to P is $070^\circ + 180^\circ = 250^\circ$, so the interior angle of triangle PQR at Q is $250^\circ - 152^\circ = 98^\circ$.

$$PR^2 = 40^2 + 25^2 - 2(40)(25) \cos 98^\circ = 2225 - 2000 \cos 98^\circ \approx 2225 + 278.3 = 2503.3 \Rightarrow PR \approx 50.0 \text{ km.}$$

Sine rule for the angle at R (using the unrounded value $PR \approx 50.03$):

$$\frac{\sin(\angle QRP)}{40} = \frac{\sin 98^\circ}{50.03} \Rightarrow \sin(\angle QRP) \approx 0.7917 \Rightarrow \angle QRP \approx 52.3^\circ.$$

The bearing from R to Q is $152^\circ + 180^\circ = 332^\circ$; the diagram shows P lies on the northern side of RQ , so the required bearing from R to P is $332^\circ - 52.3^\circ \approx 279.7^\circ \approx 280^\circ$ (3 s.f.).

Ví dụ mẫu · Worked example

From the top of a vertical cliff 80 m high, the angle of depression to a boat at sea is 12° . Find the horizontal distance from the base of the cliff to the boat, and the direct (line-of-sight) distance from the cliff top to the boat, each correct to 3 s.f.

The horizontal at the cliff top is parallel to sea level, so the angle of elevation from the boat to the cliff top is also 12° .

$$\tan 12^\circ = \frac{80}{d} \Rightarrow d = \frac{80}{\tan 12^\circ} \approx \frac{80}{0.21256} \approx 376 \text{ m.} \quad \sin 12^\circ = \frac{80}{r} \Rightarrow r = \frac{80}{\sin 12^\circ} \approx \frac{80}{0.20791} \approx 385 \text{ m.}$$

(Check with the unrounded $d \approx 376.37$: $\sqrt{376.37^2 + 80^2} \approx 384.8 \approx 385 \text{ m } \checkmark$.)

Ví dụ mẫu · Worked example

Two people, C and D , stand on *opposite* sides of a vertical tower and in line with its base. They observe the top of the tower at angles of elevation 32° and 41° respectively, and are 200 m apart. Find the height of the tower, correct to 3 s.f.

Let h be the height, and let x_1, x_2 be the horizontal distances from C and D to the base. Since C and D are on *opposite* sides, $x_1 + x_2 = 200$ (compare with the earlier example, where the two points were on the *same* side and the distances were subtracted).

$$\tan 32^\circ = \frac{h}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{h}{\tan 32^\circ}, \quad \tan 41^\circ = \frac{h}{x_2} \Rightarrow x_2 = \frac{h}{\tan 41^\circ}.$$

$$h \left(\frac{1}{\tan 32^\circ} + \frac{1}{\tan 41^\circ} \right) = 200 \Rightarrow h(1.60033 + 1.15038) = 200 \Rightarrow h(2.75071) = 200 \Rightarrow h \approx 72.7 \text{ m.}$$

(!) Lỗi thường gặp: Always measure the angle of elevation or depression from the **horizontal**, never from the vertical. When converting bearings into an interior angle of a triangle, sketch the situation first – subtracting two bearings only gives the correct angle when both are measured *from the same vertex* (use the reverse bearing, $+180^\circ$, where needed).

3.8 Three-dimensional trigonometry and geometry of solids

Right-triangle trigonometry and the Pythagorean theorem extend directly into three dimensions: the angle between a line and a plane, or between two planes, is found by identifying (or constructing) a right triangle that contains it.

Volume and surface area:

- **Cuboid** (sides l, w, h): $V = lwh$; surface area $= 2(lw + lh + wh)$.
- **Prism**: $V = (\text{cross-sectional area}) \times (\text{length})$.
- **Cylinder** (radius r , height h): $V = \pi r^2 h$; curved surface area $= 2\pi r h$; total surface area $= 2\pi r h + 2\pi r^2$.
- **Cone** (radius r , height h , slant height $l = \sqrt{r^2 + h^2}$): $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$; curved surface area $= \pi r l$; total surface area $= \pi r l + \pi r^2$.
- **Sphere** (radius r): $V = \frac{4}{3}\pi r^3$; surface area $= 4\pi r^2$.
- **Pyramid**: $V = \frac{1}{3}(\text{base area}) \times (\text{height})$.

Angle between a line and a plane: the angle between the line and its orthogonal projection onto the plane. **Angle between two planes:** the angle between their normal vectors (or its supplement, whichever value lies in $[0^\circ, 90^\circ]$) – see the dot product method in the vector geometry sections below.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Các công thức thể tích và diện tích bề mặt trên nằm trong bảng công thức chính thức của kỳ thi IB, nhưng học sinh cần hiểu rõ ý nghĩa từng đại lượng (r, h, l – chiều cao KHÔNG phải là đường sinh của hình nón). Để tìm góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng, luôn tìm hình chiếu vuông góc của đường thẳng đó lên mặt phẳng, rồi dựng tam giác vuông chứa góc cần tìm – đây là kỹ năng cốt lõi của hình học không gian.

Ví dụ mẫu · Worked example

A cuboid has length 8 cm, width 5 cm, and height 4 cm. Find the angle between the space diagonal and the base, correct to 1 d.p.

First find the base diagonal: $d = \sqrt{8^2 + 5^2} = \sqrt{89} \approx 9.434$ cm. The space diagonal, the base diagonal, and the vertical edge (4 cm) form a right triangle, so

$$\tan \theta = \frac{4}{9.434} \approx 0.42400 \Rightarrow \theta \approx 23.0^\circ.$$

(Check with the full space diagonal $\sqrt{8^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{105} \approx 10.247$: $\sin \theta = \frac{4}{10.247} \approx 0.3904 \Rightarrow \theta \approx 23.0^\circ \checkmark$.)

Ví dụ mẫu · Worked example

A pyramid has a square base of side 10 cm and height 12 cm, with apex directly above the centre of the base. Find the angle between a slant edge and the base, correct to 1 d.p.

Half the base diagonal is $\frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \approx 7.071$ cm. This half-diagonal, the height, and the slant

edge form a right triangle at the centre of the base, so

$$\tan \theta = \frac{12}{7.071} \approx 1.6971 \Rightarrow \theta \approx 59.5^\circ.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A solid cone has base radius 5 cm and height 12 cm. Find its slant height, its exact volume, and its exact total surface area (in terms of π), each also correct to 3 s.f.

Slant height: $l = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$ cm.

$$V = \frac{1}{3}\pi(5)^2(12) = 100\pi \approx 314 \text{ cm}^3. \quad \text{Total SA} = \pi rl + \pi r^2 = 65\pi + 25\pi = 90\pi \approx 283 \text{ cm}^2.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A solid consists of a cylinder of radius 3 cm and height 9 cm, topped with a hemisphere of the same radius. Find the total volume and total surface area of the solid, each correct to 3 s.f.

Volume: $V_{\text{cyl}} = \pi(3)^2(9) = 81\pi$; $V_{\text{hemi}} = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi(3)^3\right) = 18\pi$.

$$V = 81\pi + 18\pi = 99\pi \approx 311 \text{ cm}^3.$$

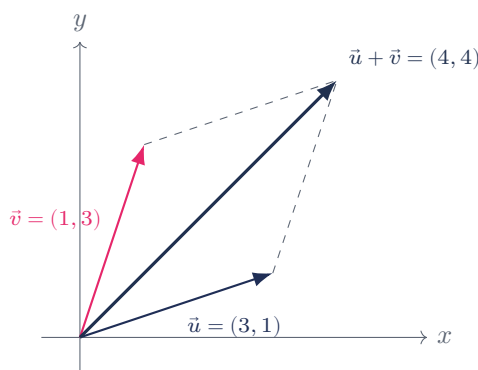
Surface area (the flat circle joining the two solids is internal and is *not* part of the outer surface):
curved cylinder = $2\pi(3)(9) = 54\pi$; curved hemisphere = $2\pi(3)^2 = 18\pi$; base circle of the cylinder = $\pi(3)^2 = 9\pi$.

$$\text{Total SA} = 54\pi + 18\pi + 9\pi = 81\pi \approx 254 \text{ cm}^2.$$

(!) Lỗi thường gặp: In a cone, the **slant height** $l = \sqrt{r^2 + h^2}$ is *not* the vertical height h – using h in place of l in the curved surface area formula πrl is a common error. Likewise, the height of a pyramid is the *perpendicular* distance from the apex to the base, not the length of a slant edge.

3.9 Vectors (AHL)

AHL only. A vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ has **magnitude** $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. Vectors add/subtract component-wise; scalar multiplication scales every component. A **unit vector** in the direction of $\vec{v}$ is $\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$. The vector from point A to point B is $\overrightarrow{AB} = B - A$ (position vector of B minus position vector of A).



Vector addition by the parallelogram rule: $\vec{u} + \vec{v}$ is the diagonal of the parallelogram formed by $\vec{u}$ and $\vec{v}$. The same component-wise rule extends unchanged to three dimensions.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Given $A(1, -2, 3)$ and $B(4, 2, -1)$, find $\overrightarrow{AB}$, its magnitude, and a unit vector in that direction.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (4 - 1, 2 - (-2), -1 - 3) = (3, 4, -4). \quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9 + 16 + 16} = \sqrt{41} \approx 6.40.$$

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{41}}(3, 4, -4) \approx (0.468, 0.625, -0.625).$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Vector $\overrightarrow{AB}$ luôn tính bằng "điểm cuối trừ điểm đầu" ($B - A$), không phải ngược lại. Độ lớn (magnitude) là một số không âm, tính bằng căn bậc hai của tổng bình phương các thành phần — công thức này là mở rộng trực tiếp của định lý Pythagoras sang không gian 3 chiều.

3.10 Vector geometry (AHL)

AHL only. Dot (scalar) product: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}| \cos \theta$, where θ is the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$. Two nonzero vectors are **perpendicular** iff $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Cross (vector) product: $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)$ — a vector perpendicular to both $\vec{a}$ and $\vec{b}$, with magnitude $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin \theta$ equal to the **area of the parallelogram** spanned by $\vec{a}, \vec{b}$ (half that for the triangle they span).

Vector equation of a line through point A with direction $\vec{d}$: $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{d}, t \in \mathbb{R}$.

Equation of a plane through point P_0 with normal $\vec{n}$: $\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$, i.e. in Cartesian form $n_1x + n_2y + n_3z = n_1x_0 + n_2y_0 + n_3z_0$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the angle between $\vec{a} = (1, 2, 2)$ and $\vec{b} = (2, -1, 2)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1(2) + 2(-1) + 2(2) = 2 - 2 + 4 = 4. \quad |\vec{a}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3, \quad |\vec{b}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3.$$

$$\cos \theta = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \Rightarrow \theta = \arccos\left(\frac{4}{9}\right) \approx 63.6^\circ.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find a vector equation of the line through $A(2, -1, 3)$ and $B(5, 3, -2)$, and determine whether it passes through $(11, 11, -12)$.

Direction $\vec{d} = B - A = (3, 4, -5)$. Line: $\vec{r} = (2, -1, 3) + t(3, 4, -5)$. Test $(11, 11, -12)$: from the x -component, $2 + 3t = 11 \Rightarrow t = 3$. Check y : $-1 + 4(3) = 11 \checkmark$; check z : $3 - 5(3) = -12 \checkmark$. Yes, the line passes through $(11, 11, -12)$ at $t = 3$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find $\vec{a} \times \vec{b}$ for $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 3, 0)$, and hence find the area of the parallelogram they span.

$$\vec{a} \times \vec{b} = (0(0) - 1(3), 1(1) - 2(0), 2(3) - 0(1)) = (-3, 1, 6).$$

$$\text{Area} = |\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{9 + 1 + 36} = \sqrt{46} \approx 6.78.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the Cartesian equation of the plane containing $(1, 2, -1)$ with normal vector $\vec{n} = (2, -1, 3)$.

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \Rightarrow 2(x - 1) - 1(y - 2) + 3(z + 1) = 0 \Rightarrow 2x - y + 3z + 3 = 0.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find where the line $\vec{r} = (1, 0, 2) + t(1, 1, -1)$ meets the plane $x + 2y - z = 4$.

Substitute $x = 1 + t$, $y = t$, $z = 2 - t$:

$$(1 + t) + 2(t) - (2 - t) = 4 \Rightarrow 4t - 1 = 4 \Rightarrow t = \frac{5}{4}.$$

$$\text{Point: } \left(1 + \frac{5}{4}, \frac{5}{4}, 2 - \frac{5}{4}\right) = \left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right). \text{ (Check: } \frac{9}{4} + 2\left(\frac{5}{4}\right) - \frac{3}{4} = \frac{9 + 10 - 3}{4} = 4 \checkmark.)$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the Cartesian equation of the plane through $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

$\vec{AB} = (-1, 1, 0)$, $\vec{AC} = (-1, 0, 1)$. Normal: $\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (1(1) - 0(0), 0(-1) - (-1)(1), (-1)(0) - 1(-1)) = (1, 1, 1)$. Using point $A(1, 0, 0)$: $1(x - 1) + 1(y) + 1(z) = 0 \Rightarrow x + y + z = 1$.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

(AHL) Tích vô hướng (dot product) cho kết quả là một SỐ — dùng để tìm góc giữa hai vector hoặc kiểm tra vuông góc ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$). Tích có hướng (cross product) cho kết quả là một VECTOR vuông góc với cả hai vector ban đầu, có độ lớn bằng diện tích hình bình hành tạo bởi hai vector đó — đây là công cụ chính để tìm vector pháp tuyến của một mặt phẳng khi biết hai vector nằm trong mặt phẳng đó.

(!) **Lỗi thường gặp:** $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$ – the cross product is **anti-commutative**: $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b})$. Also, to test whether a point lies on a line $\vec{r} = \vec{a} + t\vec{d}$, you must find a *single* value of t that satisfies **all three** component equations simultaneously – matching just one component is not sufficient.

3.11 Classifying pairs of lines in space (AHL)

In three dimensions, two distinct lines need not be parallel or intersecting – unlike in a single plane, they may simply miss each other entirely.

AHL only. Two lines $\vec{r} = \vec{a}_1 + s\vec{d}_1$ and $\vec{r} = \vec{a}_2 + t\vec{d}_2$ fall into exactly one of four cases:

- **Coincident:** the same line (direction vectors parallel, and a point of one lies on the other).
- **Parallel (distinct):** direction vectors parallel ($\vec{d}_1 = k\vec{d}_2$ for some scalar k), but no point in common.
- **Intersecting:** direction vectors *not* parallel, and the system formed by setting the two lines equal (component by component) has a consistent solution for s and t .
- **Skew:** direction vectors not parallel, and the system is **inconsistent** (no s, t satisfy all three component equations simultaneously) – the lines never meet, yet are not parallel.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Trong không gian 3 chiều, hai đường thẳng phân biệt có thể rơi vào 4 khả năng: **trùng nhau** (cùng một đường thẳng), **song song** (cùng phương, không giao nhau), **cắt nhau** (khác phương, có giao điểm), hoặc **chéo nhau** – **skew** (khác phương NHƯNG cũng không giao nhau – điều này chỉ có thể xảy ra trong không gian 3D, không thể xảy ra trong mặt phẳng 2D). Quy trình kiểm tra: (1) so sánh hai vector chỉ phương – nếu chúng là bội số của nhau (song song) thì kiểm tra thêm một điểm chung để phân biệt trùng nhau/song song; (2) nếu KHÔNG song song, giải hệ phương trình từ 2 trong 3 thành phần để tìm s, t , rồi thử nghiệm vào thành phần còn lại – nếu thỏa mãn thì cắt nhau, nếu mâu thuẫn thì chéo nhau.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Determine whether the lines $\vec{r}_1 = (1, 2, 3) + s(2, 1, -1)$ and $\vec{r}_2 = (4, 1, 7) + t(1, -1, 2)$ are parallel, intersecting, or skew.

Direction vectors $(2, 1, -1)$ and $(1, -1, 2)$ are not scalar multiples of each other, so the lines are **not parallel**. Set the lines equal component-wise:

$$1 + 2s = 4 + t, \quad 2 + s = 1 - t, \quad 3 - s = 7 + 2t.$$

From the first two equations: $2s - t = 3$ and $s + t = -1 \Rightarrow t = -1 - s$. Substituting into $2s - t = 3$: $2s - (-1 - s) = 3 \Rightarrow 3s + 1 = 3 \Rightarrow s = \frac{2}{3}$, so $t = -1 - \frac{2}{3} = -\frac{5}{3}$.

Check in the third equation: LHS = $3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3}$; RHS = $7 + 2\left(-\frac{5}{3}\right) = 7 - \frac{10}{3} = \frac{11}{3}$. Since $\frac{7}{3} \neq \frac{11}{3}$, the third equation is **not** satisfied – the system is inconsistent.

The lines are skew.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Determine whether the lines $\vec{r}_1 = (2, -1, 0) + s(1, 2, 3)$ and $\vec{r}_2 = (3, 2, 4) + t(1, 2, 3)$ are coincident, parallel (distinct), or neither.

Both lines share the same direction vector $(1, 2, 3)$, so they are **parallel** (or coincident). Test whether the point $(2, -1, 0)$ (on line 1, at $s = 0$) also lies on line 2: from the x -component, $3 + t = 2 \Rightarrow t = -1$. Check the y -component: $2 + 2(-1) = 0$, but the point requires $y = -1$. Since $0 \neq -1$, the point does *not* lie on line 2.

The lines are **parallel and distinct** (not coincident).

(!) **Lỗi thường gặp:** (AHL) To test for intersection, solving *any two* of the three component equations for s and t is not enough — you must substitute back and verify the *third* component equation too. If it fails, the lines are skew, not intersecting, even though a solution existed for two of the three equations.

3.12 Angles and Intersections Involving Planes (AHL)

AHL only. The dot product also gives the angle between a line and a plane, and the angle between two planes; the cross product gives the direction of the line where two non-parallel planes meet.

AHL only. **Angle between a line (direction $\vec{d}$) and a plane (normal $\vec{n}$):** if θ is the angle between the line and the plane itself (not its normal),

$$\sin \theta = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}||\vec{n}|}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ.$$

Angle between two planes (normals $\vec{n}_1, \vec{n}_2$):

$$\cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}, \quad 0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ.$$

(The absolute value in both formulas selects the acute angle, since either normal could equally point in the opposite direction.)

Line of intersection of two non-parallel planes: its **direction** is $\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (perpendicular to both normals, hence lying along both planes); a **point** on the line is found by solving the two Cartesian equations simultaneously — e.g. fix one coordinate (such as $z = 0$) and solve the resulting pair of equations for the other two, provided that choice does not make the reduced system inconsistent.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng dùng sin (không phải cos) vì góc này đo so với chính mặt phẳng, trong khi vector chỉ phương $\vec{d}$ lại được so sánh với vector PHÁP TUYẾN $\vec{n}$ (vuông góc với mặt phẳng) — nếu $\vec{d}$ song song với $\vec{n}$ thì đường thẳng vuông góc với mặt phẳng ($\theta = 90^\circ$), còn nếu $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0$ thì đường thẳng song song với (hoặc nằm trong) mặt phẳng ($\theta = 0^\circ$). Ngược lại, góc giữa hai mặt phẳng dùng cos vì ta so sánh trực tiếp hai vector pháp tuyến. Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, phương của giao tuyến luôn là $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ (vuông góc với cả hai pháp tuyến); sau đó chỉ cần tìm MỘT điểm chung bất kỳ bằng cách cho một biến bằng một giá trị cụ thể (thường là 0) rồi giải hệ hai phương trình còn lại theo hai biến kia.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the angle between the line $\vec{r} = (1, 2, 3) + t(2, -1, 2)$ and the plane $x + y - 2z = 5$, correct to 1 d.p.

Direction $\vec{d} = (2, -1, 2)$; normal $\vec{n} = (1, 1, -2)$.

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = 2(1) + (-1)(1) + 2(-2) = 2 - 1 - 4 = -3, \quad |\vec{d} \cdot \vec{n}| = 3.$$

$$|\vec{d}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3, \quad |\vec{n}| = \sqrt{1 + 1 + 4} = \sqrt{6}.$$

$$\sin \theta = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \approx 0.4082 \Rightarrow \theta \approx 24.1^\circ.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the angle between the planes $4x - y + z = 8$ and $x + 3y - 2z = 5$, correct to 1 d.p.

Normals: $\vec{n}_1 = (4, -1, 1)$, $\vec{n}_2 = (1, 3, -2)$.

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 4(1) + (-1)(3) + 1(-2) = 4 - 3 - 2 = -1, \quad |\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = 1.$$

$$|\vec{n}_1| = \sqrt{16 + 1 + 1} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}, \quad |\vec{n}_2| = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}.$$

$$\cos \theta = \frac{1}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{14}} = \frac{1}{3\sqrt{28}} = \frac{1}{6\sqrt{7}} \approx 0.0630 \Rightarrow \theta \approx 86.4^\circ.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find a vector equation of the line of intersection of the planes $x + y + z = 6$ and $2x - y + 3z = 9$, and verify that your line satisfies both equations.

Normals $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$, $\vec{n}_2 = (2, -1, 3)$. **Direction** of the line of intersection:

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1(3) - 1(-1), 1(2) - 1(3), 1(-1) - 1(2)) = (4, -1, -3).$$

Point: set $z = 0$ and solve the reduced system $x + y = 6$, $2x - y = 9$. Adding the two equations: $3x = 15 \Rightarrow x = 5$, so $y = 1$. This gives the point $(5, 1, 0)$.

$$\text{Line: } \vec{r} = (5, 1, 0) + t(4, -1, -3), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Check: the point satisfies both planes: $5 + 1 + 0 = 6 \checkmark$ and $2(5) - 1 + 3(0) = 9 \checkmark$. The direction is perpendicular to both normals: $\vec{d} \cdot \vec{n}_1 = 4 - 1 - 3 = 0 \checkmark$ and $\vec{d} \cdot \vec{n}_2 = 8 + 1 - 9 = 0 \checkmark$ – so the line indeed lies in both planes.

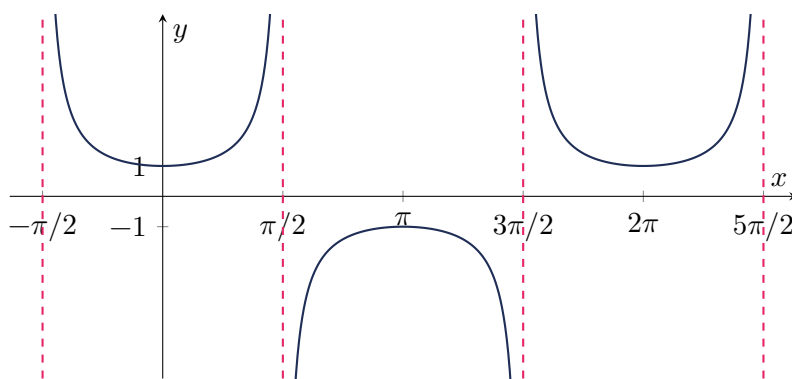
3.13 Reciprocal trigonometric function graphs (AHL)

AHL only. Since $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\csc x = \frac{1}{\sin x}$, $\cot x = \frac{1}{\tan x}$, each reciprocal function has a **vertical asymptote** wherever the underlying function equals zero (division by zero).

$y = \sec x$: period 2π ; vertical asymptotes at $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); range $y \leq -1$ or $y \geq 1$.

$y = \csc x$: period 2π ; vertical asymptotes at $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); range $y \leq -1$ or $y \geq 1$.

$y = \cot x$: period π ; vertical asymptotes at $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); range all real y .



$y = \sec x$: vertical asymptotes (dashed) wherever $\cos x = 0$; the graph never enters the strip $-1 < y < 1$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Đồ thị các hàm nghịch đảo lượng giác ($\sec$, $\csc$, $\cot$) có **tiệm cận đứng** tại mọi điểm mà hàm gốc ($\cos$, $\sin$, $\tan$ tương ứng) bằng 0, vì chia cho 0 không xác định. Đặc biệt, $\sec x$ và $\csc x$ không bao giờ nhận giá trị trong khoảng $(-1, 1)$, vì $|\cos x| \leq 1$ và $|\sin x| \leq 1$ kéo theo $|\sec x| \geq 1$ và $|\csc x| \geq 1$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) State the period, the equations of the first two positive vertical asymptotes, and the range of $y = \csc x$.

$\csc x = \frac{1}{\sin x}$ is undefined where $\sin x = 0$, i.e. at $x = 0, \pi, 2\pi, \dots$ **Period** = 2π . The first two positive asymptotes are $x = \pi$ and $x = 2\pi$. **Range**: $y \leq -1$ or $y \geq 1$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) State the period, the vertical asymptotes for $0 \leq x \leq \pi$, and the range of $y = \cot(2x)$.

Since $\cot(bx)$ has period $\frac{\pi}{b}$, $y = \cot(2x)$ has **period** $\frac{\pi}{2}$. Asymptotes occur where $\sin(2x) = 0 \Rightarrow$

$2x = k\pi \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2}$; within $[0, \pi]$ this gives $x = 0, \frac{\pi}{2}, \pi$. **Range**: all real y — unlike $\sec$, $\csc$, the function $\cot$ is unbounded both above and below within each period.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) State the period, the range, and the vertical asymptotes in $[-\pi, \pi]$ of $y = 3 \sec(2x)$.

The factor 3 scales the output, and the factor 2 inside the argument compresses the period:

period = $\frac{2\pi}{2} = \pi$; **range**: $y \leq -3$ or $y \geq 3$ (since $|\sec(2x)| \geq 1$). Asymptotes occur where

$\cos(2x) = 0 \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; within $[-\pi, \pi]$ this gives

$$x = -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}.$$

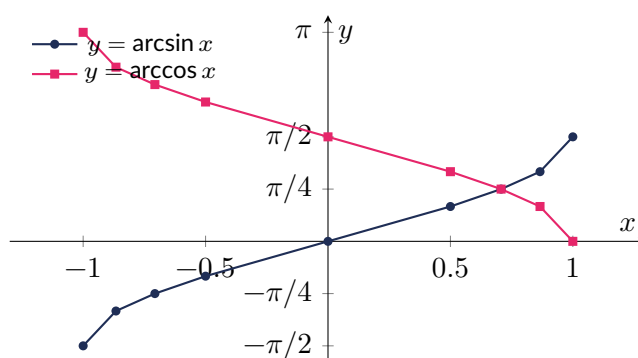
3.14 Inverse trigonometric functions (AHL)

Since $\sin$, $\cos$, $\tan$ are not one-to-one over all of $\mathbb{R}$, their inverses are defined only once the domain is **restricted** to an interval on which the function is one-to-one (its **principal branch**).

AHL only.

- $y = \arcsin x$ (also written $\sin^{-1} x$): domain $[-1, 1]$, range $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
- $y = \arccos x$ (also written $\cos^{-1} x$): domain $[-1, 1]$, range $[0, \pi]$.
- $y = \arctan x$ (also written $\tan^{-1} x$): domain $\mathbb{R}$, range $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ (horizontal asymptotes $y = \pm\frac{\pi}{2}$).

Each graph is the reflection, in the line $y = x$, of the corresponding trig function restricted to its principal branch.



$y = \arcsin x$ (navy) has range $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$; $y = \arccos x$ (pink) has range $[0, \pi]$. Both have domain $[-1, 1]$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Vì $\sin$, $\cos$, $\tan$ không phải là hàm một-một trên toàn bộ $\mathbb{R}$ (mỗi giá trị đầu ra ứng với vô số góc), hàm ngược chỉ được định nghĩa sau khi GIỚI HẠN miền xác định về một khoảng mà hàm là một-một (gọi là nhánh chính). $\arcsin x$ luôn cho kết quả trong $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\arccos x$ luôn cho kết quả trong $[0, \pi]$, và $\arctan x$ luôn cho kết quả trong $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ – đây là quy ước bắt buộc phải nhớ khi tính toán, đặc biệt khi kết hợp với các hàm lượng giác khác trong cùng bài toán.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ and $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$ exactly.

$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$: need an angle in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ with sine $-\frac{1}{2}$: this is $-\frac{\pi}{6}$.

$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$: need an angle in $[0, \pi]$ with cosine $-\frac{1}{2}$: this is $\frac{2\pi}{3}$ (in the second quadrant, since cosine is negative there).

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the exact value of $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$.

Let $\theta = \arccos\frac{3}{5}$, so $\theta \in [0, \pi]$ and $\cos\theta = \frac{3}{5}$. Since $\cos\theta > 0$, in fact $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, so $\sin\theta \geq 0$. By the Pythagorean identity,

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}.$$

(This matches the 3-4-5 right triangle: if the adjacent side is 3 and the hypotenuse is 5, the opposite side is 4.)

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Express $\cos(\arcsin x)$ in terms of x , for $-1 \leq x \leq 1$.

Let $\theta = \arcsin x$, so $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ and $\sin \theta = x$. On this interval $\cos \theta \geq 0$, so

$$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - x^2}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the exact value of $\tan\left(\arccos \frac{5}{13}\right)$.

Let $\theta = \arccos \frac{5}{13}$, so $\cos \theta = \frac{5}{13} > 0 \Rightarrow \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, so $\sin \theta > 0$ too.

$$\sin \theta = \sqrt{1 - \frac{25}{169}} = \sqrt{\frac{144}{169}} = \frac{12}{13} \quad (\text{the 5-12-13 triple}).$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{12/13}{5/13} = \frac{12}{5}.$$

(!) **Lỗi thường gặp:** (AHL) $\arcsin(\sin \theta) = \theta$ only when θ is already in $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ – otherwise, the identity returns the equivalent angle *inside* that range, not the original θ . Likewise $\arccos(\cos \theta) = \theta$ only for $\theta \in [0, \pi]$. Always check which quadrant the "inner" angle belongs to before assigning a sign to $\sin \theta$ or $\cos \theta$ in a composite expression such as $\sin(\arccos x)$.

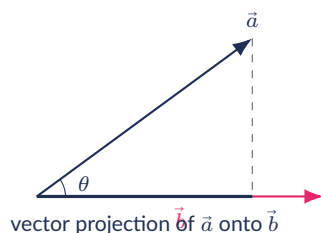
3.15 Scalar and vector projections (AHL)

AHL only. The **scalar projection** (resolute) of $\vec{a}$ onto $\vec{b}$ is

$$\text{scalar projection} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|},$$

the signed length of the "shadow" $\vec{a}$ casts onto the line through $\vec{b}$ (positive if the shadow points the same way as $\vec{b}$, negative if opposite). The **vector projection** of $\vec{a}$ onto $\vec{b}$ is that scalar projection multiplied by the unit vector $\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$:

$$\text{vector projection} = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \right) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}.$$



The vector projection of $\vec{a}$ onto $\vec{b}$ (bold navy segment) is found by dropping a perpendicular from the tip of $\vec{a}$ to the line of $\vec{b}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Hình chiếu vô hướng (scalar projection) là một SỐ (có thể âm nếu góc giữa hai vector là tù), cho biết "bóng" của $\vec{a}$ trên đường thẳng chứa $\vec{b}$ dài bao nhiêu. Hình chiếu vector (vector projection) chính là cái bóng đó nhưng biểu diễn dưới dạng MỘT VECTOR cùng phương với $\vec{b}$ – lấy hình chiếu vô hướng nhân với vector đơn vị $\vec{b}/|\vec{b}|$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the scalar and vector projections of $\vec{a} = (3, 1, -2)$ onto $\vec{b} = (1, 2, 2)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3(1) + 1(2) + (-2)(2) = 3 + 2 - 4 = 1. \quad |\vec{b}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

$$\text{scalar projection} = \frac{1}{3}. \quad \text{vector projection} = \frac{1}{9}(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right).$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the scalar and vector projections of $\vec{a} = (5, 0, -3)$ onto $\vec{b} = (1, -2, 2)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 5(1) + 0(-2) + (-3)(2) = 5 + 0 - 6 = -1. \quad |\vec{b}| = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3.$$

$$\text{scalar projection} = -\frac{1}{3}. \quad \text{vector projection} = -\frac{1}{9}(1, -2, 2) = \left(-\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, -\frac{2}{9}\right).$$

The negative sign shows that $\vec{a}$'s shadow on the line of $\vec{b}$ points *opposite* to $\vec{b}$ – the angle between $\vec{a}$ and $\vec{b}$ is obtuse.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Every vector $\vec{a}$ can be written as the sum of a component parallel to $\vec{b}$ (its vector projection) and a component perpendicular to $\vec{b}$. For $\vec{a} = (3, 1, -2)$, $\vec{b} = (1, 2, 2)$ (as before, vector projection = $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9})$), find the component of $\vec{a}$ perpendicular to $\vec{b}$, and verify it really is perpendicular.

