



IB Mathematics: Applications and Interpretation

Giáo trình luyện thi chuyên sâu

Song ngữ Anh-Việt

Lời mở đầu • Foreword

Cuốn sách này thuộc bộ giáo trình luyện thi chương trình quốc tế của **8020 English (8020 Education)** — trung tâm luyện thi trọng điểm **IELTS • SAT • AP • IB • A-level • IGCSE** và sẵn học bổng du học. Toàn bộ nội dung được biên soạn bởi đội ngũ **Giáo sư • Tiến sĩ • Thạc sĩ** tốt nghiệp các trường top đầu thế giới, bám sát khung chương trình chính thức, trình bày đầy đủ lý thuyết, ví dụ mẫu, hình minh họa và hệ thống bài tập có lời giải chi tiết.

This book is part of the 8020 English international exam-prep series: complete English theory with Vietnamese explanations, worked examples, illustrations and fully-solved practice, aligned to the official framework.

Thành tích 8020 English

9.0 IELTS cao nhất

1570 SAT cao nhất

5/5 AP — điểm tuyệt đối

90/100 IB Diploma

100% GV $\geq$ 8.0 IELTS / 1500 SAT

CMU Tiến sĩ ĐH #1 Hoa Kỳ về CS

Đội ngũ tiêu biểu: Thầy Châu Cát Tường (Academic Head, ThS Western Sydney, top 1% IELTS 8.5) · TS Nguyễn Anh Huy (Carnegie Mellon, cựu kỹ sư Amazon) · TS Nguyễn Phước Trường (Toán, ĐH Klagenfurt) · cùng đội ngũ giảng viên SAT 1500–1600, IELTS 8.0–8.5.

Kết quả học viên — điểm thi thật: IELTS 8.0–9.0 · SAT 1550 / 1570 / 1590 · AP 5/5 (Calculus BC, Microeconomics) · IB 90/100 (Economics) · Duolingo 110 · PTE 90 · TOEFL 120. **Bảng vàng SAT:** Khánh Đăng 1510 · Thảo Nguyên 1520 · Tâm Anh 1530.

“Cuối cùng đã đậu vào trường top như mong muốn.” — Phan Thị Thanh Hằng, IELTS Overall 8.5.

Cách dùng sách hiệu quả: mỗi Unit gồm (1) **Lý thuyết trọng tâm** tiếng Anh kèm **giải thích tiếng Việt**; (2) **Ví dụ mẫu** có lời giải; (3) **Hệ thống bài tập** kèm **lời giải chi tiết**. Hãy tự làm bài trước khi xem lời giải để đạt hiệu quả tối đa.

THÀNH TÍCH THỰC TẾ • 8020 ENGLISH

Điểm thi thật • Bảng & bảng điểm thật của giảng viên và học viên 8020 English — Điểm thật • Thầy thật • Kết quả thật

ĐỘI NGŨ

ĐỘI NGŨ GIÁO VIÊN TẬN TÂM

***Tối thiểu 8.0 IELTS Overall**



Gv. Nguyễn Nhật Nam
IELTS 8.5 Overall



Gv. Nguyễn Khanh
IELTS 8.0 Overall



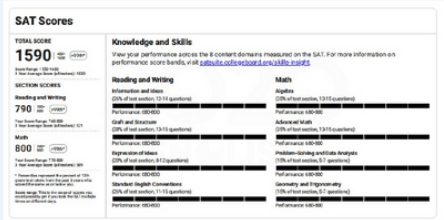
Gv. Nguyễn Đan Vy
IELTS 8.0 Overall

Đội ngũ giảng viên — IELTS 8.5 & 8.0 Overall (British Council • IDP • Cambridge)

ĐỘI NGŨ

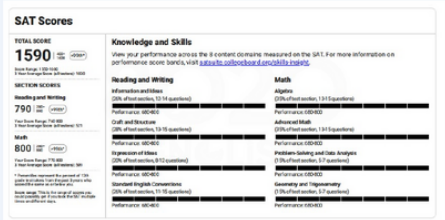
ĐỘI NGŨ GIÁO VIÊN TẬN TÂM

***Tối thiểu 1500 SAT Overall**



Thầy Quang Minh
Đại học Bách Khoa Hà Nội

SAT 1590 **IELTS 8.0**



Cô Phương Vy
Đại học Ngoại thương

SAT 1590 **IELTS 8.0**

Giảng viên SAT 1590 — ĐH Bách Khoa Hà Nội & ĐH Ngoại thương

ĐỘI NGŨ

ĐỘI NGŨ GIÁO VIÊN TẬN TÂM

*Tối thiểu 1500 SAT Overall

8020
ENGLISH

Cô Phương Thủy

SAT 1540



THẾ MẠNH & KINH NGHIỆM

- SAT 1540 (Top ~1%) – mạnh cả Verbal & Math
- Kinh nghiệm dạy SAT đa trình độ
- Day bản chất + chiến thuật + cá nhân hoá lộ trình

Cô Linh Đan

Đại học Ngoại thương

SAT 1500

IELTS 7.5



THẾ MẠNH & KINH NGHIỆM

- SAT 1500 & IELTS 7.5 (thi lần đầu)
- Chuyên Anh & FTU (CLC Kinh doanh quốc tế)
- Kinh nghiệm dạy thật (gia sư + trợ giảng IELTS)

Giảng viên SAT 1540 & 1500 Overall

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

THÀNH TÍCH HỌC VIÊN

Bảng điểm thật – chất lượng được giám sát nghiêm ngặt. Một số học viên chỉ cần 1–2 khóa để đạt kết quả mong muốn.

8020
ENGLISH

IELTS Test Report Form

Candidate Details

Centre Number: VN001 Date: 25/09/2023 Candidate Number: 52818

Family Name: NGUYEN

First Name: NGOC TRAM

Candidate ID: [Redacted]

Date of Birth: [Redacted] Sex (M/F): F Scheme Code: Private Candidate

Country or Region of Origin: VIETNAM

Country of Nationality: VIETNAM

First Language: VIETNAMESE

Test Results

Listening: 8.5 Reading: 8.5 Writing: 7.5 Speaking: 7.5 Overall Band Score: 8.0 CEFR Level: C2

Administrator Comments

Signature: [Redacted] Date: 26/09/2023 Test Report Form Number: 240000181800001014

IELTS Test Report Form

Candidate Details

Centre Number: VN001 Date: 24/04/2023 Candidate Number: 52818

Family Name: NGUYEN

First Name: NGOC TRAM

Candidate ID: [Redacted]

Date of Birth: [Redacted] Sex (M/F): F Scheme Code: Private Candidate

Country or Region of Origin: VIETNAM

Country of Nationality: VIETNAM

First Language: VIETNAMESE

Test Results

Listening: 8.5 Reading: 8.5 Writing: 7.5 Speaking: 7.5 Overall Band Score: 8.0 CEFR Level: C2

Administrator Comments

Signature: [Redacted] Date: 25/04/2023 Test Report Form Number: 240000181800001014

IELTS Test Report Form

Candidate Details

Centre Number: VN001 Date: 18/04/2023 Candidate Number: 52818

Family Name: NGUYEN

First Name: NGOC TRAM

Candidate ID: [Redacted]

Date of Birth: [Redacted] Sex (M/F): F Scheme Code: Private Candidate

Country or Region of Origin: VIETNAM

Country of Nationality: VIETNAM

First Language: VIETNAMESE

Test Results

Listening: 8.5 Reading: 8.5 Writing: 7.5 Speaking: 7.5 Overall Band Score: 8.0 CEFR Level: C2

Administrator Comments

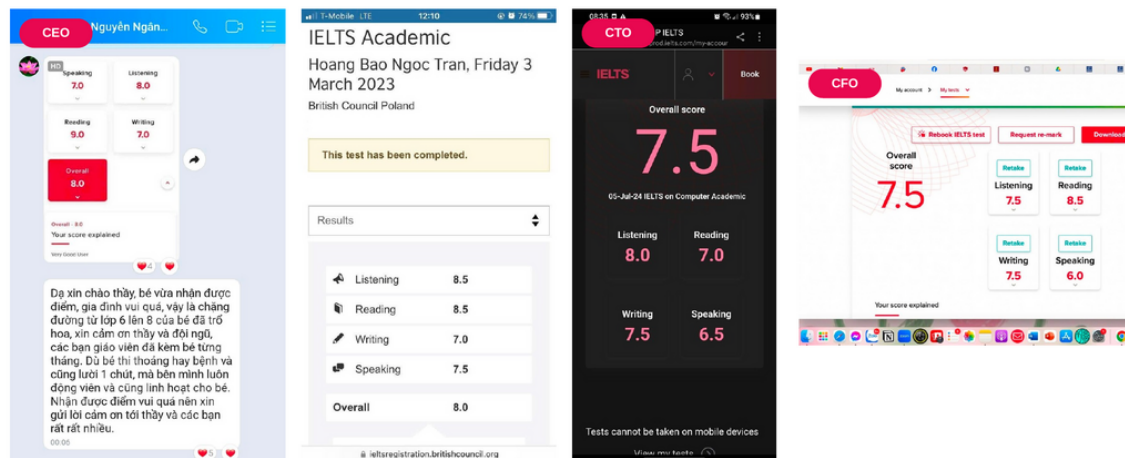
Signature: [Redacted] Date: 19/04/2023 Test Report Form Number: 240000181800001014

Học viên 8020 – IELTS 8.0 Overall (bảng điểm thật)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

THÀNH TÍCH HỌC VIÊN

Bảng điểm thi thật – chất lượng được giám sát nghiêm ngặt. Một số học viên chỉ cần 1–2 khóa để đạt kết quả mong muốn.



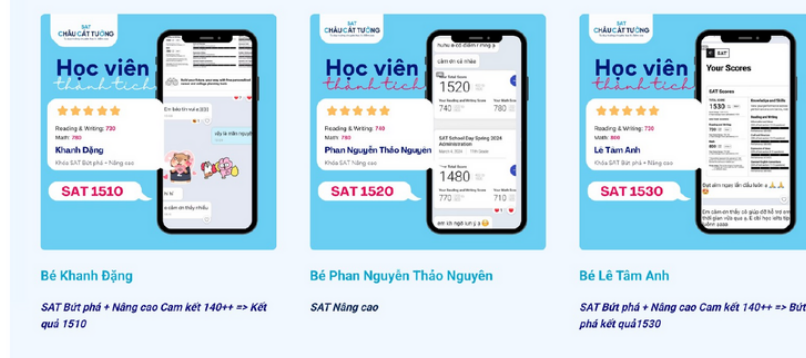
Học viên 8020 – IELTS 8.0 / 7.5 / 8.5 (báo điểm thật)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

BẢNG VÀNG HỌC VIÊN

SAT
CHAU CAT TUONG
Tư duy trường chuyên học 1, điểm cao

Bảng vàng học viên



KHÁNH ĐĂNG – SAT 1510

"SAT Bứt phá + Nâng cao cam kết 140+ → 1510"

THẢO NGUYỄN – SAT 1520

"SAT Nâng cao → 1520"

TÂM ANH – SAT 1530

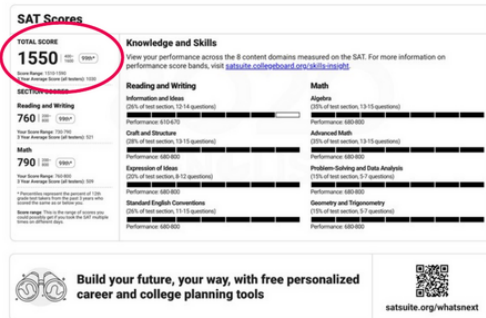
"SAT Bứt phá + Nâng cao cam kết 140+ → 1530"

Bảng vàng SAT – Học viên đạt 1510 · 1520 · 1530

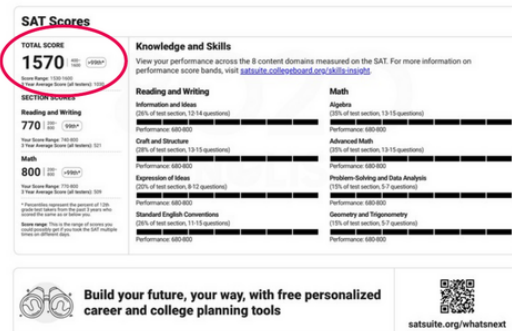
KẾT QUẢ HỌC VIÊN

TUTOR 1-1 – ĐIỂM SỐ ẮN TƯỢNG

SAT
Your Scores
Name: Tam T Nguyen
Grade: 12
Test administration: SAT May 3, 2025
Tested on: May 3, 2025
Record Locator: 4102464771



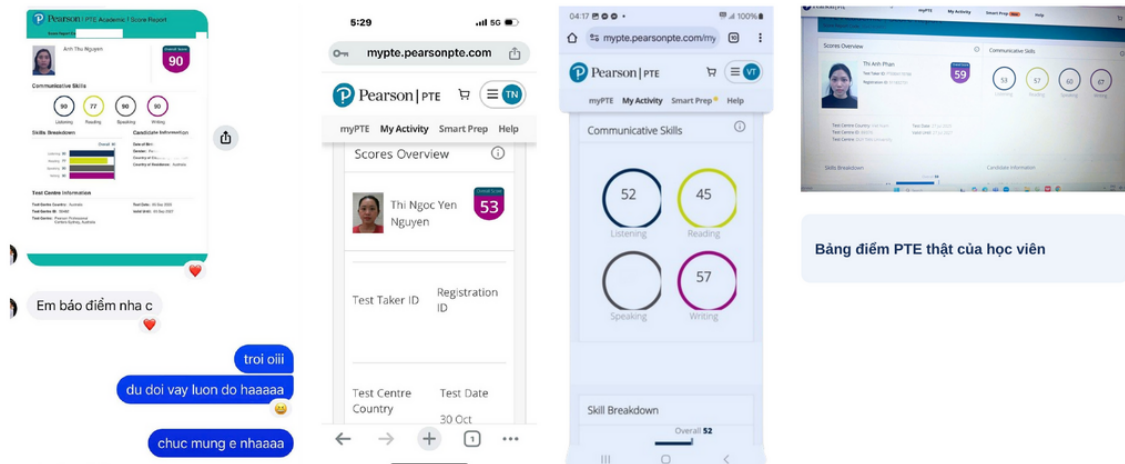
SAT
Your Scores
Name: Linh Pham
Grade: 12
Test administration: SAT December 7, 2024
Tested on: Dec 7, 2024
Record Locator: 4099866376



Học viên 8020 – SAT 1550 & 1570 (College Board)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

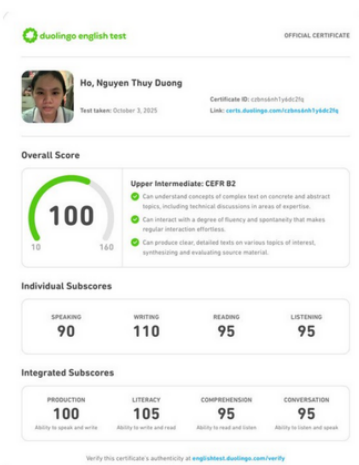
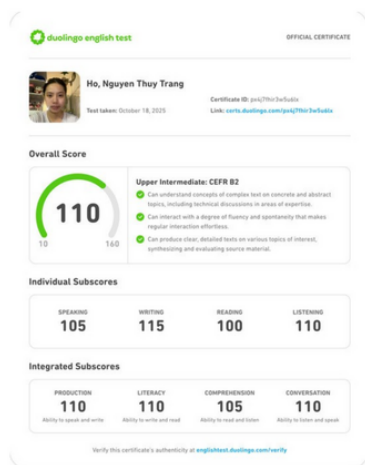
ĐIỂM SỐ PTE



Học viên 8020 – PTE Academic 90

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ DUOLINGO



Duolingo English Test – 110 & 100

Học viên 8020 – Duolingo English Test 110 & 100

Mục lục • Contents

1	Number and Algebra	9
1.1	Approximation, Estimation, and Percentage Error	9
1.2	Scientific (Standard) Notation and Estimation	10
1.3	Sets of Numbers and SI Units	11
1.4	Arithmetic Sequences and Series	12
1.5	Geometric Sequences and Series	13
1.6	Financial Mathematics: Compound Growth	15
1.7	Loans, Annuities, and Depreciation	17
1.8	Laws of Logarithms and Exponential Equations (HL)	20
1.9	Systems of Linear Equations and Matrices (HL)	21
1.10	Complex Numbers and Phasors (HL)	23
	Practice	24
2	Functions	36
2.1	Functions: Domain, Range, and Notation	36
2.2	Transformations of Functions	38
2.3	Linear Models	40
2.4	Quadratic Models	41
2.5	Cubic and Other Polynomial Models	43
2.6	Exponential Models	44
2.7	Logarithmic Functions (HL)	46
2.8	Trigonometric (Sinusoidal) Models	47
2.9	Logistic Models (HL)	50
2.10	Regression with Technology	52
	Practice	56
3	Geometry and Trigonometry	70
3.1	Right-Angled Trigonometry, Elevation, Depression, and Bearings	70
3.2	Radian Measure, Arc Length, and Sector Area	72
3.3	The Sine Rule, Cosine Rule, and Triangle Area	75
3.4	Three-Dimensional Geometry	78
3.5	Voronoi Diagrams	81
3.6	Vectors (HL)	83
3.7	Scalar and Vector Products (HL)	86
3.8	Graph Theory (HL)	89
	Practice	93
4	Statistics and Probability	110
4.1	Sampling Techniques and Data Types	110
4.2	Presenting Data: Frequency Tables, Histograms, and Cumulative Frequency	112
4.3	Measures of Central Tendency and Dispersion	115
4.4	Probability Fundamentals	117
4.5	Tree Diagrams, Conditional and Independent Events	120
4.6	Discrete Random Variables and Expected Value	123

4.7	The Binomial Distribution	124
4.8	The Normal Distribution	126
4.9	Spearman's Rank Correlation Coefficient	128
4.10	The Poisson Distribution (HL)	130
4.11	Hypothesis Testing Fundamentals (HL)	132
4.12	The Chi-Squared Test (HL)	134
4.13	The t-Test (HL)	135
4.14	Confidence Intervals for the Mean (HL)	138
	Practice	140
5	Calculus	156
5.1	Limits and the Derivative from First Principles	156
5.2	Rules of Differentiation	158
5.3	Tangents, Normals, and Increasing/Decreasing Functions	162
5.4	Second Derivatives, Concavity, and Points of Inflection	164
5.5	Optimization Problems	166
5.6	Kinematics: Displacement, Velocity, and Acceleration	168
5.7	Introduction to Integration	169
5.8	Definite Integrals and Areas	171
5.9	Kinematics via Integration	174
5.10	Implicit Differentiation and Related Rates (HL)	176
5.11	Volumes of Revolution and Integration by Substitution (HL)	178
5.12	Differential Equations (HL)	179
5.13	Kinematics in Two Dimensions with Vectors (HL)	182
	Practice	184

Number and Algebra

Mục tiêu Unit: Làm tròn số, sai số phần trăm và cách sai số lan truyền qua tính toán; số dạng chuẩn (standard form) và ước lượng bậc độ lớn; dãy số cộng và dãy số nhân cùng ứng dụng thực tế; toán tài chính: lãi kép, khấu hao, vay trả góp và tiết kiệm định kỳ (dùng máy tính GDC); và các chủ đề HL: định luật logarit và phương trình mũ, hệ phương trình tuyến tính – ma trận, và số phức ứng dụng vào phasor trong mạch điện xoay chiều.

1.1 Approximation, Estimation, and Percentage Error

In Applications and Interpretation, almost every numerical answer is produced by a GDC, so understanding *how much* a rounded or estimated value can differ from the exact value is a core skill, not just an afterthought. A number rounded to n significant figures (s.f.) or d decimal places (d.p.) lies within an interval of possible exact values, called its **bounds**.

If v is a value given correct to a rounding unit u (e.g. $u = 1$ for the nearest whole number, $u = 0.1$ for 1 d.p., $u = 10$ for the nearest 10), the exact value x satisfies

$$v - \frac{u}{2} \leq x < v + \frac{u}{2}.$$

Percentage error: $\% \text{error} = \frac{|v_A - v_E|}{v_E} \times 100\%$, where v_A is the approximate (measured/estimated) value and v_E is the exact (accepted) value.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Giá trị làm tròn luôn nằm trong một **khoảng chặn trên–chặn dưới**: nếu làm tròn đến đơn vị u , giá trị thật x thỏa $v - \frac{u}{2} \leq x < v + \frac{u}{2}$ (chặn dưới được lấy, chặn trên không được lấy – quy ước này tránh đếm trùng ranh giới). **Sai số phần trăm** so sánh giá trị gần đúng v_A với giá trị chính xác (được chấp nhận) v_E : luôn lấy trị tuyệt đối của hiệu, chia cho v_E (không phải v_A), rồi nhân 100%.

Ví dụ mẫu 1 • Percentage error

A map states the length of a hiking trail as 240 m, rounded to 2 s.f. A GPS device measures the true length as 236.4 m. Find the percentage error of the map's value.

$$\% \text{error} = \frac{|240 - 236.4|}{236.4} \times 100\% = \frac{3.6}{236.4} \times 100\% \approx 1.52\%.$$

(!) Lỗi thường gặp: Khi tính toán nhiều bước trên GDC, **luôn giữ nguyên độ chính xác đầy đủ** trong máy tính (dùng biến nhớ ANS) và chỉ làm tròn ở **bước cuối cùng**. Làm tròn sớm ở các bước trung gian rồi dùng lại kết quả đã làm tròn sẽ gây ra "lỗi làm tròn tích lũy" (rounding error propagation) – một lỗi bị trừ điểm nặng trong bài thi IB AI.

1.1.1 Error propagation in compound calculations

When a quantity is calculated from several measured values (e.g. an area from a length and a width), the bounds of each measurement combine to produce bounds on the calculated quantity. For a product of two positive quantities, the **lower bound of the product uses the lower bounds of both factors**, and the **upper bound uses the upper bounds of both factors**.

Ví dụ mẫu 2 · Propagated bounds

A rectangular plot is measured as length 12.4 m and width 8.6 m, each correct to 1 d.p. Find the lower and upper bounds for the area.

Length bounds: $12.35 \leq L < 12.45$. Width bounds: $8.55 \leq W < 8.65$.

$$\text{Lower bound of area} = 12.35 \times 8.55 = 105.5925 \text{ m}^2.$$

$$\text{Upper bound of area} = 12.45 \times 8.65 = 107.6925 \text{ m}^2.$$

So the exact area A satisfies $105.59 \text{ m}^2 \leq A < 107.69 \text{ m}^2$ (to 4 s.f.), even though the "obvious" calculation $12.4 \times 8.6 = 106.64 \text{ m}^2$ looks perfectly precise.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi một đại lượng được tính từ nhiều số đo (ví dụ diện tích từ chiều dài và chiều rộng), **sai số lan truyền**: chặn dưới của tích dùng chặn dưới của cả hai nhân tử, chặn trên dùng chặn trên của cả hai. Đây là lý do một con số "chính xác" hiển thị trên máy tính có thể vẫn ẩn chứa một khoảng sai số đáng kể nếu số liệu đầu vào chỉ là số đã làm tròn.

1.2 Scientific (Standard) Notation and Estimation

A number is in **standard form** (scientific notation) when written as $a \times 10^k$, where $1 \leq |a| < 10$ and $k \in \mathbb{Z}$. To multiply/divide numbers in standard form, combine the coefficients and add/subtract the exponents, then renormalise if the coefficient falls outside $[1, 10)$. **Order-of-magnitude estimation** rounds each quantity to one significant figure (or the nearest power of 10) before combining, to sanity-check a more precise GDC answer.

Ví dụ mẫu 3 · Standard form arithmetic

Simplify $(3.2 \times 10^6) \times (5 \times 10^{-3})$, giving the answer in standard form.

$$(3.2 \times 5) \times 10^{6+(-3)} = 16 \times 10^3 = 1.6 \times 10^4.$$

Ví dụ mẫu 4 · Population density

A country has population 1.44×10^9 and land area $9.6 \times 10^6 \text{ km}^2$. Find its population density in people per km^2 .

$$\text{density} = \frac{1.44 \times 10^9}{9.6 \times 10^6} = 0.15 \times 10^3 = 1.5 \times 10^2 = 150 \text{ people/km}^2.$$

Ví dụ mẫu 5 • Order-of-magnitude estimation

Estimate the number of seconds in one year, and express the answer in standard form correct to 3 s.f.

$$60 \times 60 \times 24 \times 365 = 31\,536\,000 = 3.15 \times 10^7 \text{ seconds (3 s.f.)}$$

This is a useful benchmark figure: "about 3×10^7 seconds per year" is worth memorising for quick estimation checks.

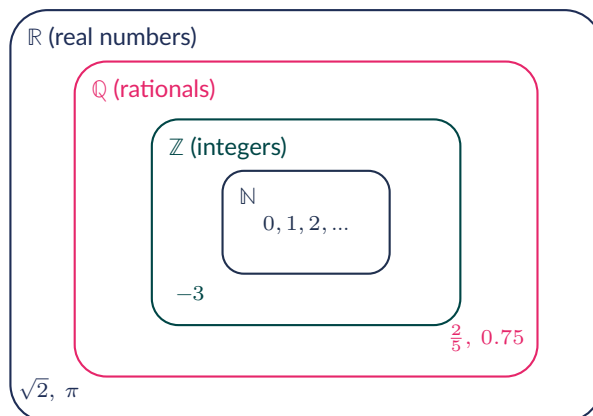
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Số dạng chuẩn $a \times 10^k$ với $1 \leq |a| < 10$ giúp so sánh và tính toán với các số rất lớn hoặc rất nhỏ dễ dàng hơn. Khi nhân/chia, **nhân/chia phần hệ số a và cộng/trừ số mũ k** ; nếu hệ số kết quả rơi ra ngoài khoảng $[1, 10)$, phải **chuẩn hoá lại**. Ước lượng bậc độ lớn (làm tròn mỗi số về 1 chữ số có nghĩa) là công cụ nhanh để kiểm tra xem kết quả bấm máy có "hợp lý" hay có khả năng đã bấm sai.

1.3 Sets of Numbers and SI Units

Numbers are classified into nested **sets**: the **natural numbers** $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$; the **integers** $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$; the **rational numbers** $\mathbb{Q}$ (numbers expressible as a fraction $\frac{p}{q}$ with $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$, including all terminating and repeating decimals); and the **real numbers** $\mathbb{R}$, which also include the **irrational numbers** (non-repeating, non-terminating decimals such as $\sqrt{2}$, π , e). These sets are nested: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.



Nested number sets: every natural number is an integer, every integer is rational, and every rational number is real; the irrationals ($\sqrt{2}$, π , e) fill the remaining space inside $\mathbb{R}$ but outside $\mathbb{Q}$.

Ví dụ mẫu 4b • Classifying numbers

Classify each of -3 , 0 , $\frac{2}{5}$, $\sqrt{2}$, and 7 using the smallest applicable set among $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

$-3 \in \mathbb{Z}$ (not natural, since it is negative); $0 \in \mathbb{N}$; $\frac{2}{5} \in \mathbb{Q}$ (not an integer); $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ only (irrational); $7 \in \mathbb{N}$.

The **SI base units** relevant to AI applications are the **metre (m)** for length, the **kilogram (kg)** for mass, and the **second (s)** for time, with common derived units such as m/s (speed), m/s^2 (acceleration), and km/h. **Dimensional analysis** (multiplying by conversion factors equal to 1, such as $\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}$ or $\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}$) converts a quantity from one unit to another without changing its value.

Ví dụ mẫu 4c • Unit conversion

A car travels at 108 km/h. Convert this speed to m/s.

$$108 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = \frac{108\,000}{3600} = 30 \text{ m/s.}$$

(Shortcut used throughout AI: to convert km/h → m/s, divide by 3.6; to convert m/s → km/h, multiply by 3.6.)

Ví dụ mẫu 4d • Average speed with mixed units

A runner completes a 5 km race in 22 minutes 30 seconds. Find the average speed in m/s and in km/h.

Time = $22(60) + 30 = 1350 \text{ s}$; distance = 5000 m.

$$\text{speed} = \frac{5000}{1350} \approx 3.70 \text{ m/s} \quad \Rightarrow \quad 3.70 \times 3.6 \approx 13.3 \text{ km/h.}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Các tập hợp số $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ lồng nhau: mọi số tự nhiên là số nguyên, mọi số nguyên là số hữu tỉ, mọi số hữu tỉ là số thực. Số **vô tỉ** (như $\sqrt{2}$, π , e) là số thực nhưng **không** viết được dưới dạng phân số. Khi đổi đơn vị, nhân với các **hệ số chuyển đổi bằng 1** (ví dụ $\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}$) để đơn vị cũ **triệt tiêu** và chỉ còn đơn vị mới — đây gọi là phân tích thứ nguyên (dimensional analysis), tránh nhầm lẫn khi đổi qua nhiều đơn vị liên tiếp.

1.4 Arithmetic Sequences and Series

An **arithmetic sequence** has a constant common difference d between consecutive terms: $u_n = u_1 + (n - 1)d$. The sum of the first n terms is

$$S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d) = \frac{n}{2}(u_1 + u_n).$$

Ví dụ mẫu 6 • Arithmetic sequence

A stadium's front row has 18 seats; each subsequent row has 3 more seats than the row in front of it. Find the number of seats in row 25, and the total number of seats in the first 25 rows.

Arithmetic with $u_1 = 18$, $d = 3$: $u_{25} = 18 + 24(3) = 90$ seats in row 25.

$$S_{25} = \frac{25}{2}(18 + 90) = \frac{25}{2}(108) = 1350 \text{ seats total.}$$

Ví dụ mẫu 7 • Salary progression

A graduate's starting annual salary is \$42 000, with a fixed raise of \$1800 each year (arithmetic growth). Find the salary in year 10, and the total amount earned over the first 10 years (years 1 to 10 inclusive).

$$u_1 = 42\,000, d = 1800: u_{10} = 42\,000 + 9(1800) = \$58\,200.$$

$$S_{10} = \frac{10}{2}(42\,000 + 58\,200) = 5(100\,200) = \$501\,000.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Dãy số cộng có **hiệu số không đổi** d giữa hai số hạng liên tiếp. Trong bài toán thực tế: bất cứ khi nào một đại lượng tăng/giảm một **lượng cố định** mỗi kỳ (mỗi hàng ghế, mỗi năm lương), đó là dấu hiệu của dãy số cộng. S_n tính tổng n số hạng đầu bằng công thức "trung bình của số hạng đầu và cuối, nhân số lượng số hạng."

1.4.1 Where does the formula for S_n come from?

The arithmetic series formula is not just a rule to memorise — it follows from a classic pairing trick. Write S_n forwards and backwards, then add the two versions term by term:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + (u_1 + d) + \cdots + u_n \\ S_n &= u_n + (u_n - d) + \cdots + u_1 \end{aligned}$$

Adding vertically, every pair of matched terms sums to exactly $u_1 + u_n$ (the d 's cancel), and there are n such pairs:

$$2S_n = n(u_1 + u_n) \quad \Rightarrow \quad S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n).$$

This is exactly the story behind the (possibly apocryphal) tale of the young Gauss summing $1 + 2 + \cdots + 100$ instantly by pairing 1 with 100, 2 with 99, and so on, to get 50 pairs each summing to 101.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$ có thể chứng minh bằng cách viết tổng S_n **hai lần** (một lần theo thứ tự thường, một lần theo thứ tự ngược), rồi **cộng theo cột**: mỗi cặp số hạng tương ứng luôn cho tổng $u_1 + u_n$ không đổi (vì d triệt tiêu), và có đúng n cặp như vậy — đây chính là ý tưởng giai thoại nổi tiếng về nhà toán học Gauss khi còn nhỏ.

1.5 Geometric Sequences and Series

A **geometric sequence** has a constant common ratio r between consecutive terms: $u_n = u_1 r^{n-1}$. The sum of the first n terms is

$$S_n = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} \quad (r \neq 1).$$

Ví dụ mẫu 8 • Bouncing ball

A ball is dropped from a height of 2 m. After each bounce it rebounds to 60% of the height it fell from. Find the height it reaches after the 5th bounce.