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel} = (3, 1, -2) - \left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right) = \left(\frac{27-1}{9}, \frac{9-2}{9}, \frac{-18-2}{9}\right) = \left(\frac{26}{9}, \frac{7}{9}, -\frac{20}{9}\right).$$

$$\text{Check: } \vec{a}_{\perp} \cdot \vec{b} = \frac{26}{9}(1) + \frac{7}{9}(2) - \frac{20}{9}(2) = \frac{26 + 14 - 40}{9} = \frac{0}{9} = 0 \checkmark.$$

(!) **Lỗi thường gặp:** The scalar projection of $\vec{a}$ onto $\vec{b}$ can be **negative** (when the angle between them is obtuse) – do not confuse it with the magnitude $|\vec{a}|$, which is always non-negative. The vector projection is always **parallel to $\vec{b}$** (a scalar multiple of $\vec{b}$), never parallel to $\vec{a}$.

3.16 Practice: Paper 1 style (no calculator)**Bài tập luyện tập**

Convert 150° to radians, giving an exact answer.

Lời giải chi tiết

$$150 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6}.$$

Bài tập luyện tập

A sector has radius 6 cm and angle $\frac{\pi}{3}$ radians. Find the exact arc length and area.

Lời giải chi tiết

$$s = 6 \cdot \frac{\pi}{3} = 2\pi \text{ cm. Area} = \frac{1}{2}(36)\frac{\pi}{3} = 6\pi \text{ cm}^2.$$

Bài tập luyện tập

State the exact values of $\sin \frac{\pi}{3}$, $\cos \frac{5\pi}{6}$, and $\tan \frac{2\pi}{3}$.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}$

(C) $\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\sqrt{3}$

(B) $\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \sqrt{3}$

(D) $\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, -\sqrt{3}$

Lời giải chi tiết

$\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{5\pi}{6} = 180^\circ - 30^\circ$ (QII) so $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\frac{2\pi}{3} = 120^\circ$ (QII) so $\tan \frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$. (A).

Bài tập luyện tập

Given $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ with θ in the third quadrant, find $\sin \theta$ exactly.

Lời giải chi tiết

$$\sin \theta = -\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (negative in QIII).}$$

Bài tập luyện tập

Prove the identity $\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \tan x$.

Lời giải chi tiết

$$\frac{2 \sin x \cos x}{1 + 2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x. \blacksquare$$

Bài tập luyện tập

Solve $\cos x = -\frac{1}{2}$ for $0 \leq x \leq 2\pi$.

(A) $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

(C) $\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

Lời giải chi tiết

Reference angle $\frac{\pi}{3}$; cosine negative in QII, QIII: $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$ and $x = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Solve $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$ for $0 \leq x \leq 2\pi$.

Lời giải chi tiết

$(2\cos x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ or $\cos x = -1$. Solutions: $x = \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the exact value of $\sin 75^\circ$.

(A) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

(C) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

(D) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$

Lời giải chi tiết

$\sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(AHL) Given $\sin \theta = \frac{3}{5}$, θ in QII, find $\cos \theta$ and $\tan \theta$ exactly.

Lời giải chi tiết

$\cos \theta = -\frac{4}{5}$ (QII negative). $\tan \theta = \frac{3/5}{-4/5} = -\frac{3}{4}$.

Bài tập luyện tập

Triangle ABC has sides $a = 6$, $b = 10$, $c = 14$. Find the largest angle.

(A) 120°

(C) 135°

(B) 110°

(D) 100°

Lời giải chi tiết

Largest angle C (opposite $c = 14$): $\cos C = \frac{36 + 100 - 196}{120} = -0.5 \Rightarrow C = 120^\circ$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(AHL) Find $\vec{a} \cdot \vec{b}$ for $\vec{a} = (1, 2, 2)$, $\vec{b} = (2, -1, 2)$, and state whether they are perpendicular.

Lời giải chi tiết

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 2 + 4 = 4 \neq 0$: **not** perpendicular.

Bài tập luyện tập

(AHL) Find $|\vec{a} \times \vec{b}|$ for $\vec{a} = (2, 0, 1)$, $\vec{b} = (1, 3, 0)$, as an exact surd.

(A) $\sqrt{46}$

(C) $\sqrt{36}$

(B) $\sqrt{40}$

(D) 6

Lời giải chi tiết

$\vec{a} \times \vec{b} = (-3, 1, 6)$, magnitude $= \sqrt{9 + 1 + 36} = \sqrt{46}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the Cartesian equation of the plane containing $(1, 2, -1)$ with normal $(2, -1, 3)$.

Lời giải chi tiết

$2(x - 1) - (y - 2) + 3(z + 1) = 0 \Rightarrow 2x - y + 3z + 3 = 0$.

Bài tập luyện tập

(AHL) State a vector equation of the line through $A(2, -1, 3)$ with direction $(3, 4, -5)$.

Lời giải chi tiết

$\vec{r} = (2, -1, 3) + t(3, 4, -5)$, $t \in \mathbb{R}$.

Bài tập luyện tập

Simplify $\tan \theta \cos \theta$.

(A) $\sin \theta$

(C) 1

(B) $\cos \theta$

(D) $\sec \theta$

Lời giải chi tiết

$\tan \theta \cos \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \cos \theta = \sin \theta$. **(A)**.

3.17 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)**Bài tập luyện tập**

A sector has radius 5.5 cm and angle 2.4 radians. Find the arc length and area.

Lời giải chi tiết

$$s = 5.5(2.4) = 13.2 \text{ cm. Area} = \frac{1}{2}(5.5)^2(2.4) = 36.3 \text{ cm}^2.$$

Bài tập luyện tập

In a right triangle, angle $A = 41^\circ$, side $a = 7$ (opposite A). Find the hypotenuse c and side b .

Lời giải chi tiết

$$c = \frac{7}{\sin 41^\circ} \approx 10.67. b = c \cos 41^\circ \approx 8.06.$$

Bài tập luyện tập

Solve $\sin x = 0.35$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$, correct to 1 decimal place.

Lời giải chi tiết

$$x = \arcsin(0.35) \approx 20.5^\circ \text{ or } x = 180 - 20.5 = 159.5^\circ.$$

Bài tập luyện tập

State the amplitude, period, phase shift, and vertical shift of $y = 3 \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

Lời giải chi tiết

Amplitude 3; period π ; phase shift $\frac{\pi}{6}$ right; vertical shift 1 up.

Bài tập luyện tập

Triangle ABC : $a = 9$, $b = 7$, $C = 55^\circ$. Find c and the area, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$c^2 = 130 - 126 \cos 55^\circ \approx 57.73 \Rightarrow c \approx 7.60. \text{ Area} \approx \frac{1}{2}ab \sin 55^\circ \approx 25.8.$$

Bài tập luyện tập

Triangle ABC : $a = 8$, $b = 10$, $A = 35^\circ$. Find all possible values of B .

(A) 45.8° or 134.2°

(C) 54.2° or 125.8°

(B) 45.8° only

(D) 44.2° or 135.8°

Lời giải chi tiết

$$\sin B = \frac{10 \sin 35^\circ}{8} \approx 0.717 \Rightarrow B \approx 45.8^\circ \text{ or } 134.2^\circ \text{ (both valid, since } 35 + 134.2 < 180\text{)}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the angle between $\vec{a} = (1, 2, 2)$ and $\vec{b} = (2, -1, 2)$, to the nearest 0.1° .

Lời giải chi tiết

$$\cos \theta = \frac{4}{9} \Rightarrow \theta \approx 63.6^\circ.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) $A(1, -2, 3)$, $B(4, 2, -1)$. Find $|\overrightarrow{AB}|$ and a unit vector in that direction, to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\overrightarrow{AB} = (3, 4, -4), |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{41} \approx 6.40. \text{ Unit vector } \approx (0.468, 0.625, -0.625).$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Does the line $\vec{r} = (2, -1, 3) + t(3, 4, -5)$ pass through $(11, 11, -12)$? If so, find t .

Lời giải chi tiết

Yes, at $t = 3$ (verified in all three components).

Bài tập luyện tập

(AHL) Find where the line $\vec{r} = (1, 0, 2) + t(1, 1, -1)$ meets the plane $x + 2y - z = 4$.

Lời giải chi tiết

$$t = \frac{5}{4}; \text{ point } \left(\frac{9}{4}, \frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = (2.25, 1.25, 0.75).$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the area of the parallelogram spanned by $\vec{a} = (2, 0, 1)$ and $\vec{b} = (1, 3, 0)$, to 3 s.f.

(A) 6.78

(C) 7.48

(B) 6.08

(D) 5.78

Lời giải chi tiết

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{46} \approx 6.78. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Given $\cos \theta = -\frac{1}{3}$ with θ in QIII, find $\sec \theta$, $\csc \theta$, $\cot \theta$ exactly.

Lời giải chi tiết

$$\sec \theta = -3. \sin \theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (QIII)}, \text{ so } \csc \theta = -\frac{3\sqrt{2}}{4}, \cot \theta = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Bài tập luyện tập

A surveyor measures a triangular plot with $A = 52^\circ$ between sides $b = 120$ m and $c = 95$ m. Find the third side a and the area of the plot.

Lời giải chi tiết

$$a^2 = 120^2 + 95^2 - 2(120)(95) \cos 52^\circ \approx 9387.9 \Rightarrow a \approx 96.9 \text{ m. Area} = \frac{1}{2}(120)(95) \sin 52^\circ \approx 4491.7 \text{ m}^2.$$

Bài tập luyện tập

Solve $2 \sin^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Lời giải chi tiết

$$(2 \sin x - 1)(\sin x - 1) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} \text{ or } \sin x = 1. \text{ Solutions: } x = 30^\circ, 90^\circ, 150^\circ.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the Cartesian equation of the plane through $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$.

(A) $x + y + z = 1$

(C) $x - y + z = 1$

(B) $x + y + z = 0$

(D) $x + y - z = 1$

Lời giải chi tiết

$$\text{Normal} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1); \text{ plane: } x + y + z = 1. \text{ (A).}$$

3.18 Additional practice: Paper 1 style (no calculator)**Bài tập luyện tập**

A ship is on a bearing of 065° from a lighthouse. What bearing would take the ship directly back to the lighthouse?

(A) 245°

(C) 295°

(B) 115°

(D) 065°

Lời giải chi tiết

Reverse bearing = $065^\circ + 180^\circ = 245^\circ$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

From a point 12 m from the base of a vertical pole, the angle of elevation to the top is 30° . Find the exact height of the pole.

Lời giải chi tiết

$$h = 12 \tan 30^\circ = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 4\sqrt{3} \text{ m.}$$

Bài tập luyện tập

A solid cone has base radius 3 cm and height 4 cm. Find the exact slant height and the exact volume.

Lời giải chi tiết

$$l = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5 \text{ cm (a 3-4-5 right triangle). } V = \frac{1}{3}\pi(3)^2(4) = 12\pi \text{ cm}^3.$$

Bài tập luyện tập

A sphere has radius 3 cm. Find its exact volume in terms of π .

(A) 36π

(C) 4π

(B) 27π

(D) 108π

Lời giải chi tiết

$$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = \frac{4}{3}\pi(27) = 36\pi \text{ cm}^3. \text{ **(A)**}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) State the exact value of $\sec\left(\frac{\pi}{3}\right)$, and the period of $y = \sec x$.

Lời giải chi tiết

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \sec \frac{\pi}{3} = 2. \text{ Period of } y = \sec x \text{ is } 2\pi.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the exact scalar and vector projections of $\vec{a} = (2, -3, 6)$ onto $\vec{b} = (1, 2, 2)$.

Lời giải chi tiết

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 - 6 + 12 = 8; |\vec{b}| = 3. \text{ Scalar projection} = \frac{8}{3}. \text{ Vector projection} = \frac{8}{9}(1, 2, 2) = \left(\frac{8}{9}, \frac{16}{9}, \frac{16}{9}\right).$$

Bài tập luyện tập

Triangle ABC has $a = 7$, $b = 8$, $C = 60^\circ$. Find the exact value of c .

Lời giải chi tiết

$$c^2 = 7^2 + 8^2 - 2(7)(8) \cos 60^\circ = 113 - 56 = 57 \Rightarrow c = \sqrt{57}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Given $\vec{a} = (2, -3, 6)$ and $\vec{b} = (1, 2, 2)$ (whose vector projection of $\vec{a}$ onto $\vec{b}$ is $(\frac{8}{9}, \frac{16}{9}, \frac{16}{9})$, found earlier), find the exact component of $\vec{a}$ perpendicular to $\vec{b}$.

Lời giải chi tiết

$$\vec{a}_\perp = \vec{a} - \vec{a}_\parallel = (2, -3, 6) - \left(\frac{8}{9}, \frac{16}{9}, \frac{16}{9}\right) = \left(\frac{10}{9}, -\frac{43}{9}, \frac{38}{9}\right). \text{ Check: } \frac{10}{9}(1) - \frac{43}{9}(2) + \frac{38}{9}(2) = \frac{10 - 86 + 76}{9} = 0 \checkmark.$$

3.19 Additional practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)**Bài tập luyện tập**

From a point on level ground, the angle of elevation to the top of a tower is 25° . After walking 60 m directly towards the tower, the angle of elevation becomes 42° . Find the height of the tower, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$h\left(\frac{1}{\tan 25^\circ} - \frac{1}{\tan 42^\circ}\right) = 60 \Rightarrow h(2.1445 - 1.1106) = 60 \Rightarrow h(1.0339) = 60 \Rightarrow h \approx 58.0 \text{ m}.$$

Bài tập luyện tập

A hiker walks 5 km on a bearing of 040° , then 7 km on a bearing of 110° . Find the direct distance back to the start, correct to 3 s.f.

(A) 9.90 km

(C) 10.9 km

(B) 8.90 km

(D) 7.90 km

Lời giải chi tiết

Reverse of first leg = $040^\circ + 180^\circ = 220^\circ$; interior angle at the turning point = $220^\circ - 110^\circ = 110^\circ$.
Distance² = $5^2 + 7^2 - 2(5)(7) \cos 110^\circ = 74 + 23.9 = 97.9 \Rightarrow \text{distance} \approx 9.90 \text{ km. (A)}$.

Bài tập luyện tập

A cylindrical water tank has radius 1.4 m and height 2.5 m. Find its volume and total surface area, each correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$V = \pi(1.4)^2(2.5) = 4.9\pi \approx 15.4 \text{ m}^3. \text{ Total SA} = 2\pi(1.4)(2.5) + 2\pi(1.4)^2 = 7\pi + 3.92\pi = 10.92\pi \approx 34.3 \text{ m}^2.$$

Bài tập luyện tập

A cuboid measures 10 cm by 6 cm by 4.5 cm. Find the angle between the space diagonal and the base, correct to 1 d.p.

(A) 21.1°

(C) 18.9°

(B) 24.6°

(D) 30.0°

Lời giải chi tiết

$$\text{Base diagonal} = \sqrt{10^2 + 6^2} = \sqrt{136} \approx 11.66 \text{ cm. } \tan \theta = \frac{4.5}{11.66} \approx 0.3859 \Rightarrow \theta \approx 21.1^\circ. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\csc(200^\circ)$ correct to 3 s.f., and state the vertical asymptote of $y = \csc x$ (in degrees, 0° to 360°) nearest to $x = 200^\circ$.

Lời giải chi tiết

$$\sin 200^\circ = -\sin 20^\circ \approx -0.342 \Rightarrow \csc 200^\circ \approx -2.92. \text{ Asymptotes of } \csc x \text{ occur at multiples of } 180^\circ; \text{ the nearest to } 200^\circ \text{ is } x = 180^\circ.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the scalar and vector projections of $\vec{a} = (4, -2, 5)$ onto $\vec{b} = (3, 0, -4)$, correct to 2 d.p. where relevant.

Lời giải chi tiết

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 12 + 0 - 20 = -8; |\vec{b}| = \sqrt{9 + 16} = 5. \text{ Scalar projection} = -\frac{8}{5} = -1.60. \text{ Vector projection} = -\frac{8}{25}(3, 0, -4) = (-0.96, 0, 1.28).$$

Bài tập luyện tập

Lighthouses A and B are 15 km apart, with B on a bearing of 090° from A . A ship at C is on a bearing of 040° from A and 320° from B . Find the distance AC , correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Angle at A : $090^\circ - 040^\circ = 50^\circ$. Angle at B : bearing $B \rightarrow A = 270^\circ$, so angle $= 320^\circ - 270^\circ = 50^\circ$.
Then angle $C = 180^\circ - 50^\circ - 50^\circ = 80^\circ$. Sine rule: $\frac{AC}{\sin 50^\circ} = \frac{15}{\sin 80^\circ} \Rightarrow AC = \frac{15 \sin 50^\circ}{\sin 80^\circ} \approx \frac{11.49}{0.9848} \approx 11.7 \text{ km}$.

Bài tập luyện tập

A solid consists of a cylinder of radius 3 cm and height 9 cm, topped with a hemisphere of the same radius. Find the total volume and total surface area of the solid, each correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$V = \pi(3)^2(9) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi(3)^3\right) = 81\pi + 18\pi = 99\pi \approx 311 \text{ cm}^3$. Total SA $= 2\pi(3)(9) + 2\pi(3)^2 + \pi(3)^2 = 54\pi + 18\pi + 9\pi = 81\pi \approx 254 \text{ cm}^2$.

3.20 Further practice: Paper 1 style (no calculator)**Bài tập luyện tập**

A sector has radius 10 cm and angle $\frac{3\pi}{5}$ radians. Find the exact arc length and area.

Lời giải chi tiết

$s = 10 \cdot \frac{3\pi}{5} = 6\pi \text{ cm}$. Area $= \frac{1}{2}(10)^2 \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}(100) \frac{3\pi}{5} = 30\pi \text{ cm}^2$.

Bài tập luyện tập

State the exact value of $\cos \frac{11\pi}{6}$.

(A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

(C) $\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

(D) $-\frac{1}{2}$

Lời giải chi tiết

$\frac{11\pi}{6} = 2\pi - \frac{\pi}{6}$, so it lies in QIV with reference angle $\frac{\pi}{6}$; cosine is positive in QIV: $\cos \frac{11\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (A).

Bài tập luyện tập

Prove the identity $\frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x} = \tan x$.

Lời giải chi tiết

$$\text{LHS} = \frac{1 - (1 - 2 \sin^2 x)}{2 \sin x \cos x} = \frac{2 \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x = \text{RHS.} \blacksquare$$

Bài tập luyện tập

Solve $\sqrt{2} \sin x - 1 = 0$ for $0 \leq x \leq 2\pi$.

(A) $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

(C) $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

(B) $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$

Lời giải chi tiết

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ positive in QI and QII: } x = \frac{\pi}{4} \text{ or } x = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Triangle ABC has $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2$, $C = 30^\circ$. Find the exact value of c .

Lời giải chi tiết

$$c^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2^2 - 2(2\sqrt{3})(2) \cos 30^\circ = 12 + 4 - 8\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 16 - 12 = 4 \Rightarrow c = 2.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the exact scalar projection of $\vec{a} = (4, -1, 3)$ onto $\vec{b} = (2, 2, 1)$.

(A) 3

(C) 9

(B) -3

(D) 1

Lời giải chi tiết

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 4(2) + (-1)(2) + 3(1) = 8 - 2 + 3 = 9. |\vec{b}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3. \text{ Scalar projection} = \frac{9}{3} = 3. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find $\vec{a} \cdot \vec{b}$ for $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, -1)$, and state whether they are perpendicular.

Lời giải chi tiết

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1(2) + (-1)(1) + 2(-1) = 2 - 1 - 2 = -1 \neq 0: \text{ not perpendicular.}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Show that the line $\vec{r} = (3, 1, -2) + t(1, -1, 0)$ lies entirely in the plane $x + y + z = 2$.

Lời giải chi tiết

Normal of the plane: $\vec{n} = (1, 1, 1)$; direction of the line: $\vec{d} = (1, -1, 0)$. Since $\vec{d} \cdot \vec{n} = 1(1) + (-1)(1) + 0(1) = 1 - 1 + 0 = 0$, the line is parallel to the plane. The point $(3, 1, -2)$ satisfies the plane equation: $3 + 1 + (-2) = 2 \checkmark$. Since the line is parallel to the plane *and* passes through a point on the plane, it lies entirely in the plane.

Bài tập luyện tập

(AHL) State the exact value of $\cot \frac{\pi}{6}$, and the period of $y = \cot x$.

Lời giải chi tiết

$\cot \frac{\pi}{6} = \frac{\cos(\pi/6)}{\sin(\pi/6)} = \frac{\sqrt{3}/2}{1/2} = \sqrt{3}$. The period of $y = \cot x$ is π .

Bài tập luyện tập

(AHL) Express $\sin \theta - \cos \theta$ in the form $R \sin(\theta + \alpha)$, stating R and the exact value of α . Hence state the exact maximum value of $\sin \theta - \cos \theta$.

Lời giải chi tiết

Here $a = 1, b = -1$: $R = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} > 0$, $\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} < 0$, so α is in QIV: $\alpha = -\frac{\pi}{4}$. Thus $\sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$, with exact maximum value $\sqrt{2}$.

3.21 Further practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)**Bài tập luyện tập**

From a point on level ground, the angle of elevation to the top of a tower is 18° . After walking 50 m directly towards the tower, the angle of elevation becomes 47° . Find the height of the tower, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$h\left(\frac{1}{\tan 18^\circ} - \frac{1}{\tan 47^\circ}\right) = 50 \Rightarrow h(3.07768 - 0.93252) = 50 \Rightarrow h(2.14516) = 50 \Rightarrow h \approx 23.3 \text{ m.}$$

Bài tập luyện tập

A ship sails from port A on a bearing of 048° for 32 km to point B , then changes course and sails on a bearing of 132° for 45 km to point C . Find the distance AC , correct to 3 s.f.

(A) 57.9 km

(C) 54.1 km

(B) 62.3 km

(D) 60.5 km

Lời giải chi tiết

The bearing from B back to A is $048^\circ + 180^\circ = 228^\circ$, so the interior angle of triangle ABC at B is $228^\circ - 132^\circ = 96^\circ$.

$$AC^2 = 32^2 + 45^2 - 2(32)(45) \cos 96^\circ = 3049 - 2880 \cos 96^\circ \approx 3049 + 301.0 = 3350.0 \Rightarrow AC \approx 57.9 \text{ km.}$$

(A).

Bài tập luyện tập

Triangle ABC has $a = 11$, $b = 14$, $C = 63^\circ$. Find the length of side c and the area of the triangle, each correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$c^2 = 11^2 + 14^2 - 2(11)(14) \cos 63^\circ = 317 - 308 \cos 63^\circ \approx 317 - 139.8 = 177.2 \Rightarrow c \approx 13.3. \text{ Area}$$

$$= \frac{1}{2}(11)(14) \sin 63^\circ = 77 \sin 63^\circ \approx 68.6 \text{ square units.}$$

Bài tập luyện tập

A pyramid has a square base of side 8 cm and height 15 cm, with apex directly above the centre of the base. Find the angle between a slant edge and the base, correct to 1 d.p., and the volume of the pyramid.

Lời giải chi tiết

Half the base diagonal is $\frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2} \approx 5.657 \text{ cm.}$

$$\tan \theta = \frac{15}{5.657} \approx 2.6517 \Rightarrow \theta \approx 69.3^\circ.$$

$$\text{Volume} = \frac{1}{3}(8)^2(15) = \frac{1}{3}(64)(15) = 320 \text{ cm}^3.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Given $P(-2, 3, 5)$ and $Q(4, -1, 2)$, find $\overrightarrow{PQ}$, its magnitude, and a unit vector in that direction, each to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (6, -4, -3). |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{36 + 16 + 9} = \sqrt{61} \approx 7.81.$$

$$\hat{u} = \frac{1}{\sqrt{61}}(6, -4, -3) \approx (0.768, -0.512, -0.384).$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the area of the triangle with vertices $A(1, 2, 0)$, $B(4, 2, 1)$, $C(2, 5, 2)$, correct to 3 s.f.

(A) 5.36

(C) 4.36

(B) 10.7

(D) 6.36

Lời giải chi tiết

$$\overrightarrow{AB} = (3, 0, 1), \overrightarrow{AC} = (1, 3, 2).$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0(2) - 1(3), 1(1) - 3(2), 3(3) - 0(1)) = (-3, -5, 9).$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 25 + 81} = \sqrt{115} \approx 10.724. \text{ Area of triangle} = \frac{10.724}{2} \approx 5.36. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the angle between the line $\vec{r} = (2, -1, 4) + t(3, 1, -2)$ and the plane $2x - y + z = 7$, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

$$\vec{d} = (3, 1, -2), \vec{n} = (2, -1, 1). \vec{d} \cdot \vec{n} = 6 - 1 - 2 = 3. |\vec{d}| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}, |\vec{n}| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}.$$

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{84}} \approx 0.3273 \Rightarrow \theta \approx 19.1^\circ.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the angle between the planes $3x - y + 2z = 6$ and $x + 2y - z = 4$, correct to 1 d.p.

(A) 83.7°

(C) 86.4°

(B) 79.1°

(D) 75.4°

Lời giải chi tiết

$$\vec{n}_1 = (3, -1, 2), \vec{n}_2 = (1, 2, -1). \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 3 - 2 - 2 = -1, \text{ so } |\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = 1. |\vec{n}_1| = \sqrt{14}, |\vec{n}_2| = \sqrt{6}.$$

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{84}} \approx 0.1091 \Rightarrow \theta \approx 83.7^\circ.$$

(A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Find a vector equation of the line of intersection of the planes $x - y + 2z = 3$ and $2x + y - z = 5$.

Lời giải chi tiết

$$\vec{n}_1 = (1, -1, 2), \vec{n}_2 = (2, 1, -1).$$

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = ((-1)(-1) - 2(1), 2(2) - 1(-1), 1(1) - (-1)(2)) = (-1, 5, 3).$$

Setting $z = 0$: $x - y = 3$ and $2x + y = 5$; adding gives $3x = 8 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$.

$$\text{Line: } \vec{r} = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, 0\right) + t(-1, 5, 3).$$

Check: $\frac{8}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right) + 0 = 3 \checkmark$; $2\left(\frac{8}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right) - 0 = 5 \checkmark$; and $\vec{d} \cdot \vec{n}_1 = -1 - 5 + 6 = 0 \checkmark$,
 $\vec{d} \cdot \vec{n}_2 = -2 + 5 - 3 = 0 \checkmark$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $5 \sin \theta + 12 \cos \theta = 6.5$ for $0^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

$R = \sqrt{5^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13$. $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ (both positive, Q1): $\alpha = \arctan\left(\frac{12}{5}\right) \approx 67.38^\circ$.

$$13 \sin(\theta + 67.38^\circ) = 6.5 \Rightarrow \sin(\theta + 67.38^\circ) = 0.5.$$

So $\theta + 67.38^\circ = 30^\circ + 360k^\circ$ or $150^\circ + 360k^\circ$, giving $\theta \approx -37.4^\circ (\rightarrow 322.6^\circ)$ or $\theta \approx 82.6^\circ$.

Solutions: $\theta \approx 82.6^\circ$ or 322.6° .

3.22 Extra practice: Mixed mastery

Bài tập luyện tập

In a circle with centre O and radius 9 cm, points A and B lie on the circle such that $\angle AOB = 2.1$ radians. Find (a) the length of chord AB , and (b) the area of the minor segment cut off by chord AB , each correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

(a) Using the chord formula $AB = 2r \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ with $r = 9$, $\theta = 2.1$: $AB = 18 \sin(1.05) \approx 18(0.8674) \approx 15.6$ cm. (b) Sector area $= \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(81)(2.1) = 85.05$ cm². Triangle AOB area $= \frac{1}{2}r^2 \sin \theta = \frac{1}{2}(81) \sin(2.1) \approx 40.5(0.8632) \approx 34.96$ cm². Segment area $= 85.05 - 34.96 \approx 50.1$ cm².

Bài tập luyện tập

A point $P(\theta)$ on the unit circle has y -coordinate $\frac{8}{17}$ and lies in the second quadrant. Find the exact value of $\tan \theta$.

(A) $-\frac{8}{15}$

(C) $-\frac{15}{8}$

(B) $\frac{8}{15}$

(D) $\frac{15}{8}$

Lời giải chi tiết

Since P lies on the unit circle, $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow x = -\sqrt{1 - \left(\frac{8}{17}\right)^2} = -\sqrt{\frac{225}{289}} = -\frac{15}{17}$ (negative in QII). Then $\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{8/17}{-15/17} = -\frac{8}{15}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Given that $\sin \theta = \frac{2}{3}$ with θ obtuse, find the exact values of $\cos 2\theta$ and $\sin 2\theta$.

Lời giải chi tiết

Since θ is obtuse (QII), $\cos \theta = -\sqrt{1 - \frac{4}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$. $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2\left(\frac{4}{9}\right) = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$.
 $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = 2\left(\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{5}}{9}$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Given that $\tan A = \frac{1}{2}$ and $\tan B = \frac{1}{3}$, where A and B are acute angles, find the exact value of $\tan(A + B)$.

(A) 1**(C)** $\frac{6}{5}$ **(B)** $\frac{5}{6}$ **(D)** -1 **Lời giải chi tiết**

$\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{5/6}{5/6} = 1$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(AHL) Given that $\cot \theta = -\frac{5}{12}$ with θ in the second quadrant, find the exact values of $\csc \theta$ and $\sec \theta$.

Lời giải chi tiết

In QII, $\sin \theta > 0$ and $\cos \theta < 0$. Using the 5-12-13 triangle, $\sin \theta = \frac{12}{13}$, $\cos \theta = -\frac{5}{13}$ (check: $\cot \theta = \frac{-5/13}{12/13} = -\frac{5}{12}$ ✓). Then $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{13}{12}$ and $\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{13}{5}$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Express $3 \cos \theta + 4 \sin \theta$ in the form $R \cos(\theta - \alpha)$, where $R > 0$ and $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, giving α correct to 4 s.f. (radians). Hence solve $3 \cos \theta + 4 \sin \theta = 2$ for $0 \leq \theta \leq 2\pi$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$R \cos(\theta - \alpha) = R \cos \alpha \cos \theta + R \sin \alpha \sin \theta$, so $R \cos \alpha = 3$ and $R \sin \alpha = 4$. Then $R = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, $\tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha \approx 0.9273$. So $3 \cos \theta + 4 \sin \theta = 5 \cos(\theta - 0.9273)$. Then $5 \cos(\theta - 0.9273) = 2 \Rightarrow \cos(\theta - 0.9273) = 0.4 \Rightarrow \theta - 0.9273 = \pm 1.1593 + 2k\pi$. $\theta = 0.9273 + 1.1593 \approx 2.09$, or $\theta = 0.9273 - 1.1593 \approx -0.232$ ($\rightarrow 2\pi - 0.232 \approx 6.05$).

Solutions: $\theta \approx 2.09$ or 6.05 .

Bài tập luyện tập

Solve $\tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + \sqrt{3} = 0$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

(A) $45^\circ, 60^\circ, 225^\circ, 240^\circ$

(C) $60^\circ, 240^\circ$ only

(B) $45^\circ, 225^\circ$ only

(D) $30^\circ, 45^\circ, 210^\circ, 225^\circ$

Lời giải chi tiết

Factorise: $(\tan x - 1)(\tan x - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow \tan x = 1$ or $\tan x = \sqrt{3}$. For $\tan x = 1$: $x = 45^\circ, 225^\circ$. For $\tan x = \sqrt{3}$: $x = 60^\circ, 240^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

Triangle PQR has $p = 9$, $q = 13$, $P = 27^\circ$. Determine all possible value(s) of angle Q , correct to 1 d.p., justifying whether one or two triangles are possible.

Lời giải chi tiết

By the sine rule, $\sin Q = \frac{q \sin P}{p} = \frac{13 \sin 27^\circ}{9} \approx \frac{5.902}{9} \approx 0.6558 \Rightarrow Q \approx 41.0^\circ$ or $Q \approx 180^\circ - 41.0^\circ = 139.0^\circ$. Checking the second case: $P + Q = 27^\circ + 139.0^\circ = 166.0^\circ < 180^\circ$, so it also gives a valid triangle. Since $q > p$, **both** solutions are valid: $Q \approx 41.0^\circ$ or $Q \approx 139.0^\circ$.

Bài tập luyện tập

Triangle ABC has $a = 13$, $b = 7$, $c = 15$. Find the area of the triangle, correct to 3 s.f.

(A) 45.5

(C) 40.2

(B) 51.0

(D) 62.4

Lời giải chi tiết

First find angle B (opposite b) using the cosine rule: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{169 + 225 - 49}{2(13)(15)} = \frac{345}{390} \approx 0.8846 \Rightarrow B \approx 27.8^\circ$. Area $= \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}(13)(15) \sin 27.8^\circ \approx 97.5(0.4663) \approx 45.5$. (A).

Bài tập luyện tập

From the top of a cliff 85 m high, the angles of depression to two boats, both due east of the cliff and in line with its base, are 35° and 21° . Find the distance between the two boats, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Let d_1, d_2 be the horizontal distances from the base of the cliff to the nearer and farther boats. Since each angle of depression equals the angle of elevation from the corresponding boat:

$$d_1 = \frac{85}{\tan 35^\circ} \approx \frac{85}{0.7002} \approx 121.4 \text{ m}, \quad d_2 = \frac{85}{\tan 21^\circ} \approx \frac{85}{0.3839} \approx 221.4 \text{ m}.$$

Distance between the boats $= d_2 - d_1 \approx 221.4 - 121.4 \approx 100 \text{ m}$.