Geometric with first bounce height $u_1 = 2(0.6) = 1.2$ and $r = 0.6$: height after bounce n is

$$h_n = 2(0.6)^n.$$

$$h_5 = 2(0.6)^5 = 2(0.07776) \approx 0.156 \text{ m.}$$

Ví dụ mẫu 9 • Car depreciation as a geometric sequence

A car purchased for \$32 000 loses 12% of its value each year (so it retains 88% of its value: $r = 0.88$). Find its value after 6 years, and the first full year in which its value drops below \$15 000.

$V_n = 32\,000(0.88)^n$. $V_6 = 32\,000(0.88)^6 \approx \$14\,860.93$. Checking successive years on a GDC: $V_5 \approx \$16\,887.42$ (still above \$15 000), $V_6 \approx \$14\,860.93$ (below \$15 000). So the value first drops below \$15 000 during year 6.

Ví dụ mẫu 10 • Geometric series

A start-up's first month of sales is 200 units, and sales grow by 15% each month thereafter ($r = 1.15$). Find the total sales over the first 12 months.

$$S_{12} = \frac{200((1.15)^{12} - 1)}{1.15 - 1} = \frac{200(5.3503 - 1)}{0.15} \approx 5800 \text{ units (to 3 s.f.)}$$

1.5.1 Where does the formula for S_n come from?

Multiply S_n by r and subtract from the original sum – nearly every term cancels:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_1r + u_1r^2 + \dots + u_1r^{n-1} \\ rS_n &= \quad u_1r + u_1r^2 + \dots + u_1r^{n-1} + u_1r^n \end{aligned}$$

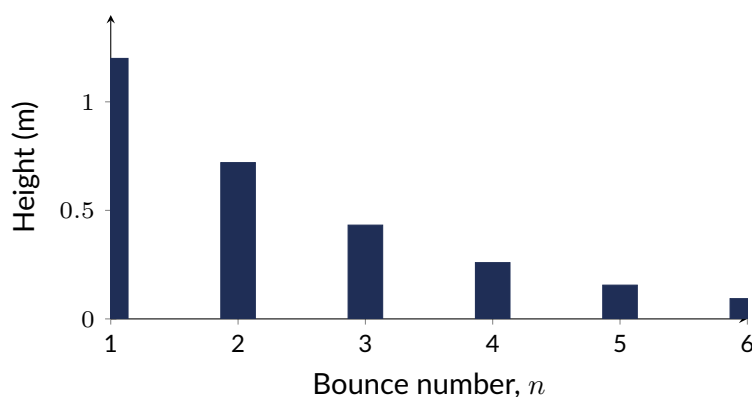
Subtracting, all the middle terms cancel, leaving $S_n - rS_n = u_1 - u_1r^n$, i.e. $S_n(1 - r) = u_1(1 - r^n)$, so

$$S_n = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức tổng dãy số nhân chứng minh bằng cách nhân S_n với r rồi trừ: hầu hết các số hạng ở giữa triệt tiêu nhau, chỉ còn lại số hạng đầu và số hạng cuối (đã nhân thêm r) – từ đó rút ra $S_n(1 - r) = u_1(1 - r^n)$.



Bounce heights $h_n = 1.2(0.6)^{n-1}$ for the ball of Example 8: each bar is 60% of the previous one, and the total area of all bars (extended forever) converges to $S_\infty = \frac{1.2}{1-0.6} = 3 \text{ m}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Dãy số nhân có **tỉ số không đổi** r giữa hai số hạng liên tiếp. Dấu hiệu nhận biết trong bài toán thực tế: đại lượng thay đổi theo một **tỉ lệ phần trăm cố định** mỗi kỳ — độ nảy của quả bóng, khấu hao xe, dân số tăng theo tỉ lệ, lãi kép, tăng trưởng doanh số theo %. Luôn phân biệt rõ u_1 là số hạng **đầu tiên của dãy đang xét** — không nhất thiết là giá trị gốc ban đầu của bài toán (ví dụ độ cao nảy lần 1 đã là u_1 , khác với độ cao rơi ban đầu).

1.5.2 Sum to infinity of a convergent geometric series (HL)

If $|r| < 1$, the partial sums S_n of a geometric series converge to a finite limit as $n \rightarrow \infty$, called the **sum to infinity**:

$$S_{\infty} = \frac{u_1}{1-r} \quad (|r| < 1).$$

If $|r| \geq 1$, the series does *not* converge and S_{∞} does not exist.

Ví dụ mẫu 11 · Total distance of a bouncing ball, HL

For the ball in Example 8 (dropped from 2 m, rebounding to 60% of the previous height each bounce), find the *total* vertical distance travelled by the ball, assuming it bounces indefinitely. The ball falls 2 m once, then for every bounce it travels *up* a height h_n and back *down* the same height h_n . The bounce heights form a geometric sequence with first term $u_1 = 1.2$ and ratio $r = 0.6$, so

$$S_{\infty} = \frac{u_1}{1-r} = \frac{1.2}{1-0.6} = \frac{1.2}{0.4} = 3 \text{ m (sum of all bounce heights).}$$

$$\text{Total distance} = \underbrace{2}_{\substack{|\{z\}| \\ \text{initial fall}}} + \underbrace{2 \times 3}_{\substack{|\{z\}| \\ \text{up + down, all bounces}}} = 2 + 6 = 8 \text{ m.}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tổng đến vô hạn $S_{\infty} = \frac{u_1}{1-r}$ **chỉ tồn tại khi** $|r| < 1$ (dãy giảm dần về 0); nếu $|r| \geq 1$ thì tổng "phình to" không giới hạn và **không có** S_{∞} . Bài toán "tổng quãng đường quả bóng nảy vô hạn lần" là ứng dụng kinh điển: quãng đường rơi ban đầu chỉ tính **một lần**, nhưng mỗi lần nảy đóng góp **hai lần** độ cao (lên và xuống) vào tổng quãng đường.

(!) **Lỗi thường gặp:** Sai lầm phổ biến: áp dụng công thức $S_{\infty} = \frac{u_1}{1-r}$ khi $r \geq 1$ hoặc $r \leq -1$ — công thức này **vô nghĩa** trong các trường hợp đó vì dãy không hội tụ. Luôn kiểm tra $|r| < 1$ trước khi dùng công thức tổng vô hạn.

1.6 Financial Mathematics: Compound Growth

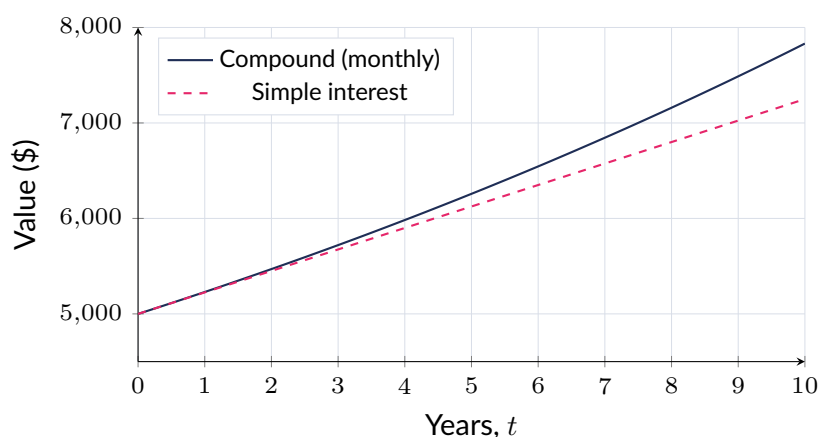
Compound interest: $FV = PV \left(1 + \frac{r}{100k}\right)^{kt}$, where PV is the principal, r is the annual percentage rate, k is the number of compounding periods per year, and t is time in years. On a GDC's Finance/TVM solver this is entered as $N = kt$, $I\% = r$, PV , $PMT = 0$, $P/Y = C/Y = k$, solving for FV .

Ví dụ mẫu 12 • GDC Finance solver

\$5000 is invested at 4.5% p.a. compounded monthly. Find its value after 6 years.

$N = 72$, $I\% = 4.5$, $PV = -5000$, $PMT = 0$, $P/Y = C/Y = 12$.

$$FV = 5000 \left(1 + \frac{0.045}{12}\right)^{72} \approx \$6546.52.$$



\$5000 at 4.5% p.a.: compound growth (curved) overtakes simple interest (straight line) — the gap widens every year.

Ví dụ mẫu 13 • Effect of compounding frequency

\$10 000 is invested at 6% p.a. for 5 years. Compare the final value under annual, quarterly, monthly, and daily compounding.

Frequency (k)	Annual (1)	Monthly (12)	Daily (365)
FV	\$13 382.26	\$13 488.50	\$13 498.26

More frequent compounding gives a (slightly) higher final value, but the effect diminishes rapidly: switching from annual to monthly compounding gains about \$106.25, while switching from monthly to daily gains only about \$9.75 more.

Ví dụ mẫu 14 • Inflation and purchasing power

A car currently costs \$50 000. If prices rise with inflation at a steady 3% p.a., estimate its price in 8 years' time.

Inflation compounds exactly like interest: $P_8 = 50\,000(1.03)^8 \approx \$63\,338.50$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trên máy tính TI/Casio, mục Finance (TVM Solver) cần nhập đủ: N (tổng số kỳ), $I\%$ (lãi suất năm), PV , PMT , FV , và $P/Y = C/Y$ (số kỳ ghép lãi mỗi năm). **Quy ước dấu:** tiền ra khỏi túi bạn (gửi tiết kiệm, trả nợ) mang dấu âm; tiền vào túi bạn (nhận lãi, nhận khoản vay) mang dấu dương. Lạm phát dùng **đúng công thức lãi kép** — giá cả "tăng trưởng" theo thời gian giống một khoản đầu tư.

1.7 Loans, Annuities, and Depreciation

Loan repayment (amortization): for a loan of present value PV , charged interest rate i per period, repaid in n equal instalments,

$$PMT = \frac{PV \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}.$$

Depreciation (reducing-balance): $V_t = V_0 \left(1 - \frac{r}{100}\right)^t$, where V_0 is the initial value and $r\%$ is the annual depreciation rate.

Savings annuity (future value of regular deposits): if PMT is deposited at the end of each period at rate i per period for n periods,

$$FV = \frac{PMT[(1 + i)^n - 1]}{i}.$$

Ví dụ mẫu 15 • Loan repayment

A \$20 000 loan is repaid in equal monthly instalments over 5 years at 6% p.a. compounded monthly. Find the monthly payment and the total interest paid.

Monthly rate $i = \frac{0.06}{12} = 0.005$, $n = 60$ payments.

$$PMT = \frac{20\,000(0.005)}{1 - (1.005)^{-60}} \approx \$386.66.$$

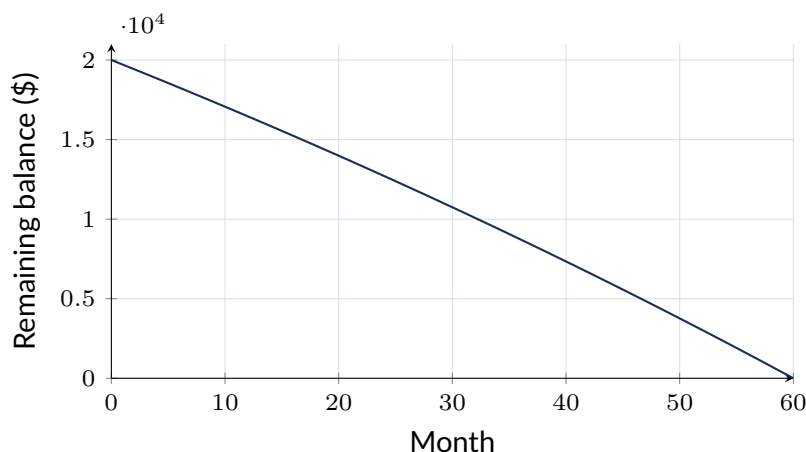
Total repaid $\approx 60(386.66) = \$23\,199.36$, so total interest $\approx \$3199.36$.

Ví dụ mẫu 16 • Amortization schedule

For the loan in Example 15, construct the amortization table for the first 3 months (interest paid, principal paid, and remaining balance).

Month	Payment (\$)	Interest (\$)	Principal (\$)	Balance (\$)
0	—	—	—	20 000.00
1	386.66	100.00	286.66	19 713.34
2	386.66	98.57	288.09	19 425.25
3	386.66	97.13	289.53	19 135.72

Each month's interest is $0.005 \times (\text{previous balance})$; the rest of the fixed payment reduces the principal. Notice the interest portion *shrinks* and the principal portion *grows* every month, even though the total payment stays fixed.



Declining loan balance over 60 monthly instalments: the curve is concave up, because early payments are mostly interest and later payments are mostly principal, so the balance falls slowly at first and rapidly near the end.

Ví dụ mẫu 17 • Reducing-balance depreciation

A delivery van bought for \$28 000 depreciates at 15% p.a. Find its value after 4 years.

$$V_4 = 28\,000(0.85)^4 \approx \$14\,616.17.$$

Ví dụ mẫu 18 • Savings annuity

A saver deposits \$200 at the end of each month into an account earning 3.6% p.a. compounded monthly, for 5 years. Find the future value of the savings plan, and compare it to the total amount deposited.

$$i = \frac{0.036}{12} = 0.003, n = 60.$$

$$FV = \frac{200[(1.003)^{60} - 1]}{0.003} \approx \$13\,126.32.$$

Total deposited = $200 \times 60 = \$12\,000$, so the account earned about \$1126.32 in interest.

Present value of an annuity: the lump sum PV that must be invested now (earning rate i per period) to fund n future equal withdrawals of PMT is

$$PV = \frac{PMT[1 - (1 + i)^{-n}]}{i}.$$

This is the same structure as the loan formula, viewed from the lender's/investor's side rather than the borrower's.

Ví dụ mẫu 18b • Present value of an annuity

A retiree wants to withdraw \$500 at the end of each month for 10 years from an account earning 3% p.a. compounded monthly. Find the lump sum that must be deposited today.

$$i = \frac{0.03}{12} = 0.0025, n = 120.$$

$$PV = \frac{500[1 - (1.0025)^{-120}]}{0.0025} \approx \$51\,780.88.$$

1.7.1 Where does the loan payment formula come from?

The instalment formula is really a geometric series in disguise. A loan is fair when the amount borrowed, PV , equals the sum of the **present values** of every future payment, each discounted back by the appropriate number of periods at rate i :

$$PV = \frac{PMT}{1+i} + \frac{PMT}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{PMT}{(1+i)^n}.$$

The right-hand side is a geometric series with first term $\frac{PMT}{1+i}$ and common ratio $\frac{1}{1+i}$. Applying the sum formula from Section 1.4 and simplifying gives

$$PV = PMT \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i} \quad \Rightarrow \quad PMT = \frac{PV \cdot i}{1 - (1+i)^{-n}},$$

exactly the formula used above – and the *same* algebraic structure gives the present-value-of-an-annuity and future-value-of-an-annuity formulas seen later in this section, just rearranged.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức trả góp thực chất là **một dãy số nhân** được viết lại: khoản vay PV phải bằng tổng **giá trị hiện tại** của tất cả các khoản trả trong tương lai, mỗi khoản được "chiết khấu" (discount) về thời điểm hiện tại theo lãi suất i . Đây là lý do công thức tài chính và công thức dãy số nhân có cấu trúc giống hệt nhau – chỉ là ứng dụng khác nhau của cùng một ý tưởng toán học.

1.7.2 Currency conversion

Ví dụ mẫu 15b • Currency conversion

The exchange rate is 1 USD = 0.92 EUR. Convert \$850 to EUR, and convert €500 back to USD.

$$850 \times 0.92 = \text{€}782.00. \quad 500 \div 0.92 \approx \$543.48.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đổi tiền tệ dùng **phép nhân** theo chiều tỉ giá đã cho (USD→EUR), và **phép chia** theo chiều ngược lại (EUR→USD) – về bản chất đây cũng là một dạng phân tích thứ nguyên (dimensional analysis) như đổi đơn vị đo lường ở Section 1.2.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với vay trả góp, mỗi kỳ trả **một số tiền cố định** PMT , nhưng tỉ lệ giữa phần trả lãi và phần trả gốc **thay đổi dần theo thời gian**: lãi giảm, gốc tăng, vì lãi luôn tính trên số dư còn lại (đang giảm dần). Khấu hao dùng công thức lũy thừa giống lãi kép nhưng với hệ số $(1-r)$ thay vì $(1+r)$. Tiết kiệm định kỳ (annuity) dùng công thức tổng dãy số nhân của các khoản gửi, mỗi khoản "hưởng lãi" trong một số kỳ khác nhau tùy vào thời điểm gửi.

(!) Lỗi thường gặp: Đừng nhầm **annuity** (một loạt khoản tiền bằng nhau, định kỳ – vay trả góp hoặc tiết kiệm định kỳ, $PMT \neq 0$) với **lãi kép một lần** (một khoản gửi/vay duy nhất, $PMT = 0$). Trên GDC, luôn kiểm tra PMT đã nhập đúng là 0 hay khác 0 tùy loại bài toán – nhập sai giá trị này là lỗi phổ biến nhất trong phần tài chính.

1.8 Laws of Logarithms and Exponential Equations (HL)

For $a, b > 0$ and base $c > 0, c \neq 1$: $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$; $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$; $\log_c(a^n) = n \log_c a$; and the **change of base** rule $\log_c a = \frac{\log a}{\log c}$ (any common base). To solve $c^x = b$ for x , take logarithms of both sides: $x = \frac{\log b}{\log c}$.

Ví dụ mẫu 19 • Solving an exponential equation, HL

Solve $3^x = 50$ for x , correct to 4 s.f.

$$x = \frac{\ln 50}{\ln 3} \approx 3.561.$$

Ví dụ mẫu 20 • Exponential growth model, HL

A bacteria culture grows according to $P(t) = 200e^{0.35t}$ (t in hours). Find the time for the population to reach 5000.

$$200e^{0.35t} = 5000 \Rightarrow e^{0.35t} = 25 \Rightarrow 0.35t = \ln 25 \Rightarrow t = \frac{\ln 25}{0.35} \approx 9.20 \text{ hours.}$$

Ví dụ mẫu 21 • Logarithmic scale, HL

The decibel scale for sound intensity level is $L = 10 \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$. If the intensity of a sound increases by a factor of 500 (with I_0 unchanged), find the increase in decibels.

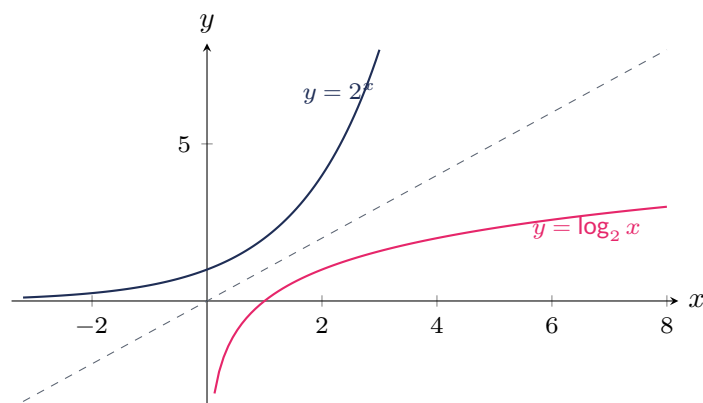
$$\Delta L = 10 \log_{10}(500) \approx 27.0 \text{ dB.}$$

Ví dụ mẫu 22 • Doubling time, HL

Find the number of years for an investment to double in value at 6% p.a. compounded annually.

$$(1.06)^n = 2 \Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1.06} \approx 11.9 \text{ years.}$$

(This matches the well-known "Rule of 72" estimate $72/6 = 12$ years closely.)



$y = 2^x$ and its inverse $y = \log_2 x$ are reflections of each other in the line $y = x$: exponentials and logarithms undo one another.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Các định luật logarit cho phép "tách" hoặc "gộp" các biểu thức mũ phức tạp: log của một tích = tổng các log; log của một lũy thừa = số mũ nhân log. Để giải $c^x = b$, lấy log (hoặc ln) hai vế rồi dùng định luật lũy thừa của log để "kéo" số mũ x xuống thành hệ số nhân — đây là kỹ thuật cốt lõi cho mọi bài toán "tìm t " trong tăng trưởng mũ, phân rã, và thời gian gấp đôi/tăng n lần.

1.9 Systems of Linear Equations and Matrices (HL)

Many applied problems (mixing, network flow, curve fitting, production planning) reduce to a **system of linear equations**, normally solved directly with a GDC's simultaneous-equation solver or matrix routines rather than by hand.

[Ma trận • Matrices] For matrices $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, addition/subtraction is entrywise (matrices must have the same dimensions), while matrix multiplication AB combines rows of A with columns of B : entry (i, j) of AB is the sum of products of row i of A with column j of B . For a 2×2 matrix, the **determinant** is $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, and (if $\det A \neq 0$) the **inverse** is

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}.$$

A linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ with $\det A \neq 0$ has the unique solution $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Ví dụ mẫu 23 • Matrix arithmetic, HL

Let $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ and $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Find AB .

$$AB = \begin{pmatrix} 2(1) + (-1)(2) & 2(4) + (-1)(-2) \\ 0(1) + 3(2) & 0(4) + 3(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Ví dụ mẫu 24 • Inverse matrix method, HL

Solve $2x + 3y = 16$, $x - y = -2$ using the inverse matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \det A = 2(-1) - 3(1) = -5.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2(16) + 0.6(-2) \\ 0.2(16) - 0.4(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

So $x = 2, y = 4$. Check: $2(2) + 3(4) = 4 + 12 = 16 \checkmark$; $2 - 4 = -2 \checkmark$.

Ví dụ mẫu 25 · 3×3 system with technology, HL

Solve the system using a GDC's equation/matrix solver:

$$2x + y - z = 1, \quad x - y + 3z = 8, \quad 3x + 2y + z = 10.$$

Entering the coefficient matrix and constant vector into a GDC's simultaneous-equation solver gives $x = 1, y = 2, z = 3$. Check: $2(1) + 2 - 3 = 1 \checkmark$; $1 - 2 + 3(3) = 8 \checkmark$; $3(1) + 2(2) + 3 = 10 \checkmark$.

Ví dụ mẫu 26 · Production-planning application, HL

A workshop makes chairs (x) and tables (y). Each chair uses 3 units of wood and 2 hours of labour; each table uses 5 units of wood and 4 hours of labour. This week, exactly 62 units of wood and 46 hours of labour are available and fully used. Set up and solve a matrix equation to find how many chairs and tables can be made.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 46 \end{pmatrix}.$$

$\det = 3(4) - 5(2) = 2$, so the system has a unique solution; solving with technology gives $x = 9$ chairs, $y = 7$ tables. Check: $3(9) + 5(7) = 27 + 35 = 62 \checkmark$; $2(9) + 4(7) = 18 + 28 = 46 \checkmark$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ma trận cho phép biểu diễn một hệ phương trình tuyến tính dưới dạng $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gọn gàng. Định thức $\det A = 0$ nghĩa là ma trận **không có nghịch đảo** — hệ tương ứng **vô nghiệm** hoặc **vô số nghiệm**, không có nghiệm duy nhất. Trong các bài toán ứng dụng (sản xuất, pha trộn), mỗi **dòng** của ma trận hệ số thường tương ứng với **một loại tài nguyên** (gỗ, nhân công, ...) và mỗi **cột** tương ứng với **một loại sản phẩm**.

(!) Lỗi thường gặp: Với hệ 3×3 trở lên, **không giải tay bằng định thức** trong phòng thi — luôn dùng chức năng giải hệ phương trình hoặc ma trận nghịch đảo trên GDC để tiết kiệm thời gian và tránh sai sót số học. Đề AI luôn cho phép dùng máy tính cho phần này.

1.10 Complex Numbers and Phasors (HL)

The **imaginary unit** i satisfies $i^2 = -1$. A **complex number** $z = a + bi$ has real part a and imaginary part b . Complex numbers add/subtract componentwise and multiply using $i^2 = -1$: $(a+bi)(c+di) = (ac-bd) + (ad+bc)i$. The **modulus** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ and **argument** $\theta = \arg z$ (the angle from the positive real axis, with $\tan \theta = b/a$, adjusted for quadrant) give the **modulus-argument (polar) form** $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, plotted on an **Argand diagram** (real axis horizontal, imaginary axis vertical).

Ví dụ mẫu 27 · Complex arithmetic, HL

Let $z_1 = 2 + 3i$ and $z_2 = 4 - 5i$. Find $z_1 + z_2$ and $z_1 z_2$.

$$z_1 + z_2 = (2 + 4) + (3 - 5)i = 6 - 2i.$$

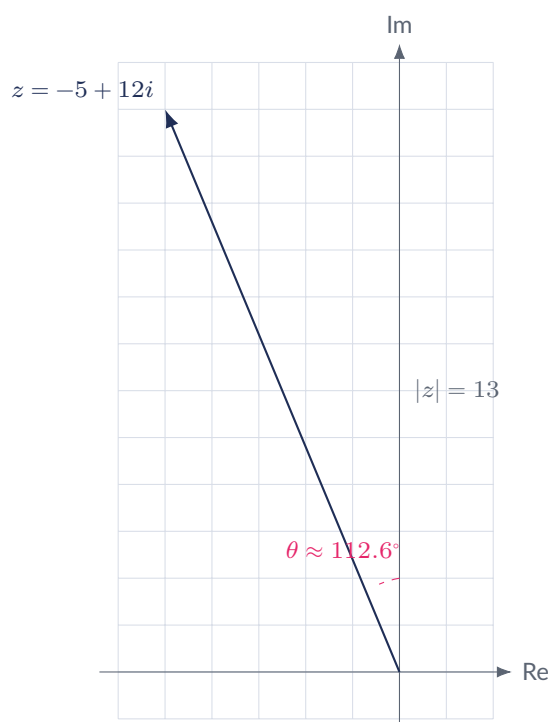
$$z_1 z_2 = (2)(4) + (2)(-5i) + (3i)(4) + (3i)(-5i) = 8 - 10i + 12i - 15i^2 = 8 + 2i + 15 = 23 + 2i.$$

Ví dụ mẫu 28 · Modulus and argument, HL

Find the modulus and argument of $z = -5 + 12i$.

$$|z| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Since z lies in the second quadrant (negative real, positive imaginary part), $\theta = 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{12}{5}\right) \approx 180^\circ - 67.38^\circ = 112.6^\circ$.



Argand diagram of $z = -5 + 12i$: the modulus $|z| = 13$ is the distance from the origin, and the argument $\theta \approx 112.6^\circ$ is measured anticlockwise from the positive real axis.

Ví dụ mẫu 29 · AC circuit impedance (phasors), HL

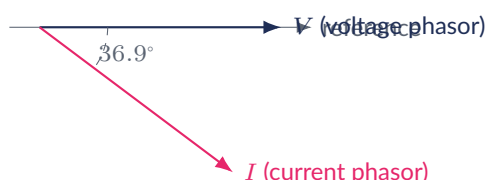
In alternating-current (AC) circuit analysis, engineers represent voltage and current as complex numbers called **phasors** (traditionally using $j = \sqrt{-1}$ instead of i , to avoid clashing with the symbol for current). Resistance contributes a purely real impedance R ; inductive reactance contributes a purely imaginary impedance jX_L . A circuit has resistance $R = 8 \Omega$ and inductive reactance $X_L = 6 \Omega$ in series. Find the impedance $Z = R + jX_L$ in modulus-argument form, and the current if the supply voltage is 120 V (rms).

$$Z = 8 + 6j, \quad |Z| = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10 \Omega, \quad \arg Z = \tan^{-1}\left(\frac{6}{8}\right) \approx 36.9^\circ.$$

By Ohm's law for phasors, $I = \frac{V}{Z}$, so the current magnitude is

$$|I| = \frac{|V|}{|Z|} = \frac{120}{10} = 12 \text{ A},$$

and the current **lags** the voltage by the impedance's phase angle, $\approx 36.9^\circ$.



Phasor diagram for the R - L series circuit: the current phasor I lags the voltage phasor V by the impedance's phase angle $\approx 36.9^\circ$, since the inductor delays current relative to voltage.

Ví dụ mẫu 30 · Converting a phasor to rectangular form, HL

A voltage phasor is given in polar form as $V = 100\angle 30^\circ \text{ V}$ (magnitude 100, phase 30°). Write V in rectangular ($a + bi$) form.

$$V = 100(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = 100(0.8660) + 100(0.5)i \approx 86.6 + 50.0i \text{ V}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Số phức $z = a + bi$ có phần thực a và phần ảo b , với $i^2 = -1$. **Mô-đun** $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ là khoảng cách từ gốc tọa độ đến điểm biểu diễn z trên mặt phẳng Argand; **argument** θ là góc hợp với trục thực dương. Trong kỹ thuật điện, số phức được dùng làm **phasor** để biểu diễn điện áp và dòng điện xoay chiều: phần thực/ảo (hoặc mô-đun/góc pha) mã hoá biên độ và độ lệch pha, giúp "cộng" và "nhân" các dao động hình sin bằng đại số phức thay vì lượng giác — đây là một ứng dụng đẹp của số phức ra ngoài toán học thuần túy.

Practice

Bài tập luyện tập

Classify each of -7 , 0 , $\frac{3}{4}$, $\sqrt{5}$, and 9 using the smallest applicable set among $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

Lời giải chi tiết

$-7 \in \mathbb{Z}$; $0 \in \mathbb{N}$; $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$; $\sqrt{5} \in \mathbb{R}$ only (irrational, since 5 is not a perfect square); $9 \in \mathbb{N}$.

Bài tập luyện tập

Convert 20 m/s to km/h, and convert 3400 g to kg.

Lời giải chi tiết

$20 \times 3.6 = 72$ km/h. $3400 \text{ g} \div 1000 = 3.4$ kg.

Bài tập luyện tập

A cyclist travels 45 km in 1 hour 30 minutes. Find the average speed in km/h and in m/s.

(A) 30 km/h, 8.33 m/s

(C) 67.5 km/h, 18.75 m/s

(B) 30 km/h, 10.8 m/s

(D) 22.5 km/h, 6.25 m/s

Lời giải chi tiết

$\frac{45 \text{ km}}{1.5 \text{ h}} = 30 \text{ km/h} = 30 \div 3.6 \approx 8.33 \text{ m/s}$. (A).

Bài tập luyện tập

A length is recorded as 84 cm, correct to 2 significant figures. Write down the lower and upper bounds of the exact length.

Lời giải chi tiết

Rounding to 2 s.f. means the rounding unit is 1 cm, so the exact length x satisfies

$$84 - 0.5 \leq x < 84 + 0.5 \implies \boxed{83.5 \text{ cm} \leq x < 84.5 \text{ cm}}.$$

Bài tập luyện tập

A rectangular plot is measured as length 12.4 m and width 8.6 m, each correct to 1 d.p. Find the lower and upper bounds of the area.

Lời giải chi tiết

Length bounds [12.35, 12.45); width bounds [8.55, 8.65).

Lower bound = $12.35 \times 8.55 = 105.5925$, Upper bound = $12.45 \times 8.65 = 107.6925$.

So $\boxed{105.59 \text{ m}^2 \leq A < 107.69 \text{ m}^2}$ (4 s.f.).

Bài tập luyện tập

A quantity's true value is 45.0 but is measured as 47.3. Find the percentage error.

(A) 4.65%

(C) 5.38%

(B) 5.11%

(D) 2.30%

Lời giải chi tiết

$$\% \text{error} = \frac{|47.3 - 45.0|}{45.0} \times 100\% = \frac{2.3}{45.0} \times 100\% \approx 5.11\%.$$

(B).

Bài tập luyện tập

A quantity is given as 250, correct to the nearest whole number. State the lower and upper bounds.

Lời giải chi tiết

Rounding unit $u = 1$: $249.5 \leq x < 250.5$.

Bài tập luyện tập

Write 0.0000456 in standard form.

(A) 4.56×10^{-5} (C) 4.56×10^{-4} (B) 4.56×10^5 (D) 0.456×10^{-4} **Lời giải chi tiết**

Move the decimal point 5 places right to get a coefficient in $[1, 10)$: 4.56, exponent -5 . 4.56×10^{-5} . (A).

Bài tập luyện tập

Simplify $(6.4 \times 10^{-4}) \div (1.6 \times 10^2)$, giving the answer in standard form.

Lời giải chi tiết

$$\frac{6.4}{1.6} \times 10^{-4-2} = 4 \times 10^{-6}.$$

Bài tập luyện tập

A stadium holds 4.8×10^4 fans and the average ticket price is \$35. Estimate the total ticket revenue in standard form, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$4.8 \times 10^4 \times 35 = 1.68 \times 10^6 \Rightarrow \$1.68 \times 10^6.$$

Bài tập luyện tập

A city uses 2.4×10^7 litres of water per day. Estimate its total annual usage, in standard form correct to 3 s.f. (use 365 days).

Lời giải chi tiết

$$2.4 \times 10^7 \times 365 = 8.76 \times 10^9 \text{ litres.}$$

Bài tập luyện tập

The 1st term of an arithmetic sequence is 12 and the 15th term is 96. Find the common difference d and the sum of the first 15 terms.

(A) $d = 6, S_{15} = 810$

(C) $d = 8, S_{15} = 810$

(B) $d = 6, S_{15} = 1440$

(D) $d = 6, S_{15} = 756$

Lời giải chi tiết

$$u_{15} = u_1 + 14d \Rightarrow 96 = 12 + 14d \Rightarrow d = \frac{84}{14} = 6.$$

$$S_{15} = \frac{15}{2}(u_1 + u_{15}) = \frac{15}{2}(12 + 96) = \frac{15}{2}(108) = 810.$$

(A).

Bài tập luyện tập

An arithmetic sequence has $u_1 = 7$ and $d = 4$. Find u_{20} and S_{20} .

Lời giải chi tiết

$$u_{20} = 7 + 19(4) = 83. S_{20} = \frac{20}{2}(7 + 83) = 10(90) = 900.$$

Bài tập luyện tập

Find the sum of the first 30 positive multiples of 3 (i.e. $3 + 6 + 9 + \dots + 90$).

(A) 1350

(C) 1425

(B) 1395

(D) 1305

Lời giải chi tiết

Arithmetic with $u_1 = 3, d = 3, u_{30} = 90$: $S_{30} = \frac{30}{2}(3 + 90) = 15(93) = 1395$. (B).

Bài tập luyện tập

A geometric sequence has $u_1 = 5$ and $r = 3$. Find u_8 and S_8 .

Lời giải chi tiết

$$u_8 = 5(3)^7 = 5(2187) = 10\,935. S_8 = \frac{5(3^8 - 1)}{3 - 1} = \frac{5(6560)}{2} = 16\,400.$$

Bài tập luyện tập

\$8000 is invested at 5% p.a. compounded annually. After how many *full* years will the investment first exceed \$12 000?

(A) 7 years

(C) 9 years

(B) 8 years

(D) 10 years

Lời giải chi tiết

We need $8000(1.05)^n > 12000 \Rightarrow (1.05)^n > 1.5 \Rightarrow n > \frac{\ln 1.5}{\ln 1.05} \approx 8.31$. Checking on a GDC: after 8 years, value $\approx \$11\,819.64$ (not yet exceeded); after 9 years, value $\approx \$12\,410.63$ (exceeded). So it first exceeds \$12 000 after 9 years. (C).

Bài luyện nâng cao · HL

A geometric series has $u_1 = 8$ and $r = 0.25$. Find S_∞ .

Lời giải chi tiết

Since $|r| = 0.25 < 1$, $S_\infty = \frac{u_1}{1 - r} = \frac{8}{0.75} \approx 10.7$.

Bài luyện nâng cao · HL

A ball is dropped from 3 m and rebounds to 50% of the height it fell from each bounce. Find the total vertical distance travelled (assume the ball bounces indefinitely).

Lời giải chi tiết

Bounce heights: $u_1 = 3(0.5) = 1.5$, $r = 0.5$. $S_\infty = \frac{1.5}{1 - 0.5} = 3$ m (sum of all bounce heights).
Total distance = 3 (initial fall) + 2(3) (up+down for all bounces) = 3 + 6 = 9 m.

Bài tập luyện tập

\$12 000 is invested at 3.8% p.a. compounded quarterly for 10 years. Find its final value.

Lời giải chi tiết

$$N = 40, I\% = 3.8, P/Y = C/Y = 4: FV = 12\,000 \left(1 + \frac{0.038}{4}\right)^{40} \approx \text{\$17 515.97}.$$

Bài tập luyện tập

Using the compounding-frequency comparison for \$10 000 at 6% p.a. over 5 years (annual $FV \approx \$13\,382.26$; monthly $FV \approx \$13\,488.50$), find how much extra interest monthly compounding earns compared to annual compounding.

(A) \$9.75**(C)** \$115.99**(B)** \$106.25**(D)** \$206.25**Lời giải chi tiết**

$13\,488.50 - 13\,382.26 \approx \106.25 extra interest. **(B)**.

Bài tập luyện tập

A textbook currently costs \$800. If prices rise with inflation at 4% p.a., estimate its price in 5 years.

Lời giải chi tiết

$$800(1.04)^5 \approx \boxed{\$973.32}.$$

Bài tập luyện tập

An investment of \$5000 grows to \$7000 in 8 years under annual compounding. Find the annual interest rate.

Lời giải chi tiết

$$5000(1+r)^8 = 7000 \Rightarrow (1+r)^8 = 1.4 \Rightarrow r = (1.4)^{1/8} - 1 \approx 0.0430 = 4.30\%.$$

Bài tập luyện tập

A student borrows \$10 000 at 8.4% p.a. compounded monthly, to be repaid in equal instalments over 3 years. Find the monthly payment and the total interest paid over the life of the loan.

Lời giải chi tiết

$$i = \frac{0.084}{12} = 0.007, n = 36.$$

$$PMT = \frac{10\,000(0.007)}{1 - (1.007)^{-36}} \approx \$315.21.$$

$$\text{Total repaid} \approx 36(315.21) = \$11\,347.64, \text{ so total interest} \approx \boxed{\$1347.64}.$$

Bài tập luyện tập

For the loan in the previous question, find the amount of interest paid in the *first* month.

Lời giải chi tiết

$$\text{First month's interest} = (\text{opening balance}) \times i = 10\,000(0.007) = \boxed{\$70.00}.$$

Bài tập luyện tập

Equipment bought for \$45 000 depreciates at 12% p.a. (reducing balance). Find its value after 5 years.

Lời giải chi tiết

$$V_5 = 45\,000(0.88)^5 \approx \boxed{\$23\,747.94}.$$

Bài tập luyện tập

For the equipment above (\$45 000, depreciating 12% p.a.), find the first full year in which its value drops below \$20 000.

(A) 6th year

(C) 8th year

(B) 7th year

(D) 9th year

Lời giải chi tiết

Checking on a GDC: $V_6 \approx \$20\,898.18$ (still above), $V_7 \approx \$18\,390.40$ (below \$20 000). **(B)**.

Bài tập luyện tập

A saver deposits \$150 at the end of each month into an account earning 4.2% p.a. compounded monthly, for 8 years. Find the future value of the savings plan.

Lời giải chi tiết

$$i = \frac{0.042}{12} = 0.0035, n = 96.$$

$$FV = \frac{150[(1.0035)^{96} - 1]}{0.0035} \approx \boxed{\$17\,079.36}.$$

Bài tập luyện tập

A retiree wants to withdraw \$300 at the end of each month for 5 years from an account earning 4% p.a. compounded monthly. Find the lump sum needed today.

Lời giải chi tiết

$$i = \frac{0.04}{12}, n = 60.$$

$$PV = \frac{300[1 - (1 + i)^{-60}]}{i} \approx \boxed{\$16\,289.72}.$$

Bài tập luyện tập

Find the lump sum needed now to fund quarterly withdrawals of \$1000 for 15 years, at 5% p.a. compounded quarterly.

(A) \$38 650

(C) \$42 035

(B) \$40 230

(D) \$45 500

Lời giải chi tiết

$$i = \frac{0.05}{4} = 0.0125, n = 60.$$

$$PV = \frac{1000[1 - (1.0125)^{-60}]}{0.0125} \approx \$42\,034.59.$$

(C).

Bài tập luyện tập

Equipment worth \$45 000 depreciates at 12% p.a. (reducing balance). Find, correct to 1 d.p., the number of years for its value to fall to exactly half its original value.

Lời giải chi tiết

Solve $(0.88)^n = 0.5$ using logarithms:

$$n = \frac{\ln 0.5}{\ln 0.88} \approx \boxed{5.4 \text{ years}}.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Solve $5^x = 200$ for x , correct to 4 s.f.

Lời giải chi tiết

$$x = \frac{\ln 200}{\ln 5} \approx 3.292.$$

Bài luyện nâng cao · HL

An amount grows according to $A(t) = 300e^{0.08t}$. Find the time t for A to reach 1000.

Lời giải chi tiết

$$300e^{0.08t} = 1000 \Rightarrow e^{0.08t} = \frac{10}{3} \Rightarrow t = \frac{\ln(10/3)}{0.08} \approx 15.0.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Using the decibel formula $L = 10 \log_{10}(I/I_0)$, find the increase in decibels if intensity increases by a factor of 500.

(A) 23.0 dB

(C) 50.0 dB

(B) 27.0 dB

(D) 2.70 dB

Lời giải chi tiết

$$\Delta L = 10 \log_{10}(500) \approx 27.0 \text{ dB. (B).}$$

Bài luyện nâng cao · HL

Find the time for an investment to double at 4.5% p.a. compounded annually.

Lời giải chi tiết

$$(1.045)^n = 2 \Rightarrow n = \frac{\ln 2}{\ln 1.045} \approx 15.7 \text{ years.}$$

Bài luyện nâng cao · HLUse the inverse matrix method to solve $2x + 3y = 16$, $x - y = -2$.**Lời giải chi tiết**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \det A = -5, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.6 \\ 0.2 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

So $x = 2$, $y = 4$.**Bài luyện nâng cao · HL**Let $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Find AB .**Lời giải chi tiết**

$$AB = \begin{pmatrix} 2(1) - 1(2) & 2(4) - 1(-2) \\ 0(1) + 3(2) & 0(4) + 3(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 10 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}.$$

Bài luyện nâng cao · HLUse technology to solve the system $2x + y - z = 1$, $x - y + 3z = 8$, $3x + 2y + z = 10$.**Lời giải chi tiết**Entering into a GDC's equation solver gives $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

Bài luyện nâng cao · HL

A workshop makes chairs (x) and tables (y): each chair needs 3 units wood +2 hours labour, each table needs 5 units wood +4 hours labour. This week 62 units of wood and 46 hours of labour are fully used. Find x and y .

Lời giải chi tiết

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 62 \\ 46 \end{pmatrix}, \det = 2 \neq 0. \text{ Solving with technology: } x = 9 \text{ chairs, } y = 7 \text{ tables.}$$

Bài luyện nâng cao · HL

Let $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 4 - 5i$. Find $z_1 + z_2$ and $z_1 z_2$.

Lời giải chi tiết

$$z_1 + z_2 = 6 - 2i. \quad z_1 z_2 = 8 - 10i + 12i - 15i^2 = 8 + 2i + 15 = 23 + 2i.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Find the modulus and argument of $z = 5 - 12i$.

Lời giải chi tiết

$$|z| = \sqrt{25 + 144} = 13. \text{ Since } z \text{ is in the fourth quadrant, } \theta = -\tan^{-1}(12/5) \approx -67.4^\circ \text{ (equivalently } \approx 292.6^\circ).$$

Bài luyện nâng cao · HL

A series R - C circuit has resistance $R = 5 \Omega$ and capacitive reactance $X_C = 12 \Omega$, giving impedance $Z = 5 - 12j \Omega$. Find $|Z|$ and $\arg Z$.

Lời giải chi tiết

$$|Z| = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13 \Omega. \quad \arg Z = \tan^{-1}(-12/5) \approx -67.4^\circ \text{ (current leads voltage for a capacitive circuit).}$$

Bài luyện nâng cao · HL

A current phasor is given as $I = 40 \angle -25^\circ$ A. Write I in rectangular form, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$I = 40 \cos(-25^\circ) + 40 \sin(-25^\circ)i \approx 36.3 - 16.9i \text{ A.}$$

Mixed and Extended Problems

Ôn tập tổng hợp

\$60 000 is invested at 5.5% p.a. compounded annually.

- (a) Find its value after 10 years.
- (b) Find the number of years for the investment to *triple* in value.
- (c) If, instead, the same \$60 000 had been invested at 5.5% *simple* interest, find the first full year in which its simple-interest value exceeds the year-10 compound value found in part (a).

Lời giải chi tiết

(a) $FV_{10} = 60\,000(1.055)^{10} \approx \$102\,488.67$.

(b) $(1.055)^n = 3 \Rightarrow n = \frac{\ln 3}{\ln 1.055} \approx 20.5$ years.

(c) Simple interest value after t years is $60\,000(1 + 0.055t)$. We need this $> 102\,488.67$:

$$t > \frac{102\,488.67/60\,000 - 1}{0.055} \approx 12.9.$$

Checking integers: at $t = 12$, value = \$99 600 (not yet); at $t = 13$, value = \$102 900 (exceeds). So the simple-interest value first exceeds the compound year-10 value at $t = 13$ years.

Ôn tập tổng hợp

Company A's annual profit starts at \$50 000 and increases by a fixed \$8000 each year (arithmetic growth). Company B's annual profit also starts at \$50 000 but increases by 12% each year (geometric growth).

- (a) Find each company's profit in year 8.
- (b) Find the first year in which Company B's profit exceeds Company A's profit.
- (c) Find Company A's total combined profit over its first 8 years.

Lời giải chi tiết

(a) Company A: $u_8 = 50\,000 + 7(8000) = \$106\,000$. Company B: $u_8 = 50\,000(1.12)^7 \approx \$110\,534.07$.

(b) Tabulating year by year on a GDC (Company A arithmetic, Company B geometric), Company A leads through year 6 ($A_6 = \$90\,000$ vs. $B_6 \approx \$88\,117.08$), but at year 7: $A_7 = \$98\,000$ while $B_7 \approx \$98\,691.13$ — Company B has just overtaken. So Company B's profit first exceeds Company A's in **year 7**.

(c) $S_8 = \frac{8}{2}(50\,000 + 106\,000) = 4(156\,000) = \$624\,000$.

Ôn tập tổng hợp · HL

A theatre sells adult tickets at \$15 and child tickets at \$9. On Friday, 320 tickets were sold in total for combined revenue \$3720.

- (a) Set up a system of two linear equations in a (adult tickets) and c (child tickets).
- (b) Use the inverse matrix method to find a and c .
- (c) On Saturday, both prices rise by 10% and exactly the same numbers of adult and child tickets are sold. Find Saturday's total revenue.

Lời giải chi tiết

(a) $a + c = 320$ and $15a + 9c = 3720$.

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 15 & 9 \end{pmatrix}$, $\det A = 9 - 15 = -6$. $A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -15 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 320 \\ 3720 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

So $a = 140$ adult tickets, $c = 180$ child tickets. Check: $140 + 180 = 320 \checkmark$; $15(140) + 9(180) = 2100 + 1620 = 3720 \checkmark$.

(c) New prices: \$16.50 and \$9.90. Revenue = $140(16.50) + 180(9.90) = 2310 + 1782 = \boxed{\$4092}$.

Ôn tập tổng hợp · HL

Two AC voltage sources combine in a circuit: $V_1 = 50\angle 0^\circ \text{ V}$ and $V_2 = 30\angle 60^\circ \text{ V}$ (phasor notation).

(a) Convert V_1 and V_2 to rectangular form, correct to 2 d.p.

(b) Find the resultant voltage $V_1 + V_2$ in rectangular form.

(c) Convert the resultant back to polar (modulus-argument) form.

Lời giải chi tiết

(a) $V_1 = 50 + 0i$. $V_2 = 30 \cos 60^\circ + 30 \sin 60^\circ i = 15.00 + 25.98i$.

(b) $V_1 + V_2 = (50 + 15.00) + (0 + 25.98)i = 65.00 + 25.98i \text{ V}$.

(c) $|V_1 + V_2| = \sqrt{65.00^2 + 25.98^2} = 70.0 \text{ V}$ exactly (to 3 s.f.); $\arg = \tan^{-1}\left(\frac{25.98}{65.00}\right) \approx 21.8^\circ$. So $V_1 + V_2 \approx 70.0\angle 21.8^\circ \text{ V}$.

Ôn tập tổng hợp

A national government's annual budget is $\$4.8 \times 10^{11}$. Education spending is 3.5% of the budget.

(a) Find education spending in standard form, correct to 3 s.f.

(b) If education spending then grows by 2% p.a. (compound) for 5 years, find its new value in standard form, correct to 3 s.f.

(c) Express the part (b) answer as a percentage increase from the original amount in part (a), correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

(a) $4.8 \times 10^{11} \times 0.035 = 1.68 \times 10^{10}$.

(b) $1.68 \times 10^{10} \times (1.02)^5 \approx 1.85 \times 10^{10}$.

(c) $\% \text{increase} = \frac{1.855 \times 10^{10} - 1.68 \times 10^{10}}{1.68 \times 10^{10}} \times 100\% \approx 10.4\%$ (matching $(1.02)^5 - 1 \approx 10.4\%$ directly, as expected for compound growth).

Functions

Mục tiêu Unit: Miền xác định, miền giá trị, ký hiệu hàm số, hàm hợp và hàm ngược; các phép biến đổi đồ thị hàm số (tịnh tiến, co giãn, đối xứng) làm nền tảng cho mọi mô hình phía sau; mô hình tuyến tính; mô hình bậc hai và bài toán tối ưu hoá qua đỉnh parabol; mô hình đa thức bậc ba; mô hình mũ (tăng trưởng/phân rã, chu kỳ bán rã/thời gian gấp đôi) và mô hình logarit cùng kỹ thuật tuyến tính hoá thang log (HL); mô hình lượng giác (hàm sin) cho các hiện tượng tuần hoàn; mô hình logistic với giới hạn tăng trưởng (HL); và hồi quy bằng máy tính GDC — hệ số tương quan r , hệ số xác định R^2 , lựa chọn mô hình phù hợp từ hình dạng biểu đồ phân tán, và rủi ro khi ngoại suy (extrapolation).

2.1 Functions: Domain, Range, and Notation

A **function** is a rule that assigns to every input value exactly one output value. Graphically, this “exactly one output” condition is captured by the **vertical line test**: a graph represents a function if and only if no vertical line crosses it more than once (a circle, for example, fails this test and is not the graph of a function, since a single x -value can give two y -values). In IB AI, functions are the language used to describe every real-world model in this unit — from a taxi fare to a population curve — so precise notation and vocabulary matter as much as the algebra.

2.1.1 Domain and range

For a function f , the **domain** is the set of all permitted input values (x -values), and the **range** is the set of all resulting output values (y -values, i.e. $f(x)$). Two algebraic restrictions occur constantly: (1) the expression under an **even root** (e.g. a square root) must be ≥ 0 ; (2) a **denominator** must never equal 0. In applied (modelling) contexts, the domain is often restricted further to whatever values are physically meaningful — e.g. time $t \geq 0$, or a whole number of items sold. For a complicated function, the range is often easiest to find using a GDC: graph the function (restricted to its domain) and read the lowest and highest y -values reached, using the trace or table feature to confirm any turning points or asymptotic behaviour.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Miền xác định (domain) là tập hợp mọi giá trị x được phép đưa vào hàm số; **miền giá trị** (range) là tập hợp mọi giá trị $y = f(x)$ có thể xuất hiện. Hai lỗi thường gặp khi tìm miền xác định bằng đại số: biểu thức dưới căn bậc chẵn phải ≥ 0 , và mẫu số không được bằng 0. Trong các bài toán mô hình hoá thực tế, miền xác định thường bị giới hạn thêm theo **ý nghĩa vật lý** của bài toán (thời gian không âm, số lượng sản phẩm là số nguyên không âm, sức chứa tối đa của một địa điểm, v.v.) — đây là bước hay bị bỏ sót khi làm bài.

Ví dụ mẫu 1 • Domain and range

- (a) State the domain and range of $f(x) = \sqrt{2x - 8}$.
 (b) A small theatre’s ticket revenue is modelled by $R(n) = 12n$, where n is the number of tickets sold, valid for $0 \leq n \leq 300$ (the venue’s capacity), with n a whole number. State the domain

and range of R .

(c) Explain why $g(x) = \sqrt{2x-8}$ and $f(x) = \sqrt{2x-8}$ from part (a) have the same domain, but $h(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-8}}$ does not.

(a) We need $2x-8 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$, so the domain is $x \geq 4$ (i.e. $[4, \infty)$). Since a square root is never negative, the range is $y \geq 0$ (i.e. $[0, \infty)$).

(b) Domain: $n \in \{0, 1, 2, \dots, 300\}$ (whole numbers only, capacity-limited). Range: $R(n) = 12n$ takes the values $\{0, 12, 24, \dots, 3600\}$ – multiples of 12 from 0 to 3600.

(c) For $h(x)$, the square root now sits in a **denominator**, so it must be strictly positive (not just ≥ 0 , since division by 0 is undefined): $2x-8 > 0 \Rightarrow x > 4$. So h excludes $x = 4$ itself (where f is defined and equals 0), giving domain $x > 4$ rather than $x \geq 4$ – a small but exam-relevant difference between "under a root" and "under a root in a denominator."

2.1.2 Function notation and composite functions

Function notation $f(x)$ reads " f of x ": the output when the rule f is applied to input x . A **composite function** $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ applies g **first**, then applies f to that result. In general $f(g(x)) \neq g(f(x))$ – composition is **not commutative**. The domain of $f \circ g$ requires x to be in the domain of g , and $g(x)$ to be in the domain of f .

Ví dụ mẫu 2 • Composite functions

Let $f(x) = 2x + 3$ and $g(x) = x^2 - 1$. Find $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$, and evaluate $(f \circ g)(3)$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2(x^2 - 1) + 3 = 2x^2 + 1.$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (2x + 3)^2 - 1 = 4x^2 + 12x + 9 - 1 = 4x^2 + 12x + 8.$$

Note these are different expressions, confirming $f \circ g \neq g \circ f$ in general. Evaluating directly: $g(3) = 9 - 1 = 8$, then $f(8) = 2(8) + 3 = 19$; equivalently $(f \circ g)(3) = 2(3)^2 + 1 = 19$. Since both f and g here are defined for all real numbers, so is every composite built from them – the domain restriction of the earlier keyfact only becomes an active concern once a square root, logarithm, or fraction is involved, as in the practice problems below.

2.1.3 Inverse functions

The **inverse function** f^{-1} "undoes" f : $f^{-1}(f(x)) = x$ and $f(f^{-1}(x)) = x$. A function has an inverse (is **one-to-one**) only if no horizontal line crosses its graph more than once (the **horizontal line test**); the graphs of $y = f(x)$ and $y = f^{-1}(x)$ are always reflections of each other in the line $y = x$. To find f^{-1} **algebraically** for a simple function: write $y = f(x)$, swap x and y , then solve the new equation for y .

Ví dụ mẫu 3 • Finding an inverse function

Find $f^{-1}(x)$ for $f(x) = \frac{3x-5}{2}$, and verify the result using $x = 7$.

Write $y = \frac{3x-5}{2}$, swap $x \leftrightarrow y$: $x = \frac{3y-5}{2}$. Solve for y : $2x = 3y - 5 \Rightarrow 3y = 2x + 5 \Rightarrow y =$

$$\frac{2x+5}{3}.$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+5}{3}.$$

Check with $x = 7$: $f(7) = \frac{3(7)-5}{2} = \frac{16}{2} = 8$, and $f^{-1}(8) = \frac{2(8)+5}{3} = \frac{21}{3} = 7$ ✓ – applying f then f^{-1} returns the original input. Notice also that the gradient of f is $\frac{3}{2}$ and the gradient of f^{-1} is $\frac{2}{3}$ – reciprocals of each other, since reflecting a line in $y = x$ swaps the roles of "rise" and "run."

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ký hiệu $f(x)$ đọc là "f của x" – giá trị đầu ra khi áp dụng quy tắc f cho đầu vào x . **Hàm hợp** $(f \circ g)(x) = f(g(x))$: áp dụng g trước, rồi lấy kết quả đó đưa vào f – thứ tự này rất quan trọng vì nói chung $f \circ g \neq g \circ f$. **Hàm ngược** f^{-1} "hoàn tác" tác dụng của f ; để tìm f^{-1} bằng đại số, ta **đổi vai trò** x và y trong phương trình $y = f(x)$ rồi giải lại tìm y . Về mặt hình học, đồ thị $y = f^{-1}(x)$ luôn là **ảnh đối xứng** của đồ thị $y = f(x)$ qua đường thẳng $y = x$ – một hàm chỉ có hàm ngược nếu nó là hàm **đơn ánh** (mỗi đường ngang cắt đồ thị tối đa một lần).

A function that fails the horizontal line test over its whole domain – such as $f(x) = x^2$, where both $x = 2$ and $x = -2$ give $f(x) = 4$ – can still be made invertible by **restricting the domain** to a piece on which it is one-to-one. For instance, $f(x) = x^2$ restricted to $x \geq 0$ has inverse $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ (also restricted to $x \geq 0$); this idea reappears in Section 2.4, where a quadratic model is naturally one-to-one only on either side of its vertex.

(!) Lỗi thường gặp: Đừng quên tìm miền xác định **trước** khi giải bài toán chứa căn bậc chẵn hoặc phân thức: biểu thức dưới căn phải ≥ 0 và mẫu số phải $\neq 0$. Một hàm hợp $(f \circ g)(x)$ chỉ xác định tại các giá trị x mà $g(x)$ nằm trong miền xác định của f – bỏ qua bước kiểm tra này (đặc biệt khi f chứa căn hoặc phân thức) là lỗi phổ biến khi tìm miền xác định của hàm hợp.

2.2 Transformations of Functions

Every model in this unit – linear, quadratic, exponential, trigonometric, logistic – is really the *same* handful of transformation ideas applied to a "parent" shape. Mastering transformations here pays off in every later section, because parameters like amplitude, midline, and phase shift are nothing more than named transformations.

Starting from $y = f(x)$, for constants $a, k > 0$:

- $y = f(x) + k$: translation **up** k units. $y = f(x) - k$: translation **down** k units.
- $y = f(x + k)$: translation **left** k units. $y = f(x - k)$: translation **right** k units.
- $y = a f(x)$ with $a > 1$: **vertical stretch** by scale factor a (away from the x -axis). With $0 < a < 1$: vertical **compression**. With $a < 0$: also a **reflection in the x -axis**.
- $y = f(ax)$ with $a > 1$: **horizontal compression** by scale factor $\frac{1}{a}$. With $0 < a < 1$: horizontal **stretch**. With $a < 0$: also a **reflection in the y -axis**.

Transformations can be combined; the order in which they are applied to the parent graph matters and should follow the order operations are applied to x inside the function.

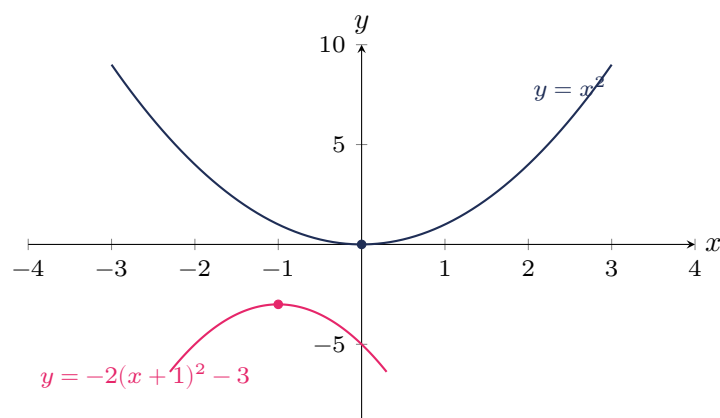
Vertical transformations and horizontal transformations never interfere with each other (a vertical stretch can be applied before or after a horizontal translation with no difference), but **two horizontal** transformations *do* interact, and getting the order wrong is a common source of error.

For example, starting from $f(x) = x^2$ (vertex at $x = 0$): translating right 3 first, then compressing horizontally by factor 2, gives $f(2x - 3)$, with vertex where $2x - 3 = 0$, i.e. $x = 1.5$. Compressing first, then translating right 3, gives $f(2(x - 3)) = f(2x - 6)$, with vertex where $2x - 6 = 0$, i.e. $x = 3$ – a genuinely different graph. The safest approach is always to build the final algebraic expression first, then read the vertex (or any key point) directly from that expression, rather than trying to track a sequence of moves purely by intuition.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phép biến đổi **đứng** (dọc trục y) và phép biến đổi **ngang** (dọc trục x) không ảnh hưởng lẫn nhau – thực hiện trước hay sau đều cho cùng kết quả. Nhưng **hai phép biến đổi ngang** (ví dụ dịch ngang và co giãn ngang) **có ảnh hưởng lẫn nhau**, và thứ tự thực hiện sai là nguồn lỗi phổ biến: $f(2x - 3)$ (dịch trước, co sau) và $f(2(x - 3)) = f(2x - 6)$ (co trước, dịch sau) là **hai hàm khác nhau**. Cách an toàn nhất: luôn viết ra biểu thức đại số cuối cùng trước, rồi mới đọc điểm mốc (như đỉnh parabol) trực tiếp từ biểu thức đó, thay vì cố gắng suy luận thứ tự các bước biến đổi một cách trực giác.



The parent graph $y = x^2$ (vertex at the origin) transformed into $y = -2(x + 1)^2 - 3$: translate left 1, vertically stretch by factor 2, reflect in the x -axis, then translate down 3 – the new vertex is $(-1, -3)$.

Ví dụ mẫu 4 • Combined transformation

Given the parent function $f(x) = x^2$ with vertex $(0, 0)$, describe the sequence of transformations that produces $g(x) = -2f(x + 1) - 3 = -2(x + 1)^2 - 3$, and state the vertex and axis of symmetry of g .

Reading the transformations in the order they act on x : (1) **translate left 1** ($x \rightarrow x + 1$); (2) **vertical stretch by factor 2**; (3) **reflect in the x -axis** (the negative sign); (4) **translate down 3**. The vertex of f at $(0, 0)$ maps to $(-1, -3)$, so g has vertex $(-1, -3)$ and axis of symmetry $x = -1$ (matching the figure above). Since $f(x) = x^2$ opens upward with a minimum at its vertex, and g additionally involves a reflection in the x -axis, g opens **downward** with a **maximum** at $(-1, -3)$ – a useful cross-check against Section 2.4's keyfact on the sign of the leading coefficient.

Ví dụ mẫu 5 • Transforming a table of values

A function $y = f(x)$ is defined by the table below. Construct the table of values for $h(x) = 3f(x) - 2$.

x	-1	0	1	2
$f(x)$	2	-1	3	0

Since $h(x) = 3f(x) - 2$ is a vertical stretch by factor 3 followed by a translation down 2, apply

this to each $f(x)$ -value (the x -values are unchanged, since this is a purely vertical transformation):

x	-1	0	1	2
$h(x) = 3f(x) - 2$	$3(2) - 2 = 4$	$3(-1) - 2 = -5$	$3(3) - 2 = 7$	$3(0) - 2 = -2$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bốn phép biến đổi cơ bản của đồ thị hàm số: $f(x) + k$ dịch **lên/xuống**; $f(x + k)$ dịch **trái/phải** (chú ý dấu bên trong ngoặc "ngược" với hướng di chuyển); $a f(x)$ co giãn theo phương **đứng** (và đổi dấu a thì lật qua trục hoành); $f(ax)$ co giãn theo phương **ngang** (ngược trục giá: $a > 1$ làm đồ thị "hẹp lại"). Đây chính là "bộ công cụ" dùng lại xuyên suốt chương này: biên độ, chu kỳ, độ lệch pha, và đường trung bình của hàm lượng giác (Section 2.8) hay tham số L, k của hàm logistic (Section 2.9) đều là những phép biến đổi này mang tên gọi riêng.