Bài tập luyện tập

A pyramid has a rectangular base measuring 6 cm by 8 cm, with apex 12 cm directly above the centre of the base. Find the angle between the base and a triangular face containing one of the 8 cm edges, correct to 1 d.p.

(A) 76.0° (C) 82.9° (B) 68.2° (D) 63.4° **Lời giải chi tiết**

The foot of the perpendicular from the apex to an 8 cm edge lies at a horizontal distance equal to half the other base side, i.e. $\frac{6}{2} = 3$ cm from that edge. The required angle θ satisfies $\tan \theta = \frac{12}{3} = 4 \Rightarrow \theta \approx 76.0^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

A large cone has base radius 9 cm and height 12 cm. A plane parallel to the base removes a similar (smaller) cone of height 4 cm from the top, leaving a frustum. Find (a) the volume of the frustum, and (b) its curved (lateral) surface area, each correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

By similarity, the small cone's radius is $9 \times \frac{4}{12} = 3$ cm. (a) $V_{\text{large}} = \frac{1}{3}\pi(9)^2(12) = 324\pi$; $V_{\text{small}} = \frac{1}{3}\pi(3)^2(4) = 12\pi$. Frustum volume $= 324\pi - 12\pi = 312\pi \approx 980 \text{ cm}^3$. (b) Slant heights: large $= \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15$ cm; small $= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ cm; so the frustum's slant height $= 15 - 5 = 10$ cm. Curved SA $= \pi(R + r)(\text{slant}) = \pi(9 + 3)(10) = 120\pi \approx 377 \text{ cm}^2$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Given $\vec{u} = (3, -1, 4)$ and $\vec{v} = (1, 2, -2)$, find (a) $|\vec{u}|$ and $|\vec{v}|$; (b) $\vec{u} \cdot \vec{v}$; (c) the angle between $\vec{u}$ and $\vec{v}$, correct to 1 d.p.; (d) $\vec{u} \times \vec{v}$; (e) the exact scalar and vector projections of $\vec{u}$ onto $\vec{v}$.

Lời giải chi tiết

(a) $|\vec{u}| = \sqrt{9+1+16} = \sqrt{26} \approx 5.10$; $|\vec{v}| = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3$. (b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3(1) + (-1)(2) + 4(-2) = 3 - 2 - 8 = -7$. (c) $\cos \theta = \frac{-7}{\sqrt{26} \cdot 3} \approx \frac{-7}{15.30} \approx -0.4576 \Rightarrow \theta \approx 117.2^\circ$. (d) $\vec{u} \times \vec{v} = ((-1)(-2) - 4(2), 4(1) - 3(-2), 3(2) - (-1)(1)) = (-6, 10, 7)$. (e) Scalar projection $= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|} = -\frac{7}{3} \approx -2.33$. Vector projection $= \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{v}|^2} \vec{v} = -\frac{7}{9}(1, 2, -2) = \left(-\frac{7}{9}, -\frac{14}{9}, \frac{14}{9}\right)$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the Cartesian equation of the plane that passes through $A(2, 1, -1)$ and is perpendicular to the line $\vec{r} = (1, 0, 3) + t(4, -1, 2)$.

(A) $4x - y + 2z = 5$

(C) $4x + y + 2z = 5$

(B) $4x - y + 2z = -5$

(D) $2x - y + 4z = 5$

Lời giải chi tiết

The line's direction $(4, -1, 2)$ is normal to the required plane. Plane: $4(x-2) - 1(y-1) + 2(z+1) = 0 \Rightarrow 4x - 8 - y + 1 + 2z + 2 = 0 \Rightarrow 4x - y + 2z = 5$. Check: $4(2) - 1(1) + 2(-1) = 8 - 1 - 2 = 5$ ✓. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the angle between the line $\vec{r} = (2, 0, -1) + t(1, 4, -2)$ and the plane $x - 2y + 3z = 5$, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

$\vec{d} = (1, 4, -2)$, $\vec{n} = (1, -2, 3)$. $\vec{d} \cdot \vec{n} = 1(1) + 4(-2) + (-2)(3) = 1 - 8 - 6 = -13$. $|\vec{d}| = \sqrt{1+16+4} = \sqrt{21}$, $|\vec{n}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$.

$$\sin \theta = \frac{13}{\sqrt{21}\sqrt{14}} = \frac{13}{\sqrt{294}} \approx 0.7582 \Rightarrow \theta \approx 49.3^\circ.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Two planes are given by $\Pi_1 : 2x + y - 2z = 3$ and $\Pi_2 : x - 2y + 2z = 5$. Find (a) the angle between Π_1 and Π_2 , correct to 1 d.p., and (b) a vector equation of their line of intersection.

Lời giải chi tiết

$\vec{n}_1 = (2, 1, -2)$, $\vec{n}_2 = (1, -2, 2)$. (a) $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 2(1) + 1(-2) + (-2)(2) = 2 - 2 - 4 = -4$, so $|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2| = 4$. $|\vec{n}_1| = \sqrt{4+1+4} = 3$, $|\vec{n}_2| = \sqrt{1+4+4} = 3$.

$$\cos \theta = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9} \approx 0.4444 \Rightarrow \theta \approx 63.6^\circ.$$

(b) Direction: $\vec{d} = \vec{n}_2 \times \vec{n}_1 = ((-2)(-2) - (2)(1), (2)(2) - (1)(-2), (1)(1) - (-2)(2)) = (2, 6, 5)$.

Setting $z = 0$: $2x + y = 3$ and $x - 2y = 5$; solving simultaneously gives $x = \frac{11}{5}$, $y = -\frac{7}{5}$.

$$\text{Line: } \vec{r} = \left(\frac{11}{5}, -\frac{7}{5}, 0\right) + t(2, 6, 5).$$

Check: $2\left(\frac{11}{5}\right) + \left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{22-7}{5} = 3 \checkmark$; $\frac{11}{5} - 2\left(-\frac{7}{5}\right) = \frac{11+14}{5} = 5 \checkmark$; and $\vec{d} \cdot \vec{n}_1 = 4 + 6 - 10 = 0 \checkmark$, $\vec{d} \cdot \vec{n}_2 = 2 - 12 + 10 = 0 \checkmark$.

3.23 Extra practice: Mixed mastery II

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ exactly.

Lời giải chi tiết

Need an angle in $[0, \pi]$ with cosine $\frac{\sqrt{3}}{2}$: this is $\frac{\pi}{6}$ (30°).

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the exact value of $\sin\left(\arctan \frac{3}{4}\right)$.

(A) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{3}{4}$

(B) $\frac{4}{5}$

(D) $\frac{4}{3}$

Lời giải chi tiết

Let $\theta = \arctan \frac{3}{4}$, so $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ (since $\tan \theta > 0$) and $\tan \theta = \frac{3}{4}$. Using the 3-4-5 triangle (opposite 3, adjacent 4, hypotenuse 5): $\sin \theta = \frac{3}{5}$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Express $\tan(\arcsin x)$ in terms of x , for $-1 < x < 1$.

Lời giải chi tiết

Let $\theta = \arcsin x$, so $\sin \theta = x$ and (since $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$) $\cos \theta = \sqrt{1 - x^2} > 0$.

$$\tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Classify the pair of lines $\vec{r}_1 = (1, 0, 2) + s(2, -1, 3)$ and $\vec{r}_2 = (5, -2, 8) + t(2, -1, 3)$: coincident, parallel (distinct), intersecting, or skew?

Lời giải chi tiết

Direction vectors are identical, $(2, -1, 3)$, so the lines are parallel or coincident. Test $(1, 0, 2)$ (on line 1) against line 2: x -component $5 + 2t = 1 \Rightarrow t = -2$. Check y : $-2 + (-1)(-2) = 0 \checkmark$ (matches). Check z : $8 + 3(-2) = 2 \checkmark$ (matches). All three components agree, so the point lies on both lines. **The lines are coincident.**

Bài tập luyện tập

Find the area of the triangle with vertices O , and sides represented by $\vec{a} = (1, 2, 2)$ and $\vec{b} = (3, 0, 4)$, using the cross product.

Lời giải chi tiết

$\vec{a} \times \vec{b} = (2(4) - 2(0), 2(3) - 1(4), 1(0) - 2(3)) = (8, 2, -6)$. $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{64 + 4 + 36} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$. Area of triangle $= \frac{1}{2}|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{26} \approx 5.10$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Express $8 \sin \theta + 15 \cos \theta$ in the form $R \sin(\theta + \alpha)$, with $R > 0$ and $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, correct to 2 d.p. for α .

Lời giải chi tiết

$$R = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17. \tan \alpha = \frac{15}{8} \Rightarrow \alpha \approx 61.93^\circ.$$

$$8 \sin \theta + 15 \cos \theta = 17 \sin(\theta + 61.93^\circ).$$

Bài tập luyện tập

Triangle ABC has $a = 7$, $b = 10$, $A = 40^\circ$. Find all possible value(s) of B , correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

$$\frac{\sin B}{10} = \frac{\sin 40^\circ}{7} \Rightarrow \sin B = \frac{10 \sin 40^\circ}{7} \approx 0.9183.$$

$$B \approx 66.7^\circ \quad \text{or} \quad B \approx 180^\circ - 66.7^\circ = 113.3^\circ.$$

Both are valid, since $A + B < 180^\circ$ in each case ($40 + 66.7 = 106.7^\circ$ and $40 + 113.3 = 153.3^\circ$, both $< 180^\circ$) – the ambiguous case.

Bài tập luyện tập

A cuboid has dimensions $6 \text{ cm} \times 8 \text{ cm} \times 10 \text{ cm}$. Find the length of the space diagonal, and the angle it makes with the base (the 6×8 face), correct to the nearest degree.

Lời giải chi tiết

Base diagonal: $\sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10$ cm. Space diagonal: $\sqrt{10^2 + 10^2} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2} \approx 14.1$ cm. Angle with the base: $\tan \theta = \frac{\text{height}}{\text{base diagonal}} = \frac{10}{10} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the angle between the line with direction $\vec{d} = (1, 1, 1)$ and the plane with normal $\vec{n} = (2, -1, 2)$, correct to 1 d.p.

(A) 35.3°

(C) 70.5°

(B) 54.7°

(D) 19.5°

Lời giải chi tiết

$\vec{d} \cdot \vec{n} = 2 - 1 + 2 = 3$. $|\vec{d}| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.

$$\sin \theta = \frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.5774 \Rightarrow \theta \approx 35.3^\circ.$$

(A).

Statistics and Probability

Mục tiêu Unit: Thống kê mô tả (trung bình, phương sai, độ lệch chuẩn), tương quan và hồi quy tuyến tính, xác suất và xác suất có điều kiện, biến ngẫu nhiên rời rạc, phân phối nhị thức và chuẩn, và (AHL) định lý Bayes cùng biến ngẫu nhiên liên tục.

4.1 Populations, samples, and sampling techniques

A **population** is the entire group under study; a **sample** is a subset of the population actually observed, used to draw conclusions (**inference**) about the population as a whole. Since surveying an entire population is rarely practical, the *method* used to select a sample matters enormously — a poorly chosen sample can be systematically unrepresentative (**biased**), no matter how large it is.

Simple random sampling: every member of the population has an equal chance of selection (e.g. using random numbers).

Systematic sampling: members are chosen at regular intervals from a list (e.g. every 10th person).

Stratified sampling: the population is divided into non-overlapping **strata** (groups sharing a characteristic, e.g. age band), and a random sample is taken from each stratum in proportion to its size.

Convenience sampling: members are chosen simply because they are easy to reach (e.g. people passing by) — this is quick, but typically **biased**, and is not a method of choice for a statistically sound sample.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Chọn đúng phương pháp lấy mẫu (sampling) quyết định mẫu có đại diện cho tổng thể (population) hay không. Mẫu ngẫu nhiên đơn giản (simple random) và lấy mẫu hệ thống (systematic) cho mỗi phần tử cơ hội được chọn công bằng. Lấy mẫu phân tầng (stratified) đặc biệt hữu ích khi tổng thể có các nhóm nhỏ (tầng) khác biệt rõ rệt — đảm bảo mỗi tầng đều được đại diện đúng theo tỉ lệ của nó trong tổng thể. Lấy mẫu thuận tiện (convenience) tuy nhanh nhưng RẤT dễ gây ra sai lệch hệ thống (bias) vì mẫu không đại diện cho toàn bộ tổng thể — cần tránh khi cần kết luận đáng tin cậy.

Ví dụ mẫu • Worked example

A school of 900 students consists of 360 in Grade 10, 300 in Grade 11, and 240 in Grade 12. Find the number of students that should be sampled from each grade in a stratified sample of size 60.

Sampling fraction: $\frac{60}{900} = \frac{1}{15}$. Grade 10: $360 \times \frac{1}{15} = 24$. Grade 11: $300 \times \frac{1}{15} = 20$. Grade 12: $240 \times \frac{1}{15} = 16$. (Check: $24 + 20 + 16 = 60$ ✓.)

AHL note on estimation. When a sample is used to estimate an unknown population variance, the **unbiased estimate** divides by $n - 1$ rather than n :

$$s_{n-1}^2 = \frac{n}{n-1} \cdot s_n^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1},$$

where $s_n^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ is the “ordinary” (divide-by- n) sample variance computed later in this unit. GDC statistics modes typically report both σ_n (divide by n) and σ_{n-1} (divide by $n - 1$) – use σ_{n-1} whenever the sample is being used to *estimate* an unknown population variance.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương sai mẫu “thường” (chia cho n) có xu hướng hơi THẤP hơn phương sai thật của tổng thể một cách hệ thống – vì vậy khi dùng mẫu để ƯỚC LƯỢNG phương sai tổng thể, ta dùng công thức **không chệch (unbiased)** chia cho $(n - 1)$ thay vì n . Máy tính cầm tay thường hiển thị cả hai: σ_n và σ_{n-1} (hay s_{n-1}) – cần chọn đúng loại theo yêu cầu đề bài.

Ví dụ mẫu · Worked example

A sample of 8 values has $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 98$. Find the unbiased estimate of the population variance.

$$s_{n-1}^2 = \frac{98}{8-1} = \frac{98}{7} = 14.$$

4.2 Descriptive statistics

For data values x_i with frequencies f_i ($n = \sum f_i$): **mean** $\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}$. **Variance** $\sigma^2 = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2$ (the second, “computational,” form is usually faster). **Standard deviation** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức phương sai “tính nhanh” $\sigma^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ (trung bình của bình phương trừ bình phương của trung bình) thường nhanh hơn công thức gốc dùng $(x_i - \bar{x})^2$ trực tiếp. Luôn kiểm tra tổng tần số $\sum f_i$ khớp với cỡ mẫu n đề cho trước khi tính.

Ví dụ mẫu · Worked example

A data set has values $x_i = 2, 4, 6, 8$ with frequencies $f_i = 3, 5, 4, 2$ ($n = 14$). Find the mean and standard deviation.

$$\begin{aligned} \sum f_i x_i &= 2(3) + 4(5) + 6(4) + 8(2) = 6 + 20 + 24 + 16 = 66 \Rightarrow \bar{x} = \frac{66}{14} = \frac{33}{7} \approx 4.714. \\ \sum f_i x_i^2 &= 4(3) + 16(5) + 36(4) + 64(2) = 12 + 80 + 144 + 128 = 364. \end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{364}{14} - \left(\frac{33}{7}\right)^2 = 26 - \frac{1089}{49} = \frac{1274 - 1089}{49} = \frac{185}{49} \approx 3.776 \Rightarrow \sigma \approx 1.943.$$

4.3 Measures of position: quartiles, percentiles, and box-and-whisker plots

Besides the mean and standard deviation, it is often useful to describe *where* a value sits within an ordered data set. These **measures of position** are found by first sorting the data from smallest to largest.

For an ordered data set of n values, the **median** Q_2 is the middle value (the mean of the two middle values if n is even). The **lower quartile** Q_1 is the median of the values below Q_2 (the lower half of the data), and the **upper quartile** Q_3 is the median of the values above Q_2 (the upper half).

Interquartile range: $IQR = Q_3 - Q_1$ – the spread of the middle 50% of the data.

Five-number summary: minimum, Q_1 , Q_2 , Q_3 , maximum – the basis of a box-and-whisker plot.

More generally, the k th **percentile** is the value below which (approximately) $k\%$ of the data lies, so Q_1 , Q_2 , Q_3 are respectively the 25th, 50th and 75th percentiles.

Outlier rule: a value x is an **outlier** if

$$x < Q_1 - 1.5 \times IQR \quad \text{or} \quad x > Q_3 + 1.5 \times IQR.$$

The two boundary values are called the **lower fence** and **upper fence**.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tứ phân vị (quartile) chia dữ liệu đã sắp xếp thành 4 phần bằng nhau: Q_1 (tứ phân vị dưới) là trung vị của nửa dưới, Q_2 chính là trung vị của cả tập dữ liệu, Q_3 (tứ phân vị trên) là trung vị của nửa trên. Khoảng tứ phân vị $IQR = Q_3 - Q_1$ đo độ phân tán của "50% dữ liệu ở giữa", ít bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường hơn so với khoảng biến thiên ($\text{range} = \text{max} - \text{min}$). Quy tắc $1.5 \times IQR$ là tiêu chuẩn thống kê để phát hiện giá trị bất thường (outlier): bất kỳ giá trị nào nằm ngoài "hàng rào" $[Q_1 - 1.5 IQR, Q_3 + 1.5 IQR]$ đều được xem là outlier.

Ví dụ mẫu · Worked example

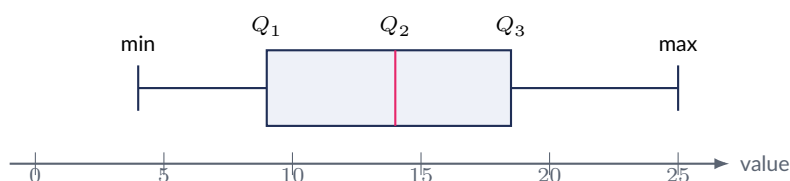
The following 12 values are already ordered: 4, 7, 8, 10, 12, 13, 15, 16, 18, 19, 21, 25. Find the five-number summary and the interquartile range.

With $n = 12$ (even), the median is the mean of the 6th and 7th values: $Q_2 = \frac{13 + 15}{2} = 14$.

Lower half (first 6 values): 4, 7, 8, 10, 12, 13, so $Q_1 = \frac{8 + 10}{2} = 9$ (mean of its 3rd and 4th values).

Upper half (last 6 values): 15, 16, 18, 19, 21, 25, so $Q_3 = \frac{18 + 19}{2} = 18.5$.

Five-number summary: min = 4, $Q_1 = 9$, $Q_2 = 14$, $Q_3 = 18.5$, max = 25. $IQR = 18.5 - 9 = 9.5$.



Box-and-whisker plot for the five-number summary 4, 9, 14, 18.5, 25 (Example above): whiskers run from the minimum to Q_1 and from Q_3 to the maximum; the box spans Q_1 to Q_3 with a line at the median.

Ví dụ mẫu · Worked example

An 11-value data set, already ordered, is: 12, 14, 15, 18, 19, 21, 22, 23, 25, 27, 52. Use the $1.5 \times$ IQR rule to test whether the value 52 is an outlier.

With $n = 11$ (odd), the median (6th value) is $Q_2 = 21$, excluded from both halves.

Lower half: 12, 14, 15, 18, 19 (5 values) $\Rightarrow Q_1 = 15$ (the middle value).

Upper half: 22, 23, 25, 27, 52 (5 values) $\Rightarrow Q_3 = 25$ (the middle value).

IQR = $25 - 15 = 10$. Lower fence = $15 - 1.5(10) = 0$. Upper fence = $25 + 1.5(10) = 40$.

Since $52 > 40$, the value **52 is an outlier** (every other value lies within $[0, 40]$).

(!) Lỗi thường gặp: When n is odd, the median itself is **excluded** from both the lower and upper halves before finding Q_1 and Q_3 . Forgetting to exclude it – or including it in both halves – is a common source of error, so always recount how many values fall in each half before taking its median.

Quartiles and the median can also be read directly from a **cumulative frequency graph** (ogive) – a plot of cumulative frequency against the upper class boundary, particularly useful when the data is grouped into class intervals.

To find a value at cumulative frequency position m from grouped data, locate the class interval in which the cumulative frequency reaches m , then interpolate linearly:

$$\text{value} = L + \frac{m - CF_{\text{before}}}{f_{\text{class}}} \times w,$$

where L is the lower boundary of that class, CF_{before} is the cumulative frequency up to (but not including) that class, f_{class} is the frequency of the class, and w is the class width. For the median use $m = \frac{n}{2}$; for Q_1 use $m = \frac{n}{4}$; for Q_3 use $m = \frac{3n}{4}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

The heights (cm) of 60 plants are grouped as follows.

Height	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)
Frequency	5	10	16	14	10	5

Construct the cumulative frequency table, and estimate the median, Q_1 , and Q_3 .

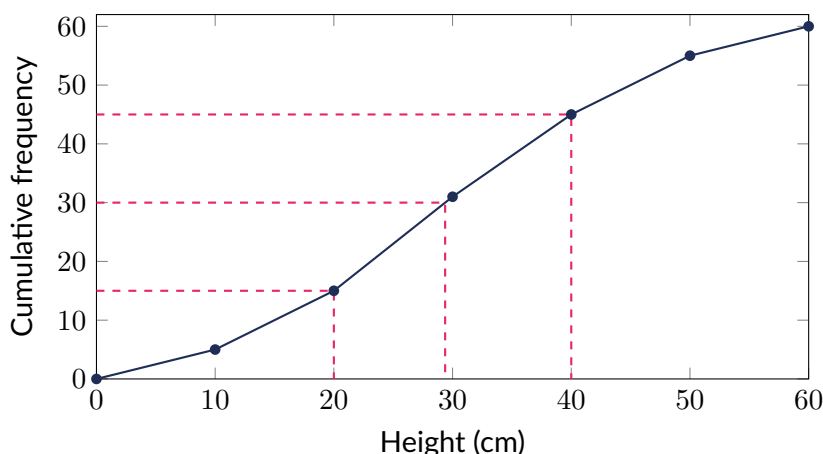
Cumulative frequencies (up to each upper boundary): 5, 15, 31, 45, 55, 60. Here $n = 60$.

Median ($m = 30$): the cumulative frequency reaches 30 inside $[20, 30)$, where $CF_{\text{before}} = 15$, $f = 16$, $w = 10$:

$$\text{median} = 20 + \frac{30 - 15}{16} \times 10 = 20 + 9.375 = 29.375.$$

Q_1 ($m = 15$): the cumulative frequency reaches exactly 15 at the top of $[10, 20)$, so $Q_1 = 20$.

Q_3 ($m = 45$): the cumulative frequency reaches exactly 45 at the top of $[30, 40)$, so $Q_3 = 40$.



Cumulative frequency graph (ogive) for the plant-height data. Dashed guide lines show the median (≈ 29.4) read off at cumulative frequency 30, and the quartiles $Q_1 = 20$, $Q_3 = 40$ read off at cumulative frequencies 15 and 45.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đồ thị tần số tích lũy (ogive) vẽ tần số tích lũy theo **cận trên** của từng khoảng lớp, rồi nối các điểm bằng đoạn thẳng. Để ước lượng trung vị hoặc tứ phân vị từ đồ thị (hoặc bằng công thức nội suy tuyến tính), ta xác định vị trí tích lũy cần tìm ($n/2$ cho trung vị, $n/4$ cho Q_1 , $3n/4$ cho Q_3), tìm khoảng lớp chứa vị trí đó, rồi nội suy theo tỷ lệ trong khoảng đó. Đây là phương pháp thay thế cho cách "chia đôi nửa trên/dưới" đã học ở trên, áp dụng được cho dữ liệu đã được nhóm thành khoảng lớp (grouped data) khi ta không có từng giá trị riêng lẻ.

4.4 Grouped (frequency table) data with class intervals

When data is presented in class intervals (a grouped frequency table) rather than as individual values, the exact values inside each interval are unknown. The standard approach is to use the **midpoint** of each interval as a representative value x_i , then apply the same frequency formulas for mean and standard deviation used earlier in this chapter.

For grouped data with class intervals and frequencies f_i , let x_i be the **midpoint** of the i th interval (e.g. for $[10, 20)$, $x_i = \frac{10 + 20}{2} = 15$). Then, exactly as before,

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{n}, \quad \sigma^2 = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \bar{x}^2, \quad n = \sum f_i.$$

Because the true values inside each interval are unknown, these are **estimates** of the mean and standard deviation, not exact values.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với dữ liệu đã được nhóm thành các khoảng lớp (class interval), ta **KHÔNG** biết giá trị chính xác của từng phần tử bên trong mỗi khoảng, nên phải dùng **giá trị giữa** (midpoint) của khoảng làm đại diện x_i khi tính trung bình và phương sai — ví dụ khoảng $[10, 20)$ có midpoint $= \frac{10 + 20}{2} = 15$. Vì đây chỉ là giá trị đại diện chứ không phải giá trị thật, kết quả trung bình và độ lệch chuẩn tính được chỉ là các **giá trị ước lượng** (estimate).

Ví dụ mẫu · Worked example

The test scores of 40 students are grouped as follows.

Score	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)
Frequency f_i	4	9	12	10	5

Find the estimated mean and estimated standard deviation.

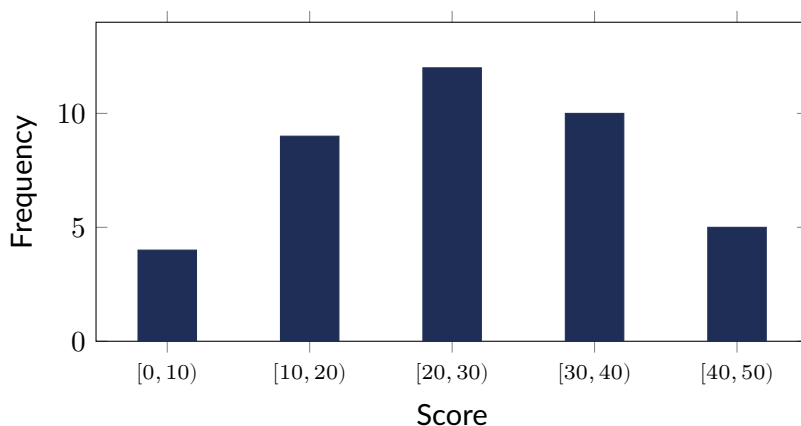
Midpoints: 5, 15, 25, 35, 45. $n = 4 + 9 + 12 + 10 + 5 = 40$.

$$\sum f_i x_i = 4(5) + 9(15) + 12(25) + 10(35) + 5(45) = 20 + 135 + 300 + 350 + 225 = 1030.$$

$$\bar{x} = \frac{1030}{40} = 25.75.$$

$$\sum f_i x_i^2 = 4(25) + 9(225) + 12(625) + 10(1225) + 5(2025) = 100 + 2025 + 7500 + 12250 + 10125 = 32000.$$

$$\sigma^2 = \frac{32000}{40} - 25.75^2 = 800 - 663.0625 = 136.9375 \Rightarrow \sigma \approx 11.7 \text{ (3 s.f.)}.$$



Frequency histogram for the grouped test-score data above; each bar is centred at its class midpoint.

Ví dụ mẫu · Worked example

The masses (kg) of 50 parcels are grouped as follows.

Mass	[0, 2)	[2, 4)	[4, 6)	[6, 8)	[8, 10)
Frequency	6	14	18	8	4

Find the estimated mean and estimated standard deviation, correct to 3 s.f.

Midpoints: 1, 3, 5, 7, 9. $n = 6 + 14 + 18 + 8 + 4 = 50$.

$$\sum f_i x_i = 6(1) + 14(3) + 18(5) + 8(7) + 4(9) = 6 + 42 + 90 + 56 + 36 = 230.$$

$$\bar{x} = \frac{230}{50} = 4.6.$$

$$\sum f_i x_i^2 = 6(1) + 14(9) + 18(25) + 8(49) + 4(81) = 6 + 126 + 450 + 392 + 324 = 1298.$$

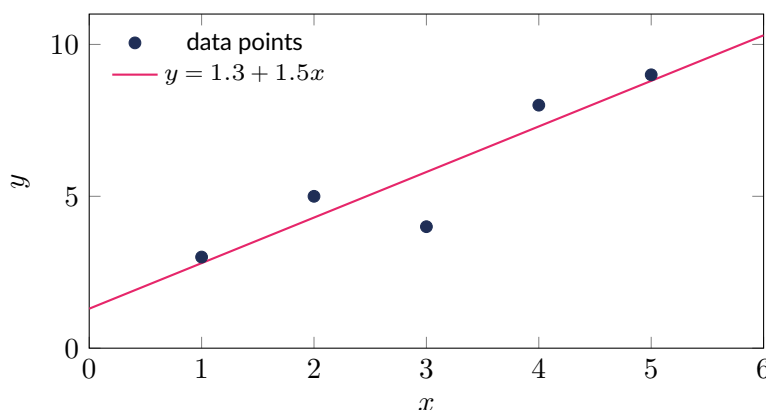
$$\sigma^2 = \frac{1298}{50} - 4.6^2 = 25.96 - 21.16 = 4.8 \Rightarrow \sigma = \sqrt{4.8} \approx 2.19 \text{ (3 s.f.)}.$$

4.5 Bivariate statistics: correlation and regression

For paired data (x_i, y_i) , the **regression line of y on x** is $y = a + bx$, where

$$b = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}, \quad a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

The **correlation coefficient r** (Pearson's) measures the strength and direction of the *linear* association, $-1 \leq r \leq 1$: $|r|$ close to 1 indicates strong linear correlation; r close to 0 indicates little or no linear correlation.



Scatter diagram with the least-squares regression line of y on x .

Ví dụ mẫu · Worked example

Bivariate data: $(1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 8), (5, 9)$. Find the equation of the regression line of y on x , and use it to estimate y when $x = 6$.

$$n = 5, \sum x = 15, \sum y = 29, \sum xy = 102, \sum x^2 = 55, \bar{x} = 3, \bar{y} = 5.8.$$

$$b = \frac{5(102) - 15(29)}{5(55) - 15^2} = \frac{510 - 435}{275 - 225} = \frac{75}{50} = 1.5, \quad a = 5.8 - 1.5(3) = 1.3.$$

Regression line: $y = 1.3 + 1.5x$. At $x = 6$: $y = 1.3 + 1.5(6) = 10.3$. (Note: $x = 6$ lies outside the given data range $1 \leq x \leq 5$, so this is an **extrapolation** and less reliable than an estimate within the data range.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

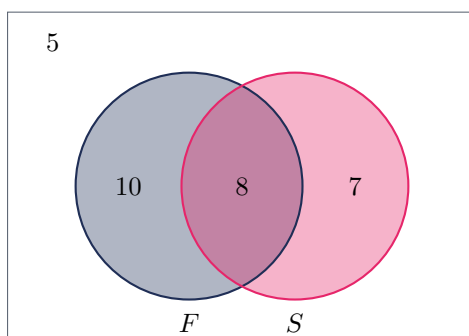
Đường hồi quy $y = a + bx$ chỉ nên dùng để ước lượng (nội suy) các giá trị x nằm trong khoảng dữ liệu đã cho. Ước lượng ngoài khoảng dữ liệu (ngoại suy – extrapolation) kém tin cậy hơn vì không có bằng chứng cho thấy xu hướng tuyến tính vẫn đúng ngoài phạm vi quan sát.

4.6 Probability

Addition rule: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Conditional probability: $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0)$.

Independence: A, B are independent $\Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A)P(B) \Leftrightarrow P(A | B) = P(A)$.

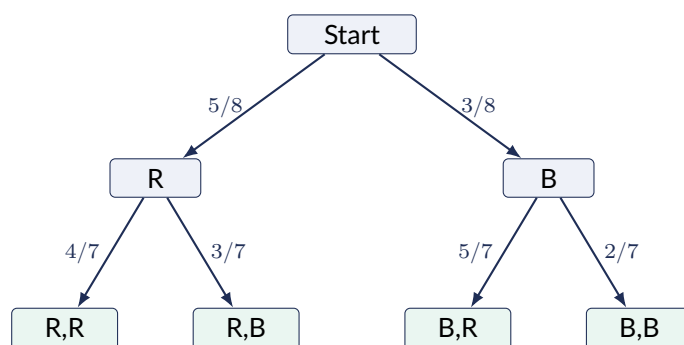


Venn diagram: of 30 students, 10 study French only, 7 study Spanish only, 8 study both, and 5 study neither.

Ví dụ mẫu · Worked example

In a class of 30 students, 18 study French, 15 study Spanish, and 8 study both. Find the number studying neither, and $P(\text{French only})$.