(!) Lỗi thường gặp: Với $f(x + k)$ ($k > 0$), đồ thị dịch chuyển **sang trái** k đơn vị, **không phải** sang phải – dấu bên trong ngoặc luôn "ngược" với trục giá. Tương tự, $f(ax)$ với $a > 1$ làm đồ thị **co lại** theo phương ngang (hệ số $\frac{1}{a}$), chứ không giãn ra. Nếu không chắc chắn, hãy kiểm tra bằng cách thay một điểm cụ thể vào công thức mới rồi so sánh với điểm gốc.

2.3 Linear Models

A **linear model** $y = mx + c$ is the simplest and most common model in applications: it describes any quantity that changes by a **constant amount** per unit of x . Because every other model family in this unit (quadratic, exponential, sinusoidal, logistic) reduces to something close to a straight line over a sufficiently small interval, linear models are also the natural first check whenever raw data is examined on a GDC: if a scatter plot already looks close to a straight line, no more complicated model family is needed.

For a linear model $y = mx + c$: the **gradient** m is the rate of change of y per unit increase in x (its units are "units of y per unit of x "), and the **y -intercept** c is the value of y when $x = 0$ – often a fixed/starting cost, baseline value, or initial amount in context. Given two data points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) , $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, and c is found by substituting one point back into $y = mx + c$. Equivalently, without solving for c separately, the **point-gradient form** $y - y_1 = m(x - x_1)$ gives the equation directly from the gradient and any one known point.

Ví dụ mẫu 6 · Interpreting a linear model

A taxi fare is modelled by $C(d) = 3.50 + 1.20d$, where d is the distance travelled in km and C is the cost in dollars. (a) Interpret the gradient and the y -intercept in context. (b) Find the cost of a 12 km trip. (c) Find the distance travelled if the fare was \$20.

(a) Gradient 1.20: the fare increases by \$1.20 for every extra km travelled. Intercept 3.50: the fixed "flag-fall" charge (the cost even for a 0 km trip).

(b) $C(12) = 3.50 + 1.20(12) = 3.50 + 14.40 = \17.90 .

(c) $20 = 3.50 + 1.20d \Rightarrow 1.20d = 16.50 \Rightarrow d = \frac{16.50}{1.20} = 13.75$ km.

Ví dụ mẫu 7 • Break-even analysis

A company manufacturing gadgets has fixed costs of \$2400 per week and a variable cost of \$18 per unit; each gadget sells for \$42. **(a)** Find the break-even quantity (where cost equals revenue). **(b)** Find the profit if 200 units are made and sold. **(c)** Find the number of units that must be sold for a weekly profit of at least \$3000.

Cost: $\text{Cost}(x) = 2400 + 18x$. Revenue: $\text{Revenue}(x) = 42x$.

(a) Break-even: $2400 + 18x = 42x \Rightarrow 2400 = 24x \Rightarrow x = 100$ units.

(b) $\text{Profit}(200) = \text{Revenue}(200) - \text{Cost}(200) = 42(200) - (2400 + 18(200)) = 8400 - 6000 = \2400 .

(c) $\text{Profit}(x) = 42x - (2400 + 18x) = 24x - 2400$. Requiring $24x - 2400 \geq 3000 \Rightarrow 24x \geq 5400 \Rightarrow x \geq 225$ units.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong mô hình tuyến tính $y = mx + c$, **hệ số góc** m cho biết tốc độ thay đổi **không đổi** của y khi x tăng thêm 1 đơn vị (đơn vị của m luôn là "đơn vị của y trên đơn vị x "), còn **tung độ gốc** c là giá trị của y khi $x = 0$ – trong ngữ cảnh thực tế thường là chi phí cố định hoặc giá trị khởi điểm. Bài toán **hoà vốn** (break-even) là dạng ứng dụng kinh điển: tìm giao điểm của đường chi phí và đường doanh thu – trước điểm đó công ty lỗ, sau điểm đó công ty lãi.

2.4 Quadratic Models

A **quadratic model** $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) produces a parabola, and is the natural model whenever a quantity has a single maximum or minimum turning point – projectile height, or profit/revenue as a function of price.

For $f(x) = ax^2 + bx + c$: the graph is a parabola opening **upward** if $a > 0$ (minimum turning point) or **downward** if $a < 0$ (maximum turning point). The **axis of symmetry** and x -coordinate of the **vertex** (turning point) is

$$x = -\frac{b}{2a},$$

and the vertex y -value is found by substituting back into $f(x)$. The **roots** (zeros, x -intercepts) satisfy $ax^2 + bx + c = 0$, found via factoring, the quadratic formula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, or directly by graphing on a GDC.

Ví dụ mẫu 8 • Projectile motion

A ball is thrown, and its height above the ground is modelled by $h(t) = -5t^2 + 20t + 2$ (metres, t in seconds). **(a)** Find the maximum height and the time at which it occurs. **(b)** Find the time at which the ball lands ($h = 0$). **(c)** State a suitable domain for $h(t)$ in this context.

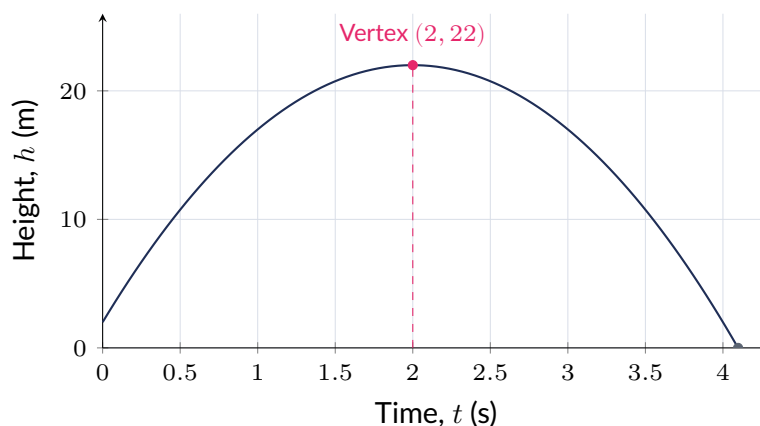
(a) Vertex: $t = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2(-5)} = 2$ s. $h(2) = -5(2)^2 + 20(2) + 2 = -20 + 40 + 2 = 22$ m – the maximum height is 22 m, reached at $t = 2$ s.

(b) Landing time: solve $-5t^2 + 20t + 2 = 0$, i.e. $5t^2 - 20t - 2 = 0$:

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{(-20)^2 - 4(5)(-2)}}{2(5)} = \frac{20 \pm \sqrt{440}}{10}.$$

Taking the positive root (time cannot be negative), $t = \frac{20 + \sqrt{440}}{10} \approx 4.10$ s (3 s.f.).

(c) The model only makes physical sense while the ball is in the air, i.e. from launch until landing: $0 \leq t \leq 4.10$ (s). Outside this domain, $h(t)$ still exists as a mathematical expression, but no longer represents a real height above the ground.



The projectile of Example 8: the parabola's vertex at $(2, 22)$ is the maximum height, and the axis of symmetry $t = 2$ splits the flight time symmetrically around the peak (though the ball starts above ground level, so the rise and fall times either side of the peak are not equal to the full flight time split evenly).

Ví dụ mẫu 9 · Revenue optimization

A shop's weekly demand for notebooks depends on the price p (dollars) according to $q = 500 - 20p$ (units sold). Revenue is $R(p) = pq = p(500 - 20p) = 500p - 20p^2$. **(a)** Find the price that maximizes revenue, and the maximum revenue. **(b)** State a sensible domain for $R(p)$ in this context.

(a) This is a downward parabola in p with $a = -20$, $b = 500$. Vertex:

$$p = -\frac{500}{2(-20)} = \frac{500}{40} = 12.5.$$

$$R(12.5) = 500(12.5) - 20(12.5)^2 = 6250 - 3125 = \$3125.$$

So a price of \$12.50 maximizes weekly revenue at \$3125.

(b) Both price and quantity sold must be non-negative: $p \geq 0$ and $q = 500 - 20p \geq 0 \Rightarrow p \leq 25$. So the domain is $0 \leq p \leq 25$ – note this comfortably contains the revenue-maximizing price $p = 12.5$ found in (a), a useful check that the optimum is not sitting at the edge of what is physically possible.

2.4.1 Where does the vertex formula come from?

The vertex formula is not an arbitrary rule – it follows directly from **completing the square**. Starting from the general quadratic and factoring a out of the first two terms:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x \right) + c = a \left[\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} \right] + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right).$$

Since a square is never negative, $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$ is minimized (if $a > 0$) or maximized (if $a < 0$) when the squared term is exactly 0, i.e. when $x = -\frac{b}{2a}$ – this is precisely the vertex's x -coordinate, and substituting it back gives the vertex y -value $c - \frac{b^2}{4a}$.

The very same completed-square form also derives the **quadratic formula**. Setting $f(x) = 0$:

$$a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \implies \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Taking the square root of both sides (allowing both signs) and rearranging:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \implies x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

exactly the quadratic formula used in Example 8 to find the projectile's landing time. This also explains the **discriminant** $b^2 - 4ac$: if it is negative, the square root is undefined over the reals, so the parabola has no real roots (it never crosses the x -axis) — consistent with $a > 0$ giving an all-positive parabola sitting entirely above the axis, or $a < 0$ sitting entirely below it.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức đỉnh $x = -\frac{b}{2a}$ được suy ra bằng cách **hoàn thành bình phương** (completing the square): viết lại $f(x) = ax^2 + bx + c$ dưới dạng $a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a} \right)$. Vì bình phương của một số thực luôn ≥ 0 , biểu thức đạt giá trị nhỏ nhất (nếu $a > 0$) hoặc lớn nhất (nếu $a < 0$) đúng khi phần bình phương bằng 0 — tức là khi $x = -\frac{b}{2a}$. Trong đề thi AI, ta hiếm khi cần hoàn thành bình phương bằng tay — GDC vẽ đồ thị và tìm điểm cực trị (maximum/minimum) trực tiếp — nhưng hiểu được nguồn gốc công thức giúp diễn giải kết quả chính xác hơn.

2.5 Cubic and Other Polynomial Models

A **cubic model** $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$) is used whenever a quantity's rate of change is itself changing direction — a shape with up to two turning points, useful for volume-from-folding problems, S-shaped cost curves, and short-run production models. Higher-degree polynomials (quartic and beyond) follow the same logic with more possible turning points, but appear far less often in AI applications, since most real quantities are well approximated by a linear, quadratic, cubic, exponential, or logistic shape.

A cubic $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ has at most two turning points (a local maximum and a local minimum) and at most three real roots. Its **end behaviour** is controlled by the sign of a : if $a > 0$, $y \rightarrow -\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and $y \rightarrow +\infty$ as $x \rightarrow +\infty$ (the curve rises overall, left-to-right); if $a < 0$, this is reversed. On a GDC, cubic (and higher-degree polynomial) models are graphed and their maxima, minima, and roots are read off directly using the graph's built-in analysis tools, rather than solved by hand.

Ví dụ mẫu 10 • Volume from a folded box (cubic optimization)

A square sheet of cardboard has side length 30 cm. A square of side x cm is cut from each corner, and the sides are folded up to form an open-topped box. **(a)** Show that the volume is $V(x) = 900x - 120x^2 + 4x^3$, and state a sensible domain. **(b)** Use technology to find the value of x that maximizes the volume, and the maximum volume. **(c)** State the range of V over this domain, and interpret the behaviour of $V(x)$ as $x \rightarrow 0^+$ and as $x \rightarrow 15^-$.

(a) The base of the box has side $(30 - 2x)$ cm (after removing a strip of width x from each end), and the height is x cm, so

$$V(x) = x(30 - 2x)^2 = x(900 - 120x + 4x^2) = 900x - 120x^2 + 4x^3.$$

For the box to physically exist, $x > 0$ and $30 - 2x > 0$, so the domain is $0 < x < 15$.

(b) Graphing $V(x)$ on a GDC over $0 < x < 15$ and locating the maximum point gives $x = 5$ cm, with

$$V(5) = 5(30 - 10)^2 = 5(400) = 2000 \text{ cm}^3.$$

(c) The range is $0 < V(x) \leq 2000 \text{ (cm}^3\text{)}$. As $x \rightarrow 0^+$, the cut is almost non-existent, so the box has almost no height and $V(x) \rightarrow 0$; as $x \rightarrow 15^-$, the cut nearly consumes the whole sheet, so the base shrinks to almost nothing and $V(x) \rightarrow 0$ again – both extremes make no usable box, confirming the maximum must occur somewhere strictly between them.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Mô hình bậc ba có tối đa **hai điểm cực trị** (một cực đại, một cực tiểu) và tối đa **ba nghiệm thực**. Bài toán "gấp hộp từ tấm bìa" là ứng dụng kinh điển của mô hình bậc ba: thể tích $V(x)$ là tích của ba kích thước (dài, rộng, cao), mỗi kích thước phụ thuộc tuyến tính vào x , nên tích của chúng cho ra một đa thức bậc ba. Trong AI, ta **không** dùng đạo hàm để tìm cực trị bằng tay như AA – thay vào đó, luôn vẽ đồ thị bằng GDC và dùng chức năng "maximum/minimum" của máy để đọc trực tiếp tọa độ điểm cực trị.

A cubic equation $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ can have one, two (a repeated root counted once visually), or three real roots – unlike a quadratic, there is no simple formula analogous to the quadratic formula that is practical to use by hand, which is precisely why a GDC's root-finder (sometimes labelled "zero" or "solve") is the standard tool. When a cubic model has only **one** real root, the graph crosses the x -axis exactly once and otherwise stays on one side of it – this is the typical shape for a cubic cost or revenue model that is only physically meaningful for $x \geq 0$, where the single positive root often represents a break-even point.

2.6 Exponential Models

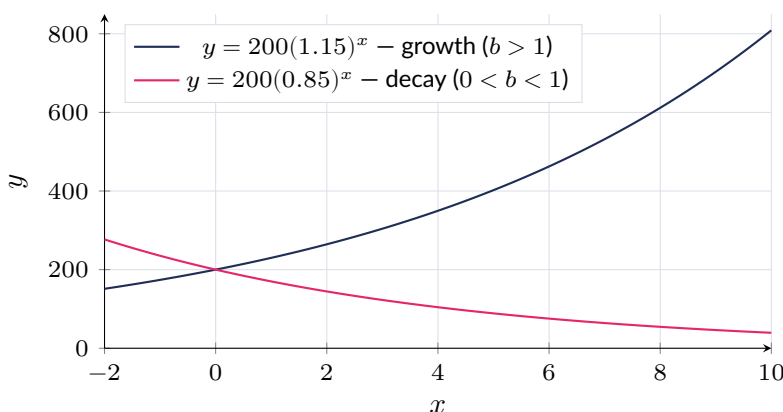
An **exponential model** describes quantities that change by a **constant percentage** (rather than a constant amount) per unit of x – population growth, radioactive decay, compound interest, and the spread of information in its early, unconstrained phase.

Two equivalent forms of an exponential model are used in AI:

$$y = ab^x \quad \text{and} \quad y = y_0 e^{kt},$$

where in the first form a (or y_0) is the initial value ($x = 0$) and $b > 0$ is the **growth/decay factor** per unit of x ($b > 1$: growth; $0 < b < 1$: decay); in the second form k is the continuous growth rate ($k > 0$: growth; $k < 0$: decay), related to b by $b = e^k$. The **half-life** (time for a decaying quantity to halve) or **doubling time** (time for a growing quantity to double) T satisfies $b^T = 0.5$ or $b^T = 2$ respectively, solved using logarithms: $T = \frac{\ln 0.5}{\ln b}$ or $T = \frac{\ln 2}{\ln b}$.

The relationship $b = e^k$ follows directly from matching the two forms: since $y_0 e^{kx} = y_0 (e^k)^x$ must equal ab^x with $a = y_0$, the bases must agree, so $b = e^k$ (equivalently, $k = \ln b$). This is exactly the substitution used to convert a GDC's exponential-regression output $y = ab^x$ into the continuous-rate form $y = ae^{kx}$ preferred in the natural sciences.



Both curves share the same y -intercept 200: growth ($b = 1.15 > 1$) rises without bound, while decay ($b = 0.85 < 1$) falls and flattens toward the x -axis (a **horizontal asymptote** at $y = 0$) but never reaches it.

Ví dụ mẫu 11 · Population growth

A town's population is modelled by $P(t) = 15\,000(1.024)^t$, where t is the number of years since 2015. **(a)** Find the population in 2030. **(b)** Find the first year in which the population exceeds 25 000. **(c)** Comment on whether this model is realistic if used to predict the population in the year 2200.

(a) 2030 corresponds to $t = 15$: $P(15) = 15\,000(1.024)^{15} \approx 21\,408.72$, so about 21 400 people (3 s.f.).

(b) Solving $15\,000(1.024)^t = 25\,000$: $(1.024)^t = \frac{25\,000}{15\,000} = 1.6\bar{6} \Rightarrow t = \frac{\ln(1.6\bar{6})}{\ln 1.024} \approx 21.54$. Checking integers on a GDC: $P(21) \approx 24\,682.6$ (not yet exceeded), $P(22) \approx 25\,275.0$ (exceeded). So the population first exceeds 25 000 in year $t = 22$, i.e. in **2037**.

(c) 2200 corresponds to $t = 185$, giving an astronomically large (and physically meaningless) predicted population: no town can sustain unlimited exponential growth. Over such a long horizon, a **logistic** model bounded by a realistic carrying capacity (land, infrastructure, resources) would be far more appropriate than this unbounded exponential – the exponential model is only reliable over the relatively short horizon on which it was fitted.

Ví dụ mẫu 12 · Radioactive decay and half-life

A medical isotope decays with a half-life of 8 days. A sample starts at 120 mg. **(a)** Find the amount remaining after 30 days. **(b)** Find the time for the amount to fall to 5 mg. **(c)** Express $N(t)$ in the equivalent form $N(t) = 120e^{kt}$, correct to 4 s.f.

Since the half-life is 8 days, $N(t) = 120(0.5)^{t/8}$.

(a) $N(30) = 120(0.5)^{30/8} = 120(0.5)^{3.75} \approx 8.92$ mg (3 s.f.).

(b) $120(0.5)^{t/8} = 5 \Rightarrow (0.5)^{t/8} = \frac{5}{120} = 0.041\bar{6} \Rightarrow \frac{t}{8} = \frac{\ln(0.041\bar{6})}{\ln 0.5} \Rightarrow t = 8 \times \frac{\ln(0.041\bar{6})}{\ln 0.5} \approx 36.7$ days (3 s.f.).

(c) Writing $(0.5)^{t/8} = (0.5^{1/8})^t$, the equivalent base is $b = 0.5^{1/8} \approx 0.9170$, so $k = \ln b = \frac{\ln 0.5}{8} \approx -0.08664$, giving $N(t) \approx 120e^{-0.08664t}$ – this continuous-decay-rate form is the one typically used in nuclear physics, where k (or $-k$) is called the **decay constant**.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

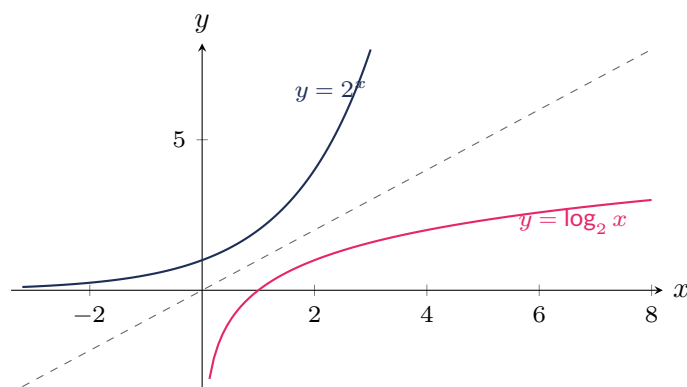
Mô hình mũ mô tả một đại lượng thay đổi theo **tỉ lệ phần trăm cố định** mỗi đơn vị thời gian –

giống dãy số nhân (Chapter 1) nhưng ở đây x có thể nhận giá trị **liên tục**, không chỉ số nguyên. Hai dạng $y = ab^x$ và $y = y_0 e^{kt}$ tương đương nhau qua $b = e^k$; dạng e^{kt} thường dùng trong khoa học tự nhiên (sinh học, vật lý hạt nhân) vì k mang ý nghĩa "tốc độ tăng trưởng tức thời". **Chu kỳ bán rã** (half-life) và **thời gian tăng gấp đôi** (doubling time) đều giải bằng cách lấy log hai vế — kỹ thuật này đã học ở Chapter 1 cho bài toán tài chính, nay áp dụng lại cho phân rã phóng xạ và tăng trưởng dân số.

2.7 Logarithmic Functions (HL)

The logarithm is the inverse of the exponential, and beyond solving exponential equations, logarithms give a second, equally important role in AI: **linearizing** exponential data so it can be analysed and fitted using straight-line techniques.

$y = \log_b x$ is the inverse of $y = b^x$: it exists only for $x > 0$, has a vertical asymptote at $x = 0$, and passes through $(1, 0)$. The **natural logarithm** $\ln x = \log_e x$ and **common logarithm** $\log x = \log_{10} x$ are the two forms built into every GDC. Logarithmic models $y = a + b \ln x$ are used whenever a quantity increases (or decreases) rapidly at first, then **levels off** while still growing (or shrinking) without bound — unlike the logistic model of Section 2.9, a log model has no upper limit.



$y = \log_2 x$ is the reflection of $y = 2^x$ in the line $y = x$, since a logarithm is the inverse of the corresponding exponential.

Ví dụ mẫu 13 · A logarithmic model: pH scale, HL

Chemists model acidity using $\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+]$, where $[\text{H}^+]$ is the hydrogen-ion concentration in mol/L. **(a)** Find the pH of a solution with $[\text{H}^+] = 3.2 \times 10^{-5}$. **(b)** Find $[\text{H}^+]$ for a solution with $\text{pH} = 8.1$. **(c)** Find the ratio of the hydrogen-ion concentrations of the two solutions in (a) and (b).

(a) $\text{pH} = -\log_{10}(3.2 \times 10^{-5}) \approx 4.49$ (3 s.f.) — a mildly acidic solution.

(b) Rearranging, $[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-8.1} \approx 7.94 \times 10^{-9}$ mol/L (3 s.f.) — a basic (alkaline) solution.

(c) Since $\text{pH} = -\log_{10}[\text{H}^+]$, a difference in pH of Δ corresponds to a ratio of $[\text{H}^+]$ -values of exactly 10^Δ (a direct consequence of the log laws of Chapter 1). Here $\Delta = 8.1 - 4.49 \approx 3.61$, so

$$\frac{[\text{H}^+]_{(a)}}{[\text{H}^+]_{(b)}} = 10^{3.61} \approx 4030,$$

confirming that the solution in (a) is roughly 4000 times more acidic than the one in (b) — the pH scale compresses a huge range of concentrations into a small, easily-compared range of numbers, which is precisely why chemists use a logarithmic scale here rather than concentration

itself.

2.7.1 Linearizing exponential data (HL)

A key reason logarithms matter for *regression* (Section 2.10) is that they turn an exponential relationship into a **linear** one. Starting from $y = ab^x$ and taking $\ln$ of both sides:

$$\ln y = \ln(ab^x) = \ln a + \ln(b^x) = \ln a + x \ln b.$$

This says that $\ln y$ is a **linear function of x** : plotting $\ln y$ (instead of y) against x produces a **straight line** with gradient $\ln b$ and y -intercept $\ln a$ – this is exactly why exponential-looking data “straightens out” on a semi-log (log- y) scale, and it is the principle a GDC uses internally when it performs an **exponential regression**.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Lấy $\ln$ hai vế của $y = ab^x$ cho ra $\ln y = \ln a + x \ln b$ – một phương trình **tuyến tính** theo x , với biến phụ thuộc là $\ln y$ (không phải y). Đây là lý do dữ liệu tăng trưởng mũ, khi vẽ trên trục $\ln y$ theo x (thang bán logarit – semi-log scale), sẽ tạo thành **đường thẳng**: hệ số góc chính là $\ln b$, tung độ gốc là $\ln a$. Nguyên lý này chính là cách máy GDC “bên trong” thực hiện hồi quy mũ (exponential regression) – biến đổi dữ liệu về dạng tuyến tính rồi áp dụng công thức hồi quy tuyến tính đã biết.

Ví dụ mẫu 14 • Two-point exponential linearization, HL

A bacteria culture is modelled by $y = ab^x$ (x in hours). At $x = 0$, $y = 50$; at $x = 6$, $y = 200$. Use the linearization $\ln y = \ln a + x \ln b$ to find a and b , correct to 3 s.f., and predict y at $x = 3$.

At $x = 0$: $\ln y = \ln a \Rightarrow \ln a = \ln 50$, so $a = 50$ (as expected – a is simply the value at $x = 0$).

At $x = 6$: $\ln 200 = \ln 50 + 6 \ln b \Rightarrow \ln b = \frac{\ln 200 - \ln 50}{6} = \frac{\ln 4}{6} \approx 0.2310 \Rightarrow b = e^{0.2310} \approx 1.26$.

$$y = 50(1.26)^x.$$

Predicting at $x = 3$: $y(3) = 50(1.26)^3 \approx 100$ – exactly the geometric mean of 50 and 200, a useful sanity check for the midpoint of an exponential model.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kỹ thuật tuyến tính hoá hai điểm: từ hai điểm dữ liệu (x_1, y_1) và (x_2, y_2) của một mô hình mũ, giá trị a tại $x = 0$ đọc trực tiếp (nếu một điểm có $x = 0$), còn $\ln b$ tính bằng **độ dốc** của đoạn thẳng nối $(x_1, \ln y_1)$ và $(x_2, \ln y_2)$. Kỹ thuật này là bước đệm quan trọng trước khi học hồi quy mũ bằng GDC ở Section 2.10 – hiểu được “bên trong” máy tính làm gì giúp diễn giải kết quả a, b, r^2 hiển thị trên màn hình một cách chính xác hơn.

2.8 Trigonometric (Sinusoidal) Models

Any phenomenon that repeats in a regular cycle – tides, Ferris wheels, daily/seasonal temperature, sound waves, AC voltage – is naturally modelled by a **sinusoidal function**, built from the transformations of Section 2.2 applied to $y = \sin x$. Every parameter below is literally one of the four transformations already met: amplitude is a vertical stretch, midline is a vertical translation, phase shift is a horizontal translation, and the period is controlled by a horizontal stretch/compression – nothing new is being learned algebraically, only a new context and new names for familiar ideas.

The general sinusoidal model is

$$y = a \sin(b(x - c)) + d,$$

where (assuming $a, b > 0$): a is the **amplitude** (half the distance between the maximum and minimum values); $\frac{2\pi}{b}$ (or $\frac{360^\circ}{b}$ in degree mode) is the **period** (length of one full cycle); c is the **phase shift** (horizontal translation, the same idea as $f(x - k)$ from Section 2.2); and d is the **midline** (vertical translation, the "average" value about which the curve oscillates). The maximum value is $d + a$ and the minimum is $d - a$. The **frequency** (cycles per unit time) is the reciprocal of the period, $f = \frac{b}{2\pi}$ – used, for instance, to describe a sound wave's pitch (higher frequency $\Rightarrow$ higher pitch) or an AC current's frequency in hertz (Hz).

2.8.1 Where does the period formula come from?

The base function $y = \sin x$ completes exactly one full cycle as x runs through 360° (one full revolution around the unit circle), since $\sin(x + 360^\circ) = \sin x$ for every x . Now consider $y = \sin(bx)$: this function repeats whenever the *input to the sine function*, bx , has increased by 360° , i.e. whenever

$$b(x + P) = bx + 360^\circ \implies bP = 360^\circ \implies P = \frac{360^\circ}{b},$$

where P is the period. This is simply the horizontal-compression transformation of Section 2.2 in action: multiplying the input by b compresses the graph horizontally by a factor of $\frac{1}{b}$, so a cycle that used to take 360° now takes only $\frac{360^\circ}{b}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hàm $y = \sin x$ lặp lại sau mỗi 360° (một vòng tròn lượng giác đầy đủ). Với $y = \sin(bx)$, chu kỳ lặp lại khi **phần bên trong** bx tăng thêm đúng 360° – giải phương trình $bP = 360^\circ$ cho $P = \frac{360^\circ}{b}$. Đây chính là phép co giãn ngang (Section 2.2) đang "hoạt động": nhân đầu vào với b làm đồ thị co lại theo phương ngang với hệ số $\frac{1}{b}$, nên một chu kỳ vốn cần 360° nay chỉ cần $\frac{360^\circ}{b}$.

Ví dụ mẫu 15 • Ferris wheel model

A Ferris wheel has diameter 40 m, and its centre is 22 m above the ground. It completes one full revolution every 6 minutes, and a rider boards at the lowest point of the wheel at $t = 0$. **(a)** Write a model $h(t)$ for the rider's height. **(b)** Find the rider's height at $t = 4$ minutes. **(c)** Find the first time the rider is at a height of 35 m. **(d)** State the range of $h(t)$, and explain what the minimum and maximum values represent physically.

(a) Radius (amplitude) $a = 20$, midline $d = 22$, period 6 $\Rightarrow b = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ/\text{min}$. Since the rider starts at the **lowest** point ($h = 2$ m at $t = 0$), we need a negative cosine shape:

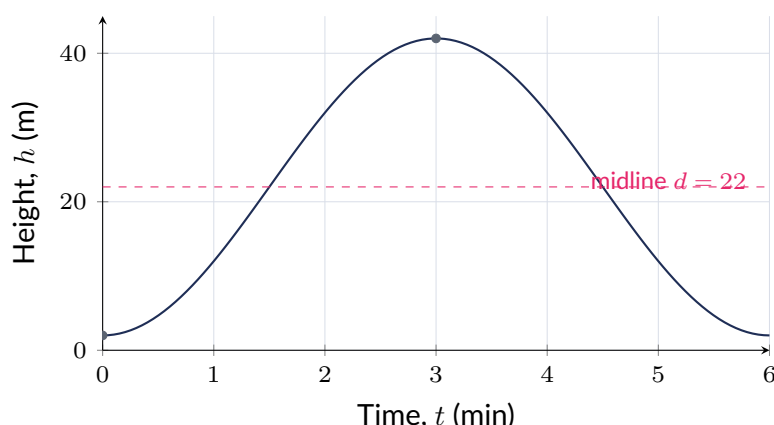
$$h(t) = -20 \cos(60t) + 22 \quad (t \text{ in minutes, } h \text{ in metres}).$$

Check: $h(0) = -20(1) + 22 = 2$ m ✓ (the bottom of the wheel, $22 - 20$).

(b) $h(4) = -20 \cos(240^\circ) + 22 = -20(-0.5) + 22 = 10 + 22 = 32$ m.

(c) Solve $-20 \cos(60t) + 22 = 35 \Rightarrow \cos(60t) = -0.65 \Rightarrow 60t = \cos^{-1}(-0.65) \approx 130.7^\circ \Rightarrow t \approx 2.18$ min (3 s.f.).

(d) Range: $2 \leq h(t) \leq 42$ (m). The minimum, $22 - 20 = 2$ m, is the height of the lowest point of the wheel above the ground (the boarding platform); the maximum, $22 + 20 = 42$ m, is the height of the highest point the rider reaches, directly above the centre of the wheel.



The Ferris wheel of Example 15 over one full revolution (6 minutes): the rider starts at the minimum height (2 m) and reaches the maximum (42 m) at the half-way point, $t = 3$ min.

Ví dụ mẫu 16 · Seasonal temperature model

Average monthly temperature is modelled by $T(m) = 8 \sin(30(m - 4)) + 15$, where m is the month number ($m = 1$ for January) and T is in $^{\circ}\text{C}$ (using degree mode, since the period is 12 months $\Rightarrow b = \frac{360^{\circ}}{12} = 30^{\circ}$). (a) Find the temperature in March. (b) Identify the coldest month and its temperature. (c) State the annual temperature range, and explain how it relates to the amplitude.

(a) March is $m = 3$: $T(3) = 8 \sin(30(3 - 4)) + 15 = 8 \sin(-30^{\circ}) + 15 = 8(-0.5) + 15 = 11^{\circ}\text{C}$.

(b) The minimum of $\sin$ is -1 , occurring when $30(m - 4) = -90^{\circ} \Rightarrow m - 4 = -3 \Rightarrow m = 1$ (January). $T(1) = 8(-1) + 15 = 7^{\circ}\text{C}$ – the coldest month is January at 7°C (and by symmetry the warmest month is 6 months later, July, at $T(7) = 8(1) + 15 = 23^{\circ}\text{C}$).

(c) The annual range is $23 - 7 = 16^{\circ}\text{C}$, which is exactly **twice** the amplitude ($2 \times 8 = 16$) – this always holds, since the amplitude is defined as *half* the distance between the maximum and minimum values.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Mô hình lượng giác $y = a \sin(b(x - c)) + d$ mô tả mọi hiện tượng lặp lại theo chu kỳ đều đặn.

Biên độ a = một nửa khoảng cách giữa giá trị lớn nhất và nhỏ nhất; **chu kỳ** $\frac{360^{\circ}}{b}$ (hoặc $\frac{2\pi}{b}$ theo radian) = thời gian để lặp lại một chu trình đầy đủ; c = độ lệch pha (dịch ngang); d = đường trung bình (dịch dọc, giá trị trung bình mà đồ thị dao động xung quanh). Việc chọn hàm sin hay cos, và dấu $+/ -$ phía trước biên độ, phụ thuộc vào **điều kiện ban đầu** của bài toán (ví dụ: người chơi bắt đầu ở điểm thấp nhất hay cao nhất của vòng quay).

Example 15 used a negative cosine because the rider starts at the lowest point; if instead a problem states the object starts at the **midline moving upward**, a plain sin is the natural choice ($\sin(0) = 0$ matches starting at the midline), and if it starts at the **highest** point, a plain (positive) cos is natural. This is not a coincidence: $\cos \theta = \sin(\theta + 90^{\circ})$ for all θ (cosine is simply sine shifted left by a quarter turn), so *any* sinusoidal model can equally well be written using sin or cos with an adjusted phase shift c – the choice made in each example above is simply whichever requires the least algebra to set up.

(!) Lỗi thường gặp: Trên GDC, luôn kiểm tra **chế độ góc** (Degree hay Radian) **trước** khi tính giá trị lượng giác – dùng sai chế độ là lỗi cực kỳ phổ biến trong phần mô hình lượng giác, và cho ra kết quả sai hoàn toàn dù công thức đã lập đúng. Đề IB AI có thể cho hệ số b dưới dạng độ hoặc radian tùy ngữ cảnh bài toán; hãy đọc kỹ đơn vị trước khi bấm máy, và luôn kiểm tra lại

bằng một giá trị đã biết (như $t = 0$) trước khi dùng mô hình để tính tiếp.

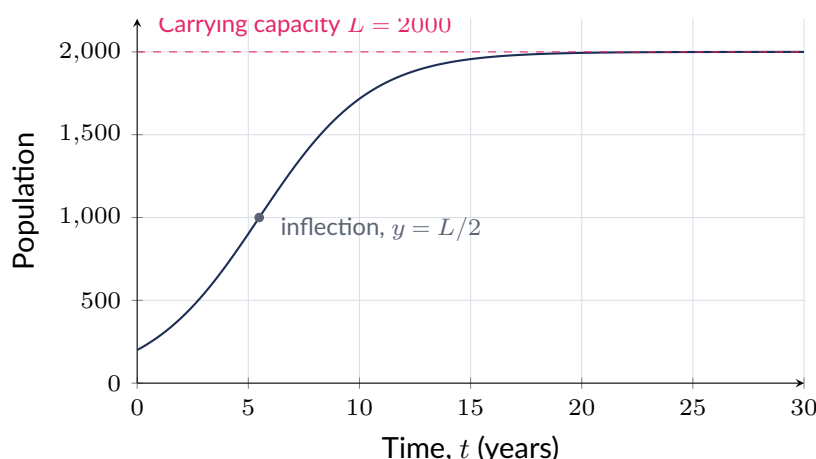
2.9 Logistic Models (HL)

Exponential growth cannot continue forever in the real world – populations run out of food or space, diseases run out of susceptible hosts, new technologies saturate their market. The **logistic model** captures exactly this: growth that starts out looking exponential, then slows and levels off as it approaches a maximum sustainable value.

The logistic model is

$$y = \frac{L}{1 + Ce^{-kx}},$$

where $L > 0$ is the **carrying capacity** (the horizontal asymptote the curve approaches as $x \rightarrow \infty$ – the maximum sustainable value); $k > 0$ is the **growth rate constant** (larger k means the curve rises to L more quickly); and $C > 0$ shapes the initial value, with $y(0) = \frac{L}{1+C}$. The curve is approximately exponential for small x (when $Ce^{-kx} \gg 1$), then bends and flattens toward L as x grows. The curve rises fastest at its **inflection point**, exactly where $y = \frac{L}{2}$.



The logistic model $P(t) = \frac{2000}{1 + 9e^{-0.4t}}$ of Examples 17–18: near-exponential growth for small t , an inflection point at $t \approx 5.49$ (where $P = L/2 = 1000$), then the curve flattens toward the carrying capacity $L = 2000$.

Ví dụ mẫu 17 • Evaluating a logistic model, HL

A wildlife reserve's population is modelled by $P(t) = \frac{2000}{1 + 9e^{-0.4t}}$, t in years since monitoring began. (a) Find the initial population $P(0)$. (b) Find the population after 10 years. (c) Find the population after 20 years, and state the carrying capacity.

(a) $P(0) = \frac{2000}{1 + 9e^0} = \frac{2000}{1 + 9} = \frac{2000}{10} = 200.$

(b) $P(10) = \frac{2000}{1 + 9e^{-0.4(10)}} = \frac{2000}{1 + 9e^{-4}} = \frac{2000}{1 + 9(0.018316)} \approx 1717$ (4 s.f.).

(c) $P(20) = \frac{2000}{1 + 9e^{-8}} \approx 1994$ (4 s.f.) – already within 0.3% of the carrying capacity $L = 2000$ (the horizontal asymptote as $t \rightarrow \infty$), confirming the reserve can sustain at most about 2000 animals, and that the population has essentially saturated by year 20.

Ví dụ mẫu 18 • Solving for x in a logistic model, HL

For the same reserve, $P(t) = \frac{2000}{1 + 9e^{-0.4t}}$, find the time at which the population reaches 1000 (half the carrying capacity).

$$\frac{2000}{1 + 9e^{-0.4t}} = 1000 \Rightarrow 1 + 9e^{-0.4t} = 2 \Rightarrow 9e^{-0.4t} = 1 \Rightarrow e^{-0.4t} = \frac{1}{9}.$$

Taking $\ln$ of both sides: $-0.4t = \ln\left(\frac{1}{9}\right) = -\ln 9 \Rightarrow t = \frac{\ln 9}{0.4} \approx 5.49$ years (3 s.f.). This is the curve's **inflection point** – the population is growing fastest at this moment (matching the figure above), after which growth decelerates as it approaches $L = 2000$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Mô hình logistic $y = \frac{L}{1 + Ce^{-kx}}$ mô tả tăng trưởng bị giới hạn bởi nguồn lực: dân số động vật (giới hạn bởi thức ăn/môi trường sống), dịch bệnh (giới hạn bởi số người còn có thể nhiễm), hay việc chấp nhận công nghệ mới (giới hạn bởi tổng thị trường). Tham số L = **sức chứa tối đa** (carrying capacity, tiệm cận ngang khi $x \rightarrow \infty$); k = tốc độ tăng trưởng; C quyết định giá trị ban đầu $y(0) = \frac{L}{1 + C}$. Để giải tìm x khi biết y , ta luôn đưa phương trình về dạng $e^{-kx} = (\text{số})$ rồi lấy $\ln$ hai vế – đúng kỹ thuật đã dùng cho phương trình mũ ở Section 2.6, chỉ khác là phải "dọn dẹp" phân số trước.

2.9.1 Why does the logistic curve start exponential and then level off? (HL)

The keyfact above claims the logistic model behaves like an exponential for small x and flattens out for large x ; both claims follow directly from the algebraic structure of $y = \frac{L}{1 + Ce^{-kx}}$.

Early behaviour (small x , so $y \ll L$): when x is small, e^{-kx} is still close to 1, so Ce^{-kx} is large compared to 1, and the "+1" in the denominator is nearly negligible:

$$1 + Ce^{-kx} \approx Ce^{-kx} \Rightarrow y \approx \frac{L}{Ce^{-kx}} = \frac{L}{C} e^{kx},$$

which is exactly an exponential model with growth rate k – this is why early logistic growth is almost indistinguishable from unrestricted exponential growth.

Long-run behaviour (large x): as $x \rightarrow \infty$, $e^{-kx} \rightarrow 0$ (since $k > 0$), so $Ce^{-kx} \rightarrow 0$ and the denominator $1 + Ce^{-kx} \rightarrow 1$:

$$y = \frac{L}{1 + Ce^{-kx}} \rightarrow \frac{L}{1} = L,$$

confirming that $y = L$ is a horizontal asymptote. The full logistic curve is therefore a smooth transition between these two extremes: exponential-like growth while resources are abundant relative to the population, bending over as the population approaches the ceiling L .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi x nhỏ (giai đoạn đầu, y còn nhỏ hơn nhiều so với L), số hạng Ce^{-kx} trong mẫu số **rất lớn** so với 1, nên có thể bỏ qua số 1 – biểu thức rút gọn về đúng dạng hàm mũ $y \approx \frac{L}{C} e^{kx}$, giải thích vì sao giai đoạn đầu của tăng trưởng logistic trông giống hệt tăng trưởng mũ không giới hạn. Khi x lớn, $e^{-kx} \rightarrow 0$, mẫu số tiến về 1, nên $y \rightarrow L$ – đây chính là tiệm cận ngang. Hai giới hạn này giải thích trọn vẹn hình chữ S đặc trưng của đường cong logistic.

2.10 Regression with Technology

Real data rarely falls exactly on a curve. **Regression** uses a GDC to find the equation of the curve (from a chosen family) that best fits a set of data points, and to measure how good that fit is. Internally, a GDC finds this "best fit" using the **method of least squares**: among all curves of the chosen family, it selects the one that minimizes the sum of the squared vertical distances between each data point and the curve (the residuals). Squaring the residuals before summing ensures that positive and negative deviations do not cancel out, and penalizes large deviations more heavily than small ones.

A GDC can perform **linear, quadratic, cubic, exponential, power**, and other regressions directly from a list of data points, returning the best-fit equation's parameters. Two measures of fit quality:

- The **correlation coefficient** r (for linear regression only), $-1 \leq r \leq 1$: $|r|$ close to 1 indicates a strong linear relationship; the sign of r matches the sign of the gradient.
- The **coefficient of determination** R^2 (or r^2 for linear models), $0 \leq R^2 \leq 1$: the proportion of the variation in y that is explained by the model. $R^2 = 0.95$ means 95% of the variation in y is accounted for by the regression model.

Higher $|r|$ or R^2 indicates a better fit **for that family of curve** – but a high R^2 does not by itself prove that family is the *correct* choice of model.

Chọn mô hình phù hợp · Choosing a model from a scatter plot

Before running any regression, look at the **shape** of the scatter plot: a roughly straight-line trend suggests **linear**; a single turning point (parabola shape) suggests **quadratic**; an S-shaped curve or two turning points suggests **cubic**; rapid, ever-accelerating one-directional growth or decay with no bound suggests **exponential**; a curve passing through (or near) the origin that rises less steeply than exponential suggests **power** ($y = ax^n$); and rapid initial change that keeps growing but ever more slowly, with no upper limit, suggests **logarithmic**. If growth appears exponential at first but then **levels off** toward a maximum, a **logistic** model (Section 2.9) – not a plain exponential – is the appropriate choice.

Các bước thực hiện trên GDC · Practical GDC regression steps

Although keystrokes vary slightly by calculator model, the general workflow is the same on every GDC: (1) enter the x -data into one list (e.g. L1) and the corresponding y -data into a second list (e.g. L2); (2) open the statistics/regression menu and choose the desired regression family (LinReg, QuadReg, CubicReg, ExpReg, PwrReg, ...); (3) confirm the lists being used, and – if the option is available – turn on the diagnostics setting so r and R^2 are displayed; (4) read off the parameters of the fitted equation together with r/R^2 . Many GDCs can also paste the resulting equation directly into the graphing screen, so the fitted curve can be overlaid on the original scatter plot as a visual check of the fit. As a further diagnostic beyond R^2 , a **residual plot** (the differences between each actual y -value and the model's predicted value, plotted against x) that shows no obvious pattern supports the chosen model family; a residual plot with a clear curve or trend suggests a different family would fit the underlying relationship better, even if R^2 for the current model looks reasonably high.

Ví dụ mẫu 19 · Linear regression

Six students' hours studied (x) and exam scores (y) are recorded:

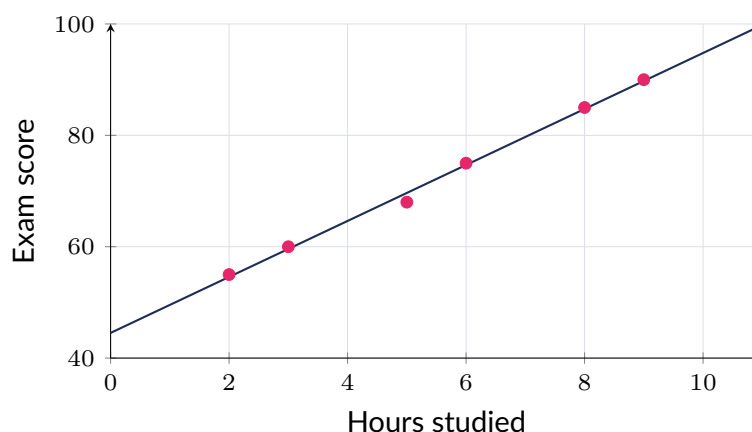
Hours, x	2	3	5	6	8	9
Score, y	55	60	68	75	85	90

Using a GDC's linear regression, find the equation of the regression line, the value of r , and predict the score for a student who studies 7 hours. Interpret the gradient in context.

The GDC returns

$$y = 5.03x + 44.5 \quad (3 \text{ s.f.}), \quad r \approx 0.998, \quad R^2 = r^2 \approx 0.997.$$

Since r is very close to 1, there is a strong positive linear relationship between hours studied and exam score. Predicting at $x = 7$: $y = 5.0267(7) + 44.52 \approx 79.7$, so a score of about 80. The gradient ≈ 5.03 means each additional hour of study is associated with an increase of about 5.03 points in exam score, on average, over the range of the data – exactly the same “rate of change” interpretation of gradient introduced for linear *models* in Section 2.3, now applied to a linear *regression* fitted from data rather than derived from a known formula.



Scatter plot and least-squares regression line for Example 19: the data points lie very close to the line, consistent with $r \approx 0.998$.

Ví dụ mẫu 20 • Choosing a model and the danger of extrapolation

A bacteria colony is counted every hour:

Hour, t	0	1	2	3	4	5
Count, N	40	55	78	110	152	210

(a) Compare a linear and an exponential regression for this data, using R^2 . (b) Use the better model to predict the count at $t = 20$, and comment on the reliability of this prediction.

(a) A GDC's linear regression gives $R^2 \approx 0.951$; the shape of the scatter plot (accelerating growth) already suggests exponential is more appropriate, and indeed an exponential regression gives

$$N = 39.9(1.40)^t \quad (3 \text{ s.f.}), \quad R^2 \approx 0.9998,$$

a far better fit – confirming the exponential model should be preferred here.

(b) Extrapolating the exponential model to $t = 20$: $N(20) = 39.8898(1.396326)^{20} \approx 31\,700$. This number should **not** be trusted: $t = 20$ is far outside the range of the collected data ($t = 0$ to 5), and in reality a bacteria colony's growth is limited by nutrients and space – its true long-run behaviour is better described by a **logistic** model (Section 2.9), not an unbounded exponential.

This is the danger of **extrapolation**: a regression model, however well it fits the observed data, is only trustworthy for **interpolating** within (or very close to) the range of x -values actually collected.

For the same bacteria data, it is worth asking: what if a **higher-degree polynomial** is fitted instead? The table below compares R^2 across four regression families run on the identical six data points of Example 20.

Model family	Linear	Quadratic	Cubic	Exponential
R^2	0.951	0.9995	0.99995	0.9998

The cubic fit has the *highest* R^2 of all – but this does **not** make it the best model. With only 6 data points, a cubic (which has 4 free parameters) has enough flexibility to bend almost exactly through the points regardless of the true underlying process – a phenomenon called **overfitting**. The exponential model has only 2 parameters, fits almost as well, and – critically – matches the actual biological mechanism (each bacterium divides at a roughly constant rate, so the population's growth rate is proportional to its current size). When two models fit nearly equally well, the model with **fewer parameters that also matches the real-world mechanism** should be preferred over one that is simply more flexible.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Hệ số tương quan r (chỉ dùng cho hồi quy tuyến tính) đo **độ mạnh và chiều** của mối quan hệ tuyến tính, còn R^2 (dùng được cho mọi loại hồi quy) đo **tỉ lệ phần trăm biến thiên** của y được giải thích bởi mô hình. R^2 cao **không** tự động chứng minh mô hình đó là "đúng" về bản chất – luôn nhìn **hình dạng biểu đồ phân tán** trước khi chọn loại hồi quy. **Ngoại suy** (extrapolation) – dùng mô hình để dự đoán giá trị x nằm xa bên ngoài khoảng dữ liệu gốc – là một trong những lỗi tư duy nghiêm trọng nhất trong thống kê ứng dụng: một mô hình khớp hoàn hảo với dữ liệu quan sát được vẫn có thể sai lệch hoàn toàn khi ngoại suy, vì xu hướng thực tế thường bị giới hạn bởi các yếu tố không xuất hiện trong dữ liệu (nguồn lực, thị trường, sinh lý học, v.v.).

Ví dụ mẫu 21 • Power regression and quadratic regression

(a) **Power regression.** A pendulum's period T (s) is measured for several string lengths L (m):

L (m)	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
T (s)	0.898	1.269	1.555	1.795	2.007

Use technology to find a power regression $T = aL^n$, and comment on the fit.

A GDC's power regression gives

$$T \approx 2.01 L^{0.500} \quad (3 \text{ s.f.}), \quad R^2 \approx 1.000.$$

The exponent $n \approx 0.500$ matches the theoretical pendulum formula $T = 2\pi\sqrt{L/g} = \left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right) L^{0.5}$ almost exactly (with $\frac{2\pi}{\sqrt{9.8}} \approx 2.007$) – the regression has essentially rediscovered a known physics law directly from data.

(b) **Quadratic regression.** A ball's height (m) is recorded every half-second during a throw:

t (s)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
h (m)	0.9	7.3	11.2	12.4	11.5	7.8	2.0

Find the quadratic regression equation, the maximum height predicted by the model, and R^2 .

A GDC's quadratic regression gives

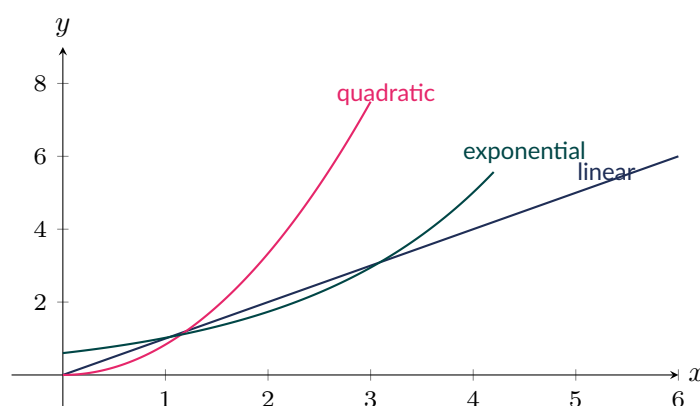
$$h \approx -4.91t^2 + 15.1t + 0.950 \quad (3 \text{ s.f.}), \quad R^2 \approx 0.9997.$$

The vertex (maximum height) occurs at $t = -\frac{15.07}{2(-4.91)} \approx 1.53 \text{ s}$, giving $h \approx 12.5 \text{ m}$ – consistent with the projectile-motion model of Section 2.4, since the leading coefficient $-4.91 \approx -\frac{1}{2}g$ matches free-fall under gravity.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hồi quy **lũy thừa** (power regression, $y = ax^n$) phù hợp khi dữ liệu đi qua gần gốc toạ độ và có dạng cong "nhẹ" hơn hàm mũ – nhiều công thức vật lý (chu kỳ con lắc, định luật Kepler, tỉ lệ diện tích/thể tích trong sinh học) có đúng dạng này. Hồi quy **bậc hai** (quadratic regression) phù hợp khi dữ liệu có **một điểm cực trị** rõ ràng – như dữ liệu độ cao của vật ném lên rồi rơi xuống. Trong cả hai trường hợp, máy GDC dùng phương pháp **bình phương tối thiểu** (least squares) để tìm bộ tham số khớp dữ liệu tốt nhất, và R^2 cho biết mức độ phù hợp – một R^2 rất gần 1 trong ví dụ con lắc cho thấy dữ liệu gần như khớp hoàn hảo với công thức lý thuyết.



Schematic comparison of model shapes for $x > 0$: a straight line grows at a constant rate; a quadratic curve bends steadily more steeply; an exponential curve eventually overtakes both, growing ever faster with no bound – a useful visual reference when a scatter plot's shape must be matched to a model family.

(!) Lỗi thường gặp: Không bao giờ dùng phương trình hồi quy để **ngoại suy** (extrapolate) tại các giá trị x nằm xa bên ngoài khoảng dữ liệu gốc – mô hình chỉ được kiểm chứng là phù hợp **trong** khoảng dữ liệu đã thu thập. Bên ngoài khoảng đó, không có gì đảm bảo xu hướng vẫn tiếp diễn: dân số vi khuẩn không tăng mũ mãi mãi (bị giới hạn bởi tài nguyên – xem mô hình logistic), doanh số không tăng trưởng vô hạn, và một chỉ số kinh tế không giảm về âm vô cùng. Đề thi AI thường kiểm tra chính xác lối tư duy này bằng cách hỏi "mô hình này có đáng tin khi dự đoán tại $x = \dots$ hay không, và tại sao?"

Summary: model families at a glance

Model	Equation	Key features / typical context
Linear	$y = mx + c$	constant rate of change; break-even, cost/revenue
Quadratic	$y = ax^2 + bx + c$	one turning point; projectile motion, price optimization
Cubic	$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	up to two turning points; volume, S-shaped short-run models
Exponential	$y = ab^x$ or $y = y_0e^{kt}$	constant % change; growth, decay, half-life
Logarithmic	$y = a + b \ln x$	rapid then slowing change, unbounded; linearizing exponential data
Sinusoidal	$y = a \sin(b(x - c)) + d$	periodic, repeating cycle; tides, Ferris wheels, seasons
Logistic (HL)	$y = \frac{L}{1 + Ce^{-kx}}$	bounded growth toward capacity L ; population, disease spread

This table is a quick reference across all ten model families covered in this unit – when approaching a new scatter plot or word problem, matching its shape/context to a row here is the first diagnostic step before running a regression or setting up an equation.

Practice

Bài tập luyện tập

State the domain of $f(x) = \frac{1}{x-4}$.

(A) $x \neq 4$

(C) $x \geq 4$

(B) $x > 4$

(D) $x \neq 0$

Lời giải chi tiết

The denominator cannot be 0: $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the domain and range of $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

Lời giải chi tiết

Need $9 - x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 \leq 9 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$ (domain). Since $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ranges from 0 (at $x = \pm 3$) up to 3 (at $x = 0$), the range is $0 \leq y \leq 3$.

Bài tập luyện tập

Let $f(x) = 3x - 1$ and $g(x) = x^2 + 2$. Find $(f \circ g)(2)$.

(A) 16

(C) 20

(B) 17

(D) 27

Lời giải chi tiết

$g(2) = 4 + 2 = 6$. $(f \circ g)(2) = f(6) = 3(6) - 1 = 17$. **(B)**. (Note: $(g \circ f)(2) = g(5) = 27$ is a common wrong-order mistake, distractor D.)

Bài tập luyện tập

Find the inverse of $f(x) = \frac{x+7}{3}$.

Lời giải chi tiết

$y = \frac{x+7}{3}$; swap: $x = \frac{y+7}{3} \Rightarrow 3x = y+7 \Rightarrow y = 3x-7$. So $f^{-1}(x) = 3x-7$. Check: $f^{-1}(f(2)) = f^{-1}(3) = 9-7 = 2 \checkmark$.

Bài tập luyện tập

A parking garage's fee function is $F(h) = 4 + 2h$ dollars, where h is the number of whole hours parked, valid for $h \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$ (the garage's daily maximum). State the domain and range of F .

Lời giải chi tiết

Domain: $h \in \{0, 1, 2, \dots, 8\}$. Range: $F(0) = 4$, $F(8) = 4 + 16 = 20$, increasing in steps of 2, so $F(h) \in \{4, 6, 8, \dots, 20\}$.

Bài tập luyện tập

The graph of $y = f(x)$ is transformed to $y = (x-3)^2 + 5$, where $f(x) = x^2$. State the vertex of the transformed graph and describe the transformation.

(A) $(3, 5)$, right 3 up 5

(C) $(3, -5)$, right 3 down 5

(B) $(-3, 5)$, left 3 up 5

(D) $(3, 5)$, right 3 down 5

Lời giải chi tiết

$f(x-3) + 5$: translate right 3, up 5; vertex $(3, 5)$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A function $y = f(x)$ has the table below. Find the values of $h(x) = 2f(x) - 4$ at the same x -values.

x	-2	0	1	3
$f(x)$	5	-3	4	1

Lời giải chi tiết

$h(-2) = 2(5) - 4 = 6$; $h(0) = 2(-3) - 4 = -10$; $h(1) = 2(4) - 4 = 4$; $h(3) = 2(1) - 4 = -2$.

Bài tập luyện tập

A function $f(x)$ has a maximum point at $(1, 4)$. Given $g(x) = -f(x+2)$, find the corresponding turning point of g and state whether it is a maximum or minimum.

Lời giải chi tiết

$g(x) = -f(x+2)$: horizontal translation left 2, then reflection in the x -axis. The point $(1, 4)$ on f maps: set $x+2 = 1 \Rightarrow x = -1$; $g(-1) = -f(1) = -4$. Since reflection in the x -axis turns a maximum into a minimum, g has a **minimum at $(-1, -4)$** .

Bài tập luyện tập

Which transformation of $f(x)$ represents a vertical stretch by factor 4 combined with a reflection in the x -axis?

(A) $-4f(x)$

(C) $4f(-x)$

(B) $f(-4x)$

(D) $f(4x)$

Lời giải chi tiết

Vertical stretch by 4 is $4f(x)$; combined with reflection in the x -axis (negate the output) gives $-4f(x)$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A company's baseline weekly revenue model is $R(x) = f(x)$ (x = price), with a maximum revenue of \$800 at $x = 10$. After a marketing change, the new model is $R_{\text{new}}(x) = 1.5f(x-2)$. Find the new maximum revenue and the price at which it occurs.

Lời giải chi tiết

Translation right 2: the maximum shifts from $x = 10$ to $x = 12$. Vertical stretch by 1.5: the maximum value scales to $1.5(800) = \text{\$1200}$, occurring at $x = 12$.

Bài tập luyện tập

A car rental company charges $C(d) = 45 + 0.25d$ dollars, d = km driven. What does the gradient 0.25 represent, and what is $C(200)$?

(A) \$0.25/km; \$95

(C) \$0.25/km; \$50

(B) fixed fee; \$95

(D) \$0.25/km; \$245

Lời giải chi tiết

Gradient = cost per km driven (\$0.25/km). $C(200) = 45 + 0.25(200) = 45 + 50 = \95 . **(A)**.

Bài tập luyện tập

A business has fixed costs of \$1500/week and variable cost \$12/unit, selling at \$27/unit. Find the break-even quantity, and the profit at 150 units.

Lời giải chi tiết

Break-even: $1500 + 12x = 27x \Rightarrow 1500 = 15x \Rightarrow x = 100$ units.

Profit(150) = $27(150) - (1500 + 12(150)) = 4050 - 3300 = \750 .

Bài tập luyện tập

A company's total cost was \$8400 when producing 40 units, and \$12 000 when producing 100 units. Find the linear cost model $C(x) = mx + b$, and use it to find $C(75)$.

Lời giải chi tiết

$m = \frac{12\,000 - 8400}{100 - 40} = \frac{3600}{60} = 60$. Using (40, 8400): $8400 = 60(40) + b \Rightarrow b = 8400 - 2400 = 6000$.

$$C(x) = 60x + 6000.$$

$C(75) = 60(75) + 6000 = 4500 + 6000 = \$10\,500$.

Bài tập luyện tập

Using the cost model $C(x) = 60x + 6000$ from the previous question, find the number of units x for which the total cost is \$15 000.

(A) 100

(C) 150

(B) 125

(D) 175

Lời giải chi tiết

$15\,000 = 60x + 6000 \Rightarrow 60x = 9000 \Rightarrow x = 150$. (C).

Bài tập luyện tập

Gym A costs $C_A(n) = 25 + 8n$ dollars (n = classes/month); Gym B costs $C_B(n) = 12n$ (pay-per-class only). Find the number of classes at which the two plans cost the same, and state which plan is cheaper for someone attending 10 classes a month.

Lời giải chi tiết

Equal cost: $25 + 8n = 12n \Rightarrow 25 = 4n \Rightarrow n = 6.25$. For $n > 6.25$, Gym A is cheaper (lower rate per class). At $n = 10$: $C_A(10) = 25 + 80 = \$105$; $C_B(10) = 12(10) = \$120$.

Gym A is cheaper at 10 classes.

Bài tập luyện tập

Find the vertex and axis of symmetry of $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$.

(A) $(2, -5)$, $x = 2$

(C) $(2, 3)$, $x = 2$

(B) $(-2, -5)$, $x = -2$

(D) $(4, 3)$, $x = 4$

Lời giải chi tiết

$$x = -\frac{-8}{2(2)} = 2. f(2) = 2(4) - 8(2) + 3 = 8 - 16 + 3 = -5. \text{ Vertex } (2, -5), \text{ axis } x = 2. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

A ball's height is modelled by $h(t) = -4.9t^2 + 30t + 1.5$ (metres, t in seconds). Find the maximum height and the time at which it occurs, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$t = -\frac{30}{2(-4.9)} = \frac{30}{9.8} \approx 3.06 \text{ s. } h(3.06) \approx -4.9(3.0612)^2 + 30(3.0612) + 1.5 \approx 47.4 \text{ m at } t \approx 3.06 \text{ s.}$$

Bài tập luyện tập

Weekly demand is $q = 800 - 25p$, giving revenue $R(p) = 800p - 25p^2$. Find the price that maximizes revenue, and the maximum revenue.

Lời giải chi tiết

$$p = -\frac{800}{2(-25)} = \frac{800}{50} = \$16. R(16) = 800(16) - 25(16)^2 = 12\,800 - 6400 = \$6400.$$

Bài tập luyện tập

Solve $2x^2 - 3x - 9 = 0$.

(A) $x = 3, x = -1.5$

(C) $x = 4.5, x = -1$

(B) $x = -3, x = 1.5$

(D) $x = 1.5, x = 3$

Lời giải chi tiết

Factoring: $2x^2 - 3x - 9 = (2x + 3)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = -1.5 \text{ or } x = 3. \text{ (A).}$

Bài tập luyện tập

A farmer has 200 m of fencing to enclose a rectangular field against a straight river (no fence needed along the river side). If x is the width perpendicular to the river, show the area is $A(x) = 200x - 2x^2$, and find the dimensions that maximize the area.