$|F \cup S| = 18 + 15 - 8 = 25$. Neither = $30 - 25 = 5$. French only = $18 - 8 = 10$, so $P(\text{French only}) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.



Tree diagram: drawing two marbles *without replacement* from a bag of 5 red, 3 blue. Multiply along branches; add across separate branches for combined events.

Ví dụ mẫu · Worked example

A bag has 5 red and 3 blue marbles. Two are drawn *without replacement*. Find $P(\text{exactly one red})$.

Two ways to get exactly one red: R then B, or B then R.

$$P(RB) = \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56}, \quad P(BR) = \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} = \frac{15}{56}.$$

$$P(\text{exactly one red}) = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 0.536.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Events A, B satisfy $P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.2$. Find $P(A \cup B)$ and $P(A | B)$, and determine whether A, B are independent.

$P(A \cup B) = 0.5 + 0.3 - 0.2 = 0.6$. $P(A | B) = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3} \approx 0.667$. Since $P(A | B) \approx 0.667 \neq P(A) = 0.5$, the events are **not independent**.

(!) Lỗi thường gặp: The addition rule $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ always applies; only for **mutually exclusive** events does it simplify to $P(A) + P(B)$ (because $P(A \cap B) = 0$). Do not assume events are mutually exclusive or independent unless stated or proven.

4.7 Counting principles: permutations and combinations

Before working further with discrete distributions such as the binomial, it is useful to formalize how the binomial coefficient $\binom{n}{k}$ (already used implicitly) is defined and computed.

For a positive integer n , $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$ (read “ n factorial”), with the convention $0! = 1$.

Fundamental counting principle: if one task can be done in m ways and a second (independent) task can then be done in n ways, the two tasks together can be done in $m \times n$ ways.

Permutations (order matters): the number of ways to arrange r objects chosen from n distinct objects is

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Combinations (order does not matter): the number of ways to choose r objects from n distinct objects is

$$\binom{n}{r} = {}nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hoán vị (permutation) dùng khi **thứ tự quan trọng** (ví dụ: xếp hạng nhất-nhì-ba), còn tổ hợp (combination) dùng khi **thứ tự KHÔNG quan trọng** (ví dụ: chọn một nhóm hoặc ủy ban). Vì mỗi tổ hợp gồm r phần tử có thể sắp xếp lại theo $r!$ cách khác nhau, ta có công thức liên hệ $\binom{n}{r} = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$. Hệ số nhị thức $\binom{n}{k}$ dùng trong phân phối nhị thức chính là số cách chọn k vị trí “thành công” trong n phép thử – không quan tâm các lần thành công đó xảy ra theo thứ tự nào.

Ví dụ mẫu · Worked example

In how many ways can 4 of 9 runners be arranged in 1st, 2nd, 3rd, and 4th place (no ties)? Order matters, so this is a permutation:

$${}_9P_4 = \frac{9!}{5!} = 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A committee of 3 people is chosen from a group of 8. How many different committees are possible?

Order does not matter (a committee is a set), so this is a combination:

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A hand of 5 cards is dealt from a standard 52-card deck, which contains 4 aces. Find the probability that the hand contains exactly 2 aces, correct to 3 s.f.

Choose 2 of the 4 aces, and the remaining 3 cards from the other 48 (non-ace) cards:

$$P(\text{exactly 2 aces}) = \frac{\binom{4}{2} \binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{6 \times 17296}{2598960} = \frac{103776}{2598960} \approx 0.0399.$$

(!) Lỗi thường gặp: A common error is using permutations when a problem actually describes an unordered selection (e.g. a committee, a hand of cards, a subset) — or using combinations when order matters (e.g. a race with distinct placings, a PIN code, an arrangement in a row). Always ask: *does swapping two chosen objects create a different outcome?* If yes, use permutations; if no, use combinations.

			1			
		1		1		
	1		2		1	
	1	3		3		1
	1	4	6	4		1
1	5	10	10	5		1

Pascal's triangle: row n lists the binomial coefficients $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$, used directly in the binomial probability formula

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

4.8 Discrete random variables

A **discrete random variable** X takes a countable set of values, each with an associated probability, with $\sum P(X = x_i) = 1$.

Expected value: $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$. **Variance:** $\text{Var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2$, where $E(X^2) = \sum x_i^2 P(X = x_i)$.

Linear transformation: for constants a, b : $E(aX + b) = aE(X) + b$, $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A discrete random variable X has distribution $P(X = 0) = 0.1$, $P(X = 1) = k$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.25$, $P(X = 4) = 0.15$. Find k , $E(X)$, and $\text{Var}(X)$.

Probabilities sum to 1: $0.1 + k + 0.3 + 0.25 + 0.15 = 1 \Rightarrow k = 0.2$.

$$E(X) = 0(0.1) + 1(0.2) + 2(0.3) + 3(0.25) + 4(0.15) = 0.2 + 0.6 + 0.75 + 0.6 = 2.15.$$

$$E(X^2) = 0 + 1(0.2) + 4(0.3) + 9(0.25) + 16(0.15) = 0.2 + 1.2 + 2.25 + 2.4 = 6.05.$$

$$\text{Var}(X) = 6.05 - 2.15^2 = 6.05 - 4.6225 = 1.4275.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Given $E(X) = 5$ and $\text{Var}(X) = 4$, find $E(3X - 2)$ and $\text{Var}(3X - 2)$.
 $E(3X - 2) = 3(5) - 2 = 13$. $\text{Var}(3X - 2) = 3^2(4) = 36$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$E(X)$ (kỳ vọng) là giá trị "trung bình dài hạn" của biến ngẫu nhiên, còn $\text{Var}(X)$ đo độ phân tán quanh kỳ vọng đó. Khi biến đổi tuyến tính $aX + b$: kỳ vọng biến đổi giống hệt phép biến đổi ($E(aX + b) = aE(X) + b$), nhưng phương sai chỉ bị ảnh hưởng bởi hệ số nhân a (bình phương lên), KHÔNG bị ảnh hưởng bởi hằng số cộng b – vì cộng thêm hằng số không làm thay đổi độ phân tán của dữ liệu.

4.8.1 Linear transformations of a random variable

Many real quantities are simple linear functions of a random variable already studied – a fee added to a count, a unit conversion, a scaled score. The rule connecting $E(X)$ and $\text{Var}(X)$ to $E(aX + b)$ and $\text{Var}(aX + b)$ is worth stating on its own and checking directly against a full distribution table at least once.

For a discrete random variable X and constants a, b :

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad \text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X), \quad \text{SD}(aX + b) = |a| \cdot \text{SD}(X).$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hãy hình dung $aX + b$ như việc lấy toàn bộ phân phối của X rồi **dịch chuyển** theo b và **kéo dãn** theo hệ số a . Phép dịch chuyển (cộng thêm hằng số b vào mọi giá trị) đẩy toàn bộ kỳ vọng lên/xuống đúng b đơn vị, nhưng khoảng cách tương đối giữa các giá trị so với kỳ vọng không hề thay đổi – vì vậy phương sai và độ lệch chuẩn giữ nguyên, không phụ thuộc vào b . Ngược lại, phép nhân với a kéo dãn (hoặc co lại, hoặc phản chiếu nếu $a < 0$) toàn bộ trục số quanh gốc, nên độ lệch chuẩn bị nhân với $|a|$; vì phương sai là bình phương của độ lệch chuẩn nên nó bị nhân với a^2 (luôn dương, dù a âm). Đây chính là quy luật tương tự khi đổi đơn vị của một tập dữ liệu thông thường trong thống kê mô tả, chỉ khác là ở đây áp dụng cho biến ngẫu nhiên.

Ví dụ mẫu · Worked example

A discrete random variable X has probability distribution

$$P(X = 0) = 0.2, \quad P(X = 1) = 0.4, \quad P(X = 2) = 0.3, \quad P(X = 3) = 0.1.$$

Find $E(X)$ and $\text{Var}(X)$, and hence find $E(2X + 5)$ and $\text{Var}(2X + 5)$. Verify the variance by constructing the distribution of $Y = 2X + 5$ directly and recomputing.

$$E(X) = 0(0.2) + 1(0.4) + 2(0.3) + 3(0.1) = 0.4 + 0.6 + 0.3 = 1.3.$$

$$E(X^2) = 0(0.2) + 1(0.4) + 4(0.3) + 9(0.1) = 0.4 + 1.2 + 0.9 = 2.5.$$

$$\text{Var}(X) = 2.5 - 1.3^2 = 2.5 - 1.69 = 0.81.$$

Using the linear transformation formulas with $a = 2$, $b = 5$:

$$E(2X + 5) = 2(1.3) + 5 = 2.6 + 5 = 7.6, \quad \text{Var}(2X + 5) = 2^2(0.81) = 4(0.81) = 3.24.$$

Independent check. Let $Y = 2X + 5$. Substituting each value of X gives the distribution of Y :

$$P(Y = 5) = 0.2, \quad P(Y = 7) = 0.4, \quad P(Y = 9) = 0.3, \quad P(Y = 11) = 0.1.$$

$$E(Y) = 5(0.2) + 7(0.4) + 9(0.3) + 11(0.1) = 1.0 + 2.8 + 2.7 + 1.1 = 7.6.$$

$$E(Y^2) = 25(0.2) + 49(0.4) + 81(0.3) + 121(0.1) = 5.0 + 19.6 + 24.3 + 12.1 = 61.0.$$

$$\text{Var}(Y) = 61.0 - 7.6^2 = 61.0 - 57.76 = 3.24.$$

Both methods give $E(Y) = 7.6$ and $\text{Var}(Y) = 3.24$, confirming the transformation formulas.

Ví dụ mẫu · Worked example

At a highway toll booth, the fee charged to a vehicle is $C = 3X + 2$ (dollars), where X is the number of axles on a randomly chosen vehicle, with $E(X) = 2.4$ and $\text{Var}(X) = 0.64$. Find $E(C)$, $\text{Var}(C)$, and $\text{SD}(C)$.

$$E(C) = 3E(X) + 2 = 3(2.4) + 2 = 7.2 + 2 = 9.2 \text{ dollars.}$$

$$\text{Var}(C) = 3^2\text{Var}(X) = 9(0.64) = 5.76.$$

Since $\text{SD}(X) = \sqrt{0.64} = 0.8$, the standard deviation of the fee is $\text{SD}(C) = |3|(0.8) = 2.4$, which agrees with $\sqrt{5.76} = 2.4$.

4.9 The geometric distribution (AHL)

The geometric distribution models the number of independent trials needed to obtain the *first* success, where every trial has the same probability of success.

AHL only. If independent trials each have probability of success p , and X is the number of trials up to and including the **first success**, then $X \sim \text{Geo}(p)$ with

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

AHL only. Because $X > k$ exactly when the first k trials are *all* failures,

$$P(X > k) = (1 - p)^k, \quad \text{so} \quad P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k.$$

This is often faster than summing individual probabilities when a problem asks for “at least” or “at most” a certain number of trials.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Phân phối hình học $\text{Geo}(p)$ mô tả số phép thử **cho đến và bao gồm** lần thành công đầu tiên, với các phép thử độc lập và xác suất thành công p không đổi mỗi lần. Khác với phân phối nhị thức (đếm số lần thành công trong n phép thử **cố định**), phân phối hình học đếm **số phép thử cần thiết** để có thành công đầu tiên — số phép thử ở đây **KHÔNG cố định**, có thể là bất kỳ số nguyên dương nào. Công thức $P(X = k) = (1 - p)^{k-1}p$ phản ánh: phải thất bại liên tiếp $(k - 1)$ lần (xác suất $(1 - p)^{k-1}$), rồi thành công ở lần thứ k (xác suất p). Công thức đuôi $P(X > k) = (1 - p)^k$ rất hữu ích khi bài toán hỏi “ít nhất” hoặc “nhiều nhất” bao nhiêu lần thử.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) $X \sim \text{Geo}(0.2)$. Find $P(X = 4)$, $E(X)$, and $\text{Var}(X)$.

$$P(X = 4) = (0.8)^3(0.2) = 0.512 \times 0.2 = 0.1024.$$

$$E(X) = \frac{1}{0.2} = 5, \quad \text{Var}(X) = \frac{0.8}{0.2^2} = \frac{0.8}{0.04} = 20.$$

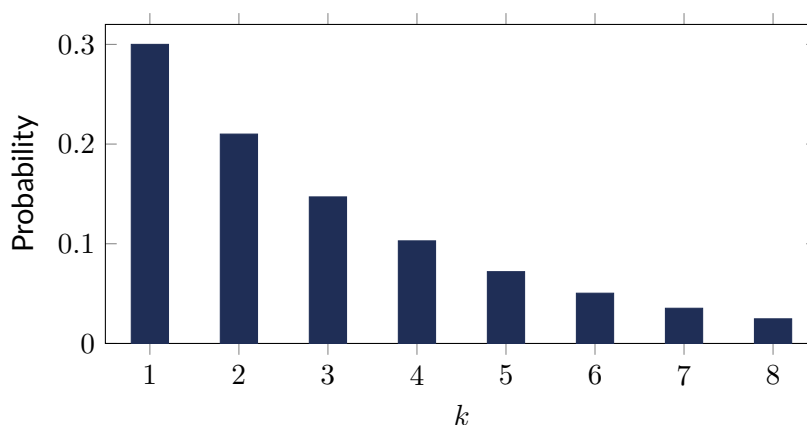
Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) A fair six-sided die is rolled repeatedly until a six appears. Find the probability that the first six occurs on the third roll, and the expected number of rolls needed.

Here $p = \frac{1}{6}$, so $X \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{6}\right)$.

$$P(X = 3) = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{25}{216} \approx 0.1157.$$

$$E(X) = \frac{1}{1/6} = 6 \text{ rolls.}$$



Probability distribution of $X \sim \text{Geo}(0.3)$: probabilities decay geometrically as k increases.

AHL only. The probabilities $P(X = 1) > P(X = 2) > P(X = 3) > \dots$ are strictly decreasing (since $0 < 1 - p < 1$), so the **mode** of a geometric distribution is always $k = 1$ – the single most likely outcome is always success on the very first trial.

Ví dụ mẫu · Worked example

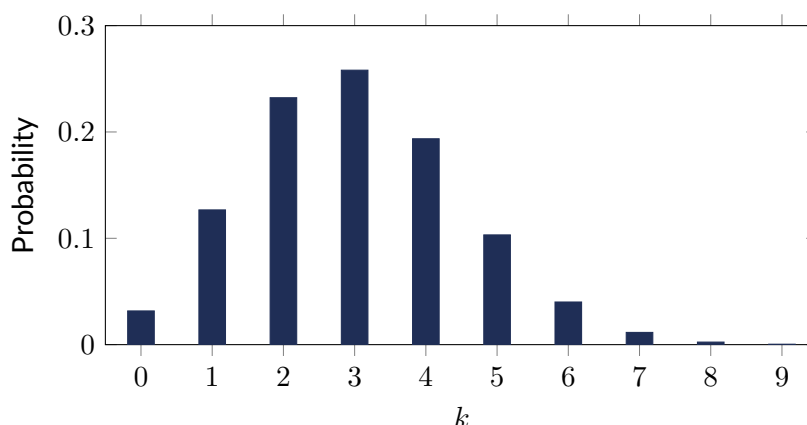
(AHL) A basketball player has a 65% chance of scoring on each free throw, independently of previous attempts. Find the probability that the player's first miss occurs on the 4th attempt, correct to 3 s.f.

Here “success” means *missing* the shot, since we want the first miss: $p = 1 - 0.65 = 0.35$, so $X \sim \text{Geo}(0.35)$.

$$P(X = 4) = (0.65)^3(0.35) = 0.274625 \times 0.35 \approx 0.0961.$$

4.10 The binomial distribution

$X \sim B(n, p)$ models the number of "successes" in n independent trials, each with success probability p . $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, for $k = 0, 1, \dots, n$. **Mean** $E(X) = np$; **variance** $\text{Var}(X) = np(1-p)$.



Probability distribution of $X \sim B(12, 0.25)$: probability peaks near the mean $E(X) = np = 3$.

Ví dụ mẫu · Worked example

If $X \sim B(12, 0.25)$, find $P(X = 3)$, $E(X)$, and $\text{Var}(X)$.

$$P(X = 3) = \binom{12}{3} (0.25)^3 (0.75)^9 = 220(0.015625)(0.075085) \approx 0.258.$$

$$E(X) = np = 12(0.25) = 3. \quad \text{Var}(X) = np(1-p) = 12(0.25)(0.75) = 2.25.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phân phối nhị thức $B(n, p)$ mô tả số lần "thành công" trong n phép thử **độc lập**, mỗi phép thử chỉ có 2 kết quả (thành công/thất bại) với xác suất thành công p không đổi. Ba điều kiện bắt buộc: (1) số phép thử n cố định; (2) các phép thử độc lập; (3) xác suất thành công p không đổi giữa các lần thử – thiếu một trong ba điều kiện này thì **KHÔNG** được dùng phân phối nhị thức.

4.11 The Poisson distribution (AHL)

The Poisson distribution models the number of times a rare, independent event occurs in a fixed interval of time or space, given a known constant average rate.

AHL only. If $X \sim \text{Po}(\lambda)$, where $\lambda > 0$ is the mean number of occurrences in the given interval,

$$P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

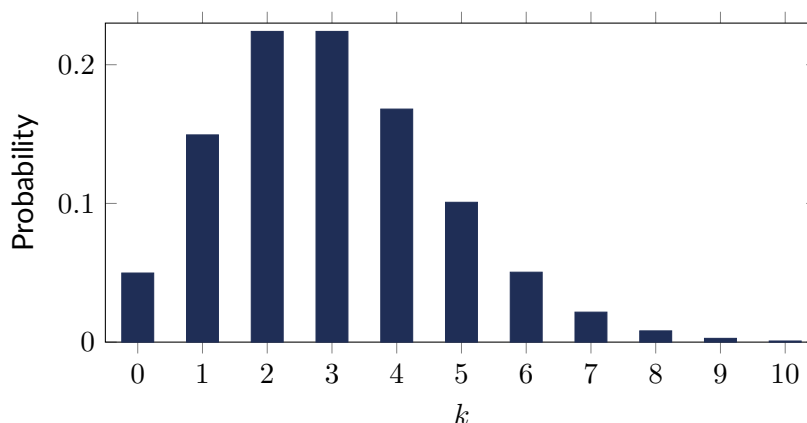
$$E(X) = \lambda, \quad \text{Var}(X) = \lambda$$

(mean and variance are equal – a distinctive feature of the Poisson distribution). If X and Y are **independent** with $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$ and $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$, then $X + Y \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Phân phối Poisson $Po(\lambda)$ mô tả số lần xảy ra của một biến cố **hiếm, độc lập** trong một khoảng thời gian hoặc không gian cố định, khi biết tốc độ trung bình λ không đổi (ví dụ: số cuộc gọi đến tổng đài trong 1 giờ, số lỗi in trên một trang). Điểm đặc biệt: trung bình và phương sai của Poisson **LUÔN** bằng nhau ($E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$) – đây là dấu hiệu nhận biết khi đề bài ngầm gợi ý dùng phân phối này. Khi cộng hai biến Poisson **ĐỘC LẬP**, tổng của chúng cũng là Poisson với tham số bằng tổng hai tham số ($\lambda_1 + \lambda_2$) – kết quả này rất hữu ích khi kết hợp dữ liệu từ nhiều khoảng thời gian hoặc nhiều nguồn độc lập.



Probability distribution of $X \sim \text{Po}(3)$: peak near the mean $\lambda = 3$, with a long right tail.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) A call centre receives an average of 4 calls per minute, following a Poisson distribution. Find the probability that exactly 6 calls arrive in a given minute, correct to 3 s.f.

$X \sim \text{Po}(4)$.

$$P(X = 6) = \frac{e^{-4}4^6}{6!} = \frac{e^{-4}(4096)}{720} \approx \frac{0.018316(4096)}{720} \approx \frac{75.02}{720} \approx 0.104.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Faults occur along a length of cable at an average rate of 0.5 per 100 m. Find the probability of at most 1 fault in a 200 m length of cable, correct to 3 s.f.

Over 200 m, the mean number of faults is $\lambda = 0.5 \times 2 = 1$, so $X \sim \text{Po}(1)$.

$$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = e^{-1} + e^{-1}(1) = 2e^{-1} \approx 2(0.367879) \approx 0.736.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Small errors on a printed page occur as $X \sim \text{Po}(0.8)$ per page, independently from page to page. Find the probability that a 3-page document has no errors at all, correct to 3 s.f.

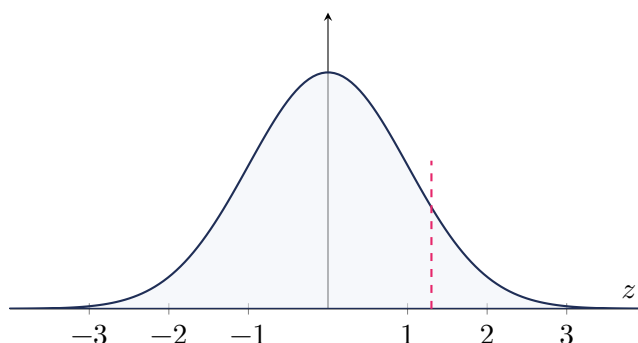
The total number of errors T over 3 independent pages is $T \sim \text{Po}(3 \times 0.8) = \text{Po}(2.4)$ (summing independent Poisson variables).

$$P(T = 0) = e^{-2.4} \approx 0.0907.$$

(!) Lỗi thường gặp: (AHL) The Poisson mean λ must be re-scaled to match the **same interval** as the question (e.g. if the rate is given “per hour” but the question asks about a 20-minute period, use $\lambda \times \frac{20}{60}$, not the original hourly λ). Also, unlike the binomial distribution, the Poisson distribution has **no upper limit** on k — probabilities $P(X = k)$ are defined for every non-negative integer k .

4.12 The normal distribution

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$: a continuous, symmetric, bell-shaped distribution about the mean μ , with standard deviation σ . **Standardizing:** $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$. Empirically, about 68% of data lies within 1σ of μ , 95% within 2σ , and 99.7% within 3σ .



Standard normal curve; the dashed line marks $z = 1.3$, used in the worked example below.

Ví dụ mẫu · Worked example

Test scores are $X \sim N(65, 10^2)$. Find $P(X > 78)$, and the score exceeded by only 10% of students (the 90th percentile).

$Z = \frac{78 - 65}{10} = 1.3$. From standard normal tables, $P(Z > 1.3) = 1 - 0.9032 = 0.0968$.

For the 90th percentile, the standard normal critical value is $z_{0.90} \approx 1.2816$:

$$x = \mu + z\sigma = 65 + 1.2816(10) \approx 77.8.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Chuẩn hóa (standardize) $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ chuyển bất kỳ biến chuẩn nào về phân phối chuẩn tắc $N(0, 1)$ để tra bảng hoặc dùng máy tính. Luôn chia cho σ (không phải σ^2). Khi bài toán cho “phần trăm ở đuôi”, dùng hàm ngược (inverse normal) để tìm ngược lại giá trị z tương ứng, rồi suy ra $x = \mu + z\sigma$.

4.13 Bayes' theorem (AHL)

AHL only. Law of total probability: if $A_1, \dots, A_n$ partition the sample space, $P(B) = \sum_{i=1}^n P(B | A_i)P(A_i)$.

Bayes' theorem: $P(A | B) = \frac{P(B | A)P(A)}{P(B)} = \frac{P(B | A)P(A)}{\sum_i P(B | A_i)P(A_i)}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Supplier A provides 70% of a factory's stock with a 3% defect rate; Supplier B provides 30% with a 6% defect rate. Find the overall probability an item is defective, and given an item is defective, the probability it came from B .

Total probability: $P(D) = 0.7(0.03) + 0.3(0.06) = 0.021 + 0.018 = 0.039$.

Bayes: $P(B | D) = \frac{0.018}{0.039} = \frac{18}{39} = \frac{6}{13} \approx 0.462$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) A disease affects 2% of a population. A test has sensitivity 90% (i.e. $P(+ | \text{disease}) = 0.90$) and specificity 95% (i.e. $P(- | \text{no disease}) = 0.95$, so $P(+ | \text{no disease}) = 0.05$). Given a positive test, find $P(\text{disease} | +)$.

$$P(+) = P(+ | D)P(D) + P(+ | D')P(D') = 0.90(0.02) + 0.05(0.98) = 0.018 + 0.049 = 0.067.$$

$$P(D | +) = \frac{0.018}{0.067} \approx 0.269.$$

Even with a fairly accurate test, most positive results are false positives when the disease is rare — this is why base rates matter.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Định lý Bayes dùng để "đảo ngược" xác suất có điều kiện: biết $P(\text{kết quả} | \text{nguyên nhân})$, ta tìm $P(\text{nguyên nhân} | \text{kết quả})$. Mẫu số luôn là **xác suất toàn phần** (total probability) — tổng các trường hợp dẫn đến kết quả đó qua mọi nguyên nhân có thể xảy ra (định lý xác suất toàn phần).

4.14 Expected value in decision-making (AHL)

Expected value gives a principled way to compare choices under uncertainty — for example, choosing between two games, deciding whether an insurance policy is priced sensibly, or setting a fair price for a raffle.

AHL only. To compare options using expected value: list the possible net outcomes (gains and losses, some possibly negative) for each option as a random variable X , assign the probability of each outcome, and compute $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$. Between two options, the one with the larger $E(X)$ is preferred *in the long run* — though any single trial can still turn out either way.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Trong các bài toán ra quyết định, ta lập bảng phân phối xác suất của **lợi nhuận ròng** (net gain — có thể âm nếu là lỗ) cho mỗi phương án, rồi tính $E(X)$. Phương án có $E(X)$ lớn hơn thì có lợi hơn **về lâu dài** (nếu lặp lại nhiều lần) — nhưng với **MỘT** lần cụ thể, kết quả thực tế vẫn có thể khác với kỳ vọng, vì $E(X)$ chỉ là giá trị trung bình dài hạn chứ không phải kết quả chắc chắn của từng lần chơi.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) A game costs \$5 to play. A player rolls a fair six-sided die: if a 6 appears, they receive \$20 (a net gain of \$15); otherwise they receive nothing (a net loss of \$5). Let X be the player's net gain. Find $E(X)$ and interpret the result.

$$P(X = 15) = \frac{1}{6}, \quad P(X = -5) = \frac{5}{6}.$$
$$E(X) = 15 \left(\frac{1}{6}\right) + (-5) \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{6} - \frac{25}{6} = -\frac{10}{6} = -\frac{5}{3} \approx -1.67.$$

Since $E(X) < 0$, the game is unfavourable to the player: on average, a player loses about \$1.67 per game in the long run.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) An insurance company sells a policy for a premium of \$150 per year. Past data shows that 2% of policyholders make a claim in a given year, each claim costing the company \$6000; the other 98% make no claim. Find the company's expected profit per policy, and comment on whether the premium is set to make the policy profitable on average.

Let Y be the payout made by the company: $P(Y = 6000) = 0.02$, $P(Y = 0) = 0.98$.

$$E(Y) = 6000(0.02) + 0(0.98) = 120.$$

Expected profit per policy = premium $- E(Y) = 150 - 120 = \$30$.

Check: the insurer's profit is $Z = 150 - Y$, and by the linear transformation rule, $E(Z) = 150 - E(Y) = 150 - 120 = 30$ — confirming the result.

Since the expected profit is positive, the premium is set high enough for the company to profit on average across many policies, even though any individual policy may result in a loss if a claim is made.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) A phone shop offers an optional extended warranty for \$40. Historical data shows that 12% of phones need a repair covered by the warranty, with an average repair cost of \$250 to the shop; the shop pays this cost only if the customer bought the warranty and a repair is needed. Find the shop's expected profit per warranty sold, and comment on whether selling the warranty is profitable on average.

Let W be the shop's payout per warranty sold: $P(W = 250) = 0.12$, $P(W = 0) = 0.88$.

$$E(W) = 250(0.12) + 0(0.88) = 30.$$

Expected profit per warranty = $40 - 30 = \$10$. Since this is positive, selling the warranty is profitable for the shop *on average*, across many customers — even though any individual warranty that is used costs the shop more than the \$40 charged for it.

4.15 Continuous random variables (AHL)

AHL only. A continuous random variable X has a **probability density function (pdf)** $f(x)$ satisfying $f(x) \geq 0$ and $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$. Then $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$ (the area under the curve), and $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$. Unlike a discrete variable, $P(X = c) = 0$ for any single value c .

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) A continuous random variable has $f(x) = kx$ for $0 \leq x \leq 4$ (and 0 elsewhere). Find k , then find $P(1 \leq X \leq 3)$ and $E(X)$.

Total probability is 1: $\int_0^4 kx dx = k \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = 8k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}$.

$$P(1 \leq X \leq 3) = \int_1^3 \frac{x}{8} dx = \frac{1}{8} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3 = \frac{1}{8} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8}(4) = 0.5.$$

$$E(X) = \int_0^4 x \cdot \frac{x}{8} dx = \frac{1}{8} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{8} \cdot \frac{64}{3} = \frac{8}{3} \approx 2.67.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Với biến ngẫu nhiên liên tục, xác suất được tính bằng **diện tích dưới đồ thị** hàm mật độ (thay vì cộng dồn các giá trị rời rạc như trước). Vì vậy $P(X = c) = 0$ với MỌI giá trị cụ thể c — chỉ có xác suất trên một **khoảng** mới có ý nghĩa khác 0. Đây là điểm khác biệt cốt lõi so với biến ngẫu nhiên rời rạc.

(!) Lỗi thường gặp: Do not confuse $P(A | B)$ with $P(B | A)$ — they are generally different (this is exactly why Bayes' theorem is needed). Also, when finding the constant k in a pdf, always integrate over the **full** stated domain and set the result equal to 1 — a partial integral will give the wrong k .

4.16 Practice: Paper 1 style (no calculator)

Bài tập luyện tập

A data set has values $x_i = 2, 4, 6, 8$ with frequencies 3, 5, 4, 2. Find the mean as an exact fraction.

Lời giải chi tiết

$$\bar{x} = \frac{66}{14} = \frac{33}{7}.$$

Bài tập luyện tập

In a class of 30, 18 study French, 15 study Spanish, 8 study both. Find $P(\text{neither})$.

(A) $\frac{1}{6}$

(B) $\frac{5}{30}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{5}$

Lời giải chi tiết

Neither = $30 - 25 = 5$; $P = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$. **(A)** (note (B) is numerically the same but not simplified).

Bài tập luyện tập

A bag has 5 red, 3 blue marbles. Two drawn without replacement. Find P (both same colour) as an exact fraction.

Lời giải chi tiết

$$P(RR) = \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}; P(BB) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}. \text{ Sum} = \frac{10}{28} + \frac{3}{28} = \frac{13}{28}.$$

Bài tập luyện tập

$P(A) = 0.5$, $P(B) = 0.3$, $P(A \cap B) = 0.2$. Find $P(A \cup B)$ and determine independence.

Lời giải chi tiết

$$P(A \cup B) = 0.6. P(A | B) = \frac{2}{3} \neq 0.5 = P(A): \text{ not independent.}$$

Bài tập luyện tập

X has $P(X = 0) = 0.1$, $P(X = 1) = k$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.25$, $P(X = 4) = 0.15$. Find k .

(A) 0.2

(B) 0.1

(C) 0.3

(D) 0.25

Lời giải chi tiết

$$k = 1 - 0.8 = 0.2. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

For the distribution above, find $E(X)$.

Lời giải chi tiết

$$E(X) = 0.2 + 0.6 + 0.75 + 0.6 = 2.15.$$

Bài tập luyện tập

If $E(X) = 5$, $\text{Var}(X) = 4$, find $E(3X - 2)$ and $\text{Var}(3X - 2)$.

Lời giải chi tiết

$$E(3X - 2) = 13. \text{Var}(3X - 2) = 9(4) = 36.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim B(6, 0.5)$. Find $P(X = 4)$ as an exact fraction.

(A) $\frac{15}{64}$

(C) $\frac{20}{64}$

(B) $\frac{6}{64}$

(D) $\frac{1}{64}$

Lời giải chi tiết

$$\binom{6}{4}(0.5)^6 = 15 \left(\frac{1}{64}\right) = \frac{15}{64}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Using $y = 1.3 + 1.5x$, estimate y when $x = 6$.

Lời giải chi tiết

$$y = 1.3 + 9 = 10.3.$$

Bài tập luyện tập

For a standard normal variable Z , state $P(Z < 0)$ and estimate $P(-1 < Z < 1)$ using the empirical rule.

Lời giải chi tiết

$$P(Z < 0) = 0.5. P(-1 < Z < 1) \approx 0.68.$$

Bài tập luyện tập

A fair six-sided die is rolled twice. Find $P(\text{sum} = 8)$ as an exact fraction.

(A) $\frac{5}{36}$

(C) $\frac{4}{36}$

(B) $\frac{6}{36}$

(D) $\frac{7}{36}$

Lời giải chi tiết

Pairs: $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ – 5 outcomes. $P = \frac{5}{36}$. (A).