Lời giải chi tiết

Two widths + one length = 200 $\Rightarrow L = 200 - 2x$; $A(x) = xL = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$.
 $x = -\frac{200}{2(-2)} = 50 \text{ m}; L = 200 - 100 = 100 \text{ m. } A(50) = 50(100) = 5000 \text{ m}^2$, with width 50 m and length 100 m.

Bài tập luyện tập

A cubic cost model is $C(x) = 0.5x^3 - 6x^2 + 40x + 100$. Find $C(4)$.

- (A) 164 (C) 212
(B) 196 (D) 228

Lời giải chi tiết

$$C(4) = 0.5(64) - 6(16) + 40(4) + 100 = 32 - 96 + 160 + 100 = 196. \text{ (B).}$$

Bài tập luyện tập

A square sheet of cardboard has side 24 cm. Squares of side x are cut from each corner and the sides folded up. (a) Write $V(x)$. (b) Use technology to find the value of x (and the maximum volume) that maximizes V .

Lời giải chi tiết

(a) $V(x) = x(24 - 2x)^2$, domain $0 < x < 12$.

(b) Graphing on a GDC and locating the maximum: $x = 4$ cm, $V(4) = 4(24 - 8)^2 = 4(256) = 1024 \text{ cm}^3$.

Bài tập luyện tập

A cubic model has zeros where $P(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Find all values of x where $P(x) = 0$.

Lời giải chi tiết

Factoring (or using a GDC): $P(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)$, so $x = 1, 2, 3$.

Bài tập luyện tập

A cubic revenue model (in hundreds of units, thousands of dollars) is $R(x) = -x^3 + 18x^2$, valid for $0 \leq x \leq 15$. Find $R(6)$, and use technology to find the value of x that maximizes R .

Lời giải chi tiết

$R(6) = -216 + 18(36) = -216 + 648 = 432$ (i.e. \$432 000 at $x = 600$ units).

Graphing $R(x)$ and locating the maximum on $0 \leq x \leq 15$: the maximum occurs at $x = 12$, with $R(12) = -1728 + 18(144) = 864$ (i.e. \$864 000 at 1200 units).

Bài tập luyện tập

A quantity grows according to $P(t) = 800(1.06)^t$. Find $P(5)$, correct to the nearest whole number.

- (A) 1050 (C) 1085
(B) 1071 (D) 1102

Lời giải chi tiết

$$P(5) = 800(1.06)^5 \approx 1070.58 \approx 1071. \text{ (B).}$$

Bài tập luyện tập

A drug decays in the body with a half-life of 4 hours; the initial dose is 200 mg. Find the amount remaining after 10 hours, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$N(t) = 200(0.5)^{t/4}. \quad N(10) = 200(0.5)^{2.5} \approx \boxed{35.4 \text{ mg}}.$$

Bài tập luyện tập

A bacteria population follows $N(t) = 500e^{0.15t}$ (t in hours). Find the time for the population to reach 3000, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$500e^{0.15t} = 3000 \Rightarrow e^{0.15t} = 6 \Rightarrow 0.15t = \ln 6 \Rightarrow t = \frac{\ln 6}{0.15} \approx \boxed{11.9 \text{ hours}}.$$

Bài tập luyện tập

A model is given as $y = 200(1.08)^x$. Express this in the form $y = 200e^{kx}$, and state k correct to 4 s.f.

(A) $k = 0.0770$

(C) $k = 1.0800$

(B) $k = 0.0800$

(D) $k = 0.7700$

Lời giải chi tiết

Since $b = e^k$, $k = \ln(1.08) \approx 0.0770$. (A).

Bài tập luyện tập

A forest's tree count declines according to $N(t) = 4000(0.92)^t$. Find $N(8)$, and the first full year in which the count drops below 2000.

Lời giải chi tiết

$$N(8) = 4000(0.92)^8 \approx 2052.9 \text{ (still above 2000).}$$

$$N(9) = 4000(0.92)^9 \approx 1888.6 \text{ (below 2000). So the count first drops below 2000 in year } \boxed{9}.$$

Bài tập luyện tập

Find the pH of a solution with $[H^+] = 6.3 \times 10^{-3}$, using $\text{pH} = -\log_{10}[H^+]$.

(A) 2.20

(C) 3.20

(B) 2.35

(D) 1.80

Lời giải chi tiết

$$\text{pH} = -\log_{10}(6.3 \times 10^{-3}) \approx 2.20. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Solve $\log_2(x) = 5.5$ for x , correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$x = 2^{5.5} \approx \boxed{45.3}.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Exponential data $y = ab^x$ has $y = 80$ at $x = 0$ and $y = 250$ at $x = 5$. Find a and b , correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$a = 80 \text{ (value at } x = 0\text{)}. \ln b = \frac{\ln 250 - \ln 80}{5} \approx 0.2279 \Rightarrow b = e^{0.2279} \approx \boxed{1.26}. \text{ So } y \approx 80(1.26)^x.$$

Bài tập luyện tập

The Richter magnitude of an earthquake is $M = \log_{10}(A/A_0)$. If earthquake A has amplitude 4000 times the reference A_0 , find M , correct to 3 s.f.

(A) 3.60

(C) 4.00

(B) 3.20

(D) 2.60

Lời giải chi tiết

$$M = \log_{10}(4000) \approx 3.60. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Sound loudness rises from 50 dB to 85 dB. Using $\Delta L = 10 \log_{10}(I_2/I_1)$, find the factor by which intensity increased, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\Delta L = 35 = 10 \log_{10}(I_2/I_1) \Rightarrow \log_{10}(I_2/I_1) = 3.5 \Rightarrow I_2/I_1 = 10^{3.5} \approx \boxed{3160 \text{ times}}.$$

Bài tập luyện tập

State the amplitude, period, and midline of $y = 6 \sin(0.5(x - 2)) + 10$.

(A) amp 6, period 4π , midline 10

(C) amp 6, period 2, midline 10

(B) amp 10, period 0.5, midline 6

(D) amp 0.5, period 4π , midline 2

Lời giải chi tiết

Amplitude = 6; period = $\frac{2\pi}{0.5} = 4\pi$; midline = 10. **(A).**

Bài tập luyện tập

A Ferris-wheel-type model is $h(t) = 15 \sin(45(t - 2)) + 18$ (degrees mode, t in minutes). Find $h(3)$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$h(3) = 15 \sin(45^\circ) + 18 = 15(0.70711) + 18 \approx \boxed{28.6 \text{ m}}.$$

Bài tập luyện tập

Using $h(t) = 15 \sin(45(t - 2)) + 18$ from the previous question, find the first positive time t at which $h(t) = 25$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$15 \sin(45(t - 2)) + 18 = 25 \Rightarrow \sin(45(t - 2)) = \frac{7}{15} \approx 0.4667. \quad 45(t - 2) = \sin^{-1}(0.4667) \approx 27.82^\circ \Rightarrow t - 2 \approx 0.618 \Rightarrow t \approx \boxed{2.62 \text{ min}}.$$

Bài tập luyện tập

A tide has maximum depth 8 m at $t = 3$ h and minimum depth 2 m at $t = 9$ h (period 12 h). Write the depth model $d(t)$ using a cosine function, and find $d(6)$.

Lời giải chi tiết

Midline = $\frac{8 + 2}{2} = 5$; amplitude = $\frac{8 - 2}{2} = 3$; period 12 $\Rightarrow b = \frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$; maximum at $t = 3$, so

$$d(t) = 3 \cos(30(t - 3)) + 5.$$

$$d(6) = 3 \cos(90^\circ) + 5 = 3(0) + 5 = \boxed{5 \text{ m}}.$$

Bài tập luyện tập

Household AC voltage completes 60 full cycles every second (frequency 60 Hz), with peak voltage 170 V and midline 0 V. Find the period of the voltage model, and state its amplitude.

(A) amp 170 V, period $\frac{1}{60}$ s

(C) amp 170 V, period $\frac{1}{120}$ s

(B) amp 340 V, period 60 s

(D) amp 60 V, period 170 s

Lời giải chi tiết

Amplitude = peak voltage = 170 V. Period = $\frac{1}{\text{frequency}} = \frac{1}{60} \text{ s} \approx 0.0167 \text{ s}$. **(A).**

Bài luyện nâng cao · HL

A logistic model is $P(t) = \frac{500}{1 + 24e^{-0.3t}}$. Find $P(0)$.

(A) 20

(C) 25

(B) 24

(D) 500

Lời giải chi tiết

$$P(0) = \frac{500}{1 + 24} = \frac{500}{25} = 20. \text{ (A).}$$

Bài luyện nâng cao · HL

Using $P(t) = \frac{500}{1 + 24e^{-0.3t}}$ from the previous question, find t when $P = 250$ (half the carrying capacity), correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$1 + 24e^{-0.3t} = 2 \Rightarrow e^{-0.3t} = \frac{1}{24} \Rightarrow t = \frac{\ln 24}{0.3} \approx \boxed{10.6}.$$

Bài luyện nâng cao · HL

For the logistic model $P(t) = \frac{1200}{1 + 5e^{-0.25t}}$, state the carrying capacity L and the initial value $P(0)$.

Lời giải chi tiết

$$L = \boxed{1200}. P(0) = \frac{1200}{1 + 5} = \frac{1200}{6} = \boxed{200}.$$

Bài luyện nâng cao · HL

The number of people infected in an outbreak is modelled by $I(t) = \frac{3000}{1 + 49e^{-0.5t}}$ (t in days). Find $I(10)$, and the time for the number infected to reach 1500, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$I(10) = \frac{3000}{1 + 49e^{-5}} \approx \boxed{2255} \text{ (4 s.f.)}.$$

$$1500 \text{ is half of } L = 3000: 1 + 49e^{-0.5t} = 2 \Rightarrow e^{-0.5t} = \frac{1}{49} \Rightarrow t = \frac{\ln 49}{0.5} \approx \boxed{7.78 \text{ days}}.$$

Bài luyện nâng cao · HL

The fraction of households adopting a new streaming service is $Q(t) = \frac{100}{1 + 9e^{-0.6t}}$ percent (t in years). Find $Q(5)$, correct to 3 s.f., and the time for adoption to reach 90%, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$Q(5) = \frac{100}{1 + 9e^{-3}} \approx \boxed{69.1\%}.$$

$$90 = \frac{100}{1 + 9e^{-0.6t}} \Rightarrow 1 + 9e^{-0.6t} = \frac{10}{9} \Rightarrow e^{-0.6t} = \frac{1}{81} \Rightarrow t = \frac{\ln 81}{0.6} \approx \boxed{7.32 \text{ years}}.$$

Bài tập luyện tập

A scatter plot shows data rising slowly at first, then increasingly rapidly, with no sign of levelling off across the observed range. Which regression model is most appropriate?

- (A) Linear (C) Exponential
(B) Quadratic (D) Logistic

Lời giải chi tiết

Accelerating, unbounded-looking growth with no turning point is the signature of an **exponential** model. (C).

Bài tập luyện tập

A linear regression gives $r = 0.92$. What percentage of the variation in y is explained by the model, correct to 1 d.p.?

- (A) 92.0% (C) 95.9%
(B) 84.6% (D) 8.0%

Lời giải chi tiết

$$R^2 = r^2 = (0.92)^2 = 0.8464 \Rightarrow \boxed{84.6\%}. \text{ (B).}$$

Bài tập luyện tập

Six students' study hours (x) and test scores (y) are: $x = 1, 2, 4, 5, 7, 8$; $y = 40, 45, 58, 64, 75, 82$. Find the linear regression equation and r^2 , and predict the score for $x = 6$ hours.

Lời giải chi tiết

Using a GDC's linear regression: $y = 6.00x + 33.7$ (3 s.f.), $r \approx 0.9995$, $r^2 \approx 0.999$.
Predicted score at $x = 6$: $y = 6.00(6) + 33.67 \approx \boxed{69.7}$.

Bài tập luyện tập

Growth data $t = 0, 2, 4, 6, 8$; $N = 12, 18, 27, 40, 60$ appears exponential. Use technology to find the exponential regression equation, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Exponential regression gives $N = 12.0(1.22)^t$ (3 s.f.), with $R^2 \approx 0.99997$ – an excellent fit.

Bài tập luyện tập

Using the exponential model $N = 12.0(1.22)^t$ from the previous question, compare the predictions at $t = 10$ and $t = 50$, and comment on which (if either) should be trusted.

- (A) Both equally reliable
 (B) Neither should be used at all
 (C) $t = 10$ is a reasonable interpolation/near-
 (D) $t = 50$ is more reliable since the model fits so well
 extrapolation, $t = 50$ is unreliable extrapolation

Lời giải chi tiết

$N(10) \approx 89.7$ is close to the data range ($t = 0$ to 8) and reasonably trustworthy; $N(50) \approx 277\,000$ is a huge extrapolation far outside the observed range and should not be trusted, since real growth is eventually limited by resources. (C).

Mixed and Extended Problems**Ôn tập tổng hợp**

A shop's weekly demand is $q = 600 - 15p$ (p = price in \$), and each unit costs \$8 to produce.

- (a) Show that profit is $\text{Profit}(p) = -15p^2 + 720p - 4800$.
 (b) Find the profit-maximizing price and the maximum weekly profit.
 (c) Find the two prices at which profit is exactly \$0, and interpret them in context.

Lời giải chi tiết

(a) Revenue = $pq = p(600 - 15p) = 600p - 15p^2$. Cost = $8q = 8(600 - 15p) = 4800 - 120p$.

$$\text{Profit} = \text{Revenue} - \text{Cost} = 600p - 15p^2 - 4800 + 120p = -15p^2 + 720p - 4800.$$

(b) $p = -\frac{720}{2(-15)} = 24$. Profit(24) = $-15(576) + 720(24) - 4800 = -8640 + 17\,280 - 4800 = \3840 at $p = \$24$.

(c) $-15p^2 + 720p - 4800 = 0 \Rightarrow p^2 - 48p + 320 = 0 \Rightarrow p = \frac{48 \pm \sqrt{48^2 - 4(320)}}{2} = \frac{48 \pm 32}{2} = 40$ or 8 . At $p = \$8$, price exactly equals unit cost (no markup, zero profit); at $p = \$40$, demand $q = 600 - 600 = 0$ (nothing sells). Profit is positive only for $8 < p < 40$.

Ôn tập tổng hợp · HL

An endangered-species population is modelled by $P(t) = 340e^{0.045t}$ (t in years).

- (a) Find the population after 15 years.
 (b) Find the doubling time of this population, correct to 3 s.f.
 (c) Census data over the first 5 years fits this exponential model with $R^2 = 0.98$. A biologist warns against using the model to predict the population in 200 years. Explain why, referring to a more appropriate model type.

Lời giải chi tiết

(a) $P(15) = 340e^{0.045(15)} = 340e^{0.675} \approx \boxed{668}$ (3 s.f.).

(b) $e^{0.045T} = 2 \Rightarrow 0.045T = \ln 2 \Rightarrow T = \frac{\ln 2}{0.045} \approx \boxed{15.4 \text{ years}}$.

(c) A high R^2 only confirms the model fits well **within** the 5-year window of collected data; predicting 200 years ahead is extreme extrapolation. In reality, a population cannot grow exponentially forever – habitat, food, and space impose a maximum sustainable size (a carrying capacity). A **logistic** model, which levels off toward a carrying capacity L , would be far more realistic for long-run predictions than an unbounded exponential.

Ôn tập tổng hợp · HL

A flu outbreak in a town of 5000 people is modelled by $I(t) = \frac{5000}{1 + 99e^{-0.4t}}$ (t in days).

(a) Find $I(0)$ and interpret this value in context.

(b) Find $I(20)$, correct to the nearest whole number.

(c) Find the day on which the number infected first reaches 4000, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

(a) $I(0) = \frac{5000}{1 + 99} = \frac{5000}{100} = \boxed{50}$ – 50 people were infected at the start of monitoring ($t = 0$).

(b) $I(20) = \frac{5000}{1 + 99e^{-8}} \approx \boxed{4839}$ – the outbreak has nearly saturated the town by day 20.

(c) $\frac{5000}{1 + 99e^{-0.4t}} = 4000 \Rightarrow 1 + 99e^{-0.4t} = 1.25 \Rightarrow e^{-0.4t} = \frac{0.25}{99} \Rightarrow t = -\frac{1}{0.4} \ln\left(\frac{0.25}{99}\right) \approx \boxed{15.0 \text{ days}}$.

Ôn tập tổng hợp

A start-up's annual sales (\$1000s) over 6 years are: $x = 1, 2, 3, 4, 5, 6$; $y = 25, 31, 40, 52, 68, 89$.

(a) Find both a linear and an exponential regression for this data (state R^2 for each), and state which fits better.

(b) Using the better-fitting model, predict sales in year 7.

(c) Using the same model, predict sales in year 20, and explain why this prediction should not be trusted.

Lời giải chi tiết

(a) Linear regression: $y = 12.7x + 6.53$ (3 s.f.), $R^2 \approx 0.957$. Exponential regression: $y = 18.9(1.29)^x$ (3 s.f.), $R^2 \approx 0.999$. The **exponential** model fits substantially better.

(b) $y(7) = 18.854(1.29204)^7 \approx \boxed{\$113\,000}$ (3 s.f.).

(c) $y(20) = 18.854(1.29204)^{20} \approx \$3\,170\,000$ – this is a huge extrapolation, 14 years beyond the last data point. Real company growth eventually slows due to market size, competition, and saturation, so an unconstrained exponential trend cannot continue indefinitely; this prediction is unreliable.

Ôn tập tổng hợp

A Ferris-wheel-type ride is modelled by $h(t) = 12 \sin(36(t - 1)) + 15$ (degrees mode, t in minutes, h in metres).

- (a) State the maximum and minimum heights, and the first time (for $t \geq 0$) at which the maximum occurs.
(b) Find $h(4)$, correct to 3 s.f.
(c) Find the first two times in $0 \leq t \leq 10$ at which $h(t) = 20$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

- (a) Amplitude 12, midline 15: maximum = $15 + 12 = 27$ m, minimum = $15 - 12 = 3$ m. Maximum occurs when $36(t - 1) = 90^\circ \Rightarrow t - 1 = 2.5 \Rightarrow t = 3.5$ min.
(b) $h(4) = 12 \sin(36(3)) + 15 = 12 \sin(108^\circ) + 15 \approx 12(0.95106) + 15 \approx 26.4$ m.
(c) $12 \sin(36(t - 1)) + 15 = 20 \Rightarrow \sin(36(t - 1)) = \frac{5}{12} \approx 0.4167$. First solution: $36(t - 1) = \sin^{-1}(0.4167) \approx 24.62^\circ \Rightarrow t - 1 \approx 0.684 \Rightarrow t \approx 1.68$ min. Second solution (using $180^\circ - 24.62^\circ = 155.38^\circ$): $36(t - 1) \approx 155.38^\circ \Rightarrow t - 1 \approx 4.316 \Rightarrow t \approx 5.32$ min.

Ôn tập tổng hợp

A company's profit model (in thousands of dollars) is $P(x) = -(x - 6)^2 + 40$, where x is the amount spent on advertising (in thousands of dollars, $x \geq 0$).

- (a) Describe the transformations of $y = -x^2$ that produce $P(x)$.
(b) State the vertex, and interpret it in context.
(c) Find the advertising spend(s) at which profit is exactly \$0 (correct to 3 s.f.), and state the domain over which profit is positive.

Lời giải chi tiết

- (a) $y = -x^2$ is translated right 6 units and up 40 units to give $P(x) = -(x - 6)^2 + 40$.
(b) Vertex (6, 40): spending \$6000 on advertising maximizes profit, at \$40 000.
(c) $-(x - 6)^2 + 40 = 0 \Rightarrow (x - 6)^2 = 40 \Rightarrow x = 6 \pm \sqrt{40} \approx 6 \pm 6.32$, giving $x \approx 12.3$ or $x \approx -0.325$. Since $x \geq 0$, only $x \approx 12.3$ (thousand dollars) is meaningful – profit is positive for $0 \leq x < 12.3$ (thousand dollars), and turns negative beyond that (over-spending on advertising erodes profit).

Geometry and Trigonometry

Mục tiêu Unit: Lượng giác tam giác vuông, góc nâng/góc hạ và phương vị 3 chữ số trong định vị thực tế; đơn vị radian, độ dài cung và diện tích hình quạt; định lý sin, định lý cosin, diện tích tam giác $\frac{1}{2}ab \sin C$ và trường hợp mơ hồ (ambiguous case); hình học không gian: góc giữa đường thẳng và mặt phẳng, đường chéo không gian, khối ghép (silo, lều, bao bì); sơ đồ Voronoi và ứng dụng chọn vị trí; và các chủ đề HL: vectơ và phương trình đường thẳng, tích vô hướng – tích có hướng, cùng lý thuyết đồ thị (ma trận kề, cây khung nhỏ nhất Kruskal/Prim, đường đi/chu trình Euler).

3.1 Right-Angled Trigonometry, Elevation, Depression, and Bearings

3.1.1 Reviewing right-angled trigonometry

Every problem in this chapter builds on the three basic trigonometric ratios defined in a right-angled triangle, together with the sine rule and cosine rule (Section 3.3) for triangles that are not right-angled.

For a right-angled triangle with a reference angle θ (not the right angle), relative to θ the sides are named the **opposite** (Opp), **adjacent** (Adj), and **hypotenuse** (Hyp, the side opposite the right angle):

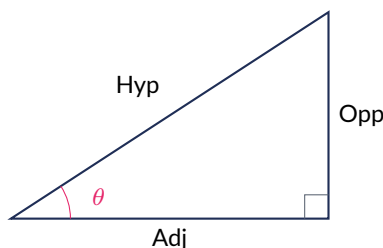
$$\sin \theta = \frac{\text{Opp}}{\text{Hyp}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{Adj}}{\text{Hyp}}, \quad \tan \theta = \frac{\text{Opp}}{\text{Adj}} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}.$$

The **Pythagorean theorem** $\text{Opp}^2 + \text{Adj}^2 = \text{Hyp}^2$ holds in every right-angled triangle. On a GDC, always confirm the angle mode is set to **degrees** unless a problem explicitly uses radians.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ba tỉ số lượng giác cơ bản (SOH-CAH-TOA) áp dụng cho tam giác **vuông**: $\sin = \text{đối/huyền}$, $\cos = \text{kề/huyền}$, $\tan = \text{đối/kề}$. Định lý Pythagoras chỉ áp dụng cho tam giác vuông. Với tam giác **không vuông**, phải dùng định lý sin hoặc định lý cosin (Section 3.3) — đây là lỗi nền tảng phổ biến: học sinh cố áp dụng SOH-CAH-TOA cho tam giác không có góc vuông.



A right-angled triangle with reference angle θ : the hypotenuse (Hyp) is always opposite the right angle; Opp and Adj are named *relative to* θ , so they swap if the reference angle changes.

3.1.2 Angles of elevation and depression

The **angle of elevation** is the angle measured *upward* from the horizontal to a line of sight to an object above the observer. The **angle of depression** is the angle measured *downward* from the horizontal to a line of sight to an object below the observer. Because the horizontal lines at the observer and at the object are parallel, the angle of elevation from the lower point equals the angle of depression from the higher point (alternate angles).

Ví dụ mẫu 1 • Angle of elevation

A surveyor's eye level is 1.6 m above the ground. Standing 60 m from the base of a communications tower, she measures the angle of elevation to the top of the tower as 52° . Find the height of the tower, correct to 3 s.f.

The horizontal distance and the vertical rise above eye level form a right-angled triangle:

$$\text{rise} = 60 \tan 52^\circ \approx 76.80 \text{ m.}$$

Adding the surveyor's eye height, the total height of the tower is

$$H \approx 76.80 + 1.6 = 78.4 \text{ m (3 s.f.)}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán góc nâng, chiều cao **thực tế** của vật thường phải **cộng thêm chiều cao mắt** người quan sát (nếu đề cho), vì góc nâng được đo từ **mắt** chứ không phải từ mặt đất. Đây là chi tiết hay bị bỏ sót, dẫn đến đáp số thiếu 1–2 mét.

Ví dụ mẫu 1b • Angle of depression

From the top of a coastguard watchtower 38 m above sea level, the angle of depression to a small boat is 7° . Find the horizontal distance from the base of the tower to the boat, correct to 3 s.f.

The angle of depression from the tower equals the angle of elevation from the boat (alternate angles), so the horizontal distance d and the height 38 m form a right-angled triangle with reference angle 7° :

$$\tan 7^\circ = \frac{38}{d} \Rightarrow d = \frac{38}{\tan 7^\circ} \approx 309 \text{ m (3 s.f.)}$$

3.1.3 Bearings (3-figure bearings)

A **bearing** gives a direction as an angle measured **clockwise from north**, always written with **three figures** (e.g. 065° , 008° , 155° , 310°). A **back bearing** (the bearing of the return journey) is found by adding 180° if the original bearing is less than 180° , or subtracting 180° if it is 180° or more. Bearing problems are solved by constructing a triangle and identifying which sides/angles are known, then applying right-angled trigonometry, the sine rule, or the cosine rule as appropriate.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương vị (bearing) luôn đo **theo chiều kim đồng hồ tính từ hướng Bắc** và viết bằng **đúng 3 chữ số** (ví dụ 008° chứ không viết 8°). Phương vị ngược lại (back bearing) chỉ đơn giản là $+180^\circ$ hoặc -180° . Kỹ năng quan trọng nhất là **vẽ hình chính xác**: đánh dấu hướng Bắc (mũi tên thẳng

đứng) tại từng điểm, sau đó xác định tam giác và các yếu tố đã biết để chọn công cụ giải phù hợp (lượng giác tam giác vuông, định lý sin, hay định lý cosin).

Ví dụ mẫu 2 · Two-leg bearing journey

A ship leaves port O and sails on a bearing of 065° for 40 km to point A . It then changes course and sails on a bearing of 155° for 30 km to point B . Find the distance OB , and the bearing of B from O .

Since the bearing changes from 065° to 155° , the interior angle of triangle OAB at A is $155^\circ - 065^\circ = 90^\circ$: the path turns through a right angle at A . So triangle OAB is right-angled at A , with legs $OA = 40$ km and $AB = 30$ km:

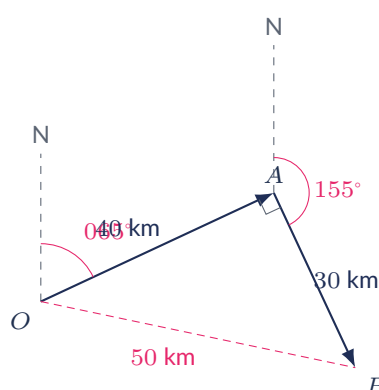
$$OB = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{2500} = 50 \text{ km.}$$

To find the bearing of B from O , first find angle AOB using the right triangle:

$$\tan(\angle AOB) = \frac{AB}{OA} = \frac{30}{40} = 0.75 \Rightarrow \angle AOB \approx 36.87^\circ.$$

The ship turned *clockwise* at A (bearing increased), so B lies clockwise of the direction OA as seen from O . The bearing of B from O is

$$065^\circ + 36.87^\circ \approx 101.9^\circ \quad \text{i.e. a bearing of } 102^\circ \text{ (nearest degree).}$$



A ship sails bearing 065° for 40 km ($O \rightarrow A$), then bearing 155° for 30 km ($A \rightarrow B$). Since the two bearings differ by exactly 90° , triangle OAB is right-angled at A , so $OB = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$ km.

(!) Lỗi thường gặp: Khi cộng/trừ phương vị, luôn kiểm tra kết quả nằm trong khoảng $[0^\circ, 360^\circ)$ – nếu ra số âm, **cộng thêm** 360° ; nếu ra số $\geq 360^\circ$, **trừ đi** 360° . Ngoài ra, luôn vẽ hướng Bắc **tại từng điểm góc** của hành trình (không chỉ tại điểm xuất phát) – góc phương vị của chặng thứ hai được đo từ hướng Bắc mới tại điểm rẽ, không phải từ hướng đi của chặng đầu.

3.2 Radian Measure, Arc Length, and Sector Area

3.2.1 Radian measure

One **radian** is the angle subtended at the centre of a circle by an arc equal in length to the radius. Since the full circumference $2\pi r$ is subtended by a full turn, a full turn equals 2π radians, giving the conversion

$$\theta_{\text{rad}} = \theta_{\text{deg}} \times \frac{\pi}{180}, \quad \theta_{\text{deg}} = \theta_{\text{rad}} \times \frac{180}{\pi}.$$

Common values: $30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $45^\circ = \frac{\pi}{4}$, $60^\circ = \frac{\pi}{3}$, $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, $180^\circ = \pi$, $360^\circ = 2\pi$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Radian là một **đơn vị đo góc khác** (thay cho độ), được định nghĩa dựa trên chính **bán kính đường tròn**: góc 1 radian là góc chắn một cung có độ dài **đúng bằng** bán kính. Vì cả đường tròn (chu vi $2\pi r$) ứng với $360^\circ = 2\pi$ rad, công thức đổi qua lại là nhân/chia với $\frac{\pi}{180}$. Radian là đơn vị **bắt buộc** khi dùng công thức độ dài cung và diện tích hình quạt (mục tiếp theo), cũng như trong giải tích ở các chủ đề khác.

3.2.2 Deriving the arc length and sector area formulas

Consider a circle of radius r , and a sector (a "pie slice") subtending an angle θ (in radians) at the centre. Both the arc length s and the sector area A are directly **proportional** to θ , since doubling the angle doubles the fraction of the circle swept out.

For the **full circle** ($\theta = 2\pi$), the arc length is the full circumference $2\pi r$ and the area is the full circle area πr^2 . Setting up the proportion for a general angle θ :

$$\frac{s}{\theta} = \frac{2\pi r}{2\pi} = r \implies \boxed{s = r\theta}, \quad \frac{A}{\theta} = \frac{\pi r^2}{2\pi} = \frac{r^2}{2} \implies \boxed{A = \frac{1}{2}r^2\theta}.$$

Both formulas require θ to be measured in **radians** — this is, in fact, precisely *why* radians are defined the way they are: the radian is the angle unit that makes $s = r\theta$ true without any extra conversion constant.

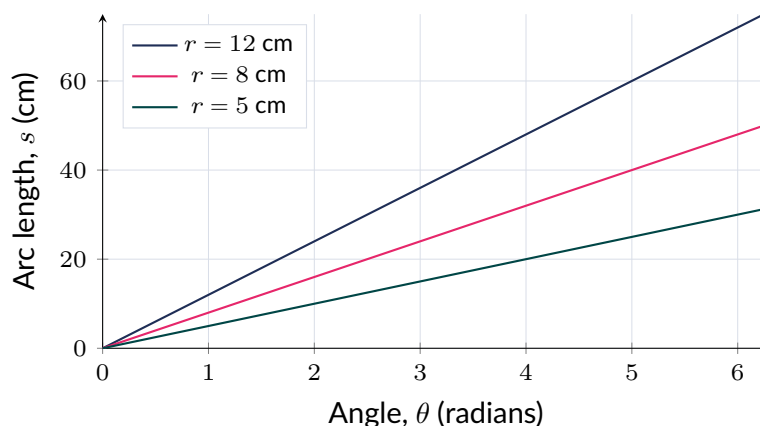
For a circle of radius r and a sector angle θ measured in **radians**:

$$\text{Arc length: } s = r\theta, \quad \text{Sector area: } A = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

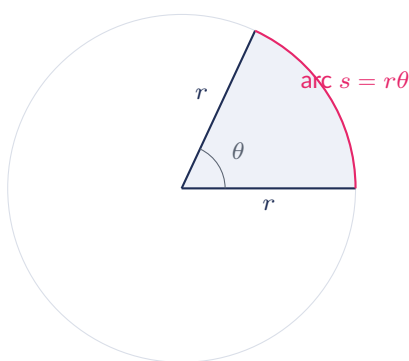
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức $s = r\theta$ và $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ được suy ra bằng **tỉ lệ thuận**: cung/diện tích hình quạt chiếm một **phần số** $\frac{\theta}{2\pi}$ của toàn bộ chu vi/diện tích đường tròn. Nhân phần số này với chu vi $2\pi r$ ta được $s = r\theta$; nhân với diện tích πr^2 ta được $A = \frac{1}{2}r^2\theta$. **Bắt buộc** θ phải ở đơn vị radian khi dùng hai công thức này — nếu đề cho góc bằng độ, phải đổi sang radian trước.



Arc length $s = r\theta$ is directly proportional to θ for fixed r : each line is straight and passes through the origin, with **slope equal to r** – a larger radius means the arc length grows faster as the angle increases.



A sector of radius r and angle θ (radians): the shaded sector area is $A = \frac{1}{2}r^2\theta$, and the boundary arc has length $s = r\theta$.

Ví dụ mẫu 3 · Clock hands and arc length

The minute hand of a large clock tower is 11 cm long. Find the angle (in radians) it turns through in 20 minutes, and the arc length traced by its tip.

A full revolution (60 minutes) corresponds to 2π radians, so in 20 minutes the hand turns through

$$\theta = \frac{20}{60} \times 2\pi = \frac{2\pi}{3} \approx 2.094 \text{ rad.}$$

$$s = r\theta = 11 \times 2.094 \approx 23.0 \text{ cm (3 s.f.)}$$

Ví dụ mẫu 4 · Windshield wiper sector area

A car's windshield wiper blade is 55 cm long, pivoted at one end, and sweeps through an angle of 110° on each pass. Find the area of the windshield cleaned by the wiper on a single pass, correct to 3 s.f.

Convert to radians first: $\theta = 110 \times \frac{\pi}{180} \approx 1.920 \text{ rad.}$

$$A = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(55)^2(1.920) \approx 2900 \text{ cm}^2 \text{ (3 s.f.)}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai ví dụ trên cho thấy ứng dụng thực tế: kim đồng hồ quét một **cung tròn** (độ dài cung), còn cần gạt nước ô tô quét một **hình quạt** (diện tích hình quạt). Luôn **đổi độ sang radian trước** khi thay vào công thức $s = r\theta$ hoặc $A = \frac{1}{2}r^2\theta$ nếu đề cho góc bằng độ – quên bước này là lỗi tính

toán phổ biến nhất của phần radian.

3.3 The Sine Rule, Cosine Rule, and Triangle Area

For a general triangle ABC (not necessarily right-angled), with side a opposite vertex A , side b opposite B , and side c opposite C , two key results let us find missing sides and angles.

3.3.1 The sine rule

Sine rule: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. Use the sine rule when you know a pair of opposite side/angle values (e.g. a and A) plus one more piece of information (another angle, to find a side; or another side, to find an angle).

Ví dụ mẫu 5 • Sine rule: triangulating across a lake

Two points A and C lie on the same shore of a lake, 150 m apart. From A , the angle to a landmark B on the far shore is $\angle BAC = 68^\circ$; from C , the angle to B is $\angle BCA = 77^\circ$. Find the distance AB across the lake, correct to 3 s.f.

The third angle is $\angle ABC = 180^\circ - 68^\circ - 77^\circ = 35^\circ$. Side $AC = 150$ m is opposite $\angle ABC = 35^\circ$; side AB is opposite $\angle BCA = 77^\circ$. By the sine rule,

$$\frac{AB}{\sin 77^\circ} = \frac{AC}{\sin 35^\circ} \Rightarrow AB = \frac{150 \sin 77^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 255 \text{ m (3 s.f.)}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý sin liên hệ **mỗi cạnh với sin của góc đối diện nó**: cạnh a đối góc A , v.v. Dấu hiệu dùng định lý sin: biết một **cặp góc–cạnh đối nhau** đầy đủ (như a và A), cộng thêm một góc hoặc cạnh khác. Luôn xác định đúng góc nào đối diện cạnh nào trước khi thiết lập tỉ lệ – nhầm lẫn cặp đối diện là lỗi sai phổ biến nhất.

3.3.2 The cosine rule

Cosine rule: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ (and the symmetric versions for b^2 , c^2). Rearranged to find an angle from three known sides: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. Use the cosine rule when you know **two sides and the included angle** (SAS, to find the third side) or **all three sides** (SSS, to find any angle).

3.3.3 Deriving the cosine rule

The cosine rule follows from the Pythagorean theorem by dropping a perpendicular. In triangle ABC , drop a perpendicular from C to side AB , meeting it at D . Let $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, and $\angle A$ be known. In right triangle ACD : $AD = b \cos A$ and $CD = b \sin A$. Then $BD = AB - AD = c - b \cos A$.

Applying the Pythagorean theorem in right triangle BCD :

$$a^2 = BD^2 + CD^2 = (c - b \cos A)^2 + (b \sin A)^2.$$

Expanding:

$$a^2 = c^2 - 2bc \cos A + b^2 \cos^2 A + b^2 \sin^2 A = c^2 - 2bc \cos A + b^2 (\cos^2 A + \sin^2 A).$$

Since $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ (the Pythagorean identity), this simplifies to

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Notice that when $A = 90^\circ$, $\cos A = 0$ and the formula collapses to the ordinary Pythagorean theorem $a^2 = b^2 + c^2$ – the cosine rule is a generalisation of Pythagoras to non-right triangles.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý cosin được suy ra bằng cách **hạ đường cao** từ đỉnh C xuống cạnh AB , tạo ra hai tam giác vuông, rồi áp dụng định lý Pythagoras cho tam giác vuông chứa cạnh a . Khai triển và dùng đẳng thức lượng giác cơ bản $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$ để rút gọn. Khi $A = 90^\circ$, định lý cosin **trở về đúng** định lý Pythagoras – vì vậy có thể xem định lý cosin là phiên bản **mở rộng** của Pythagoras cho tam giác bất kỳ.

Ví dụ mẫu 6 · Cosine rule: distance between two ships

Two ships leave the same port at the same time. Ship P sails on a bearing of 040° at 18 km/h; ship Q sails on a bearing of 110° at 24 km/h. Find the distance between the ships after 2.5 hours, correct to 3 s.f.

After 2.5 hours, ship P has travelled $18(2.5) = 45$ km and ship Q has travelled $24(2.5) = 60$ km. The angle between their two bearings (the angle at the port between the two paths) is $110^\circ - 040^\circ = 70^\circ$. This is SAS, so the cosine rule applies:

$$d^2 = 45^2 + 60^2 - 2(45)(60) \cos 70^\circ \Rightarrow d = \sqrt{45^2 + 60^2 - 2(45)(60) \cos 70^\circ} \approx 61.5 \text{ km (3 s.f.)}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Dấu hiệu dùng định lý cosin: biết **hai cạnh và góc xen giữa** (SAS) để tìm cạnh còn lại, hoặc biết **cả ba cạnh** (SSS) để tìm một góc bất kỳ. Trong bài toán phương vị, góc xen giữa hai quãng đường thường chính là **hiệu hai phương vị** xuất phát từ cùng một điểm.

3.3.4 Area of a triangle: $\frac{1}{2}ab \sin C$

For any triangle with two sides a , b and the included angle C between them, the area is

$$\text{Area} = \frac{1}{2}ab \sin C.$$

This follows because the height from the vertex between a and b (dropped to the side of length a , say) is $b \sin C$, and $\text{Area} = \frac{1}{2}(\text{base})(\text{height}) = \frac{1}{2}a(b \sin C)$.

Ví dụ mẫu 7 · Area of a triangular sports field

A triangular park has two sides of length 85 m and 64 m, with an included angle of 72° between them. Find its area, correct to 3 s.f.

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(85)(64) \sin 72^\circ \approx 2590 \text{ m}^2 \text{ (3 s.f.)}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức $\text{Area} = \frac{1}{2}ab \sin C$ chỉ cần **hai cạnh và góc xen giữa** – không cần biết chiều cao của tam giác. Đây thường là cách nhanh nhất để tính diện tích một mảnh đất/sân hình tam giác trong thực tế khi đo đạc chỉ cho hai cạnh và một góc.

3.3.5 The ambiguous case (SSA)

When the sine rule is applied to data of the form **side-side-angle** (two sides and a *non-included* angle), the triangle is not always uniquely determined – this is called the **ambiguous case**.

Why does this happen? Given angle A , side a (opposite A), and side b , the sine rule gives

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

The sine function satisfies $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$, so for $0^\circ < \theta < 180^\circ$, a given value of $\sin B$ generally corresponds to **two** possible angles: B_1 (acute) and $B_2 = 180^\circ - B_1$ (obtuse). Both are geometrically valid *unless* B_2 makes the angle sum exceed 180° (i.e. $A + B_2 \geq 180^\circ$), in which case only B_1 is valid.

Given a , b , and non-included angle A (with a opposite A), compare a to $b \sin A$ and b :

- If $a < b \sin A$: no triangle exists (side a is too short to reach the other ray).
- If $a = b \sin A$: exactly one triangle exists, and it is right-angled at B .
- If $b \sin A < a < b$: **two** triangles exist (the ambiguous case) – $B_1 = \sin^{-1}\left(\frac{b \sin A}{a}\right)$ and $B_2 = 180^\circ - B_1$.
- If $a \geq b$: exactly one triangle exists (only B_1 keeps the angle sum valid).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trường hợp mơ hồ (ambiguous case) xảy ra vì hàm sin **không đơn ánh** trên khoảng $(0^\circ, 180^\circ)$: $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$, nên một giá trị $\sin B$ có thể ứng với **hai góc** B khác nhau (một nhọn, một tù), miễn là góc tù đó vẫn cho tổng ba góc hợp lệ ($< 180^\circ$). Đây là lý do dữ kiện SSA (cạnh-cạnh-góc, góc **không xen giữa**) có thể cho 0, 1, hoặc 2 tam giác – khác hẳn với SAS, ASA, SSS luôn cho **đúng một** tam giác.

Ví dụ mẫu 8 • The ambiguous case, worked in full

In triangle ABC , $A = 35^\circ$, $a = 8$ cm, and $b = 10$ cm. Show that two triangles satisfy this data, and solve both completely (correct to 3 s.f. / 1 d.p.).

Check: $b \sin A = 10 \sin 35^\circ \approx 5.74$. Since $5.74 < 8 < 10$, i.e. $b \sin A < a < b$, this is genuinely the ambiguous case – two triangles exist.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{10 \sin 35^\circ}{8} \approx 0.7170.$$

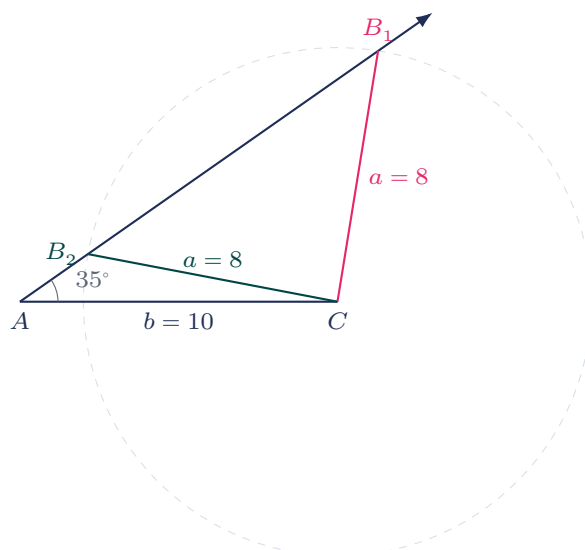
Triangle 1: $B_1 = \sin^{-1}(0.7170) \approx 45.8^\circ$, so $C_1 = 180^\circ - 35^\circ - 45.8^\circ \approx 99.2^\circ$, and

$$c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A} = \frac{8 \sin 99.2^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 13.8 \text{ cm}.$$

Triangle 2: $B_2 = 180^\circ - 45.8^\circ = 134.2^\circ$, so $C_2 = 180^\circ - 35^\circ - 134.2^\circ \approx 10.8^\circ$, and

$$c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A} = \frac{8 \sin 10.8^\circ}{\sin 35^\circ} \approx 2.61 \text{ cm}.$$

Both triangles are valid: $(B, C, c) \approx (45.8^\circ, 99.2^\circ, 13.8 \text{ cm})$ or $(134.2^\circ, 10.8^\circ, 2.61 \text{ cm})$.



The ambiguous case: with $A = 35^\circ$, $b = 10$, $a = 8$, the circle of radius $a = 8$ centred at C crosses ray AB at two points B_1 and B_2 , producing two valid triangles ACB_1 and ACB_2 that both satisfy the given data.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hình minh họa: tia từ A tạo góc 35° với AC ; vòng tròn tâm C bán kính $a = 8$ cắt tia này tại **hai điểm** B_1 và B_2 — mỗi điểm cho một tam giác hợp lệ khác nhau, cùng thoả mãn dữ kiện $A = 35^\circ$, $b = 10$, $a = 8$ đã cho. Đây chính là lý do đề thi IB AI luôn yêu cầu học sinh **kiểm tra** xem bài toán SSA có phải trường hợp mơ hồ hay không trước khi kết luận đáp số.

3.4 Three-Dimensional Geometry

3.4.1 Angles between a line and a plane; space diagonals

The **angle between a line and a plane** is the angle between the line and its **orthogonal projection** onto the plane — equivalently, it is the smallest angle between the line and any line lying in the plane. To find it in practice: identify a right-angled triangle formed by the line, its projection onto the plane, and a perpendicular segment joining the line's endpoint to the plane, then use right-angled trigonometry. A **space diagonal** of a cuboid (rectangular box) with edge lengths l , w , h has length $d = \sqrt{l^2 + w^2 + h^2}$ (apply the Pythagorean theorem twice: once for the base diagonal, once for the space diagonal).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Góc giữa một đường thẳng và một mặt phẳng là góc giữa đường đó với **hình chiếu vuông góc** của nó lên mặt phẳng — về mặt thực hành, luôn tìm ra một **tam giác vuông** chứa đoạn thẳng đã cho, hình chiếu của nó, và đoạn vuông góc nối xuống mặt phẳng, rồi dùng lượng giác tam giác vuông bình thường. Đường chéo không gian của hình hộp chữ nhật dùng Pythagoras **hai lần liên tiếp**: lần đầu tìm đường chéo đáy $\sqrt{l^2 + w^2}$, lần hai kết hợp với chiều cao h để ra $d = \sqrt{l^2 + w^2 + h^2}$.

Ví dụ mẫu 9 • Space diagonal and line–plane angle of a shipping container

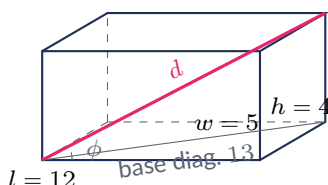
A rectangular shipping container has length 12 m, width 5 m, and height 4 m. Find the length of its space diagonal, and the angle this diagonal makes with the base (floor) of the container, correct to 3 s.f. / 1 d.p.

The space diagonal has length

$$d = \sqrt{12^2 + 5^2 + 4^2} = \sqrt{144 + 25 + 16} = \sqrt{185} \approx 13.6 \text{ m (3 s.f.)}$$

The base diagonal (the diagonal of the 12×5 floor) is $\sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13 \text{ m}$ exactly. The space diagonal, the base diagonal, and the vertical edge ($h = 4 \text{ m}$) form a right-angled triangle, with the angle ϕ between the space diagonal and the base satisfying

$$\tan \phi = \frac{h}{\text{base diagonal}} = \frac{4}{13} \Rightarrow \phi \approx 17.1^\circ \text{ (1 d.p.)}$$



A cuboid ($12 \times 5 \times 4 \text{ m}$) with space diagonal $d = \sqrt{185} \approx 13.6 \text{ m}$ (pink) and base diagonal 13 m (grey, dashed hidden edges shown at back-bottom-left). The angle $\phi \approx 17.1^\circ$ between the diagonal and the base satisfies $\tan \phi = h/(\text{base diagonal})$.

3.4.2 Composite solids: volume and surface area

A **composite solid** is built from two or more basic solids (cylinders, cones, spheres/hemispheres, prisms, pyramids) joined together. **Volume** of a composite solid is simply the **sum** of the volumes of its parts. **Surface area** requires more care: only include the **exposed** outer surfaces – internal faces where two solids are joined (e.g. the flat circle where a cone sits on a cylinder) are **not** part of the external surface area. Standard formulas: cylinder $V = \pi r^2 h$, curved surface area (CSA) $= 2\pi r h$; cone $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, CSA $= \pi r \ell$ (with slant height $\ell = \sqrt{r^2 + h^2}$); sphere $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, SA $= 4\pi r^2$; hemisphere $V = \frac{2}{3}\pi r^3$, curved SA $= 2\pi r^2$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với khối ghép, **thể tích** luôn là **tổng** thể tích các khối thành phần – không có gì đặc biệt. Nhưng **diện tích bề mặt** thì phải cẩn thận: chỉ tính các mặt **lộ ra ngoài**; mặt tiếp giáp giữa hai khối (ví dụ đáy hình nón gắn khít lên đỉnh hình trụ) **không được tính** vì đó là mặt bên trong, không lộ ra ngoài. Đây là lỗi rất phổ biến: học sinh cộng dư cả diện tích đáy hình nón hoặc đỉnh hình trụ vào tổng diện tích bề mặt của khối ghép.

Ví dụ mẫu 10 · Composite solid: a grain silo

A grain silo is built as a cylinder of radius 3.5 m and height 6 m , topped with a cone of height 2.2 m (same radius). Find (a) the total volume the silo can hold, and (b) the total exterior surface area to be painted, excluding the circular base (which sits on the ground) and excluding the internal join between the cylinder and cone. Give both answers correct to 3 s.f.

(a) **Volume:**

$$V_{\text{cyl}} = \pi(3.5)^2(6) \approx 230.9 \text{ m}^3, \quad V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi(3.5)^2(2.2) \approx 28.2 \text{ m}^3.$$

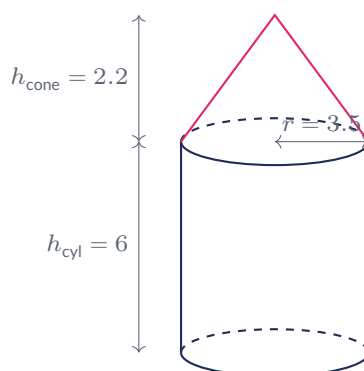
$$V_{\text{total}} \approx 230.9 + 28.2 = 259 \text{ m}^3 \text{ (3 s.f.)}$$

(b) **Surface area:** the cone's slant height is $\ell = \sqrt{3.5^2 + 2.2^2} \approx 4.134$ m.

$$CSA_{\text{cyl}} = 2\pi(3.5)(6) \approx 131.9 \text{ m}^2, \quad CSA_{\text{cone}} = \pi(3.5)(4.134) \approx 45.5 \text{ m}^2.$$

$$\text{Total SA} \approx 131.9 + 45.5 = 177 \text{ m}^2 \text{ (3 s.f.)}$$

(Neither the base of the cylinder nor the base of the cone is included, since one rests on the ground and the other is an internal join.)



The grain silo of Example 10: a cylinder (radius 3.5 m, height 6 m) topped by a cone (height 2.2 m). Total volume $\approx 259 \text{ m}^3$; total exterior surface area (excluding base and internal join) $\approx 177 \text{ m}^2$.

(!) Lỗi thường gặp: Khi tính diện tích xung quanh hình nón, luôn dùng **đường sinh** (slant height) $\ell = \sqrt{r^2 + h^2}$ trong công thức $CSA = \pi r \ell$ — **không** được dùng nhầm chiều cao thẳng đứng h của hình nón. Đây là lỗi cực kỳ phổ biến: học sinh quen công thức thể tích dùng h (chiều cao) nên áp dụng nhầm luôn h vào công thức diện tích xung quanh, vốn cần ℓ (luôn dài hơn h).

3.4.3 Angle between two planes

The **angle between two planes** (a **dihedral angle**) is measured by taking a line in each plane, both perpendicular to the line where the planes meet (their line of intersection), at the same point — the angle between these two lines equals the angle between the planes. In symmetric solids (e.g. a prism with a triangular cross-section), the angle between two slanted faces meeting at a ridge equals the angle between the corresponding lines in the cross-sectional triangle.

In practice (at AI level), most angle-between-planes problems reduce to one of two situations: (1) a **symmetric prism** cross-section, as in Example 11 below, where the 3D dihedral angle is literally the apex angle of a 2D triangle; or (2) a solid such as a pyramid, where the angle between a sloping triangular face and the horizontal base is found by first identifying the **foot of the perpendicular** from the apex to the base (often the centre of the base, for a right pyramid), then constructing the right-angled triangle formed by the apex, that foot, and the midpoint of the relevant base edge. In both cases, the 3D problem is reduced to ordinary right-angled trigonometry or the cosine rule applied within a carefully chosen 2D cross-section — this is the single most useful problem-solving strategy in IB AI three-dimensional geometry.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Góc giữa hai mặt phẳng (góc nhị diện) được đo bằng cách lấy tại **cùng một điểm** trên giao tuyến, hai đường thẳng nằm trong mỗi mặt phẳng và **vuông góc** với giao tuyến đó — góc giữa hai đường này chính là góc giữa hai mặt phẳng. Với các khối đối xứng (như lều hình lăng trụ

tam giác), góc giữa hai mặt nghiêng gặp nhau tại đỉnh (sống lều) chính bằng góc ở đỉnh của tam giác mặt cắt ngang — nhờ đó bài toán 3D quy về bài toán tam giác phẳng quen thuộc.

Ví dụ mẫu 11 · Angle between two roof planes of a tent

A camping tent has a triangular cross-section: it is 3 m wide at the base and 2 m high at the central ridge, with two symmetric sloped fabric panels meeting at the ridge. Find the angle between the two roof planes at the ridge, correct to 1 d.p.

By symmetry, each slanted edge of the cross-section has length $\sqrt{1.5^2 + 2^2} = 2.5$ m (using half the base, 1.5 m, and the height, 2 m). The angle between the two roof planes equals the apex angle of the isosceles cross-sectional triangle (sides 2.5, 2.5, base 3). By the cosine rule:

$$\cos(\text{apex}) = \frac{2.5^2 + 2.5^2 - 3^2}{2(2.5)(2.5)} = \frac{12.5 - 9}{12.5} = 0.28 \Rightarrow \text{apex} \approx 73.7^\circ \text{ (1 d.p.)}.$$

So the two roof panels meet at an angle of approximately 73.7° .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vì lều có mặt cắt ngang không đổi dọc theo chiều dài (một hình lăng trụ), góc nhị diện giữa hai mặt mái **chính bằng** góc ở đỉnh của tam giác mặt cắt — bài toán 3D này thực chất chỉ là một bài toán tam giác cân 2D quen thuộc, giải bằng định lý cosin (SSS). Đây là kỹ thuật chung: khi khối 3D có mặt cắt ngang không đổi (lăng trụ), luôn quy bài toán góc/khoảng cách về mặt cắt 2D tương ứng.

3.5 Voronoi Diagrams

3.5.1 Sites, vertices, edges, and cells

Given a set of points called **sites** in a plane, a **Voronoi diagram** partitions the plane into regions called **Voronoi cells**, one per site, where the cell for a site S consists of every point that is **closer to S than to any other site**. The boundary between the cells of two neighbouring sites lies exactly on the **perpendicular bisector** of the segment joining them (since the perpendicular bisector is the set of points equidistant from the two sites). Where three or more cell boundaries meet is called a **Voronoi vertex** — a point equidistant from three (or more) sites; the boundary segments themselves are called **Voronoi edges**.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Sơ đồ Voronoi chia mặt phẳng thành các **ô (cell)**, mỗi ô ứng với một **điểm gốc (site)**: ô của site S là tập hợp mọi điểm **gần S hơn** so với bất kỳ site nào khác. Biên giữa hai ô liền kề luôn là **đường trung trực** của đoạn nối hai site đó (vì đường trung trực là tập hợp các điểm cách đều hai đầu mút). Nơi ba (hoặc nhiều hơn) đường trung trực gặp nhau gọi là **đỉnh Voronoi** — điểm cách đều ít nhất 3 site.

For n sites in **general position** (no site exactly on the boundary between two others, and no four sites lying on a common circle), the resulting Voronoi diagram has exactly n cells (one per site), and the number of Voronoi vertices and edges grows roughly linearly with n rather than quadratically — a key reason Voronoi diagrams remain computationally efficient even for large numbers of sites, unlike checking every pair of sites directly. Each Voronoi vertex is, by construction, the **circumcentre** of the 3 nearby sites that are equidistant from it (exactly as in Example 12), and each Voronoi edge is a portion of exactly one perpendicular bisector — the portion that is actually the closest-boundary

between its two neighbouring cells (the rest of that same infinite bisector line is "shadowed" by other, closer sites and does not appear in the diagram).

3.5.2 Constructing a Voronoi diagram with perpendicular bisectors

To construct a Voronoi diagram for 3 sites forming a triangle: draw the perpendicular bisector of each of the 3 pairs of sites. All three bisectors meet at a single point – the triangle's **circumcentre** – which is the unique Voronoi vertex, equidistant from all 3 sites. From this vertex, three Voronoi edges (rays, one along each bisector) divide the plane into exactly 3 cells, one containing each site.

Ví dụ mẫu 12 • Voronoi vertex and the "toxic waste dump" problem

Three towns are located (in km, on a coordinate grid) at $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, and $C(3, 5)$. A new waste-processing facility must be built as far as possible from *all* three towns. Find the location that maximises the minimum distance to the three towns, and state that maximum distance.

The point that is simultaneously as far as possible from all three sites (subject to remaining equidistant from the nearest ones) is the **Voronoi vertex** of the three towns – the circumcentre of triangle ABC , found by intersecting two perpendicular bisectors.

Bisector of AB : midpoint $(3, 0)$; since AB is horizontal, the bisector is the vertical line $x = 3$.

Bisector of AC : midpoint $(1.5, 2.5)$; slope of AC is $\frac{5-0}{3-0} = \frac{5}{3}$, so the perpendicular slope is $-\frac{3}{5}$:

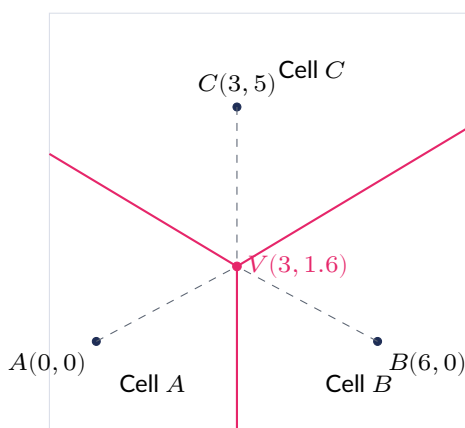
$$y - 2.5 = -\frac{3}{5}(x - 1.5).$$

Substituting $x = 3$: $y - 2.5 = -\frac{3}{5}(1.5) = -0.9 \Rightarrow y = 1.6$.

So the Voronoi vertex (circumcentre) is $V(3, 1.6)$. Checking the distance to each town confirms it is equidistant:

$$VA = \sqrt{3^2 + 1.6^2} = \sqrt{11.56} = 3.4, \quad VB = \sqrt{3^2 + 1.6^2} = 3.4, \quad VC = \sqrt{0^2 + 3.4^2} = 3.4.$$

The optimal site for the facility is $(3, 1.6)$, at a distance of exactly 3.4 km from every town – the largest possible "minimum distance to the nearest town" for any point in the plane restricted to being outside the triangle's immediate cells (in general, if the region available is bounded, the optimal point is the Voronoi vertex *provided it lies inside the permitted region*; otherwise the farthest point is pushed to the region's boundary or corner).



Voronoi diagram for three towns A , B , C : the three pink rays (perpendicular bisectors) meet at the Voronoi vertex $V(3, 1.6)$, which is equidistant (3.4 km, dashed) from all three towns and divides the region into three cells.

3.5.3 Applications: facility siting and nearest-neighbour interpolation

Nearest-neighbour interpolation: to estimate an unknown value at a query point (e.g. rainfall at a location with no weather station), assign it the value recorded at the **nearest known site** – equivalently, find which Voronoi cell the query point falls into. **Facility-siting / "toxic waste dump" problems:** to place a new facility as far as possible from existing sites (undesirable facility) or to determine a service region for an existing facility (desirable facility, e.g. nearest hospital), Voronoi vertices and edges identify the locally farthest/closest points without needing to check every point in the plane.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nội suy láng giềng gần nhất (nearest-neighbour interpolation): để ước lượng giá trị tại một điểm chưa biết (ví dụ lượng mưa ở nơi không có trạm đo), gán cho nó giá trị của **trạm gần nhất** – tương đương với việc xác định điểm đó rơi vào ô **Voronoi** nào. Bài toán "bãi rác độc hại": vì điểm xa nhất so với các site luôn nằm tại một **đỉnh Voronoi** (hoặc trên biên vùng cho phép nếu đỉnh Voronoi nằm ngoài vùng), ta chỉ cần kiểm tra hữu hạn các đỉnh Voronoi thay vì dò toàn bộ mặt phẳng – đây là giá trị thực tiễn cốt lõi của sơ đồ Voronoi trong quy hoạch.

Ví dụ mẫu 12b · Nearest-neighbour interpolation

Three weather stations record the following monthly rainfall: $S_1(0, 0)$ with 42 mm, $S_2(10, 0)$ with 55 mm, $S_3(5, 9)$ with 38 mm (coordinates in km). Estimate the rainfall at a village located at $(6, 3)$, using nearest-neighbour interpolation.

Compute the distance from the village to each station:

$$VS_1 = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} \approx 6.71, \quad VS_2 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.00, \quad VS_3 = \sqrt{1^2 + 6^2} = \sqrt{37} \approx 6.08.$$

The village is closest to S_2 (distance 5.00 km), so it lies in S_2 's Voronoi cell. The nearest-neighbour estimate for the village's rainfall is simply S_2 's recorded value:

$$\widehat{\text{rainfall}} = \boxed{55 \text{ mm}}.$$

3.6 Vectors (HL)

3.6.1 Displacement, magnitude, and position vectors

A **vector** represents a displacement: it has both **magnitude** (size/length) and **direction**, unlike a scalar which has magnitude only. In component form, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ (or $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ in 2D) has magnitude

$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$. The **position vector** of a point P is the vector $\overrightarrow{OP}$ from the origin O to P . For two points A and B with position vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{b}$, the displacement vector from A to B is $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vectơ biểu diễn một **độ dịch chuyển**: có cả **độ lớn** và **hướng**, khác với đại lượng vô hướng (scalar) chỉ có độ lớn. **Vectơ vị trí** của điểm P là vectơ từ gốc tọa độ O đến P . Vectơ nối từ điểm A đến điểm B luôn tính bằng **vectơ vị trí điểm đến trừ vectơ vị trí điểm đi**: $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ – thứ tự trừ rất quan trọng, không được đảo ngược.

A **unit vector** has magnitude exactly 1. Any nonzero vector $\mathbf{v}$ can be converted into a unit vector **in the same direction** by dividing by its own magnitude: $\hat{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$. This process is called **normalising** the vector, and is useful whenever only the *direction* of a vector matters (e.g. specifying a heading), independent of its size.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vectơ đơn vị (unit vector) có độ lớn **đúng bằng** 1. Chia bất kỳ vectơ khác không nào cho **chính độ lớn của nó** sẽ cho ra vectơ đơn vị **cùng hướng** – quá trình này gọi là "chuẩn hoá" (normalise), rất hữu ích khi chỉ quan tâm đến **hướng** của vectơ mà không quan tâm độ lớn.

3.6.2 Vector addition and scalar multiplication

Addition is componentwise: $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$, and is represented geometrically by the **triangle rule** (place vectors head-to-tail; the sum is the vector from the first tail to the last head) or, equivalently, the parallelogram rule. **Scalar multiplication** $k\mathbf{v}$ scales the magnitude by $|k|$ and reverses direction if $k < 0$, leaving the vector **parallel** to $\mathbf{v}$ in every case.