Bài tập luyện tập

$P(A) = 0.4, P(B | A) = 0.5$. Find $P(A \cap B)$.

Lời giải chi tiết

$$P(A \cap B) = P(A)P(B | A) = 0.4(0.5) = 0.2.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Machine *A*: 70% of stock, 3% defective. Machine *B*: 30% of stock, 6% defective. Find $P(\text{item defective})$.

Lời giải chi tiết

$$P(D) = 0.7(0.03) + 0.3(0.06) = 0.039.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Using the previous scenario, find $P(B | D)$ as an exact fraction.

(A) $\frac{6}{13}$

(C) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{7}{13}$

(D) $\frac{3}{13}$

Lời giải chi tiết

$$P(B | D) = \frac{0.018}{0.039} = \frac{18}{39} = \frac{6}{13}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) A continuous random variable has $f(x) = kx$ for $0 \leq x \leq 4$. Find k exactly.

Lời giải chi tiết

$$8k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}.$$

4.17 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)**Bài tập luyện tập**

For the data set $x_i = 2, 4, 6, 8$ with frequencies 3, 5, 4, 2, find the standard deviation, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\sigma = \sqrt{185/49} \approx 1.943.$$

Bài tập luyện tập

For the bivariate data (1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 8), (5, 9), find the correlation coefficient r , correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$r = \frac{15}{\sqrt{10 \times 26.8}} \approx 0.916.$$

Bài tập luyện tập

Comment on the reliability of using $y = 1.3 + 1.5x$ to estimate y at $x = 6$.

Lời giải chi tiết

$x = 6$ is outside the data range $1 \leq x \leq 5$: this is extrapolation, so the estimate ($y = 10.3$) is less reliable.

Bài tập luyện tập

A bag has 5 red, 3 blue marbles. Two drawn without replacement. Find $P(\text{exactly one red})$, correct to 3 s.f.

(A) 0.536

(C) 0.464

(B) 0.500

(D) 0.357

Lời giải chi tiết

$$P = \frac{15}{28} \approx 0.536. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

$X \sim B(12, 0.25)$. Find $P(X = 3)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(X = 3) \approx 0.258.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim B(12, 0.25)$. Find $P(X \leq 2)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(0) + P(1) + P(2) \approx 0.0317 + 0.1267 + 0.2322 \approx 0.391.$$

Bài tập luyện tập

Test scores $X \sim N(65, 10^2)$. Find $P(X > 78)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$Z = 1.3, P(Z > 1.3) = 1 - 0.9032 = 0.0968.$$

Bài tập luyện tập

Test scores $X \sim N(65, 10^2)$. Find the score exceeded by only 10% of students, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

$$x = 65 + 1.2816(10) \approx 77.8.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) A disease affects 2% of a population; test sensitivity 90%, specificity 95%. Given a positive test, find $P(\text{disease})$, correct to 3 s.f.

(A) 0.269

(C) 0.020

(B) 0.900

(D) 0.180

Lời giải chi tiết

$$P(+) = 0.067; P(D | +) = 0.018/0.067 \approx 0.269. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) A continuous RV has $f(x) = \frac{x}{8}$ for $0 \leq x \leq 4$. Find $P(1 \leq X \leq 3)$ and $E(X)$.

Lời giải chi tiết

$$P(1 \leq X \leq 3) = 0.5 \text{ (exact). } E(X) = \frac{8}{3} \approx 2.67.$$

Bài tập luyện tập

A fair die is rolled 10 times; X is the number of sixes. Find $P(X = 2)$, correct to 4 d.p.

Lời giải chi tiết

$$X \sim B(10, \frac{1}{6}): P(X = 2) = \binom{10}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^8 \approx 0.2907.$$

Bài tập luyện tập

$P(\text{tea}) = 0.65$, $P(\text{coffee}) = 0.55$, $P(\text{both}) = 0.4$. Find $P(\text{neither})$.

Lời giải chi tiết

$$P(T \cup C) = 0.8 \Rightarrow P(\text{neither}) = 0.2.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) $E(X) = 12$, $\text{Var}(X) = 9$. Find the standard deviation of $5 - 2X$.

(A) 6

(C) 3

(B) 4.5

(D) 36

Lời giải chi tiết $\text{Var}(5 - 2X) = 4(9) = 36 \Rightarrow \text{SD} = 6. \text{ (A).}$ **Bài tập luyện tập**

Light bulb lifetime $X \sim N(1200, 150^2)$ hours. Find the proportion lasting between 1000 and 1400 hours, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết $Z = \pm 1.333. P(-1.333 < Z < 1.333) = 2\Phi(1.333) - 1 \approx 2(0.9087) - 1 \approx 0.817.$ **Bài tập luyện tập**

(AHL) As before, $P(\text{item defective}) = 0.039$. If two items are inspected independently, find $P(\text{at least one defective})$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết $P(\text{neither defective}) = (0.961)^2 \approx 0.9235. P(\text{at least one}) \approx 1 - 0.9235 = 0.0765.$ **4.18 Practice: Paper 1 style (no calculator) II****Bài tập luyện tập**

The ordered data set 2, 5, 6, 9, 11, 14, 16, 18, 20, 24 ($n = 10$) is given. Find Q_1 , Q_3 , and the interquartile range.

(A) IQR = 12

(C) IQR = 9

(B) IQR = 14

(D) IQR = 18

Lời giải chi tiết

Lower half 2, 5, 6, 9, 11 $\Rightarrow Q_1 = 6$. Upper half 14, 16, 18, 20, 24 $\Rightarrow Q_3 = 18$. IQR = $18 - 6 = 12$. (A).

Bài tập luyện tập

The ordered data set 10, 12, 13, 15, 16, 17, 19, 20, 40 ($n = 9$) is given. Using the $1.5 \times \text{IQR}$ rule, determine whether 40 is an outlier.

Lời giải chi tiết

Median (5th value) = 16. Lower half 10, 12, 13, 15 $\Rightarrow Q_1 = \frac{12 + 13}{2} = 12.5$. Upper half 17, 19, 20, 40 $\Rightarrow Q_3 = \frac{19 + 20}{2} = 19.5$. IQR = $19.5 - 12.5 = 7$. Upper fence = $19.5 + 1.5(7) =$

30. Since $40 > 30$, 40 is an outlier.

Bài tập luyện tập

A grouped frequency table has class intervals $[0, 4)$, $[4, 8)$, $[8, 12)$ with frequencies 2, 5, 3. Using midpoints, find the mean as an exact fraction.

Lời giải chi tiết

Midpoints 2, 6, 10. $\sum f_i x_i = 2(2) + 5(6) + 3(10) = 4 + 30 + 30 = 64$. $n = 10$. Mean = $\frac{64}{10} = \frac{32}{5}$.

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{4}\right)$. Find $P(X = 3)$ as an exact fraction, and state $E(X)$.

(A) $\frac{9}{64}$

(C) $\frac{1}{16}$

(B) $\frac{3}{16}$

(D) $\frac{27}{64}$

Lời giải chi tiết

$P(X = 3) = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{16} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{64}$. (A). $E(X) = \frac{1}{1/4} = 4$.

Bài tập luyện tập

(AHL) A raffle ticket costs \$2. With probability $\frac{1}{5}$ the ticket wins a prize worth \$10 (a net gain of \$8); otherwise it wins nothing (a net loss of \$2). Find $E(\text{net gain})$ exactly, and state whether the game favours the player, the organiser, or neither.

Lời giải chi tiết

$E(X) = 8 \left(\frac{1}{5}\right) + (-2) \left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5} - \frac{8}{5} = 0$. Since $E(X) = 0$, the game is **fair** — it favours neither side.

Bài tập luyện tập

$X \sim B\left(5, \frac{1}{2}\right)$. Find $P(X = 2)$ as an exact fraction.

(A) $\frac{5}{16}$

(C) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{10}{32}$

(D) $\frac{1}{32}$

Lời giải chi tiết

$P(X = 2) = \binom{5}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 10 \cdot \frac{1}{32} = \frac{10}{32} = \frac{5}{16}$. (A) (note (B) is the same value unsimplified).

Bài tập luyện tập

$P(A) = 0.6$ and $P(A \cap B) = 0.24$. Find $P(B | A)$ as an exact fraction.

Lời giải chi tiết

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.24}{0.6} = \frac{24}{60} = \frac{2}{5}.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim N(50, 8^2)$. Using the symmetry of the normal distribution (no calculator), state $P(X > 50)$, and use the empirical rule to estimate $P(42 < X < 58)$.

Lời giải chi tiết

By symmetry about the mean, $P(X > 50) = 0.5$. Since $42 = \mu - \sigma$ and $58 = \mu + \sigma$, $P(42 < X < 58) \approx 0.68$ (the empirical 68% rule).

4.19 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed) II**Bài tập luyện tập**

The ordered data set 5.2, 6.1, 6.8, 7.0, 7.5, 8.1, 8.4, 8.9, 9.2, 9.6, 10.1, 10.8, 15.9 ($n = 13$) is given. Find the interquartile range correct to 3 s.f., and determine whether 15.9 is an outlier.

Lời giải chi tiết

Median (7th value) = 8.4. Lower half: $Q_1 = \frac{6.8 + 7.0}{2} = 6.9$. Upper half: $Q_3 = \frac{9.6 + 10.1}{2} = 9.85$. IQR = $9.85 - 6.9 = 2.95$. Upper fence = $9.85 + 1.5(2.95) = 14.275$. Since $15.9 > 14.275$, 15.9 is an outlier.

Bài tập luyện tập

A grouped frequency table has class intervals $[10, 20)$, $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$ with frequencies 6, 11, 8, 5. Find the estimated mean and estimated standard deviation, correct to 3 s.f. where necessary.

Lời giải chi tiết

Midpoints 15, 25, 35, 45; $n = 30$. $\sum f_i x_i = 6(15) + 11(25) + 8(35) + 5(45) = 90 + 275 + 280 + 225 = 870 \Rightarrow \bar{x} = \frac{870}{30} = 29$. $\sum f_i x_i^2 = 6(225) + 11(625) + 8(1225) + 5(2025) = 1350 + 6875 + 9800 + 10125 = 28150$. $\sigma^2 = \frac{28150}{30} - 29^2 \approx 938.33 - 841 = 97.33 \Rightarrow \sigma \approx 9.87$.

Bài tập luyện tập

(AHL) A fair die is rolled repeatedly until a six appears. Find the probability that a six appears within the first 3 rolls, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(X \leq 3) = 1 - (1 - p)^3 = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3 = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216} \approx 0.421.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) In Game A, a player pays \$3 to play; with probability 0.3 they win \$8 (net gain \$5), otherwise they win nothing (net loss \$3). In Game B, a player pays \$4; with probability 0.2 they win \$15 (net gain \$11), otherwise nothing (net loss \$4). Find $E(\text{net gain})$ for each game, correct to 2 d.p., and state which game is the better choice for the player.

Lời giải chi tiết

Game A: $E(X_A) = 5(0.3) + (-3)(0.7) = 1.5 - 2.1 = -0.60$. Game B: $E(X_B) = 11(0.2) + (-4)(0.8) = 2.2 - 3.2 = -1.00$. Since $-0.60 > -1.00$, **Game A** has the higher (less unfavourable) expected value and is the better choice.

Bài tập luyện tập

$X \sim B(9, 0.3)$. (a) Find $P(X = 4)$, correct to 3 s.f. (b) Find $P(X \geq 1)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$(a) P(X = 4) = \binom{9}{4} (0.3)^4 (0.7)^5 = 126(0.0081)(0.16807) \approx 0.172.$$

$$(b) P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0.7)^9 \approx 1 - 0.0404 = 0.960.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim N(500, 60^2)$. Find $P(440 < X < 560)$, correct to 3 s.f., and the value exceeded by the top 5%, correct to the nearest whole number.

Lời giải chi tiết

$$Z = \frac{440 - 500}{60} = -1, Z = \frac{560 - 500}{60} = 1. P(-1 < Z < 1) = 2\Phi(1) - 1 \approx 2(0.8413) - 1 = 0.683.$$

$$\text{Top 5\%: } z_{0.95} \approx 1.6449. x = 500 + 1.6449(60) \approx 598.7 \approx 599.$$

Bài tập luyện tập

In a school, 55% of students play sports and 30% both play sports and sing in the choir. A student is selected at random from those who play sports. Find the probability that this student also sings in the choir, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(\text{choir} | \text{sports}) = \frac{P(\text{sports} \cap \text{choir})}{P(\text{sports})} = \frac{0.30}{0.55} \approx 0.545.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Geo}(0.35)$. Find $\text{Var}(X)$, correct to 3 s.f.

- (A) 5.31 (C) 0.65
(B) 2.86 (D) 1.86

Lời giải chi tiết

$$\text{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{0.65}{0.1225} \approx 5.31. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

A grouped frequency table has intervals $[0, 5)$, $[5, 10)$, $[10, 15)$ with frequencies 4, 8, 4 ($n = 16$). Using linear interpolation on the cumulative frequencies, find the median exactly.

Lời giải chi tiết

Cumulative frequencies: 4, 12, 16. Median position = $n/2 = 8$, which lies in $[5, 10)$ (since $CF_{\text{before}} = 4$, $f = 8$). Median = $5 + \frac{8-4}{8} \times 5 = 5 + 2.5 = 7.5$.

Bài tập luyện tập

(AHL) For any geometric distribution $X \sim \text{Geo}(p)$ with $0 < p < 1$, which value of k gives the largest probability $P(X = k)$?

- (A) $k = 1$ (C) $k = n$
(B) $k = \frac{1}{p}$ (D) It depends on p

Lời giải chi tiết

Since $P(X = k) = (1-p)^{k-1}p$ is strictly decreasing in k (as $0 < 1-p < 1$), the largest probability always occurs at $k = 1$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) A game costs \$4 to play. With probability $\frac{3}{10}$ a player wins \$10 (net gain \$6); otherwise they win nothing (net loss \$4). Find $E(\text{net gain})$ exactly.

Lời giải chi tiết

$$E(X) = 6 \left(\frac{3}{10} \right) + (-4) \left(\frac{7}{10} \right) = \frac{18}{10} - \frac{28}{10} = -\frac{10}{10} = -1.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim B(20, 0.15)$. Find $E(X)$ and $\text{Var}(X)$ exactly.

Lời giải chi tiết

$$E(X) = np = 20(0.15) = 3. \text{Var}(X) = np(1 - p) = 20(0.15)(0.85) = 2.55.$$

Bài tập luyện tập

Ages (years) of 45 people are grouped into intervals $[20, 30)$, $[30, 40)$, $[40, 50)$, $[50, 60)$, $[60, 70)$ with frequencies 5, 10, 15, 10, 5. Find the estimated mean and estimated standard deviation, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\begin{aligned} \text{Midpoints } 25, 35, 45, 55, 65; n = 45. \sum f_i x_i &= 5(25) + 10(35) + 15(45) + 10(55) + 5(65) = \\ &= 125 + 350 + 675 + 550 + 325 = 2025 \Rightarrow \bar{x} = \frac{2025}{45} = 45. \sum f_i x_i^2 = 5(625) + 10(1225) + \\ &+ 15(2025) + 10(3025) + 5(4225) = 3125 + 12250 + 30375 + 30250 + 21125 = 97125. \sigma^2 = \\ &= \frac{97125}{45} - 45^2 \approx 2158.33 - 2025 = 133.33 \Rightarrow \sigma \approx 11.5. \end{aligned}$$

Bài tập luyện tập

A grouped frequency table has intervals $[0, 10)$, $[10, 20)$, $[20, 30)$, $[30, 40)$ with frequencies 8, 14, 20, 8 ($n = 50$). Estimate the median using linear interpolation, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\begin{aligned} \text{Cumulative frequencies: } 8, 22, 42, 50. \text{ Median position} &= 25, \text{ which lies in } [20, 30) \text{ (since } \\ CF_{\text{before}} = 22, f = 20). \text{ Median} &= 20 + \frac{25 - 22}{20} \times 10 = 20 + 1.5 = 21.5. \end{aligned}$$

Bài tập luyện tập

At a company, 70% of applicants pass a written test, and of those who pass, 60% go on to pass the interview. Find the probability that a randomly selected applicant passes both stages, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(\text{test} \cap \text{interview}) = P(\text{test}) \times P(\text{interview} \mid \text{test}) = 0.70 \times 0.60 = 0.420.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim N(80, \sigma^2)$ and it is known that $P(X < 70) = 0.1$. Find σ , correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\begin{aligned} \text{The standard normal critical value satisfying } P(Z < z) &= 0.1 \text{ is } z \approx -1.2816. \text{ Standardizing:} \\ 70 = 80 + z\sigma \Rightarrow -10 = -1.2816\sigma \Rightarrow \sigma &= \frac{10}{1.2816} \approx 7.80. \end{aligned}$$

4.20 Practice: Paper 1 style (no calculator) III**Bài tập luyện tập**

In how many ways can 3 of 6 books be arranged in a row on a shelf?

Lời giải chi tiết

Order matters: ${}^6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

Bài tập luyện tập

How many ways are there to choose 4 students from a class of 10 to form a study group?

(A) 210

(C) 40

(B) 5040

(D) 720

Lời giải chi tiết

Order does not matter: $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4!6!} = 210$. (A).

Bài tập luyện tập

Two cards are drawn without replacement from cards labelled 1, 2, 3, 4, 5. Find P (both cards are even) as an exact fraction.

Lời giải chi tiết

Only 2 and 4 are even. $P = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{1}{10}$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\binom{6}{2}$ and $\binom{6}{4}$, and state the symmetry property they illustrate.

Lời giải chi tiết

$\binom{6}{2} = 15$ and $\binom{6}{4} = 15$: they are equal, illustrating $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{3}\right)$. Find $P(X = 2)$ as an exact fraction.

(A) $\frac{2}{9}$

(C) $\frac{1}{9}$

(B) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{4}{9}$

Lời giải chi tiết

$$P(X = 2) = \binom{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{9}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

$E(X) = 7$, $\text{Var}(X) = 5$. Find $E(2X + 1)$ and $\text{Var}(2X + 1)$.

Lời giải chi tiết

$$E(2X + 1) = 2(7) + 1 = 15. \text{Var}(2X + 1) = 2^2(5) = 20.$$

Bài tập luyện tập

In a survey of 30 people, 12 like tea, 9 like coffee, and 4 like both. Find $P(\text{tea} \mid \text{coffee})$ as an exact fraction.

Lời giải chi tiết

$$P(\text{tea} \mid \text{coffee}) = \frac{P(\text{tea} \cap \text{coffee})}{P(\text{coffee})} = \frac{4/30}{9/30} = \frac{4}{9}.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim N(100, 15^2)$. Using the empirical rule, state the range of values containing approximately 95% of the data.

Lời giải chi tiết

95% of data lies within 2σ of the mean: $[100 - 2(15), 100 + 2(15)] = [70, 130]$.

Bài tập luyện tập

$X \sim B(n, p)$ has $E(X) = 8$ and $\text{Var}(X) = 4.8$. Find p and n .

Lời giải chi tiết

$$np = 8 \text{ and } np(1 - p) = 4.8 \Rightarrow 8(1 - p) = 4.8 \Rightarrow 1 - p = 0.6 \Rightarrow p = 0.4. \text{ Then } n = \frac{8}{0.4} = 20.$$

Bài tập luyện tập

Evaluate $\frac{7!}{4!}$ exactly.

Lời giải chi tiết

$$\frac{7!}{4!} = 7 \times 6 \times 5 = 210.$$

Bài tập luyện tập

A PIN code consists of 4 digits, each from 0–9, and digits may repeat. How many different PIN codes are possible?

Lời giải chi tiết

By the fundamental counting principle, each of the 4 positions has 10 independent choices: $10^4 = 10\,000$.

Bài tập luyện tập

$X \sim B(8, 0.5)$. Find $P(X = 4)$ as an exact fraction.

- | | |
|----------------------|----------------------|
| (A) $\frac{70}{256}$ | (C) $\frac{28}{256}$ |
| (B) $\frac{56}{256}$ | (D) $\frac{8}{256}$ |

Lời giải chi tiết

$$P(X = 4) = \binom{8}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^8 = 70 \cdot \frac{1}{256} = \frac{70}{256}. \text{ (A)}$$

4.21 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed) III**Bài tập luyện tập**

In how many ways can 5 of 12 sprinters finish in the top five positions (1st through 5th)?

Lời giải chi tiết

Order matters: ${}^{12}P_5 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95\,040$.

Bài tập luyện tập

A lottery requires choosing 6 numbers from 49 (order does not matter). Find the number of possible combinations.

Lời giải chi tiết

$$\binom{49}{6} = \frac{49!}{6!43!} = 13\,983\,816.$$

Bài tập luyện tập

A hand of 5 cards is dealt from a standard 52-card deck. Find the probability that the hand contains exactly 2 aces, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P = \frac{\binom{4}{2}\binom{48}{3}}{\binom{52}{5}} = \frac{6 \times 17\,296}{2\,598\,960} \approx 0.0399.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Geo}(0.4)$. Find $P(X \leq 5)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(X \leq 5) = 1 - (0.6)^5 = 1 - 0.07776 \approx 0.922.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim B(25, 0.08)$. Find $P(X = 2)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(X = 2) = \binom{25}{2} (0.08)^2 (0.92)^{23} \approx 0.282.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim N(70, 12^2)$. Find $P(X < 55)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$Z = \frac{55 - 70}{12} = -1.25. \quad P(Z < -1.25) = 1 - P(Z < 1.25) \approx 1 - 0.8944 = 0.106.$$

Bài tập luyện tập

A committee of 4 is chosen at random from 7 men and 5 women. Find the probability that the committee contains exactly 2 women, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P = \frac{\binom{5}{2}\binom{7}{2}}{\binom{12}{4}} = \frac{10 \times 21}{495} = \frac{210}{495} \approx 0.424.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) A spinner lands on red with probability 0.15 on each independent spin. Find the expected number of spins until red appears, and $P(\text{more than 5 spins are needed})$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$E(X) = \frac{1}{0.15} \approx 6.67. \quad P(X > 5) = (0.85)^5 \approx 0.444.$$

Bài tập luyện tập

A factory has two production lines. Line 1 produces 60% of output with a 2% defect rate; Line 2 produces 40% with a 5% defect rate. Find the overall probability an item is defective, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(D) = 0.6(0.02) + 0.4(0.05) = 0.012 + 0.020 = 0.032.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim B(14, 0.45)$. Find $E(X)$ and $\text{Var}(X)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$E(X) = 14(0.45) = 6.30. \text{Var}(X) = 14(0.45)(0.55) = 3.465 \approx 3.47.$$

Bài tập luyện tập

A password consists of 3 distinct letters chosen from the 26-letter alphabet, arranged in order (no repeats). Find the number of possible passwords.

Lời giải chi tiết

$$\text{Order matters and letters cannot repeat: } {}^{26}P_3 = 26 \times 25 \times 24 = 15\,600.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) An investor is deciding between two funds. Fund A returns a profit of \$2000 with probability 0.4 and a loss of \$500 otherwise. Fund B returns a profit of \$1200 with probability 0.6 and a loss of \$300 otherwise. Find $E(\text{profit})$ for each fund, correct to the nearest dollar, and state which fund has the higher expected return.

Lời giải chi tiết

Fund A: $E(X_A) = 2000(0.4) + (-500)(0.6) = 800 - 300 = \500 . Fund B: $E(X_B) = 1200(0.6) + (-300)(0.4) = 720 - 120 = \600 . Since $\$600 > \500 , **Fund B** has the higher expected return.

4.22 Practice: Paper 1 style (no calculator) IV**Bài tập luyện tập**

(AHL) A continuous random variable has $f(x) = kx^2$ for $0 \leq x \leq 3$ (and 0 elsewhere). Find k exactly.

Lời giải chi tiết

$$\int_0^3 kx^2 dx = k \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^3 = 9k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{9}.$$

Bài tập luyện tập

A box plot has five-number summary $\min = 3$, $Q_1 = 7$, $\text{median} = 10$, $Q_3 = 15$, $\max = 22$. Find the IQR and the upper fence exactly.

Lời giải chi tiết

$$\text{IQR} = 15 - 7 = 8. \text{ Upper fence} = 15 + 1.5(8) = 15 + 12 = 27.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) $P(A) = \frac{2}{5}$, $P(B | A) = \frac{1}{2}$, $P(B | A') = \frac{1}{5}$. Find $P(B)$ as an exact fraction.

Lời giải chi tiết

$$\text{By the law of total probability: } P(B) = P(A)P(B | A) + P(A')P(B | A') = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{25} = \frac{5}{25} + \frac{3}{25} = \frac{8}{25}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Geo}(0.5)$. Find $E(X)$ and $\text{Var}(X)$ exactly.

(A) $E = 2$, $\text{Var} = 2$

(C) $E = 0.5$, $\text{Var} = 2$

(B) $E = 2$, $\text{Var} = 0.5$

(D) $E = 4$, $\text{Var} = 2$

Lời giải chi tiết

$$E(X) = \frac{1}{0.5} = 2. \text{Var}(X) = \frac{0.5}{0.5^2} = \frac{0.5}{0.25} = 2. \text{ (A).}$$

4.23 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed) IV**Bài tập luyện tập**

(AHL) A continuous random variable has $f(x) = \frac{x^2}{9}$ for $0 \leq x \leq 3$. Find $P(1 \leq X \leq 2)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(1 \leq X \leq 2) = \int_1^2 \frac{x^2}{9} dx = \frac{1}{9} \left[\frac{x^3}{3} \right]_1^2 = \frac{1}{9} \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{3} = \frac{7}{27} \approx 0.259.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) A medical condition affects 3% of a population. A test has sensitivity 92% and specificity 90%. Given a positive test result, find the probability the person has the condition, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(+) = 0.92(0.03) + 0.10(0.97) = 0.0276 + 0.097 = 0.1246. \quad P(D | +) = \frac{0.0276}{0.1246} \approx 0.222.$$

Bài tập luyện tập

A fair die is rolled once. Rolling a 1 or 2 wins \$5; rolling a 3 or 4 wins \$2; rolling a 5 or 6 loses \$3. Find $E(\text{winnings})$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Each pair of outcomes has probability $\frac{1}{3}$: $E(X) = 5\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{1}{3}\right) + (-3)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{5+2-3}{3} = \frac{4}{3} \approx 1.33$.

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Geo}(0.6)$. Find $P(2 \leq X \leq 4)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(2 \leq X \leq 4) = P(X \geq 2) - P(X \geq 5) = (0.4)^1 - (0.4)^4 = 0.4 - 0.0256 = 0.3744 \approx 0.374.$$

4.24 Additional practice: Mixed review (Set 5)**Bài tập luyện tập**

A data set has values $x_i = 5, 10, 15, 20$ with frequencies $f_i = 2, 6, 7, 5$. Find the mean and variance exactly, as fractions.

Lời giải chi tiết

$$n = 20. \quad \sum f_i x_i = 10 + 60 + 105 + 100 = 275 \Rightarrow \bar{x} = \frac{275}{20} = \frac{55}{4}. \quad \sum f_i x_i^2 = 50 + 600 + 1575 + 2000 = 4225. \quad \sigma^2 = \frac{4225}{20} - \left(\frac{55}{4}\right)^2 = \frac{845}{4} - \frac{3025}{16} = \frac{3380 - 3025}{16} = \frac{355}{16}.$$

Bài tập luyện tập

A data set has $Q_1 = 12$, $Q_3 = 25$, and maximum value 40. Find the IQR, and determine whether the maximum value is an outlier using the standard $1.5 \times \text{IQR}$ rule.

Lời giải chi tiết

$\text{IQR} = 25 - 12 = 13$. Upper fence $= 25 + 1.5(13) = 25 + 19.5 = 44.5$. Since $40 < 44.5$, the maximum value is **not** an outlier.

Bài tập luyện tập

Bivariate data: (2, 3), (4, 7), (6, 8), (8, 14), (10, 18). Find the equation of the regression line of y on x , and use it to estimate y when $x = 7$.

Lời giải chi tiết

$$n = 5, \sum x = 30, \sum y = 50, \sum xy = 374, \sum x^2 = 220, \bar{x} = 6, \bar{y} = 10.$$

$$b = \frac{5(374) - 30(50)}{5(220) - 30^2} = \frac{1870 - 1500}{1100 - 900} = \frac{370}{200} = 1.85, \quad a = 10 - 1.85(6) = 10 - 11.1 = -1.1.$$

Regression line: $y = -1.1 + 1.85x$. At $x = 7$: $y = -1.1 + 1.85(7) = -1.1 + 12.95 = 11.85$.

Bài tập luyện tập

In a survey of 50 people, 28 like coffee, 20 like tea, and 12 like both. Find $P(\text{likes coffee} \mid \text{likes tea})$ as an exact fraction.

(A) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{5}{7}$

(B) $\frac{12}{50}$

(D) $\frac{2}{5}$

Lời giải chi tiết

$$P(\text{coffee} \mid \text{tea}) = \frac{P(\text{both})}{P(\text{tea})} = \frac{12/50}{20/50} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

A committee of 4 people is chosen from 7 men and 5 women. Find the number of committees that contain exactly 2 men and 2 women.

Lời giải chi tiết

$$\binom{7}{2} \binom{5}{2} = 21 \times 10 = 210.$$

Bài tập luyện tập

X has $P(X = 1) = 0.5$, $P(X = 2) = 0.3$, $P(X = 3) = 0.2$. Find $E(4X - 3)$.

(A) 3.8

(C) 4.7

(B) 6.8

(D) -1.7

Lời giải chi tiết

$$E(X) = 1(0.5) + 2(0.3) + 3(0.2) = 0.5 + 0.6 + 0.6 = 1.7. \quad E(4X - 3) = 4(1.7) - 3 = 6.8 - 3 = 3.8. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

The temperature X (in Celsius) at a weather station on a randomly chosen day has $E(X) = 18$ and $\text{Var}(X) = 6.25$. Using the conversion to Fahrenheit $F = 1.8X + 32$, find $E(F)$ and $\text{SD}(F)$.

Lời giải chi tiết

$E(F) = 1.8(18) + 32 = 32.4 + 32 = 64.4$. Since $\text{SD}(X) = \sqrt{6.25} = 2.5$, we get $\text{SD}(F) = 1.8(2.5) = 4.5$ (equivalently $\text{Var}(F) = 1.8^2(6.25) = 20.25$ and $\sqrt{20.25} = 4.5$).

Bài tập luyện tập

$X \sim B(10, 0.4)$. Find $P(X = 3)$, correct to 3 s.f.

(A) 0.215

(C) 0.251

(B) 0.201

(D) 0.120

Lời giải chi tiết

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} (0.4)^3 (0.6)^7 = 120(0.064)(0.0279936) \approx 0.215. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

$X \sim N(45, 6^2)$. Find $P(X > 57)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$Z = \frac{57 - 45}{6} = 2.0. P(X > 57) = P(Z > 2.0) = 1 - 0.9772 = 0.0228.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Machine A produces 60% of a factory's output with a 2% defect rate; Machine B produces the remaining 40% with a 5% defect rate. Given that an item is defective, find the probability it came from Machine B , as an exact fraction.

Lời giải chi tiết

$$P(D) = 0.6(0.02) + 0.4(0.05) = 0.012 + 0.02 = 0.032. P(B | D) = \frac{0.02}{0.032} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}.$$

4.25 Extra practice: Mixed mastery (Set 6)**Bài tập luyện tập**

A data set has values $x_i = 4, 8, 12, 16$ with frequencies $f_i = 5, 9, 4, 2$. Find the mean and standard deviation, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$n = 20. \sum f_i x_i = 20 + 72 + 48 + 32 = 172 \Rightarrow \bar{x} = \frac{172}{20} = 8.6. \sum f_i x_i^2 = 80 + 576 + 576 + 512 = 1744. \sigma^2 = \frac{1744}{20} - 8.6^2 = 87.2 - 73.96 = 13.24 \Rightarrow \sigma = \sqrt{13.24} \approx 3.64.$$

Bài tập luyện tập

The following 13 values are already ordered: 3, 5, 6, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 22, 24, 46. Find the five-number summary and the IQR, and use the $1.5 \times \text{IQR}$ rule to determine whether the maximum value is an outlier.

Lời giải chi tiết

With $n = 13$ (odd), the median (7th value) is $Q_2 = 14$, excluded from both halves. Lower half: 3, 5, 6, 9, 11, 12 $\Rightarrow Q_1 = \frac{6+9}{2} = 7.5$. Upper half: 16, 17, 19, 22, 24, 46 $\Rightarrow Q_3 = \frac{19+22}{2} = 20.5$. Five-number summary: $\min = 3$, $Q_1 = 7.5$, $Q_2 = 14$, $Q_3 = 20.5$, $\max = 46$. $\text{IQR} = 20.5 - 7.5 = 13$. Upper fence $= 20.5 + 1.5(13) = 40$. Since $46 > 40$, the maximum value is an outlier.

Bài tập luyện tập

The delivery times (minutes) of 45 orders are grouped as follows.

Time	[0, 10)	[10, 20)	[20, 30)	[30, 40)	[40, 50)
Frequency	6	12	14	9	4

Find the estimated mean and estimated standard deviation, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Midpoints: 5, 15, 25, 35, 45. $n = 45$. $\sum f_i x_i = 30 + 180 + 350 + 315 + 180 = 1055 \Rightarrow \bar{x} = \frac{1055}{45} \approx 23.4$. $\sum f_i x_i^2 = 150 + 2700 + 8750 + 11025 + 8100 = 30725$. $\sigma^2 = \frac{30725}{45} - 23.444^2 \approx 682.78 - 549.64 = 133.14 \Rightarrow \sigma \approx 11.5$.

Bài tập luyện tập

Bivariate data: (3, 8), (5, 12), (7, 15), (9, 20), (11, 22). Find the equation of the regression line of y on x , the correlation coefficient r (correct to 3 s.f.), and use the regression line to estimate y when $x = 8$.

Lời giải chi tiết

$$n = 5, \sum x = 35, \sum y = 77, \sum xy = 611, \sum x^2 = 285, \sum y^2 = 1317, \bar{x} = 7, \bar{y} = 15.4.$$

$$b = \frac{5(611) - 35(77)}{5(285) - 35^2} = \frac{3055 - 2695}{1425 - 1225} = \frac{360}{200} = 1.8, \quad a = 15.4 - 1.8(7) = 15.4 - 12.6 = 2.8.$$

Regression line: $y = 2.8 + 1.8x$.

$$r = \frac{5(611) - 35(77)}{\sqrt{[5(285) - 35^2][5(1317) - 77^2]}} = \frac{360}{\sqrt{200 \times 656}} = \frac{360}{\sqrt{131200}} \approx \frac{360}{362.2} \approx 0.994.$$

At $x = 8$: $y = 2.8 + 1.8(8) = 2.8 + 14.4 = 17.2$.

Bài tập luyện tập

A box contains 9 red balls and 6 blue balls. Two balls are drawn at random without replacement. Find the number of ways to choose 2 balls from the 15, and hence find $P(\text{both red} \mid \text{at least one red})$ as an exact fraction.

Lời giải chi tiết

Total ways: $\binom{15}{2} = 105$. Both red: $\binom{9}{2} = 36$. Both blue: $\binom{6}{2} = 15$, so at least one red has $105 - 15 = 90$ ways, i.e. $P(\text{at least one red}) = \frac{90}{105} = \frac{6}{7}$. Then

$$P(\text{both red} \mid \text{at least one red}) = \frac{P(\text{both red})}{P(\text{at least one red})} = \frac{36/105}{90/105} = \frac{36}{90} = \frac{2}{5}.$$

Bài tập luyện tập

X has $P(X = -2) = 0.25$, $P(X = 1) = 0.45$, $P(X = 3) = 0.3$. Find $E(2X - 5)$ and $\text{Var}(2X - 5)$.

(A) $E = -3.3$, $\text{Var} = 13.71$

(C) $E = 1.7$, $\text{Var} = 13.71$

(B) $E = -3.3$, $\text{Var} = 6.855$

(D) $E = -3.3$, $\text{Var} = 3.4275$

Lời giải chi tiết

$E(X) = -2(0.25) + 1(0.45) + 3(0.3) = -0.5 + 0.45 + 0.9 = 0.85$. $E(X^2) = 4(0.25) + 1(0.45) + 9(0.3) = 1 + 0.45 + 2.7 = 4.15$. $\text{Var}(X) = 4.15 - 0.85^2 = 4.15 - 0.7225 = 3.4275$. Then $E(2X - 5) = 2(0.85) - 5 = -3.3$ and $\text{Var}(2X - 5) = 2^2(3.4275) = 13.71$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Geo}(0.45)$. Find $P(X = 3)$, correct to 3 s.f.

(A) 0.136

(C) 0.0911

(B) 0.203

(D) 0.302

Lời giải chi tiết

$$P(X = 3) = (0.55)^2(0.45) = 0.3025 \times 0.45 = 0.136125 \approx 0.136. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

$X \sim B(16, 0.35)$. Find $P(X = 6)$, correct to 3 s.f.

(A) 0.198

(C) 0.221

(B) 0.176

(D) 0.152

Lời giải chi tiết

$$P(X = 6) = \binom{16}{6}(0.35)^6(0.65)^{10} = 8008(0.0018383)(0.0134634) \approx 0.198. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

The heights of a species of tree are normally distributed. It is known that 15% of trees are shorter than 4.2 m, and 10% of trees are taller than 9.8 m. Find the mean μ and standard deviation σ of the distribution, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Using inverse normal values $z \approx -1.036$ (so $P(Z < -1.036) = 0.15$) and $z \approx 1.282$ (so $P(Z > 1.282) = 0.10$):

$$\frac{4.2 - \mu}{\sigma} = -1.036 \Rightarrow \mu = 4.2 + 1.036\sigma, \quad \frac{9.8 - \mu}{\sigma} = 1.282 \Rightarrow \mu = 9.8 - 1.282\sigma.$$

Setting these equal: $4.2 + 1.036\sigma = 9.8 - 1.282\sigma \Rightarrow 2.318\sigma = 5.6 \Rightarrow \sigma = \frac{5.6}{2.318} \approx 2.416$. Then $\mu = 4.2 + 1.036(2.416) \approx 4.2 + 2.503 = 6.703$. Rounded to 3 s.f.: $\sigma \approx 2.42$ m, $\mu \approx 6.70$ m.

Bài tập luyện tập

(AHL) An email spam filter receives emails of which 30% are spam. The filter correctly flags spam as “spam” 95% of the time, and incorrectly flags a legitimate email as “spam” 4% of the time. Given that an email is flagged as spam, find the probability that it actually is spam, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Let S be “is spam” and F be “flagged as spam.” $P(S) = 0.3$, $P(F | S) = 0.95$, $P(F | S') = 0.04$.

$$P(F) = P(F | S)P(S) + P(F | S')P(S') = 0.95(0.3) + 0.04(0.7) = 0.285 + 0.028 = 0.313.$$

$$P(S | F) = \frac{0.285}{0.313} \approx 0.911.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) A charity raffle sells tickets for \$8 each; 1000 tickets are sold. There is one grand prize of \$500 and 5 second prizes of \$50 each. Find the expected net gain $E(X)$ for a person who buys one ticket, and state whether the raffle is favourable to the player.

(A) $-\$7.25$; unfavourable

(C) $-\$0.70$; unfavourable

(B) $+\$7.25$; favourable

(D) $+\$0.70$; favourable

Lời giải chi tiết

Net gains: grand prize $500 - 8 = 492$ (probability $\frac{1}{1000}$); second prize $50 - 8 = 42$ (probability $\frac{5}{1000}$); no prize -8 (probability $\frac{994}{1000}$).

$$E(X) = 492 \left(\frac{1}{1000} \right) + 42 \left(\frac{5}{1000} \right) + (-8) \left(\frac{994}{1000} \right) = 0.492 + 0.210 - 7.952 = -7.25.$$

Since $E(X) < 0$, the raffle is **unfavourable** to the player. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) A continuous random variable has $f(x) = k(4 - x)$ for $0 \leq x \leq 4$ (and 0 elsewhere). Find k exactly, then find $P(X > 3)$ and $E(X)$ as exact fractions.

Lời giải chi tiết

$$\int_0^4 k(4 - x) dx = k \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_0^4 = k(16 - 8) = 8k = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{8}.$$

$$P(X > 3) = \int_3^4 \frac{1}{8}(4 - x) dx = \frac{1}{8} \left[4x - \frac{x^2}{2} \right]_3^4 = \frac{1}{8}(8 - 7.5) = \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16}.$$

$$E(X) = \int_0^4 x \cdot \frac{1}{8}(4 - x) dx = \frac{1}{8} \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = \frac{1}{8} \left(32 - \frac{64}{3} \right) = \frac{1}{8} \cdot \frac{32}{3} = \frac{4}{3}.$$

4.26 Extra practice: Mixed mastery (Set 7)**Bài tập luyện tập**

A company of 500 employees has 200 in Dept. A, 150 in Dept. B, and 150 in Dept. C. Find the number sampled from each department in a stratified sample of size 40.

Lời giải chi tiết

Sampling fraction = $\frac{40}{500} = 0.08$. Dept. A: $200(0.08) = 16$. Dept. B: $150(0.08) = 12$. Dept. C: $150(0.08) = 12$. (Check: $16 + 12 + 12 = 40$ ✓.)

Bài tập luyện tập

A sample of 10 values has $\sum (x_i - \bar{x})^2 = 180$. Find the unbiased estimate of the population variance.

(A) 20

(C) 16

(B) 18

(D) 22

Lời giải chi tiết

$$s_{n-1}^2 = \frac{180}{10 - 1} = \frac{180}{9} = 20. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Po}(2.5)$. Find $P(X = 3)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(X = 3) = \frac{e^{-2.5}(2.5)^3}{3!} = \frac{0.082085(15.625)}{6} \approx \frac{1.2826}{6} \approx 0.214.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Po}(6)$. State $E(X)$ and $\text{Var}(X)$.

Lời giải chi tiết

For a Poisson distribution, $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda = 6$.

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Po}(3)$ and $Y \sim \text{Po}(5)$ are independent. Find $P(X + Y = 2)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Since X, Y are independent Poisson variables, $X + Y \sim \text{Po}(3 + 5) = \text{Po}(8)$.

$$P(X + Y = 2) = \frac{e^{-8}(8)^2}{2!} = \frac{0.00033546(64)}{2} \approx \frac{0.021469}{2} \approx 0.0107.$$

Bài tập luyện tập

$X \sim B(10, 0.4)$. Find $P(X = 4)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} (0.4)^4 (0.6)^6 = 210(0.0256)(0.046656) \approx 0.251.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) $X \sim \text{Geo}(0.25)$. Find $P(X \leq 3)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$P(X \leq k) = 1 - (1 - p)^k \Rightarrow P(X \leq 3) = 1 - (0.75)^3 = 1 - 0.421875 = 0.578125 \approx 0.578.$$

Bài tập luyện tập

In a class, 60% of students are girls. Among girls, 30% play chess; among boys, 20% play chess. A student is chosen at random and plays chess. Find the probability that the student is a girl, as an exact fraction.

Lời giải chi tiết

$$P(\text{chess}) = 0.6(0.3) + 0.4(0.2) = 0.18 + 0.08 = 0.26.$$

$$P(\text{girl} \mid \text{chess}) = \frac{P(\text{girl and chess})}{P(\text{chess})} = \frac{0.18}{0.26} = \frac{18}{26} = \frac{9}{13}.$$

Calculus

Mục tiêu Unit: Giới hạn và đạo hàm từ định nghĩa, các quy tắc đạo hàm, ứng dụng đạo hàm (tiếp tuyến, cực trị, tối ưu hoá), động học, tích phân và ứng dụng, và (AHL) đạo hàm ẩn, tốc độ liên quan, khai triển Maclaurin, và phương trình vi phân.

5.1 Limits and differentiation from first principles

The **derivative** of f at x is $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ – the gradient of the tangent line to $y = f(x)$ at that point (provided the limit exists).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm tại một điểm là **giới hạn của độ dốc dây cung** khi hai điểm trên đồ thị tiến lại gần nhau (khoảng cách $h \rightarrow 0$), cho ra độ dốc của tiếp tuyến tại điểm đó. Đây là định nghĩa gốc – các quy tắc đạo hàm (lũy thừa, tích, thương, dây chuyền) đều được suy ra từ định nghĩa này.

Ví dụ mẫu • Worked example

Differentiate $g(x) = x^2 - 5x$ from first principles.

$$g(x+h) - g(x) = [(x+h)^2 - 5(x+h)] - [x^2 - 5x] = 2xh + h^2 - 5h = h(2x + h - 5).$$

$$g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 5)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h - 5) = 2x - 5.$$

Ví dụ mẫu • Worked example

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Factor: $\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ for $x \neq 3$. So the limit equals $3+3 = 6$ (the removable discontinuity at $x = 3$ does not affect the limit).

5.2 Differentiation rules

Standard derivatives: $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$; $\frac{d}{dx}e^x = e^x$; $\frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$; $\frac{d}{dx}\sin x = \cos x$; $\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$; $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Product rule: $(uv)' = u'v + uv'$. **Quotient rule:** $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. **Chain rule:** $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Differentiate $f(x) = x^4 \cos x$, $y = (5x - 2)^3$, and $y = e^{3x^2}$.

Product rule: $f'(x) = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$.

Chain rule: $y' = 3(5x - 2)^2 \cdot 5 = 15(5x - 2)^2$.

Chain rule: $y' = e^{3x^2} \cdot 6x = 6xe^{3x^2}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the gradient of $y = \frac{\ln x}{x}$ at $x = 1$, and the equation of the tangent there.

Quotient rule: $y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. At $x = 1$: $y'(1) = \frac{1 - 0}{1} = 1$, and $y(1) = 0$.

Tangent: $y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc dây chuyền (chain rule) là công cụ quan trọng nhất khi đạo hàm hàm hợp: "đạo hàm hàm ngoài (giữ nguyên hàm trong) NHÂN đạo hàm hàm trong". Với các hàm phức tạp kết hợp tích/thương và hàm hợp, hãy xác định cấu trúc tổng quát trước (đây là tích của hai hàm hay thương của hai hàm?) rồi mới áp dụng quy tắc tương ứng, dùng chain rule cho từng phần khi cần.

(!) Lỗi thường gặp: $\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] \neq f'(x)g'(x)$ — always use the product rule, never just multiply the two derivatives. Similarly, $\frac{d}{dx}[f(g(x))] \neq f'(g(x))$ alone — the chain rule requires multiplying by $g'(x)$ as well.

5.3 Derivatives of further functions (AHL)

AHL only. Reciprocal trig derivatives: $\frac{d}{dx} \sec x = \sec x \tan x$; $\frac{d}{dx} \csc x = -\csc x \cot x$;
 $\frac{d}{dx} \cot x = -\csc^2 x$.

Exponential/log derivatives (general base): $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$; $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$.

Inverse trig derivatives: $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{d}{dx} \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Các đạo hàm của $\sec$, $\csc$, $\cot$ đều có thể suy ra từ đạo hàm của $\sin$, $\cos$, $\tan$ bằng quy tắc thương – không cần học thuộc máy móc, chỉ cần nhớ $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ v.v. rồi áp dụng quy tắc thương. Đạo hàm của hàm ngược lượng giác ($\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$) đều KHÔNG chứa hàm lượng giác nào cả – chỉ là các biểu thức đại số đơn giản theo x , rất hữu ích khi tích phân ngược lại (xem thêm phần tích phân của chương này).

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Differentiate $y = \sec(3x)$ and $y = \cot(x^2)$.

Chain rule with $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \cdot u'$: $y' = \sec(3x) \tan(3x) \cdot 3 = 3 \sec(3x) \tan(3x)$.

Chain rule with $\frac{d}{dx} \cot u = -\csc^2 u \cdot u'$: $y' = -\csc^2(x^2) \cdot 2x = -2x \csc^2(x^2)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Differentiate $y = \arcsin(2x)$ and $y = \arctan(x^2)$.

Chain rule with $\frac{d}{dx} \arcsin u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$: $y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$.

Chain rule with $\frac{d}{dx} \arctan u = \frac{u'}{1+u^2}$: $y' = \frac{2x}{1+x^4}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the gradient of $y = \arctan x$ at $x = 1$, and the equation of the tangent there.

$y' = \frac{1}{1+x^2}$, so at $x = 1$: $y'(1) = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$. Also $y(1) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.

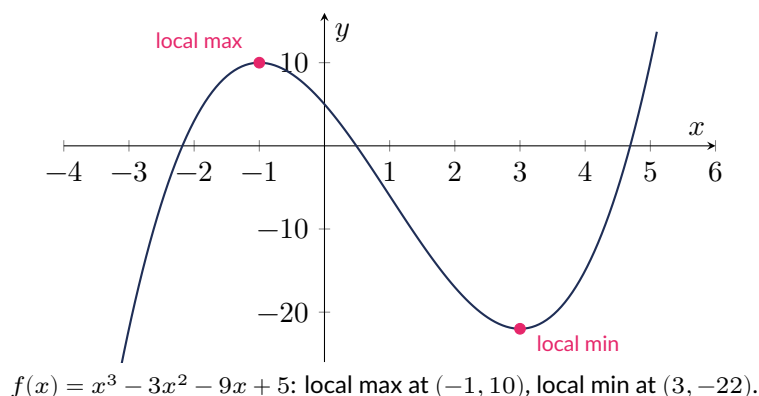
Tangent: $y - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x - 1)$.

(!) Lỗi thường gặp: (AHL) The derivatives of $\arcsin x$ and $\arccos x$ differ only by a sign ($\pm \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) – easy to mix up. Also, for $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$, remember the extra factor $\ln a$ is required whenever the base is *not* e ; forgetting it is the single most common error when differentiating general exponentials.

5.4 Applications of differentiation

f is increasing where $f'(x) > 0$ and decreasing where $f'(x) < 0$. **Stationary points** occur where $f'(x) = 0$.

Second derivative test: at a stationary point, $f''(x) > 0 \Rightarrow$ local minimum; $f''(x) < 0 \Rightarrow$ local maximum; $f''(x) = 0$ is inconclusive (check the sign of f' either side instead).



Ví dụ mẫu · Worked example

Find and classify the stationary points of $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 3$ or $x = -1$. $f''(x) = 6x - 6$. At $x = 3$: $f''(3) = 12 > 0 \Rightarrow$ local min, $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$. At $x = -1$: $f''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow$ local max, $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the tangent and normal lines to $y = x^3 - 2x + 1$ at $x = 2$.

$y(2) = 8 - 4 + 1 = 5$. $y' = 3x^2 - 2 \Rightarrow y'(2) = 12 - 2 = 10$. **Tangent:** $y - 5 = 10(x - 2) \Rightarrow y = 10x - 15$. **Normal** (gradient $-\frac{1}{10}$): $y - 5 = -\frac{1}{10}(x - 2) \Rightarrow y = -0.1x + 5.2$.

Ví dụ mẫu · Worked example

An open box is formed from a 24 cm by 15 cm sheet of card by cutting squares of side x from each corner and folding up the sides. Find x that maximizes the volume, and the maximum volume.

$V(x) = x(24 - 2x)(15 - 2x) = 360x - 78x^2 + 4x^3$, for $0 < x < 7.5$.

$$V'(x) = 360 - 156x + 12x^2 = 12(x^2 - 13x + 30) = 12(x - 3)(x - 10).$$

In the domain $0 < x < 7.5$, only $x = 3$ is valid (reject $x = 10$). Testing signs either side confirms $V' > 0$ for $x < 3$ and $V' < 0$ for $3 < x < 7.5$, so $x = 3$ is a maximum.

$$V(3) = 3(24 - 6)(15 - 6) = 3(18)(9) = 486 \text{ cm}^3.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong bài toán tối ưu hoá (optimization), luôn thực hiện đủ 4 bước: (1) lập hàm cần tối ưu theo MỘT biến; (2) xác định miền xác định hợp lý (ví dụ $0 < x < 7.5$ ở trên); (3) đạo hàm, giải

$f'(x) = 0$, loại các nghiệm ngoài miền; (4) xác nhận đó là cực đại/cực tiểu (bằng đạo hàm cấp 2 hoặc xét dấu f') trước khi kết luận.

Ví dụ mẫu · Worked example

A closed cylindrical can (with a lid) must hold a fixed volume of 500 cm^3 . Find the radius r and height h that minimize the total surface area of metal used, and verify this is indeed a minimum.

Volume: $V = \pi r^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$. Total surface area (two circular ends plus the curved side):

$$S(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{500}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}, \quad r > 0.$$

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{1000}{r^2}.$$

Setting $S'(r) = 0$: $4\pi r^3 = 1000 \Rightarrow r^3 = \frac{250}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{250}{\pi}} \approx 4.30 \text{ cm}$.

$$S''(r) = 4\pi + \frac{2000}{r^3}.$$

Every term of $S''(r)$ is positive for $r > 0$, so $S''(r) > 0$ throughout the domain – confirming $r \approx 4.30 \text{ cm}$ gives a **minimum**.

$$h = \frac{500}{\pi(4.30)^2} \approx 8.60 \text{ cm} \quad (\text{so } h = 2r \text{ at the optimum}), \quad S_{\min} = 2\pi(4.30)^2 + \frac{1000}{4.30} \approx 349 \text{ cm}^2.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A farmer has 240 m of fencing to enclose a rectangular field, using an existing wall as one side (so fencing is needed only for the other three sides). Find the dimensions that maximize the enclosed area, and state the maximum area.

Let x (m) be the length of each of the two sides perpendicular to the wall, and y (m) the length of the side parallel to the wall (opposite it). The fencing covers the two perpendicular sides and the far side:

$$2x + y = 240 \Rightarrow y = 240 - 2x, \quad 0 < x < 120.$$

Area: $A(x) = xy = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2$.

$$A'(x) = 240 - 4x.$$

Setting $A'(x) = 0$: $240 - 4x = 0 \Rightarrow x = 60$.

$$A''(x) = -4 < 0 \text{ for all } x \Rightarrow x = 60 \text{ gives a maximum.}$$

At $x = 60$: $y = 240 - 2(60) = 120$, so

$$A_{\max} = 60 \times 120 = 7200 \text{ m}^2.$$

5.5 Curve sketching

Sketching $y = f(x)$ systematically combines every tool met so far in this chapter – domain, intercepts, symmetry, asymptotes, and the derivative tests for turning points and concavity – into a

single procedure.

Systematic procedure for sketching $y = f(x)$:

- Domain:** exclude any value that makes a denominator zero, or that lies outside the domain of a root or logarithm.
- Intercepts:** the y -intercept is $f(0)$ (if $x = 0$ is in the domain); the x -intercepts solve $f(x) = 0$.
- Symmetry:** test $f(-x)$. If $f(-x) = f(x)$, f is **even** (symmetric in the y -axis); if $f(-x) = -f(x)$, f is **odd** (symmetric about the origin).
- Asymptotes:** a vertical asymptote occurs where the denominator vanishes while the numerator does not – examine the one-sided limits there. Horizontal or oblique asymptotes come from the end behaviour as $x \rightarrow \pm\infty$.
- Stationary points:** solve $f'(x) = 0$ and classify each with the second derivative test (or a sign chart for f').
- Concavity and inflection:** solve $f''(x) = 0$ and check whether f'' genuinely changes sign there.
- Assemble the sketch:** plot the intercepts and stationary points, draw the asymptotes as dashed guide lines, then join the branches consistently with the increasing/decreasing and concave up/concave down information found above.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vẽ phác đồ thị (curve sketching) là bước tổng hợp toàn bộ kiến thức đạo hàm của chương này: miền xác định, giao điểm với hai trục, tính chẵn/lẻ, tiệm cận, điểm dừng và tính lồi/lõm. Luôn thực hiện đủ 7 bước theo đúng thứ tự – bỏ sót một bước (đặc biệt là tiệm cận hoặc tính đối xứng) rất dễ dẫn đến hình vẽ sai dạng.

Ví dụ mẫu · Worked example

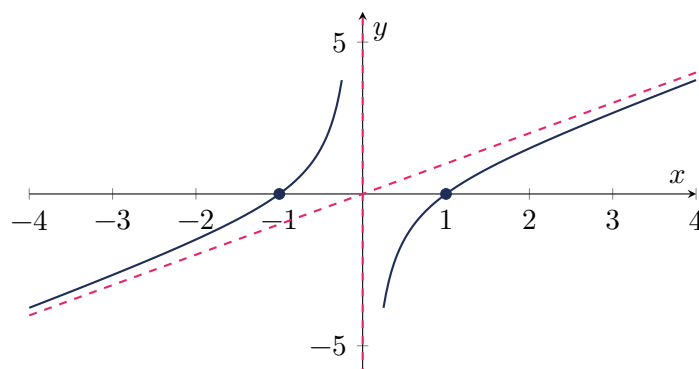
Sketch $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$, showing all key features.

Rewrite by dividing termwise: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x} = x - \frac{1}{x}$.

- Domain:** $x \neq 0$ (the denominator vanishes at $x = 0$).
- Intercepts:** x -intercepts solve $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$. There is no y -intercept, since $x = 0$ is excluded from the domain.
- Symmetry:** $f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = \frac{x^2 - 1}{-x} = -\frac{x^2 - 1}{x} = -f(x)$. So f is **odd**: the graph is symmetric about the origin.
- Asymptotes:**
 - Vertical:** at $x = 0$ the numerator equals $-1 \neq 0$, so $x = 0$ is a genuine vertical asymptote. As $x \rightarrow 0^+$, $-\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$, so $f(x) \rightarrow -\infty$; as $x \rightarrow 0^-$, $-\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$, so $f(x) \rightarrow +\infty$.
 - Oblique:** as $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{1}{x} \rightarrow 0$, so $f(x) \rightarrow x$. Hence $y = x$ is an oblique asymptote.
- Stationary points:** $f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$ (since $\frac{d}{dx}(-x^{-1}) = x^{-2}$). Because $\frac{1}{x^2} > 0$ for every $x \neq 0$, we have $f'(x) > 1 > 0$ throughout the domain – f is **strictly increasing on $(-\infty, 0)$ and on $(0, \infty)$, with no stationary points.**

6. Concavity: $f''(x) = -\frac{2}{x^3}$. For $x > 0$: $f''(x) < 0$ (concave down). For $x < 0$: $x^3 < 0$, so $f''(x) = -\frac{2}{x^3} > 0$ (concave up). Concavity switches sign across $x = 0$, but since $x = 0$ is not in the domain, this is not a point of inflection – it is simply where the vertical asymptote sits.

7. Sketch: two increasing branches, crossing the x -axis at $x = -1$ and $x = 1$, hugging the vertical asymptote $x = 0$, and approaching the oblique asymptote $y = x$ as $|x| \rightarrow \infty$ (below).



$f(x) = x - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - 1}{x}$: odd function, vertical asymptote $x = 0$ and oblique asymptote $y = x$ (both dashed), x -intercepts at $x = \pm 1$, increasing on each branch with no stationary points.

(!) Lỗi thường gặp: An oblique (slant) asymptote can only exist when the degree of the numerator is exactly one more than the degree of the denominator (after cancelling any common factors). Do not confuse it with a horizontal asymptote – a rational function has *either* a horizontal or an oblique asymptote, never both.

5.6 Points of inflection and concavity

f is **concave up** on an interval where $f''(x) > 0$ (the graph curves upward, like a cup); **concave down** where $f''(x) < 0$ (the graph curves downward, like a cap). A **point of inflection** is a point where the concavity changes – that is, where $f''(x) = 0$ and f'' changes sign either side of that point. Solving $f''(x) = 0$ alone is **not** sufficient: the sign change must always be verified, since $f'' = 0$ can also occur where the concavity does not actually change.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Lồi/lõm (concavity) mô tả hướng cong của đồ thị: $f'' > 0$ nghĩa là đồ thị "lõm lên" (như đáy chén), $f'' < 0$ nghĩa là "lồi xuống" (như mái vòm). Điểm uốn (point of inflection) là nơi độ cong ĐỔI CHIỀU. Lưu ý quan trọng: $f''(x) = 0$ chỉ là điều kiện CẦN, không phải điều kiện ĐỦ – luôn phải kiểm tra dấu f'' ở hai bên điểm đó để xác nhận có thực sự đổi dấu hay không, tương tự cách phân loại điểm dừng bằng dấu f' .

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the point of inflection of $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$, and state the intervals of concavity.

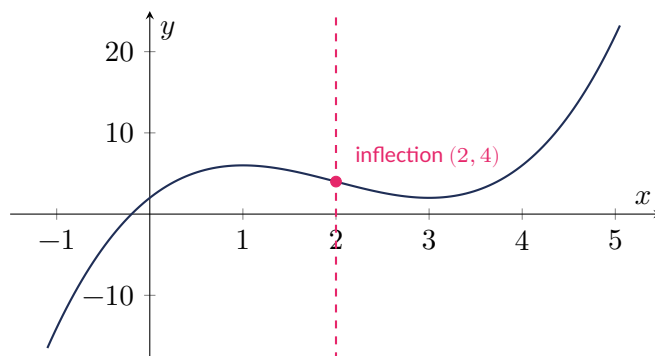
$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9. \quad f''(x) = 6x - 12.$$

$$\text{Solve } f''(x) = 0: 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Check the sign of f'' either side: for $x < 2$ (e.g. $x = 0$), $f''(0) = -12 < 0$ (concave down); for

$x > 2$ (e.g. $x = 3$), $f''(3) = 6 > 0$ (concave up). The sign genuinely changes, so $x = 2$ is a point of inflection.

$f(2) = 2^3 - 6(2)^2 + 9(2) + 2 = 8 - 24 + 18 + 2 = 4$. So the point of inflection is $(2, 4)$, with f concave down on $(-\infty, 2)$ and concave up on $(2, \infty)$.



$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$: concave down on $(-\infty, 2)$, concave up on $(2, \infty)$, point of inflection at $(2, 4)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find all points of inflection of $f(x) = x^4 - 6x^2$.

$$f'(x) = 4x^3 - 12x. \quad f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1).$$

Solve $f''(x) = 0$: $x = 1$ or $x = -1$.

Check signs at three test points: for $x < -1$ (e.g. $x = -2$), $f''(-2) = 12(-3)(-1) = 36 > 0$ (concave up); for $-1 < x < 1$ (e.g. $x = 0$), $f''(0) = 12(-1)(1) = -12 < 0$ (concave down); for $x > 1$ (e.g. $x = 2$), $f''(2) = 12(1)(3) = 36 > 0$ (concave up). The sign changes at *both* $x = -1$ and $x = 1$, so both are genuine points of inflection.

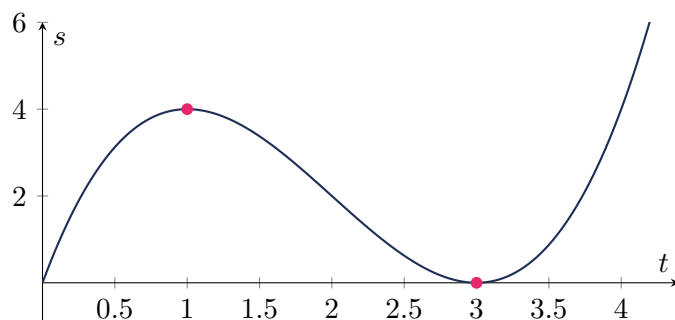
$f(-1) = 1 - 6 = -5$ and $f(1) = 1 - 6 = -5$ (the graph is even, so these values match, as expected from the symmetry). Points of inflection: $(-1, -5)$ and $(1, -5)$.

(!) Lỗi thường gặp: A zero value of f'' does not by itself guarantee a point of inflection. For $f(x) = x^4$, $f''(x) = 12x^2 = 0$ at $x = 0$, but $f''(x) \geq 0$ for every x – there is no sign change, so $(0, 0)$ is **not** a point of inflection even though $f''(0) = 0$.

5.7 Kinematics

For motion in a straight line, if $s(t)$ is displacement: $v(t) = \frac{ds}{dt}$, $a(t) = \frac{dv}{dt}$.

The particle is **momentarily at rest** when $v(t) = 0$. **Displacement** over $[a, b]$ is $s(b) - s(a)$; **total distance travelled** must account for any reversals in direction (sum the absolute value of displacement over each interval where v keeps one sign).



$s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$: the particle reverses direction at $t = 1$ ($s = 4$) and $t = 3$ ($s = 0$).

Ví dụ mẫu · Worked example

A particle moves with $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (m), $t \geq 0$. Find $v(t)$, the times the particle is at rest, and the total distance travelled in the first 4 seconds.

$v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$; at rest when $t = 1$ or $t = 3$. Evaluate s at the key times: $s(0) = 0$, $s(1) = 4$, $s(3) = 0$, $s(4) = 64 - 96 + 36 = 4$.

$$\text{Distance} = |s(1) - s(0)| + |s(3) - s(1)| + |s(4) - s(3)| = 4 + 4 + 4 = 12 \text{ m.}$$

(Note the *displacement* over $[0, 4]$ is only $s(4) - s(0) = 4$ m – much less than the total distance, because the particle reverses direction twice.)

(!) Lỗi thường gặp: Displacement and total distance travelled are **not** the same whenever the velocity changes sign within the interval. Always check for sign changes in $v(t)$ before assuming distance $= |s(b) - s(a)|$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A particle moves in a straight line with velocity $v(t) = t^2 - 4t + 3$ (m/s) for $0 \leq t \leq 4$. Find (a) the displacement over this interval, and (b) the total distance travelled, and explain why the two differ.

Factor: $v(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3) = 0$ at $t = 1$ and $t = 3$. Testing a value in each sub-interval: $v > 0$ on $(0, 1)$, $v < 0$ on $(1, 3)$, $v > 0$ on $(3, 4)$ – the particle reverses direction twice.

(a) Displacement is the plain definite integral of v over $[0, 4]$:

$$\int_0^4 (t^2 - 4t + 3) dt = \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right]_0^4 = \left(\frac{64}{3} - 32 + 12 \right) - 0 = \frac{64}{3} - 20 = \frac{4}{3} \text{ m} \approx 1.33 \text{ m.}$$

(b) Total distance requires splitting the integral at $t = 1$ and $t = 3$ and taking the absolute value of each piece:

$$\int_0^1 v dt = \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right]_0^1 = \frac{1}{3} - 2 + 3 = \frac{4}{3}, \quad \int_1^3 v dt = \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right]_1^3 = 0 - \frac{4}{3} = -\frac{4}{3}, \quad \int_3^4 v dt = \left[\frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t \right]_3^4 = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$

$$\text{Distance} = \left| \frac{4}{3} \right| + \left| -\frac{4}{3} \right| + \left| \frac{4}{3} \right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 4 \text{ m.}$$

The displacement ($\frac{4}{3}$ m) is much smaller than the total distance (4 m), because the negative middle piece *cancels* part of the positive pieces when the signed integrals are added directly – exactly the danger flagged in the pitfall above.

5.8 Integration and areas

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1); \quad \int e^x dx = e^x + C; \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C; \quad \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad \int \cos x dx = \sin x + C.$$

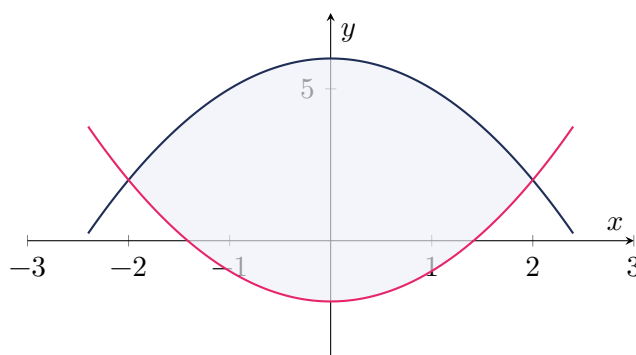
Fundamental theorem of calculus: $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$, where $F' = f$. The definite integral $\int_a^b f(x) dx$ gives the **signed area** between the curve and the x -axis.

Ví dụ mẫu · Worked example

Evaluate $\int (3x^2 - 4x + 2) dx$ and $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$.

$$\int (3x^2 - 4x + 2) dx = x^3 - 2x^2 + 2x + C.$$

$$\int_0^2 (x^2 + 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x \right]_0^2 = \left(\frac{8}{3} + 2 \right) - 0 = \frac{14}{3}.$$



The region enclosed between $y = 6 - x^2$ (navy) and $y = x^2 - 2$ (pink), shaded, between their intersection points $x = \pm 2$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the area enclosed between $y = 6 - x^2$ and $y = x^2 - 2$.

Intersections: $6 - x^2 = x^2 - 2 \Rightarrow 8 = 2x^2 \Rightarrow x = \pm 2$. On $(-2, 2)$, $y = 6 - x^2$ is the upper curve (e.g. at $x = 0$: $6 > -2$).

$$A = \int_{-2}^2 [(6 - x^2) - (x^2 - 2)] dx = \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \frac{32}{3} - \left(-\frac{32}{3} \right) = \frac{64}{3}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Diện tích giữa hai đường cong luôn tính bằng "hàm TRÊN trừ hàm DƯỚI" trên đoạn giao nhau – phải xác định đúng đường nào nằm trên trước khi lập tích phân (thường kiểm tra bằng cách thay một giá trị x cụ thể trong đoạn). Nếu hàm dưới trực hoành, tích phân sẽ cho kết quả âm; khi đó lấy trị tuyệt đối để có diện tích thực.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the volume generated when $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, is rotated 360° about the x -axis.

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_0^4 x dx = \pi \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \pi(8) = 8\pi \approx 25.1 \text{ (cubic units)}.$$

5.9 Volumes of revolution (AHL)

AHL only. Rotation about the x -axis: the solid formed by rotating $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, through 360° about the x -axis has volume

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Rotation about the y -axis: the solid formed by rotating $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, through 360° about the y -axis has volume

$$V = \pi \int_c^d x^2 dy = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy.$$

Volume between two curves rotated about the x -axis (with $f(x) \geq g(x) \geq 0$ on $[a, b]$):

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Công thức thể tích khối tròn xoay quanh trục x là $V = \pi \int y^2 dx$ — luôn bình phương y TRƯỚC khi tích phân (không phải tích phân y rồi mới bình phương). Khi quay quanh trục y , phải viết lại hàm theo dạng $x = g(y)$ trước, rồi tích phân $\pi \int x^2 dy$ theo biến y . Khi tính thể tích giữa hai đường cong quay quanh trục x , lấy bình phương của hàm NGOÀI trừ bình phương của hàm TRONG (không phải lấy hiệu rồi mới bình phương) — đây là lỗi rất phổ biến.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) The curve $x = y^2$, $0 \leq y \leq 3$, is rotated 360° about the y -axis. Find the volume of the solid formed, in terms of π .

$$V = \pi \int_0^3 x^2 dy = \pi \int_0^3 (y^2)^2 dy = \pi \int_0^3 y^4 dy = \pi \left[\frac{y^5}{5} \right]_0^3 = \pi \left(\frac{243}{5} \right) = \frac{243\pi}{5}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) The region enclosed between $y = x^2$ and $y = 2x$ (for $x \geq 0$) is rotated 360° about the x -axis. Find the volume of the solid formed, in terms of π .

Intersections: $x^2 = 2x \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0, 2$. On $(0, 2)$, $y = 2x$ lies above $y = x^2$ (e.g. at

$x = 1: 2 > 1$, so $f(x) = 2x$ is the outer curve and $g(x) = x^2$ the inner curve.

$$V = \pi \int_0^2 [(2x)^2 - (x^2)^2] dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - x^4) dx = \pi \left[\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right).$$

$$V = \pi \left(\frac{160 - 96}{15} \right) = \frac{64\pi}{15}.$$

(!) Lỗi thường gặp: (AHL) For rotation about the y -axis, the boundary curve must first be re-arranged into the form $x = g(y)$ – substituting the original $y = f(x)$ directly into $\pi \int x^2 dy$ is a common and serious error. For the volume between two curves, squaring the *difference* of the functions (instead of taking the difference of the squares) is another frequent mistake.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\int 2x(x^2 + 1)^5 dx$ using substitution.

Let $u = x^2 + 1$, so $du = 2x dx$:

$$\int 2x(x^2 + 1)^5 dx = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{(x^2 + 1)^6}{6} + C.$$

5.10 Integration by parts (AHL)

AHL only. Integration by parts: for a product of two functions,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

This follows from the product rule $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$, integrated on both sides. Choose u to be the factor that **simplifies** when differentiated (e.g. a polynomial), and dv to be the factor that is easy to **integrate** (e.g. e^x , $\sin x$, $\cos x$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

(AHL) Tích phân từng phần (integration by parts) dùng khi cần tích phân TÍCH của hai hàm mà phép thế biến (substitution) không áp dụng được trực tiếp. Công thức được suy ra từ quy tắc đạo hàm tích: lấy đạo hàm hai vế của (uv) rồi tích phân lại hai vế. Mẹo chọn u : ưu tiên đa thức (đạo hàm sẽ giảm bậc, "đơn giản hoá" dần), còn dv là phần dễ tích phân nhất (thường là e^x , $\sin x$, $\cos x$).

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\int xe^x dx$.

Let $u = x$ (so $du = dx$) and $dv = e^x dx$ (so $v = e^x$):

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Check: $\frac{d}{dx}[xe^x - e^x + C] = (e^x + xe^x) - e^x = xe^x \checkmark$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\int x \sin x \, dx$.

Let $u = x$ (so $du = dx$) and $dv = \sin x \, dx$ (so $v = -\cos x$):

$$\int x \sin x \, dx = -x \cos x - \int (-\cos x) \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Check: $\frac{d}{dx}[-x \cos x + \sin x + C] = (-\cos x + x \sin x) + \cos x = x \sin x \checkmark$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\int_0^1 xe^x \, dx$ exactly.

From the antiderivative found above, $\int xe^x \, dx = xe^x - e^x + C$, so

$$\int_0^1 xe^x \, dx = [xe^x - e^x]_0^1 = (1 \cdot e^1 - e^1) - (0 \cdot e^0 - e^0) = (e - e) - (0 - 1) = 0 - (-1) = 1.$$

The two e^1 terms at the upper limit cancel exactly ($e - e = 0$), leaving the clean result $\int_0^1 xe^x \, dx = 1$.

(!) Lỗi thường gặp: Integration by parts can require applying the formula **more than once** (e.g. for $\int x^2 e^x \, dx$), or applying it and then solving an algebraic equation for the original integral (for products like $e^x \sin x$). Always simplify $\int v \, du$ as far as possible before deciding whether a second application is needed.

5.11 Integration using partial fractions (AHL)

A rational function whose denominator factors can be integrated by first splitting it into partial fractions (Unit 1, Number and Algebra), then integrating each simple term.

$$\text{AHL only. } \int \frac{1}{x+a} \, dx = \ln|x+a| + C. \quad \int \frac{1}{(x+a)^2} \, dx = -\frac{1}{x+a} + C. \quad \int \frac{1}{x^2+a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + C.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Để tích phân một phân thức hữu tỉ có mẫu số phân tích được thành nhân tử, luôn phân tích thành phân thức đơn giản (partial fractions, Unit 1) TRƯỚC, rồi mới tích phân từng số

hạng — mỗi số hạng dạng $\frac{k}{x+a}$ cho ra $k \ln|x+a|$, còn dạng $\frac{k}{(x+a)^2}$ cho ra $-\frac{k}{x+a}$ (không phải logarit, vì số mũ ở mẫu khác -1). Với mẫu số là tổng hai bình phương (không phân tích được), kết quả liên quan đến arctan.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\int \frac{5x+7}{(x+1)(x+3)} dx$.

From Unit 1, $\frac{5x+7}{(x+1)(x+3)} = \frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+3}$, so

$$\int \frac{5x+7}{(x+1)(x+3)} dx = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x+3} \right) dx = \ln|x+1| + 4 \ln|x+3| + C.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\int \frac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2} dx$.

From Unit 1, $\frac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x+2} - \frac{1}{(x+2)^2}$, so

$$\int \frac{3x^2+5x+1}{(x-1)(x+2)^2} dx = \ln|x-1| + 2 \ln|x+2| + \frac{1}{x+2} + C.$$

(The last term integrates using $\int -\frac{1}{(x+2)^2} dx = \frac{1}{x+2} + C$.)

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\int_2^5 \frac{5x+7}{(x+1)(x+3)} dx$, correct to 3 s.f.

Using the antiderivative found above,

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{5x+7}{(x+1)(x+3)} dx &= \left[\ln|x+1| + 4 \ln|x+3| \right]_2^5 = (\ln 6 + 4 \ln 8) - (\ln 3 + 4 \ln 5) \\ &= (1.79176 + 4(2.07944)) - (1.09861 + 4(1.60944)) = (1.79176 + 8.31777) - (1.09861 + 6.43775) \\ &= 10.10953 - 7.53636 \approx 2.57. \end{aligned}$$

(!) Lỗi thường gặp: (AHL) A term $\frac{B}{(x+a)^2}$ from a partial-fraction decomposition integrates to $-\frac{B}{x+a}$ (not $B \ln|x+a|$) — the natural logarithm only arises from a term with exponent exactly -1 in the denominator. Always check the exponent on each partial-fraction term before choosing the antiderivative rule.

5.12 Implicit differentiation and related rates (AHL)

AHL only. Implicit differentiation: differentiate both sides of an equation relating x and y with respect to x , applying the chain rule to every y -term (each produces a factor of $\frac{dy}{dx}$); then collect and solve for $\frac{dy}{dx}$.

Related rates: if two quantities are linked by an equation, differentiate that equation with respect to **time** t (using the chain rule) to relate their rates of change.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find $\frac{dy}{dx}$ for $x^2 + y^2 = 25$ at the point $(3, 4)$.

Differentiate implicitly: $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. At $(3, 4)$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Given $x^2y + y^3 = 10$, find $\frac{dy}{dx}$ at the point $(1, 2)$.

Differentiate term by term (product rule on x^2y): $2xy + x^2 \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + 3y^2}$.

At $(1, 2)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{-2(1)(2)}{1 + 3(4)} = \frac{-4}{13}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) A 10 m ladder leans against a vertical wall; the base slides away from the wall at 0.5 m/s. Find the rate at which the top slides down the wall when the base is 6 m from the wall.

Let x = distance of base from wall, y = height of top on wall: $x^2 + y^2 = 100$. Differentiate w.r.t.

t : $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt}$. At $x = 6$: $y = \sqrt{100 - 36} = 8$.

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{6}{8}(0.5) = -0.375 \text{ m/s}$$

(the negative sign shows y is decreasing – the top slides down at 0.375 m/s).

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) A spherical balloon is inflated so that its volume increases at a constant rate of $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. Find the rate of increase of the radius when $r = 5 \text{ cm}$.

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$100 = 4\pi(25) \frac{dr}{dt} = 100\pi \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318 \text{ cm/s}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

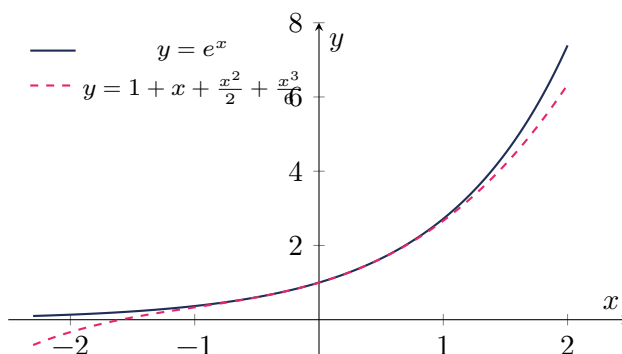
(AHL) Đạo hàm ẩn dùng khi y không được viết tường minh theo x — mỗi lần đạo hàm một biểu thức chứa y , PHẢI nhân thêm $\frac{dy}{dx}$ (theo quy tắc dây chuyền), vì y được xem là hàm ẩn của x . Bài toán tốc độ liên quan (related rates) luôn có 4 bước: (1) lập phương trình liên hệ các đại lượng; (2) đạo hàm hai vế theo thời gian t ; (3) thay các giá trị đã biết TẠI thời điểm cần xét; (4) giải tìm tốc độ cần tìm.

5.13 Maclaurin series (AHL)

AHL only. The Maclaurin series of f is

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Standard series: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$; $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$; $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ ($|x| < 1$).



The cubic Maclaurin polynomial approximates e^x closely near $x = 0$, and diverges further away.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the Maclaurin series for $f(x) = \cos x$ up to the term in x^4 .

$f(0) = 1$, $f'(0) = -\sin 0 = 0$, $f''(0) = -\cos 0 = -1$, $f'''(0) = \sin 0 = 0$, $f^{(4)}(0) = \cos 0 = 1$.

$$\cos x \approx 1 + 0 \cdot x + \frac{-1}{2!}x^2 + 0 \cdot x^3 + \frac{1}{4!}x^4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Find the Maclaurin series for $f(x) = \ln(1+2x)$ up to the term in x^3 .

Substitute $u = 2x$ into $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \dots$:

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{3} - \dots = 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3} - \dots$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Use the Maclaurin series for e^x to evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

$$e^x - 1 - x = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots, \text{ so } \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \dots \rightarrow \frac{1}{2} \text{ as } x \rightarrow 0.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Khai triển Maclaurin xấp xỉ một hàm số bằng đa thức xoay quanh $x = 0$, dùng đạo hàm các cấp tại 0. Ba khai triển e^x , $\sin x$, $\ln(1+x)$ nên được học thuộc vì xuất hiện thường xuyên trong đề AHL – đặc biệt hữu ích để tính giới hạn dạng $\frac{0}{0}$ mà không cần quy tắc L'Hôpital.

5.14 L'Hôpital's rule (AHL)

AHL only. If $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (an indeterminate form $\frac{0}{0}$), or both $f(x)$ and $g(x)$ tend to $\pm\infty$ (an indeterminate form $\frac{\infty}{\infty}$), then

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

provided the limit on the right exists. The rule may be applied **repeatedly** if the new limit is still indeterminate, and it applies equally as $x \rightarrow \pm\infty$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Quy tắc L'Hôpital cho phép tính giới hạn dạng vô định $\frac{0}{0}$ hoặc $\frac{\infty}{\infty}$ bằng cách lấy đạo hàm TỬ và đạo hàm MẪU một cách ĐỘC LẬP (không phải đạo hàm của cả phân thức bằng quy tắc thương) rồi tính lại giới hạn mới. Nếu kết quả vẫn ở dạng vô định, có thể áp dụng lại quy tắc thêm lần nữa. Đây là công cụ thay thế cho khai triển Maclaurin ở phần trước khi tính giới hạn $\frac{0}{0}$ – hai phương pháp phải luôn cho cùng một đáp số.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ using L'Hôpital's rule.

As $x \rightarrow 0$: numerator $\sin x \rightarrow 0$ and denominator $x \rightarrow 0$ – the indeterminate form $\frac{0}{0}$. Let $f(x) = \sin x$, $g(x) = x$: $f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ using L'Hôpital's rule, applied twice.

As $x \rightarrow 0$: numerator $e^x - 1 - x \rightarrow 1 - 1 - 0 = 0$ and denominator $x^2 \rightarrow 0$ – the form $\frac{0}{0}$. **First**

application: differentiate top and bottom: $\frac{d}{dx}(e^x - 1 - x) = e^x - 1$, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x}.$$

As $x \rightarrow 0$: $e^x - 1 \rightarrow 0$ and $2x \rightarrow 0$ – still $\frac{0}{0}$, so apply L'Hôpital again. **Second application:**

$$\frac{d}{dx}(e^x - 1) = e^x, \quad \frac{d}{dx}(2x) = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}.$$

This confirms $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1}{2}$ – matching exactly the Maclaurin-series result found earlier in this chapter for the same limit.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Evaluate $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ using L'Hôpital's rule.

As $x \rightarrow \infty$: numerator $\ln x \rightarrow \infty$ and denominator $x \rightarrow \infty$ – the indeterminate form $\frac{\infty}{\infty}$. Let

$$f(x) = \ln x, g(x) = x: f'(x) = \frac{1}{x}, g'(x) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

(!) Lỗi thường gặp: L'Hôpital's rule only applies to indeterminate forms $\frac{0}{0}$ or $\frac{\infty}{\infty}$ – always check this condition first by substituting the limit value directly. Applying the rule to a form that is already determinate (e.g. $\frac{5}{0}$ or $\frac{0}{5}$) gives a wrong answer, since ordinary limit laws already apply there.

5.15 Differential equations (AHL)

AHL only. A **separable** differential equation $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$ can be solved by separating variables: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$, then solving for y (using any given initial condition to find the constant of integration).

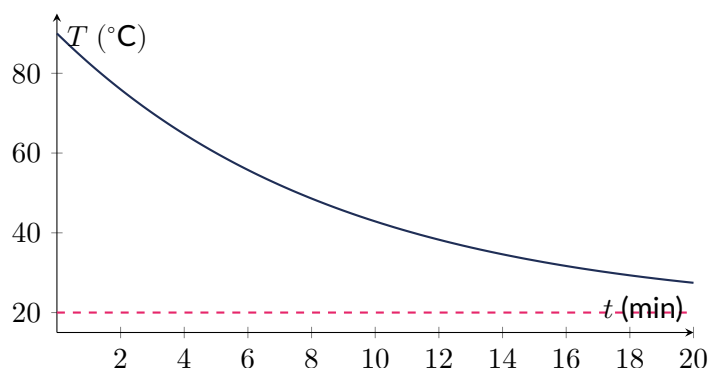
Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Solve $\frac{dy}{dx} = xy^2$ given $y(0) = 1$.

Separate: $\int y^{-2} dy = \int x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + C$. At $x = 0, y = 1$: $-1 = 0 + C \Rightarrow C = -1$. So

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - 1 \Rightarrow \frac{1}{y} = 1 - \frac{x^2}{2} = \frac{2 - x^2}{2}.$$

$$y = \frac{2}{2 - x^2}.$$



Newton's law of cooling: $T(t) = 20 + 70e^{-0.1119t}$ decays toward the room temperature asymptote $T = 20$ (dashed).

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) **Newton's law of cooling:** $\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$, where T is temperature ($^{\circ}\text{C}$) and 20°C is room temperature. Given $T(0) = 90$ and $T(5) = 60$, find k and $T(10)$.

Separate: $\int \frac{dT}{T - 20} = \int -k dt \Rightarrow \ln |T - 20| = -kt + C \Rightarrow T - 20 = Ae^{-kt}$. At $t = 0$: $90 - 20 = A \Rightarrow A = 70$, so $T(t) = 20 + 70e^{-kt}$. At $t = 5$: $60 - 20 = 70e^{-5k} \Rightarrow e^{-5k} = \frac{4}{7} \Rightarrow k = -\frac{1}{5} \ln\left(\frac{4}{7}\right) \approx 0.1119$.

$$T(10) = 20 + 70e^{-0.1119(10)} = 20 + 70e^{-1.119} \approx 20 + 22.85 \approx 42.9^{\circ}\text{C}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Phương trình vi phân tách biến (separable) là dạng phổ biến nhất trong đề AHL: đưa tất cả biểu thức chứa y (kể cả dy) sang một vế, biểu thức chứa x (kể cả dx) sang vế còn lại, rồi tích phân hai vế độc lập. Định luật làm nguội Newton là ứng dụng kinh điển: nhiệt độ luôn tiến dần về nhiệt độ môi trường theo hàm mũ suy giảm — không bao giờ "vọt qua" nhiệt độ môi trường.

(!) **Lỗi thường gặp:** When finding the constant of integration in a separable DE, substitute the *initial condition* immediately after integrating both sides — do not simplify the general solution first, or the constant can become tangled inside a logarithm or fraction and harder to isolate correctly.

5.15.1 Euler's Method (AHL)

Not every differential equation can be solved exactly by separating variables. **Euler's method** instead builds up a numerical approximation to the solution curve, one small step at a time, using only the gradient function $f(x, y)$ itself.

AHL only. For $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ with initial condition $y(x_0) = y_0$ and a chosen step size h , **Euler's method** generates successive approximations by

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n).$$

Each step follows the **tangent line** to the solution curve at (x_n, y_n) — whose gradient is $f(x_n, y_n)$ — forward by a horizontal distance h , treating that tangent line as a short-range approximation to the true curve.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(AHL) Phương pháp Euler xấp xỉ nghiệm của phương trình vi phân $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ khi không (hoặc chưa cần) giải chính xác bằng tách biến. Ý tưởng: tại mỗi điểm (x_n, y_n) đã biết, dùng TIẾP TUYẾN tại điểm đó (độ dốc $f(x_n, y_n)$) để "bước" một khoảng h theo trục hoành, ước lượng giá trị y tiếp theo là $y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$. Lặp lại nhiều lần cho ra một dãy điểm xấp xỉ bám theo đồ thị nghiệm thật.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Use Euler's method with step size $h = 0.1$ to approximate $y(0.3)$ for $\frac{dy}{dx} = x + y$, given $y(0) = 1$.

Here $f(x, y) = x + y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.1$. Apply $x_{n+1} = x_n + 0.1$ and $y_{n+1} = y_n + 0.1 f(x_n, y_n)$ three times:

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = x_n + y_n$
0	0	1	1
1	0.1	1.1	1.2
2	0.2	1.22	1.42
3	0.3	1.362	—

Each row's y_n comes from the previous row: $y_1 = 1 + 0.1(1) = 1.1$, $y_2 = 1.1 + 0.1(1.2) = 1.22$, $y_3 = 1.22 + 0.1(1.42) = 1.362$. So $y(0.3) \approx 1.362$.

(!) Lỗi thường gặp: (AHL) Euler's method only ever produces an **approximation** to the true solution (unless that solution happens to be linear) — it is never exact. A **smaller** step size h tracks the true curve more closely (more accurate) but requires more steps and hence more arithmetic; a **larger** h is quicker but accumulates more error at each step.

Ví dụ mẫu · Worked example

(AHL) Use Euler's method with step size $h = 0.5$ to approximate $y(1)$ for $\frac{dy}{dx} = y$, given $y(0) = 1$, and compare with the exact solution.

Here $f(x, y) = y$, $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $h = 0.5$. **Step 1:** $f(x_0, y_0) = y_0 = 1 \Rightarrow y_1 = 1 + 0.5(1) = 1.5$ at $x_1 = 0.5$. **Step 2:** $f(x_1, y_1) = y_1 = 1.5 \Rightarrow y_2 = 1.5 + 0.5(1.5) = 2.25$ at $x_2 = 1$. So the Euler approximation gives $y(1) \approx 2.25$.

This equation is also separable: $\int \frac{1}{y} dy = \int dx \Rightarrow \ln |y| = x + C$, and $y(0) = 1$ gives $C = 0$,

so the exact solution is $y = e^x$, giving $y(1) = e \approx 2.71828$. **Check:** the Euler estimate 2.25 is noticeably below the exact value $e \approx 2.71828$ (an error of about 0.468, roughly 17%) – with only two large steps, the straight tangent-line steps cut across the upward curve of e^x , illustrating exactly the accuracy limitation described in the pitfall above.

5.16 Practice: Paper 1 style (no calculator)

Bài tập luyện tập

Differentiate $g(x) = x^2 - 5x$ from first principles.

Lời giải chi tiết

$g(x+h) - g(x) = h(2x+h-5)$, so $g'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h-5) = 2x-5$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3}$.

(A) 6

(C) 0

(B) 3

(D) 9

Lời giải chi tiết

$\frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3 \rightarrow 6$ as $x \rightarrow 3$. (A).

Bài tập luyện tập

Differentiate $f(x) = x^4 \cos x$.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 4x^3 \cos x - x^4 \sin x$ (product rule).

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = (5x - 2)^3$.

(A) $15(5x - 2)^2$

(C) $5(5x - 2)^2$

(B) $3(5x - 2)^2$

(D) $15(5x - 2)^3$

Lời giải chi tiết

$y' = 3(5x - 2)^2(5) = 15(5x - 2)^2$. (A).

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = e^{3x^2}$.

Lời giải chi tiết

$$y' = 6xe^{3x^2}.$$

Bài tập luyện tập

Find the equation of the tangent to $y = x^3 - 2x + 1$ at $x = 2$.

Lời giải chi tiết

$$y(2) = 5, y'(2) = 10. \text{ Tangent: } y = 10x - 15.$$

Bài tập luyện tập

Find and classify the stationary points of $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$.

Lời giải chi tiết

$$x = 3: \text{ local min, } f(3) = -22. \quad x = -1: \text{ local max, } f(-1) = 10.$$

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int (3x^2 - 4x + 2) dx$.

Lời giải chi tiết

$$x^3 - 2x^2 + 2x + C.$$

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_0^2 (x^2 + 1) dx$ exactly.

(A) $\frac{14}{3}$

(C) 6

(B) $\frac{8}{3}$

(D) $\frac{10}{3}$

Lời giải chi tiết

$$\left[\frac{x^3}{3} + x\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

A particle has $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. Find $v(t)$ and the times when the particle is at rest.

Lời giải chi tiết

$$v(t) = 3(t-1)(t-3); \text{ at rest when } t = 1 \text{ or } t = 3.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $\frac{dy}{dx} = xy^2$ given $y(0) = 1$.

Lời giải chi tiết

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} - 1 \Rightarrow y = \frac{2}{2 - x^2}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find $\frac{dy}{dx}$ implicitly for $x^2 + y^2 = 25$ at $(3, 4)$.

(A) $-\frac{3}{4}$

(C) $-\frac{4}{3}$

(B) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{4}{3}$

Lời giải chi tiết

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{3}{4}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the Maclaurin series of $f(x) = \cos x$ up to the term in x^4 .

Lời giải chi tiết

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Use the Maclaurin series for e^x to evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

(A) $\frac{1}{2}$

(C) 0

(B) 1

(D) ∞

Lời giải chi tiết

$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ as } x \rightarrow 0. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int 2x(x^2 + 1)^5 dx$.

Lời giải chi tiết

$$u = x^2 + 1: \frac{(x^2 + 1)^6}{6} + C.$$

Bài tập luyện tập

State the domain and the equations of all asymptotes of $f(x) = \frac{x^2 - 9}{x}$.

Lời giải chi tiết

Dividing termwise, $f(x) = x - \frac{9}{x}$. **Domain:** $x \neq 0$ (the numerator at $x = 0$ is $-9 \neq 0$, so $x = 0$ is a genuine vertical asymptote). **Vertical asymptote:** $x = 0$. **Oblique asymptote:** as $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{9}{x} \rightarrow 0$, so $f(x) \rightarrow x$, giving $y = x$.

Bài tập luyện tập

What type of symmetry does $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}$ have?

(A) Odd

(C) Neither

(B) Even

(D) Cannot be determined

Lời giải chi tiết

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{-x} = \frac{x^2 - 1}{-x} = -f(x), \text{ so } f \text{ is odd. (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find the point of inflection of $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$.

Lời giải chi tiết

$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$. Sign changes ($f'' < 0$ for $x < 2$, $f'' > 0$ for $x > 2$), and $f(2) = 8 - 24 + 18 + 2 = 4$, so the point of inflection is $(2, 4)$.

Bài tập luyện tập

How many points of inflection does the graph of $f(x) = x^4 - 6x^2$ have?

(A) 2

(C) 0

(B) 1

(D) 4

Lời giải chi tiết

$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x - 1)(x + 1) = 0$ at $x = \pm 1$; the sign of f'' changes at both values (positive, then negative, then positive), so both are genuine points of inflection. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int x e^x dx$.

Lời giải chi tiết

By parts with $u = x$, $dv = e^x dx$: $x e^x - e^x + C$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int_0^1 x e^x dx$.

(A) 1

(C) $e - 1$

(B) e

(D) 0

Lời giải chi tiết

$[x e^x - e^x]_0^1 = (e - e) - (0 - 1) = 1$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int x \sin x dx$.

Lời giải chi tiết

By parts with $u = x$, $dv = \sin x dx$: $-x \cos x + \sin x + C$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$ using L'Hôpital's rule.

(A) 1

(C) Undefined

(B) 0

(D) ∞

Lời giải chi tiết

$f'(x) = \cos x$, $g'(x) = 1$, so the limit is $\frac{\cos 0}{1} = 1$. (A).

5.17 Practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)**Bài tập luyện tập**

Find the tangent and normal lines to $y = x^3 - 4x + 2$ at $x = -1$.

Lời giải chi tiết

$y(-1) = 5$, $y'(-1) = -1$. Tangent: $y = -x + 4$. Normal (gradient 1): $y = x + 6$.

Bài tập luyện tập

A 24 cm by 15 cm sheet forms an open box by cutting squares of side x from the corners. Find x that maximizes the volume, and the maximum volume.

Lời giải chi tiết

$x = 3$ cm (rejecting $x = 10$, outside the domain). Maximum volume = 486 cm^3 .

Bài tập luyện tập

Find and classify the stationary points of $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 3$.

Lời giải chi tiết

$f' = 6(x - 1)(x - 2)$. $x = 1$: local max, $f(1) = 2$. $x = 2$: local min, $f(2) = 1$.

Bài tập luyện tập

An open-top cylindrical can must hold 500 cm^3 . Find the radius that minimizes the surface area used, and the minimum surface area, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$S(r) = \pi r^2 + \frac{1000}{r}$; minimizing gives $r \approx 5.42 \text{ cm}$, $S \approx 277 \text{ cm}^2$.

Bài tập luyện tập

A particle moves with $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ (m). Find the total distance travelled in the first 4 seconds.

(A) 12 m

(C) 8 m

(B) 4 m

(D) 16 m

Lời giải chi tiết

Distance = $|4 - 0| + |0 - 4| + |4 - 0| = 12 \text{ m}$. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_1^3 (2x - 1)^2 dx$.

Lời giải chi tiết

Expand and integrate: $\left[\frac{4x^3}{3} - 2x^2 + x\right]_1^3 = 21 - \frac{1}{3} = \frac{62}{3} \approx 20.7$.

Bài tập luyện tập

Find the area enclosed between $y = 6 - x^2$ and $y = x^2 - 2$.

(A) $\frac{64}{3}$

(C) 16

(B) $\frac{32}{3}$

(D) $\frac{128}{3}$

Lời giải chi tiết

Intersections $x = \pm 2$; area $= \int_{-2}^2 (8 - 2x^2) dx = \frac{64}{3} \approx 21.3$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Find the volume generated when $y = \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 4$, is rotated 360° about the x -axis.

Lời giải chi tiết

$$V = \pi \int_0^4 x dx = 8\pi \approx 25.1.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) A 10 m ladder's base slides away from a wall at 0.5 m/s. Find the rate the top slides down when the base is 6 m out.

Lời giải chi tiết

$$dy/dt = -0.375 \text{ m/s (top descends at 0.375 m/s).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) A spherical balloon's volume increases at $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. Find $\frac{dr}{dt}$ when $r = 5 \text{ cm}$, correct to 3 s.f.

(A) 0.318 cm/s

(C) 1.27 cm/s

(B) 0.159 cm/s

(D) 3.18 cm/s

Lời giải chi tiết

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi} \approx 0.318 \text{ cm/s. (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find $\frac{dy}{dx}$ implicitly for $x^2y + y^3 = 10$ at $(1, 2)$.

Lời giải chi tiết

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{x^2 + 3y^2} = -\frac{4}{13}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the Maclaurin series of $f(x) = \ln(1 + 2x)$ up to the term in x^3 .

Lời giải chi tiết

$$\ln(1 + 2x) \approx 2x - 2x^2 + \frac{8x^3}{3}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $\frac{dT}{dt} = -k(T - 20)$ given $T(0) = 90$, $T(5) = 60$. Find k and $T(10)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$k \approx 0.112; T(10) \approx 42.9^\circ\text{C}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int_0^1 xe^{x^2} dx$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$u = x^2: \frac{1}{2}[e^u]_0^1 = \frac{1}{2}(e - 1) \approx 0.859.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) A tank's depth satisfies $\frac{dh}{dt} = 3 - 0.2h$, $h(0) = 2$. Find the time to reach $h = 10$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$t = 5 \ln\left(\frac{2.6}{3 - 0.2h}\right); \text{ at } h = 10: t = 5 \ln(2.6) \approx 4.78.$$

Bài tập luyện tập

Find the point of inflection of $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$, so $f''(x) = 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$. Checking signs: $f''(2) = -6 < 0$, $f''(4) = 6 > 0$, so the concavity genuinely changes. $f(3) = 27 - 81 + 72 - 10 = 8$. Point of

inflection: (3, 8).

Bài tập luyện tập

The curve $f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x}$ has an oblique asymptote. What is its equation?

(A) $y = 2x$

(C) $y = 2x - 8$

(B) $y = x$

(D) $y = 8x$

Lời giải chi tiết

Dividing termwise, $f(x) = 2x - \frac{8}{x}$. As $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{8}{x} \rightarrow 0$, so $f(x) \rightarrow 2x$: the oblique asymptote is $y = 2x$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int_0^{\pi/2} x \sin x \, dx$ exactly.

Lời giải chi tiết

From the antiderivative $-x \cos x + \sin x$: at $x = \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 0 + 1 = 1$; at $x = 0$, $-0 \cdot \cos 0 + \sin 0 = 0$. So the integral equals $1 - 0 = 1$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Use L'Hôpital's rule, applied twice, to evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$.

(A) $\frac{1}{2}$

(C) 0

(B) 1

(D) e

Lời giải chi tiết

First application: $\frac{e^x - 1}{2x} \rightarrow \frac{0}{0}$ again at $x = 0$. Second application: $\frac{e^x}{2} \rightarrow \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$. This agrees with the Maclaurin-series value found earlier in this chapter. (A).

Bài tập luyện tập

A particle's velocity is $v(t) = t^2 - 5t + 6$ (m/s) for $0 \leq t \leq 5$. Find the total distance travelled, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$v(t) = (t - 2)(t - 3)$, at rest at $t = 2$ and $t = 3$. Antiderivative: $s(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t$ (taking $s(0) = 0$). $s(2) = \frac{14}{3} \approx 4.667$, $s(3) = \frac{9}{2} = 4.5$, $s(5) = \frac{55}{6} \approx 9.167$.

Distance = $|s(2) - s(0)| + |s(3) - s(2)| + |s(5) - s(3)| = 4.667 + 0.167 + 4.667 = 9.5$ m.

Bài tập luyện tập

The curve $y = \frac{e^{2x}}{x}$ has a stationary point for $x > 0$. Find its coordinates, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Quotient rule: $y' = \frac{2e^{2x} \cdot x - e^{2x} \cdot 1}{x^2} = \frac{e^{2x}(2x - 1)}{x^2}$. Since $e^{2x} > 0$ and $x^2 > 0$, setting $y' = 0$ requires $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0.5$. $y(0.5) = \frac{e^1}{0.5} = 2e \approx 5.44$. Stationary point: $(0.5, 5.44)$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int_1^2 x \ln x \, dx$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

By parts with $u = \ln x$, $dv = x \, dx$ (so $du = \frac{1}{x} \, dx$, $v = \frac{x^2}{2}$):

$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} \, dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C.$$

Evaluating: at $x = 2$, $2 \ln 2 - 1 \approx 0.386$; at $x = 1$, $0 - 0.25 = -0.25$. So $\int_1^2 x \ln x \, dx \approx 0.386 - (-0.25) = 0.636$.

Ôn tập nhanh: (1) kiểm tra $|r| < 1$ trước khi dùng S_∞ của cấp số nhân; (2) biến đổi đồ thị bên trong ngoặc (theo x) luôn "ngược trục giác" so với bên ngoài; (3) chọn đúng công cụ tam giác theo dữ kiện – sin (AAS/SSA), cosin (SAS/SSS); (4) $P(A | B) \neq P(B | A)$ nói chung – dùng định lý Bayes để đảo ngược; (5) dùng chain rule cho mọi hàm hợp, luôn thêm hằng số $+C$ khi tích phân bất định, và luôn kiểm tra dấu khi tính diện tích hoặc tổng quãng đường.

5.18 Additional practice: Paper 1 style (no calculator)**Bài tập luyện tập**

Differentiate $f(x) = x^2 + 3x$ from first principles.

Lời giải chi tiết

$f(x+h) - f(x) = h(2x+h+3)$, so $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h+3) = 2x+3$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

(A) 4

(C) 0

(B) 2

(D) -4

Lời giải chi tiết

$$\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = x+2 \rightarrow 4 \text{ as } x \rightarrow 2. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = x^2 \sin x$.

Lời giải chi tiết

Product rule: $y' = 2x \sin x + x^2 \cos x$.

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = (4x + 1)^5$.

(A) $20(4x + 1)^4$

(C) $4(4x + 1)^4$

(B) $5(4x + 1)^4$

(D) $20(4x + 1)^5$

Lời giải chi tiết

$$y' = 5(4x + 1)^4(4) = 20(4x + 1)^4. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find and classify the stationary points of $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 2$.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow x = -3 \text{ or } x = 1$. $f''(x) = 6x + 6$. At $x = -3$: $f''(-3) = -12 < 0 \Rightarrow \text{local max}$, $f(-3) = -27 + 27 + 27 + 2 = 29$. At $x = 1$: $f''(1) = 12 > 0 \Rightarrow \text{local min}$, $f(1) = 1 + 3 - 9 + 2 = -3$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int (4x^3 - 6x + 5) dx$.

Lời giải chi tiết

$$x^4 - 3x^2 + 5x + C.$$

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_0^1 (3x^2 + 2x) dx$ exactly.

(A) 2

(C) 3

(B) 1

(D) 5

Lời giải chi tiết

$$[x^3 + x^2]_0^1 = 1 + 1 = 2. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find the point of inflection of $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Lời giải chi tiết

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$. Signs: $f''(0) = -6 < 0$, $f''(2) = 6 > 0$, so the concavity genuinely changes. $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$. Point of inflection: $(1, 0)$.

Bài tập luyện tập

State the domain and the equations of all asymptotes of $f(x) = \frac{x^2 + 4}{x}$.

Lời giải chi tiết

Dividing termwise, $f(x) = x + \frac{4}{x}$. **Domain:** $x \neq 0$ (the numerator at $x = 0$ is $4 \neq 0$, so $x = 0$ is a genuine vertical asymptote). **Vertical asymptote:** $x = 0$. **Oblique asymptote:** as $x \rightarrow \pm\infty$, $\frac{4}{x} \rightarrow 0$, so $f(x) \rightarrow x$, giving $y = x$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the Maclaurin series of $f(x) = \sin(3x)$ up to the term in x^3 .

(A) $3x - \frac{9}{2}x^3$

(C) $x - \frac{x^3}{6}$

(B) $3x - \frac{27}{2}x^3$

(D) $3x - \frac{9}{6}x^3$

Lời giải chi tiết

Substitute $u = 3x$ into $\sin u = u - \frac{u^3}{6} + \dots$: $\sin(3x) = 3x - \frac{(3x)^3}{6} + \dots = 3x - \frac{27x^3}{6} = 3x - \frac{9}{2}x^3$.
(A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Given $x^3 + y^3 = 35$, find $\frac{dy}{dx}$ at the point $(2, 3)$.

Lời giải chi tiết

Differentiate implicitly: $3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$. At $(2, 3)$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{9}$.

5.19 Additional practice: Paper 2/3 style (calculator allowed)**Bài tập luyện tập**

A farmer has 240 m of fencing to enclose a rectangular field against an existing wall (no fencing needed on that side). Find the dimensions that maximize the area, and state the maximum area.

Lời giải chi tiết

With $y = 240 - 2x$: $A(x) = 240x - 2x^2$, $A'(x) = 240 - 4x = 0 \Rightarrow x = 60$, $A''(x) = -4 < 0$ (maximum). $y = 120$, so $A_{\max} = 60 \times 120 = 7200 \text{ m}^2$.

Bài tập luyện tập

A closed cylindrical can (with a lid) must hold 250 cm^3 . Find the radius that minimizes the total surface area, correct to 3 s.f.

(A) 3.41 cm

(C) 4.30 cm

(B) 5.42 cm

(D) 6.83 cm

Lời giải chi tiết

$S(r) = 2\pi r^2 + \frac{500}{r}$, so $S'(r) = 4\pi r - \frac{500}{r^2} = 0 \Rightarrow 4\pi r^3 = 500 \Rightarrow r^3 = \frac{125}{\pi} \Rightarrow r \approx 3.41 \text{ cm}$. (A). (Note: 5.42 cm is the radius for an open-top can of volume 500 cm^3 , and 4.30 cm is the radius for a closed can of volume 500 cm^3 – both are distractors testing whether the correct volume and can-type were used.)

Bài tập luyện tập

A particle moves with velocity $v(t) = t^2 - 2t - 3$ (m/s) for $0 \leq t \leq 4$. Find the displacement and the total distance travelled, each correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$v(t) = (t - 3)(t + 1)$, so within $[0, 4]$, $v(t) = 0$ only at $t = 3$ (with $v < 0$ on $[0, 3)$ and $v > 0$ on $(3, 4]$). Antiderivative: $s(t) = \frac{t^3}{3} - t^2 - 3t$ (taking $s(0) = 0$). $s(3) = 9 - 9 - 9 = -9$, $s(4) = \frac{64}{3} - 16 - 12 = -\frac{20}{3} \approx -6.667$. **Displacement** = $s(4) - s(0) = -\frac{20}{3} \approx -6.67 \text{ m}$. **Distance** = $|s(3) - s(0)| + |s(4) - s(3)| = 9 + \left| -\frac{20}{3} + 9 \right| = 9 + \frac{7}{3} \approx 11.3 \text{ m}$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Use Euler's method with $h = 0.25$ to approximate $y(0.5)$ for $\frac{dy}{dx} = 2x - y$, given $y(0) = 1$.

(A) 0.688

(C) 0.625

(B) 0.750

(D) 0.500

Lời giải chi tiết

$f(x, y) = 2x - y$. Step 1: $f(0, 1) = -1 \Rightarrow y_1 = 1 + 0.25(-1) = 0.75$ at $x_1 = 0.25$. Step 2: $f(0.25, 0.75) = 0.5 - 0.75 = -0.25 \Rightarrow y_2 = 0.75 + 0.25(-0.25) = 0.6875$ at $x_2 = 0.5$. So $y(0.5) \approx 0.688$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) A 13 m ladder leans against a vertical wall; the base slides away from the wall at 2 m/s. Find the rate at which the top slides down when the base is 5 m from the wall.

Lời giải chi tiết

$x^2 + y^2 = 169$. At $x = 5$: $y = \sqrt{169 - 25} = 12$. Differentiating: $\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y} \frac{dx}{dt} = -\frac{5}{12}(2) = -\frac{5}{6} \approx -0.833$ m/s (the top descends at 0.833 m/s).

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int_0^1 x^2 e^x dx$ exactly.

Lời giải chi tiết

By parts twice: $\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - \int 2x e^x dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.
Evaluating: at $x = 1$, $e(1 - 2 + 2) = e$; at $x = 0$, $1(0 - 0 + 2) = 2$. So $\int_0^1 x^2 e^x dx = e - 2 \approx 0.718$.

Bài tập luyện tập

(AHL) A population satisfies $\frac{dP}{dt} = 0.05P$, with $P(0) = 200$. Find $P(10)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Separate: $\int \frac{dP}{P} = \int 0.05 dt \Rightarrow \ln P = 0.05t + C \Rightarrow P = Ae^{0.05t}$. At $t = 0$: $A = 200$, so $P(t) = 200e^{0.05t}$. $P(10) = 200e^{0.5} \approx 200(1.6487) \approx 330$.

Bài tập luyện tập

Find the area enclosed between $y = x^2$ and $y = 3x$.

(A) 4.5

(C) 13.5

(B) 9

(D) 2.25

Lời giải chi tiết

Intersections: $x^2 = 3x \Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0, 3$. On $(0, 3)$, $y = 3x$ lies above $y = x^2$ (e.g. at $x = 1$: $3 > 1$).

$$A = \int_0^3 (3x - x^2) dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 = \left(\frac{27}{2} - 9 \right) - 0 = 4.5.$$

(A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Use L'Hôpital's rule, applied twice, to evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$.

(A) $\frac{1}{2}$

(C) 1

(B) 0

(D) ∞

Lời giải chi tiết

As $x \rightarrow 0$: numerator $1 - \cos x \rightarrow 0$, denominator $x^2 \rightarrow 0$ – the form $\frac{0}{0}$. First application: $\frac{d}{dx}(1 - \cos x) = \sin x$, $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$, giving $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x}$ – still $\frac{0}{0}$. Second application: $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$, $\frac{d}{dx}(2x) = 2$, giving $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{\cos 0}{2} = \frac{1}{2}$. (A).

5.20 Extra practice: Mixed mastery

Bài tập luyện tập

Differentiate $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ from first principles, and hence find the gradient of the curve at $x = -1$.

Lời giải chi tiết

$f(x+h) - f(x) = [2(x+h)^2 - 3(x+h) + 1] - [2x^2 - 3x + 1] = 4xh + 2h^2 - 3h = h(4x + 2h - 3)$.
 $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (4x + 2h - 3) = 4x - 3$. At $x = -1$: $f'(-1) = 4(-1) - 3 = -7$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 6}{x + 2}$.

(A) -5

(C) -1

(B) 5

(D) 1

Lời giải chi tiết

Factor: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$, so $\frac{(x-3)(x+2)}{x+2} = x-3$ for $x \neq -2$. As $x \rightarrow -2$: $x-3 \rightarrow -5$. (A).

Bài tập luyện tập

Differentiate each function below, and evaluate the gradient at the given point.

(a) $y = x^2 e^{-x}$ at $x = 1$.

(b) $y = \frac{2x+1}{x^2+3}$ at $x = 0$.

Lời giải chi tiết

(a) Product rule (with the chain rule applied to e^{-x}): $y' = 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2)$.
At $x = 1$: $y'(1) = e^{-1}(2 - 1) = e^{-1} \approx 0.368$.

(b) Quotient rule: $y' = \frac{2(x^2+3) - (2x+1)(2x)}{(x^2+3)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 6}{(x^2+3)^2}$. At $x = 0$: $y'(0) = \frac{2(3) - 1(0)}{9} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Bài tập luyện tập

An open-top box with a square base is to have volume 32 cm^3 . Find the base side length and height that minimize the total surface area of card used, and state the minimum area.

Lời giải chi tiết

Let x be the base side and h the height: $V = x^2 h = 32 \Rightarrow h = \frac{32}{x^2}$. Surface area (base plus four sides, no lid): $S(x) = x^2 + 4xh = x^2 + 4x \cdot \frac{32}{x^2} = x^2 + \frac{128}{x}$, for $x > 0$.

$$S'(x) = 2x - \frac{128}{x^2}.$$

Setting $S'(x) = 0$: $2x^3 = 128 \Rightarrow x^3 = 64 \Rightarrow x = 4$.

$$S''(x) = 2 + \frac{256}{x^3},$$

which is positive for every $x > 0$, so $S''(4) = 2 + 4 = 6 > 0$ confirms a **minimum**. $h = \frac{32}{16} = 2$ cm, and $S(4) = 16 + \frac{128}{4} = 16 + 32 = 48 \text{ cm}^2$.

Bài tập luyện tập

How many vertical asymptotes does $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ have?

(A) 2, at $x = \pm 2$

(C) 0

(B) 1, at $x = 2$ only

(D) 4

Lời giải chi tiết

The denominator $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ vanishes at $x = 2$ and $x = -2$, while the numerator equals $1 \neq 0$ at both values — so both are genuine vertical asymptotes. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Find all points of inflection of $f(x) = x^4 - 4x^3$.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2$, so $f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0$ or $x = 2$. Checking signs: $f''(-1) = 12(-1)(-3) = 36 > 0$ (concave up), $f''(1) = 12(1)(-1) = -12 < 0$ (concave down), $f''(3) = 12(3)(1) = 36 > 0$ (concave up). The sign genuinely changes at both values. $f(0) = 0$ and $f(2) = 16 - 32 = -16$. Points of inflection: $(0, 0)$ and $(2, -16)$.

Bài tập luyện tập

A particle moves in a straight line with velocity $v(t) = 3t^2 - 18t + 24$ (m/s) for $0 \leq t \leq 5$. Find the displacement and the total distance travelled, each correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Factor: $v(t) = 3(t - 2)(t - 4)$, at rest at $t = 2$ and $t = 4$ (with $v > 0$ on $[0, 2)$, $v < 0$ on $(2, 4)$, $v > 0$ on $(4, 5]$). Antiderivative: $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ (taking $s(0) = 0$). $s(2) = 8 - 36 + 48 = 20$, $s(4) = 64 - 144 + 96 = 16$, $s(5) = 125 - 225 + 120 = 20$. **Displacement** = $s(5) - s(0) = 20$ m. **Distance** = $|s(2) - s(0)| + |s(4) - s(2)| + |s(5) - s(4)| = 20 + 4 + 4 = 28$ m.

Bài tập luyện tập

Find the area enclosed between the curve $y = 4 - x^2$ and the x -axis.

(A) $\frac{32}{3}$

(C) 8

(B) $\frac{16}{3}$

(D) $\frac{64}{3}$

Lời giải chi tiết

The curve meets the x -axis where $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$, and $y \geq 0$ on $(-2, 2)$.

$$A = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_{-2}^2 = \left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(-8 + \frac{8}{3} \right) = \frac{16}{3} + \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

(A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the volume generated when $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, is rotated 360° about the x -axis, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \cdot \frac{32}{5} = \frac{32\pi}{5} \approx 20.1 \text{ (cubic units)}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int_0^2 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$ exactly, using substitution.

Lời giải chi tiết

Let $u = x^3 + 1$, so $du = 3x^2 dx$. When $x = 0$, $u = 1$; when $x = 2$, $u = 9$.

$$\int_0^2 3x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx = \int_1^9 \sqrt{u} du = \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_1^9 = \frac{2}{3} (27 - 1) = \frac{2}{3} (26) = \frac{52}{3}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int_1^e \ln x dx$ exactly, using integration by parts.

Lời giải chi tiết

Let $u = \ln x$, $dv = dx$ (so $du = \frac{1}{x} dx$, $v = x$):

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + C.$$

Evaluating: at $x = e$, $e \ln e - e = e - e = 0$; at $x = 1$, $1 \ln 1 - 1 = 0 - 1 = -1$. So $\int_1^e \ln x dx = 0 - (-1) = 1$.

Bài tập luyện tập

(AHL) (a) Given $y^2 - xy = 4$, find $\frac{dy}{dx}$ at the point $(0, 2)$.

(b) Water is poured into an inverted right circular cone (vertex down) of height 12 cm and top radius 6 cm, at a rate of $8 \text{ cm}^3/\text{s}$. Find the rate at which the water level is rising when the depth is 4 cm, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

(a) Differentiate implicitly: $2y \frac{dy}{dx} - \left(y + x \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} (2y - x) = y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{2y - x}$. At $(0, 2)$: $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{4 - 0} = \frac{1}{2}$.

(b) By similar triangles, $\frac{r}{h} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$. So $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{2} \right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}$, giving $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt}$. At $h = 4$: $8 = \frac{\pi(16)}{4} \frac{dh}{dt} = 4\pi \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{2}{\pi} \approx 0.637 \text{ cm/s}$.

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the Maclaurin series of $f(x) = e^{-2x}$ up to the term in x^3 .

Lời giải chi tiết

Substitute $u = -2x$ into $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots$:

$$e^{-2x} = 1 + (-2x) + \frac{(-2x)^2}{2} + \frac{(-2x)^3}{6} + \dots = 1 - 2x + 2x^2 - \frac{4}{3}x^3 + \dots$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Use L'Hôpital's rule, applied three times, to evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$.

(A) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{3}$

(D) 0

Lời giải chi tiết

As $x \rightarrow 0$: numerator $x - \sin x \rightarrow 0$, denominator $x^3 \rightarrow 0$ – the form $\frac{0}{0}$. First application: $\frac{1 - \cos x}{3x^2}$ – still $\frac{0}{0}$ at $x = 0$. Second application: $\frac{\sin x}{6x}$ – still $\frac{0}{0}$ at $x = 0$. Third application: $\frac{\cos x}{6} \rightarrow \frac{\cos 0}{6} = \frac{1}{6}$. (A).

Bài tập luyện tập

(AHL) Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y}$ given $y(0) = 2$ (with $y > 0$). Find $y(2)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Separate: $\int y dy = \int (x+1) dx \Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + x + C$. At $x = 0, y = 2$: $\frac{4}{2} = 2 = 0 + 0 + C \Rightarrow C = 2$. So $y^2 = x^2 + 2x + 4$. At $x = 2$: $y^2 = 4 + 4 + 4 = 12 \Rightarrow y = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3.46$ (taking the positive root, since $y(0) = 2 > 0$).

Bài tập luyện tập

(AHL) Use Euler's method with $h = 0.2$ to approximate $y(0.4)$ for $\frac{dy}{dx} = x - y$, given $y(0) = 1$.

(A) 0.680

(C) 0.600

(B) 0.800

(D) 0.720

Lời giải chi tiết

$f(x, y) = x - y$. Step 1: $f(0, 1) = 0 - 1 = -1 \Rightarrow y_1 = 1 + 0.2(-1) = 0.8$ at $x_1 = 0.2$. Step 2: $f(0.2, 0.8) = 0.2 - 0.8 = -0.6 \Rightarrow y_2 = 0.8 + 0.2(-0.6) = 0.68$ at $x_2 = 0.4$. So $y(0.4) \approx 0.680$. (A).

5.21 Extra practice: Mixed mastery II**Bài tập luyện tập**

(AHL) Differentiate $y = \csc(2x)$.

Lời giải chi tiết

$$\frac{d}{dx} \csc u = -\csc u \cot u \cdot u' \text{ with } u = 2x: y' = -2 \csc(2x) \cot(2x).$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Differentiate $y = \arccos(3x)$.

Lời giải chi tiết

$$\frac{d}{dx} \arccos u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \text{ with } u = 3x: y' = -\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Differentiate $y = 5^x$.

(A) $5^x \ln 5$

(C) $x5^{x-1}$

(B) 5^x

(D) $5^x \log_5 x$

Lời giải chi tiết

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \text{ with } a = 5: y' = 5^x \ln 5. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(AHL) The curve $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, is rotated 360° about the x -axis. Find the volume of the solid formed, in terms of π .

Lời giải chi tiết

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{32}{5} \right) = \frac{32\pi}{5}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) The curve $x = y^3$, $0 \leq y \leq 2$, is rotated 360° about the y -axis. Find the volume of the solid formed, in terms of π .

Lời giải chi tiết

$$V = \pi \int_0^2 (y^3)^2 dy = \pi \int_0^2 y^6 dy = \pi \left[\frac{y^7}{7} \right]_0^2 = \pi \left(\frac{128}{7} \right) = \frac{128\pi}{7}.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int \frac{7x+1}{(x-2)(x+1)} dx$.

Lời giải chi tiết

From the partial-fraction decomposition (Unit 1), $\frac{7x+1}{(x-2)(x+1)} = \frac{5}{x-2} + \frac{2}{x+1}$, so

$$\int \frac{7x+1}{(x-2)(x+1)} dx = 5 \ln |x-2| + 2 \ln |x+1| + C.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Evaluate $\int \frac{5x-2}{(x-1)^2} dx$.

Lời giải chi tiết

From the partial-fraction decomposition (Unit 1), $\frac{5x-2}{(x-1)^2} = \frac{5}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2}$, so

$$\int \frac{5x-2}{(x-1)^2} dx = 5 \ln |x-1| - \frac{3}{x-1} + C.$$

Bài tập luyện tập

(AHL) Find the equation of the tangent to $y = \arctan x$ at $x = 0$.

Lời giải chi tiết

$y' = \frac{1}{1+x^2}$, so $y'(0) = 1$. Also $y(0) = \arctan 0 = 0$. Tangent: $y - 0 = 1(x - 0) \Rightarrow y = x$.

Đồng hành cùng 8020 English

Cảm ơn bạn đã học cùng bộ giáo trình quốc tế 8020. **Điểm thật · Thầy thật · Kết quả thật** — nhiều học viên chỉ cần 1–2 khoá để đạt kết quả mong muốn.

Chương trình đào tạo tại 8020 English

IELTS Academic/General · SAT · PTE · Duolingo · TOEFL | AP (College Board) · IB Diploma · Cambridge IGCSE / A-Level | sẵn học bổng du học.

Vì sao chọn 8020 English?

- **100% giáo viên** đạt tối thiểu 8.0 IELTS hoặc 1500 SAT — đội ngũ Giáo sư · Tiến sĩ · Thạc sĩ tốt nghiệp trường top đầu thế giới (Carnegie Mellon — #1 Hoa Kỳ về Khoa học Máy tính).
- **Kèm 1–1** mọi độ tuổi; lớp sĩ số nhỏ 2–5 bạn (đa số dưới 10 bạn/lớp).
- Lộ trình cá nhân hoá, theo sát tiến độ từng học viên; lớp OFFLINE tại TP.HCM & ONLINE toàn quốc.

Bảng vàng học viên

AP 5/5 — Calculus AB/BC
SAT 1590 / 1570 / 1550

AP 4–5 — Biology, Chemistry
IELTS 8.0–9.0

IB 90/100 — Economics
Duolingo 110 · PTE 90

Cảm nhận học viên & phụ huynh

"Bạn đã cải thiện được tư duy Writing — kỹ năng từng là nỗi sợ lớn nhất — và cuối cùng đã đậu vào trường top như mong muốn. Thái độ học tập cực kỳ nghiêm túc; ngay cả khi nằm viện vẫn cố gắng học đều đặn."

— Phan Thị Thanh Hằng • IELTS Overall 8.5

"Cần tất cả kỹ năng trên 7.5 để xét vào trường top 1 Anh Quốc về Y học (chương trình UKFPO của NHS) — và đã đạt mục tiêu sau khi học Writing 1-1."

— Trần Hoàng Bảo Ngọc • IELTS Overall 8.0 (Writing 6.0 → 7.5)

"Gia đình và bé xin cảm ơn thầy cô đã giúp con có hành trang chín chu khi qua Mỹ. Đạt điểm 5 môn Giải tích trong thời gian ngắn là quá mãn nguyện."

— Phụ huynh • AP Calculus BC 5/5

"Em cảm ơn thầy đã luôn đồng hành. Nhờ thầy, em học vững hơn rất nhiều dù thời gian ôn không dài."

— Học viên • AP Calculus AB 4

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

FEEDBACK PHỤ HUYNH & HỌC VIÊN AP



Phụ huynh • AP Calculus BC: 5

"Gia đình cảm ơn thầy cô đã giúp con có hành trang chín chu khi qua Mỹ. Đạt điểm 5 môn Giải tích trong thời gian ngắn là quá mãn nguyện."



Phụ huynh • AP Calculus BC

"Mẹ con xin gửi lời cảm ơn chân thành tới thầy và cả nhóm. Thời gian ôn rất ngắn nhưng con nhận được rất nhiều sự hỗ trợ."



Học viên • AP Calculus AB: 4 • Statistics: 3

"Em cảm ơn thầy Steven đã luôn đồng hành. Nhờ thầy, em học vững hơn rất nhiều dù thời gian không dài."

Feedback phụ huynh & học viên AP — nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Điểm thi thật của học viên

KẾT QUẢ HỌC VIÊN
ĐIỂM SỐ AP

8020 ENGLISH

AP Biology: 4 · AP Chemistry: 4

AP Calculus AB: 5

AP Calculus BC: 5

AP Chemistry: 5

Bảng điểm AP thật của học viên – nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Bảng điểm AP thật – Calculus AB/BC 5/5 · Biology & Chemistry 4-5 (College Board)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN
ĐIỂM SỐ PTE

8020 ENGLISH

Em báo điểm nha c

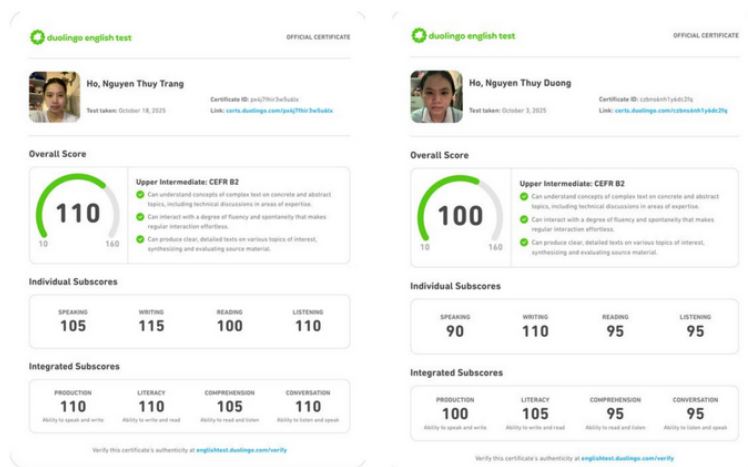
trời ơi!!!
duới vậy luôn do haaaaa
chúc mừng e nhaaaa

Bảng điểm PTE thật của học viên

Học viên 8020 – PTE Academic 90

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ DUOLINGO



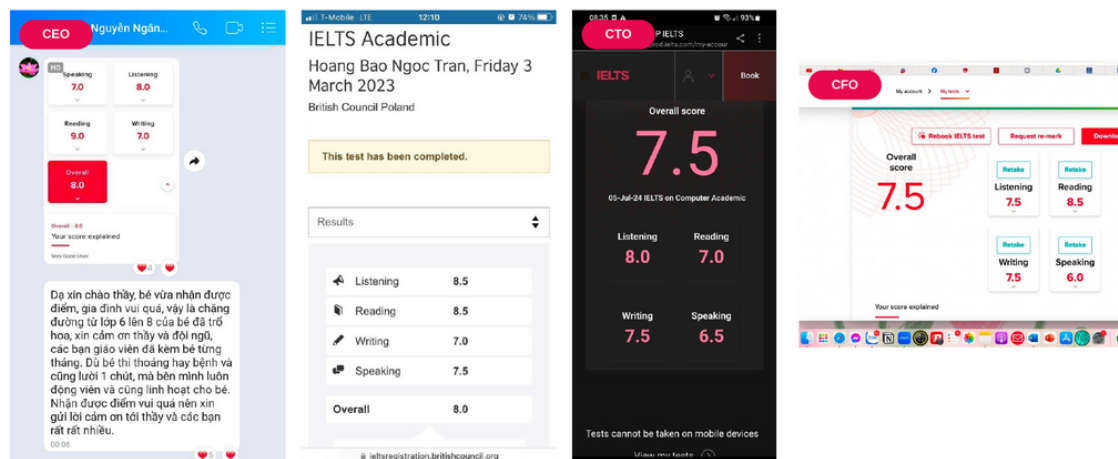
Duolingo English Test – 110 & 100

Học viên 8020 – Duolingo English Test 110 & 100

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

THÀNH TÍCH HỌC VIÊN

Bảng điểm thi thật – chất lượng được giám sát nghiêm ngặt. Một số học viên chỉ cần 1–2 khóa để đạt kết quả mong muốn.



Học viên 8020 – IELTS 8.0 / 7.5 / 8.5 (báo điểm thật)

**8020 ENGLISH – CHƯƠNG TRÌNH QUỐC TẾ**

Test đầu vào & tư vấn lộ trình MIỄN PHÍ

Hotline Thầy Tường (Head of 8020): 0332 747 169
Cô Nancy: 0983 422 692 · 0772 631 496

Offline Trần Phú, P.4, Q.5, TP.HCM

Online Lớp trực tuyến toàn quốc

Web luyenthi8020.com