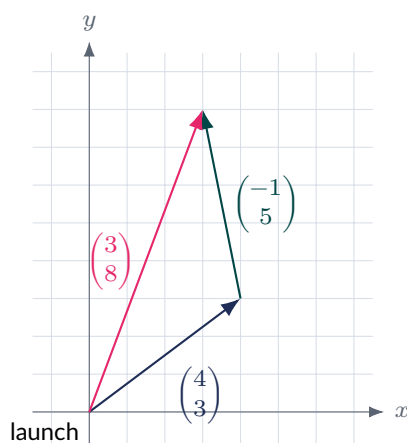
Ví dụ mẫu 13 · Drone displacement: addition and magnitude

A survey drone flies from its launch point along displacement vector $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ km, then continues along $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ km. Find the drone's total (resultant) displacement vector from the launch point, its distance from the launch point, and the bearing back to the launch point from its final position.

$$\text{Resultant} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ km.}$$

$$\text{Distance} = \sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73} \approx 8.54 \text{ km (3 s.f.)}$$

Treating the vector's first component as "east" and second as "north," the bearing of the final position *from* the launch point is $\tan^{-1}\left(\frac{3}{8}\right) \approx 20.6^\circ$ (i.e. bearing 021° , nearest degree). The bearing *back* to the launch point is the back bearing: $021^\circ + 180^\circ = 201^\circ$.



Head-to-tail (triangle rule) addition of the drone's two displacement legs: $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$, the resultant (pink) drawn directly from launch to final position.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cộng vectơ theo **quy tắc tam giác** (nối đuôi–đầu): vẽ vectơ thứ nhất, rồi vẽ vectơ thứ hai bắt đầu từ **đầu mút** của vectơ thứ nhất – vectơ tổng nối từ **gốc đầu tiên** đến **ngọn cuối cùng**. Về đại số chỉ cần cộng **từng thành phần tương ứng**. Nhân vectơ với một số vô hướng k : nếu $k > 0$ vectơ giữ nguyên hướng (chỉ đổi độ dài); nếu $k < 0$ vectơ **đảo ngược hướng**; kết quả luôn **song song** với vectơ ban đầu.

The **zero vector** $\mathbf{0}$ (all components zero) has magnitude 0 and no defined direction; it acts as the identity for vector addition ($\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$). **Subtraction** is simply addition of the negative: $\mathbf{u} - \mathbf{v} = \mathbf{u} + (-1)\mathbf{v}$, so on a diagram, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ is found by reversing $\mathbf{v}$'s direction and then adding head-to-tail as usual – equivalently, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ is the vector drawn from the tip of $\mathbf{v}$ to the tip of $\mathbf{u}$ when both are drawn from the same starting point (this is exactly the construction used in the dot-product derivation of Section 3.7, later in this chapter).

3.6.3 The vector equation of a line

The **vector equation of a line** through a known point with position vector $\mathbf{a}$, in direction $\mathbf{d}$, is

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}, \quad t \in \mathbb{R},$$

where $\mathbf{r}$ is the position vector of a general point on the line and t is a scalar parameter. Different values of t trace out every point on the line. To check whether a given point lies on the line, substitute its coordinates and solve for t using *one* component equation, then **verify** that the same t satisfies the remaining component equation(s).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương trình vectơ của đường thẳng $\mathbf{r} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}$ gồm một **điểm neo** $\mathbf{a}$ (bất kỳ điểm nào đã biết thuộc đường thẳng) và một **vectơ chỉ phương** $\mathbf{d}$ (hướng của đường thẳng); tham số t chạy khắp $\mathbb{R}$ để quét hết mọi điểm trên đường. Để kiểm tra một điểm có thuộc đường thẳng không: dùng **một** phương trình thành phần để tìm t , sau đó **bắt buộc kiểm tra lại** t đó với (các) phương trình thành phần còn lại – nếu không khớp, điểm **không** thuộc đường thẳng.

Ví dụ mẫu 14 · Vector equation of a line: checking a point

A line has vector equation $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Determine whether the point $(5, 5, 0)$ lies on this line.

From the x -component: $2 + t = 5 \Rightarrow t = 3$. Checking this value of t in the other two components:

$$y: -1 + 2(3) = 5 \quad \checkmark \quad z: 3 - 1(3) = 0 \quad \checkmark$$

Both check out, so $(5, 5, 0)$ **does** lie on the line, at parameter value $t = 3$.

3.6.4 Intersecting and skew lines

Two lines given in vector form may (in 2D or 3D) **intersect** at a single point, be **parallel** (same or proportional direction vectors, never meeting unless identical), or — **only possible in 3D** — be **skew**: neither parallel nor intersecting. To test for intersection: set the two vector equations equal, component by component, giving a system of equations in the two parameters (t and s). Solve any two of the equations for t and s , then **substitute into the remaining equation(s)** to check consistency. If all equations are satisfied, the lines intersect (substitute back to find the point); if not, and the direction vectors are not parallel, the lines are skew.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hai đường thẳng trong không gian, có 3 khả năng: **cắt nhau** (giao tại một điểm), **song song** (vectơ chỉ phương tỉ lệ nhau), hoặc **chéo nhau** (skew — chỉ xảy ra trong không gian 3 chiều: không song song nhưng cũng không cắt nhau). Cách kiểm tra: giải hệ phương trình thành phần để tìm t, s từ hai phương trình, rồi **thế vào phương trình còn lại** để kiểm tra tính nhất quán — nếu không khớp (và hai vectơ chỉ phương không song song), kết luận hai đường thẳng **chéo nhau**.

Ví dụ mẫu 15 · Determining whether two 3D lines are skew

Two aircraft follow straight-line flight paths given by

$$L_1: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad L_2: \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Determine whether the flight paths cross.

The direction vectors $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ are not parallel (not scalar multiples of each other), so the lines are not parallel. Set the equations equal component-by-component:

$$x: 1 + t = s \quad y: t = 1 - s \quad z: 1 = 2 + s.$$

From the z -equation: $s = -1$. Substituting into the y -equation: $t = 1 - (-1) = 2$. Now **check** the x -equation with these values:

$$1 + t = 1 + 2 = 3, \quad s = -1.$$

Since $3 \neq -1$, the system is **inconsistent** — there is no common value of t and s satisfying all three equations simultaneously. Since the lines are also not parallel, they are **skew**: the flight paths do not cross (at these altitudes/times), even though they might appear to cross when projected onto a 2D map.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ví dụ trên minh họa đúng quy trình: dùng 2 trong 3 phương trình thành phần để giải ra t, s , rồi **bắt buộc thử lại** phương trình còn lại. Vì phương trình thứ ba không thỏa ($3 \neq -1$), hai đường bay **chéo nhau** — đây là điều chỉ có thể xảy ra trong không gian 3 chiều (trong mặt phẳng 2D, hai đường thẳng không song song **luôn** cắt nhau).

3.7 Scalar and Vector Products (HL)

3.7.1 The scalar (dot) product

The **scalar (dot) product** of $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ is the **scalar**

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta,$$

where θ is the angle between the two vectors. Rearranging gives the **angle between two vectors**: $\cos \theta = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{|\mathbf{u}| |\mathbf{v}|}$. Since $\cos 90^\circ = 0$, two nonzero vectors are **perpendicular** (orthogonal) exactly when $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tích vô hướng (dot product) của hai vectơ cho ra một **số** (không phải vectơ): nhân từng cặp thành phần tương ứng rồi cộng lại. Công thức $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$ liên hệ đại số với hình học, cho phép **tìm góc** giữa hai vectơ bất kỳ (kể cả trong không gian 3D, nơi không thể "đo góc" trực tiếp bằng thước đo góc). Đặc biệt: $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff$ hai vectơ **vuông góc** – đây là cách kiểm tra vuông góc nhanh nhất, không cần tính góc cụ thể.

Ví dụ mẫu 16 • Angle between guy-wires, and a perpendicularity check

A radio mast is supported by two straight guy-wires anchored to the ground. Relative to the base of the mast, the direction vectors of the two wires are $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$ (metres). Find the angle between the two wires, correct to 1 d.p. Then determine whether $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ are perpendicular.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6(0) + 0(6) + (-8)(-8) = 64. \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{36 + 64} = 10, \quad |\mathbf{v}| = \sqrt{36 + 64} = 10.$$

$$\cos \theta = \frac{64}{10 \times 10} = 0.64 \implies \theta = \cos^{-1}(0.64) \approx 50.2^\circ \text{ (1 d.p.)}$$

For $\mathbf{w}$ and $\mathbf{z}$: $\mathbf{w} \cdot \mathbf{z} = 4(3) + (-3)(4) = 12 - 12 = 0$, so $\mathbf{w}$ and $\mathbf{z}$ are perpendicular.

3.7.2 Where does the formula $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta$ come from?

This formula connects the algebraic definition of the dot product (sum of products of components) to the geometric idea of an angle – and it follows directly from the **cosine rule** of Section 3. Consider two vectors $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$ drawn from the same starting point, with angle θ between them. The third side of the triangle they form is $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ (the vector from the tip of $\mathbf{v}$ to the tip of $\mathbf{u}$).

Applying the cosine rule to this triangle, with sides $|\mathbf{u}|$, $|\mathbf{v}|$, and $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|$, and included angle θ :

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta.$$

On the other hand, expanding $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$ **algebraically** using the definition of the dot product (since $|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ for any vector $\mathbf{a}$):

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2.$$

Both expressions equal $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$, so they must be equal to each other:

$$|\mathbf{u}|^2 - 2\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + |\mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}| |\mathbf{v}| \cos \theta.$$

The $|u|^2$ and $|v|^2$ terms cancel from both sides, leaving $-2u \cdot v = -2|u||v| \cos \theta$, i.e.

$$u \cdot v = |u||v| \cos \theta.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức $u \cdot v = |u||v| \cos \theta$ được suy ra bằng cách áp dụng **định lý cosin** (Section 3) cho tam giác tạo bởi u , v , và $u - v$, rồi **khai triển đại số** $|u - v|^2$ theo định nghĩa tích vô hướng. So sánh hai cách tính cùng một đại lượng $|u - v|^2$ (một bằng hình học/cosin, một bằng đại số) cho ra ngay công thức liên hệ. Đây là một ví dụ đẹp về việc **hai chủ đề tưởng chừng tách biệt** (định lý cosin và tích vô hướng) thực chất là **cùng một ý tưởng toán học**, chỉ được diễn đạt theo hai ngôn ngữ khác nhau.

3.7.3 The vector (cross) product

The **vector (cross) product** of $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ and $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ (defined only in 3D) is the **vector**

$$u \times v = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix},$$

which is **perpendicular to both u and v** (hence normal to the plane containing them), with magnitude $|u \times v| = |u||v| \sin \theta$. Since $|u||v| \sin \theta$ is exactly the **area of the parallelogram** with sides u and v , the area of the **triangle** with two sides u , v is $\frac{1}{2}|u \times v|$. Because $u \times v$ is perpendicular to both vectors, it serves directly as a **normal vector** to any plane containing them.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tích có hướng (cross product, chỉ định nghĩa trong không gian 3D) cho ra một **vector** vuông góc với **cả hai** vector ban đầu – vì vậy nó chính là một **vector pháp tuyến** của mặt phẳng chứa hai vector đó. Độ lớn của tích có hướng $|u \times v|$ bằng diện tích **hình bình hành** tạo bởi hai vector; chia đôi ra diện tích **tam giác**. Đây là công cụ mạnh để tính diện tích trong không gian 3D mà không cần tìm góc hay chiều cao trước.

Ví dụ mẫu 17 · Cross product: area of a hillside survey plot, and its normal

A triangular plot of land on a hillside is surveyed at three points with position vectors (in metres) $A(0, 0, 0)$, $B(6, 0, 2)$, and $C(2, 5, 1)$. Find the area of the plot, and a normal vector to the plane of the hillside at this point, correct to 3 s.f.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} (0)(1) - (2)(5) \\ (2)(2) - (6)(1) \\ (6)(5) - (0)(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -2 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

This vector is itself a valid **normal vector** to the hillside plane. Its magnitude:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-10)^2 + (-2)^2 + 30^2} = \sqrt{1004} \approx 31.69.$$

$$\text{Area of triangle } ABC = \frac{1}{2}(31.69) \approx 15.8 \text{ m}^2 \text{ (3 s.f.)}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với ba điểm khảo sát trong không gian 3D, lấy hai vectơ cạnh chung gốc ($\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$), tính tích có hướng để được một vectơ pháp tuyến; **độ lớn** của vectơ này chia đôi ra ngay diện tích tam giác — không cần biết trước góc giữa hai vectơ như khi dùng công thức $\frac{1}{2}ab \sin C$ ở Section 3. Đây là lý do tích có hướng đặc biệt hữu ích cho các bài toán khảo sát địa hình trong không gian 3D.

3.8 Graph Theory (HL)

3.8.1 Vertices, edges, and adjacency matrices

A **graph** consists of a set of **vertices** (nodes) and a set of **edges** connecting pairs of vertices. In a **weighted graph**, each edge carries a numerical **weight** (e.g. distance, cost, time). The **degree** of a vertex is the number of edges meeting it. A graph's **adjacency matrix** M is a square matrix (rows and columns both indexed by the vertices) where entry $M_{ij} = 1$ if there is an edge between vertex i and vertex j (and $M_{ij} = 0$ otherwise); for a weighted graph, M_{ij} can instead store the edge weight. For an undirected graph, M is always **symmetric**.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đồ thị gồm các **đỉnh** (vertices) và **cạnh** (edges) nối các cặp đỉnh; đồ thị có **trọng số** gán cho mỗi cạnh một con số (khoảng cách, chi phí,...). **Bậc** của một đỉnh là số cạnh nối tới nó. **Ma trận kề** biểu diễn đồ thị dưới dạng bảng số: hàng i , cột j ghi 1 nếu có cạnh nối đỉnh $i-j$ (hoặc ghi trọng số nếu có), và 0 nếu không có cạnh. Vì đồ thị vô hướng không phân biệt chiều, ma trận kề luôn **đối xứng** qua đường chéo chính.

Handshake lemma: in any graph, the sum of the degrees of all vertices equals **twice** the number of edges,

$$\sum_{\text{all vertices}} \deg(v) = 2 \times (\text{number of edges}),$$

because each edge contributes exactly 1 to the degree count of *each* of its two endpoints. A direct consequence: the number of **odd**-degree vertices in any graph is always **even**.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bổ đề bắt tay (handshake lemma): tổng bậc của **tất cả** các đỉnh luôn bằng **hai lần** số cạnh, vì mỗi cạnh đóng góp đúng 1 vào bậc của **mỗi** đầu mút của nó (nên đóng góp 2 vào tổng). Hệ quả trực tiếp: số đỉnh có **bậc lẻ** trong bất kỳ đồ thị nào cũng luôn là một số **chẵn** — không thể có đồ thị với đúng 1 hoặc 3 đỉnh bậc lẻ.

(!) Lỗi thường gặp: Đừng nhầm lẫn giữa **"đường đi"** (walk) khi đếm bằng lũy thừa ma trận kề (được phép **lặp lại** đỉnh và cạnh) với **"đường đi Euler"** (phải đi qua **mỗi cạnh đúng một lần**, không được lặp cạnh). Đây là hai khái niệm hoàn toàn khác nhau dùng chung từ **"đường đi"** trong tiếng Việt — luôn xác định rõ ngữ cảnh câu hỏi đang hỏi về loại nào trước khi áp dụng công cụ (ma trận kề → walk; điều kiện bậc đỉnh → đường đi/chu trình Euler).

3.8.2 Matrix powers and counting walks

If M is the adjacency matrix of a graph, the entry $(M^n)_{ij}$ gives the number of distinct **walks of length n** (sequences of n edges, possibly repeating vertices/edges) from vertex i to vertex j . This is computed simply by raising M to the power n using ordinary matrix multiplication (best done on a GDC for $n \geq 3$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Lũy thừa của ma trận kề có ý nghĩa đếm: $(M^n)_{ij}$ chính là **số đường đi độ dài n** (được phép lặp lại đỉnh/cạnh) từ đỉnh i đến đỉnh j . Đây là một ứng dụng đẹp và bất ngờ của phép nhân ma trận – biến một bài toán tổ hợp/đếm đường đi thành một phép tính đại số tuyến tính đơn giản, dùng GDC để tính nhanh với n lớn.

Ví dụ mẫu 18 · Adjacency matrix and counting walks in a small network

Four routers A, B, C, D in a local network are connected as follows: $A-B, A-C, B-C, B-D, C-D$ (an unweighted graph). Write down the adjacency matrix, and use matrix powers to find the number of walks of length 2 from A to D .

Ordering vertices A, B, C, D :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Computing M^2 (via GDC or by hand):

$$M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

The entry in row A , column D of M^2 is 2, so there are 2 walks of length 2 from A to D : namely $A \rightarrow B \rightarrow D$ and $A \rightarrow C \rightarrow D$ – matching a direct check of the diagram.

3.8.3 Trees and minimum spanning trees: Kruskal's and Prim's algorithms

A **tree** is a connected graph with no cycles; a tree on n vertices always has exactly $n - 1$ edges. A **spanning tree** of a connected weighted graph is a tree that includes **every** vertex of the graph, using only edges from the original graph. A **minimum spanning tree** (MST) is a spanning tree with the smallest possible total edge weight – e.g. the cheapest way to connect a set of towns with cable/road/pipeline, using existing possible routes.

Kruskal's algorithm: sort all edges by weight, ascending. Add each edge to the growing tree **unless** it would create a cycle (i.e. unless both its endpoints are already connected via previously added edges); stop once $n - 1$ edges have been added.

Prim's algorithm (an alternative): start from any one vertex. At each step, add the **cheapest edge** that connects a vertex already in the tree to a vertex not yet in the tree. Repeat until all vertices are included. Prim's algorithm grows a single connected tree outward at every step, whereas Kruskal's may temporarily build several disconnected fragments that merge later; both always produce a minimum spanning tree (possibly not unique if weights tie), and both require $n - 1$ edges for n vertices.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cây (tree) là đồ thị liên thông **không có chu trình**, luôn có đúng $n - 1$ cạnh cho n đỉnh. **Cây khung nhỏ nhất** (Minimum Spanning Tree - MST) là cây khung có **tổng trọng số nhỏ nhất**, dùng để tìm cách kết nối rẻ nhất giữa các điểm (thị trấn, máy chủ,...).

Thuật toán Kruskal: sắp xếp **mọi cạnh** theo trọng số tăng dần, rồi lần lượt thêm từng cạnh vào cây — **bỏ qua** cạnh nào tạo thành chu trình (tức là hai đầu mút đã được nối với nhau qua các cạnh trước đó rồi). Dừng khi đã có đủ $n - 1$ cạnh.

Thuật toán Prim (một cách tiếp cận khác): bắt đầu từ **một đỉnh bất kỳ**, mỗi bước thêm **cạnh rẻ nhất** nối từ cây hiện tại sang một đỉnh chưa có trong cây. Prim luôn giữ cây **liên thông liên tục** trong suốt quá trình, còn Kruskal có thể tạo ra nhiều mảnh rời rạc rồi mới ghép lại — nhưng cả hai đều cho ra cùng tổng trọng số nhỏ nhất.

Ví dụ mẫu 19 • Kruskal's algorithm: minimum-cost cabling network

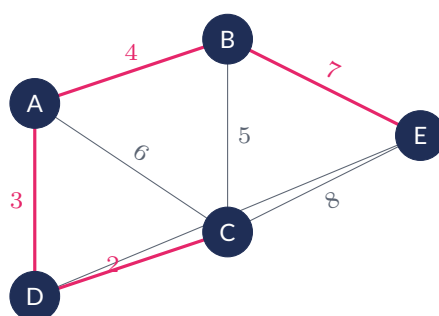
Five towns A, B, C, D, E are candidates to be connected by fibre-optic cable. The possible direct routes and their costs (in \$10,000s) are: $AB = 4, AC = 6, AD = 3, BC = 5, BE = 7, CD = 2, CE = 8, DE = 9$. Use Kruskal's algorithm to find the minimum-cost network connecting all five towns, and state the total cost.

Sorting edges by weight: $CD(2), AD(3), AB(4), BC(5), BE(7), CE(8), DE(9)$.

- Add CD (2): connects $\{C, D\}$. No cycle.
- Add AD (3): connects A to $\{C, D\}$, giving $\{A, C, D\}$. No cycle.
- Add AB (4): connects B to $\{A, C, D\}$, giving $\{A, B, C, D\}$. No cycle.
- Add BC (5): **rejected** — B and C are already connected (via A), so this would create a cycle.
- Add BE (7): connects E to $\{A, B, C, D\}$, giving all five towns connected. No cycle.

Now 4 edges have been added ($n - 1 = 5 - 1 = 4$), so the algorithm stops. The minimum spanning tree is $\{CD, AD, AB, BE\}$ with total cost

$$2 + 3 + 4 + 7 = \boxed{16} \quad (\text{i.e. } \$160,000).$$



Weighted graph for the five-town cabling network: the minimum spanning tree found by Kruskal's algorithm (pink, thick) has total weight $2 + 3 + 4 + 7 = 16$; the grey thin edges are the routes rejected (either cycle-forming or more expensive than needed).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong ví dụ trên, cạnh BC (trọng số 5) bị **loại** không phải vì nó đắt, mà vì thêm nó vào sẽ tạo ra **chu trình** $A-B-C-A$ (ba đỉnh này đã liên thông với nhau qua các cạnh rẻ hơn rồi). Đây là quy tắc cốt lõi của Kruskal: luôn xét cạnh rẻ nhất còn lại, nhưng chỉ thêm vào nếu **không tạo chu trình** — nếu tạo chu trình, bỏ qua và xét cạnh tiếp theo.

Ví dụ mẫu 19b • Prim's algorithm, traced step by step

Four water-pumping stations F, G, H, I can be connected by pipes with costs (in \$1000s): $FG = 6, FH = 3, FI = 8, GH = 4, GI = 5, HI = 2$. Starting from F , apply Prim's algorithm to find the minimum-cost pipe network.

Step 1: Tree = $\{F\}$. Cheapest edge leaving F : $FH = 3$ (vs. $FG = 6, FI = 8$). Add H . Tree = $\{F, H\}$, running total 3.

Step 2: Cheapest edge leaving $\{F, H\}$: compare $FG = 6, FI = 8, HG = 4, HI = 2$ – cheapest is $HI = 2$. Add I . Tree = $\{F, H, I\}$, running total $3 + 2 = 5$.

Step 3: Cheapest edge leaving $\{F, H, I\}$ to the remaining vertex G : compare $FG = 6, HG = 4, IG = 5$ – cheapest is $HG = 4$. Add G . Tree = $\{F, G, H, I\}$, complete.

$$\text{Total cost} = 3 + 2 + 4 = \boxed{9} \quad (\text{i.e. } \$9000).$$

(As a check, applying Kruskal's algorithm to the same data – sorted edges $HI(2), FH(3), GH(4), GI(5), FG(6), FI(8)$ – also gives the edges $\{HI, FH, GH\}$ with the same total cost 9, confirming both algorithms find a genuine minimum spanning tree.)

3.8.4 Eulerian trails and circuits

An **Eulerian trail** is a walk that traverses **every edge of a graph exactly once** (vertices may be revisited). An **Eulerian circuit** is an Eulerian trail that starts and ends at the **same vertex**. A connected graph has:

- an **Eulerian circuit** if and only if **every vertex has even degree**;
- an **Eulerian trail** (but not a circuit) if and only if **exactly two vertices have odd degree** (the trail must start at one odd vertex and end at the other);
- **neither** if more than two vertices have odd degree.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đường đi Euler (Eulerian trail) đi qua **mỗi cạnh đúng một lần** (được phép quay lại đỉnh cũ). **Chu trình Euler** (Eulerian circuit) là đường đi Euler mà điểm đầu và điểm cuối **trùng nhau**. Điều kiện bậc đỉnh (rất hay được hỏi trong đề thi): **tất cả đỉnh bậc chẵn** $\Rightarrow$ có chu trình Euler; **đúng 2 đỉnh bậc lẻ** $\Rightarrow$ có đường đi Euler (bắt đầu ở một đỉnh lẻ, kết thúc ở đỉnh lẻ còn lại) nhưng không có chu trình; **nhiều hơn 2 đỉnh bậc lẻ** $\Rightarrow$ không có cả hai.

Ví dụ mẫu 20 • Eulerian trail, and a routing (Chinese-postman-flavour) problem

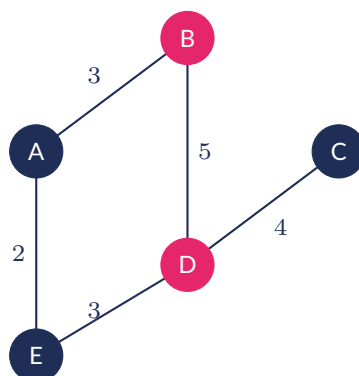
A postal worker must deliver mail along every street in a small neighbourhood, represented as a weighted graph on corners A, B, C, D, E with streets (edges, in km) $AB = 3, BC = 2, CD = 4, DE = 3, EA = 2, BD = 5$. (a) Find the degree of each vertex and determine whether an Eulerian trail or circuit exists. (b) If the worker must **return to the starting point B** after covering every street at least once, find the minimum possible total distance.

(a) Degrees: A : edges $AB, EA \Rightarrow 2$ (even). B : edges $AB, BC, BD \Rightarrow 3$ (odd). C : edges $BC, CD \Rightarrow 2$ (even). D : edges $CD, DE, BD \Rightarrow 3$ (odd). E : edges $DE, EA \Rightarrow 2$ (even). Exactly two vertices (B and D) have odd degree, so an **Eulerian trail exists from B to D** (covering every street exactly once), but **no Eulerian circuit** exists (since $B \neq D$, the trail cannot return to its start without repeating an edge).

(b) The total length of all streets is $3 + 2 + 4 + 3 + 2 + 5 = 19$ km. Since exactly two vertices (B ,

D) are odd, the classic **Chinese postman** strategy is to find the **shortest path between the two odd vertices** and traverse it **twice** (once as part of the Eulerian trail, once more to return to the start), effectively "duplicating" that path so every vertex becomes even-degree and a circuit becomes possible. The shortest path from B to D is the direct edge $BD = 5$ km (compare: via C , $BC + CD = 2 + 4 = 6$ km, which is longer). So the minimum-distance route that covers every street and returns to B has length

$$19 + 5 = \boxed{24} \text{ km.}$$



Street network for Example 20: vertices B and D (pink) have odd degree 3; all others have even degree 2. An Eulerian trail exists from B to D , covering all 19 km of streets exactly once.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bài toán "người đưa thư Trung Hoa" (Chinese postman problem) hỏi: đi qua **mọi cạnh ít nhất một lần** và **quay lại điểm xuất phát**, với tổng quãng đường **ngắn nhất**. Nếu đồ thị có **đúng 2 đỉnh bậc lẻ**, chiến lược tối ưu là **nhân đôi** (đi lại) đúng **đường đi ngắn nhất** nối hai đỉnh lẻ đó — biến tất cả các đỉnh thành bậc chẵn, từ đó tồn tại chu trình Euler trên đồ thị đã "nhân đôi" một phần. Nếu có nhiều hơn 2 đỉnh bậc lẻ (ví dụ 4 đỉnh), phải **ghép cặp** các đỉnh lẻ sao cho tổng các đường ngắn nhất nối từng cặp là nhỏ nhất, rồi nhân đôi các đường đó.

Practice

Bài tập luyện tập

A surveyor stands 45 m from the base of a building and measures the angle of elevation to the top as 38° . Find the height of the building, correct to 3 s.f.

(A) 28.1 m

(C) 54.7 m

(B) 35.2 m

(D) 36.9 m

Lời giải chi tiết

$$h = 45 \tan 38^\circ \approx 35.2 \text{ m. (B).}$$

Bài tập luyện tập

From the top of a 25 m cliff, the angle of depression to a boat is 12° . Find the horizontal distance from the base of the cliff to the boat, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

The angle of depression equals the angle of elevation from the boat, so $d = \frac{25}{\tan 12^\circ} \approx 118$ m.

Bài tập luyện tập

A hiker walks 5 km on a bearing of 072° . Find how far east and how far north she has travelled, each correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

East = $5 \sin 72^\circ \approx 4.76$ km. North = $5 \cos 72^\circ \approx 1.55$ km.

Bài tập luyện tập

Point B is on a bearing of 118° from point A . Find the bearing of A from B .

- (A) 298° (C) 242°
(B) 062° (D) 118°

Lời giải chi tiết

Back bearing: since $118^\circ < 180^\circ$, add 180° : $118^\circ + 180^\circ = 298^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

A cyclist rides on a bearing of 030° for 12 km, then turns and rides on a bearing of 120° for 9 km. Find her distance from the starting point.

Lời giải chi tiết

The bearings differ by $120^\circ - 030^\circ = 90^\circ$, so the path is right-angled at the turning point:

$$d = \sqrt{12^2 + 9^2} = \sqrt{225} = \boxed{15 \text{ km}}.$$

Bài tập luyện tập

A flagpole casts a shadow 18 m long when the angle of elevation of the sun is 34° . Find the height of the flagpole, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$h = 18 \tan 34^\circ \approx 12.1 \text{ m}.$$

Bài tập luyện tập

A light aircraft's position relative to the airport is 120 km east and 160 km north. Find its distance from the airport, and its bearing from the airport, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

$$\text{distance} = \sqrt{120^2 + 160^2} = \sqrt{40\,000} = 200 \text{ km.}$$

$$\text{bearing} = \tan^{-1}\left(\frac{120}{160}\right) \approx 036.9^\circ.$$

Bài tập luyện tập

Convert $\frac{5\pi}{6}$ radians to degrees, and convert 150° to radians (exact value).

Lời giải chi tiết

$$\frac{5\pi}{6} \times \frac{180}{\pi} = 150^\circ. \text{ Conversely, } 150^\circ \times \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{6} \approx 2.618 \text{ rad.}$$

Bài tập luyện tập

A circle has radius 9 cm. Find the arc length subtended by an angle of 1.4 radians.

(A) 6.43 cm

(C) 25.2 cm

(B) 12.6 cm

(D) 0.156 cm

Lời giải chi tiết

$$s = r\theta = 9(1.4) = 12.6 \text{ cm. (B).}$$

Bài tập luyện tập

A circle has radius 12 cm. Find the area of the sector subtending an angle of 100° at the centre, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\text{Convert: } \theta = 100 \times \frac{\pi}{180} \approx 1.745 \text{ rad.}$$

$$A = \frac{1}{2}(12)^2(1.745) \approx 126 \text{ cm}^2 \text{ (3 s.f.).}$$

Bài tập luyện tập

A pendulum of length 0.9 m swings through an angle of 40° . Find the arc length traced by the tip of the pendulum, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\theta = 40 \times \frac{\pi}{180} \approx 0.6981 \text{ rad. } s = 0.9(0.6981) \approx 0.628 \text{ m.}$$

Bài tập luyện tập

A wheel of radius 20 cm rolls so that a point on its rim traces an arc of length 55 cm. Find the angle turned through, in radians and in degrees (correct to 1 d.p.).

Lời giải chi tiết

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{55}{20} = 2.75 \text{ rad} = 2.75 \times \frac{180}{\pi} \approx 157.6^\circ.$$

Bài tập luyện tập

A rotating garden sprinkler waters a sector of radius 6 m through an angle of 75° . Find (a) the area watered, and (b) the total perimeter of the watered sector, both correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\theta = 75 \times \frac{\pi}{180} \approx 1.309 \text{ rad}.$$

$$(a) A = \frac{1}{2}(6)^2(1.309) \approx 23.6 \text{ m}^2.$$

$$(b) \text{Arc length} = 6(1.309) \approx 7.85 \text{ m}; \text{perimeter} = 2(6) + 7.85 \approx 19.9 \text{ m}.$$

Bài tập luyện tập

A sector has radius 15 cm and total perimeter (two radii plus the arc) 42 cm. Find the angle of the sector, in radians, correct to 2 d.p.

Lời giải chi tiết

$$\text{Arc length } s = 42 - 2(15) = 12 \text{ cm}. \theta = \frac{s}{r} = \frac{12}{15} = 0.80 \text{ rad}.$$

Bài tập luyện tập

In triangle ABC , $A = 50^\circ$, $B = 65^\circ$, and $a = 10$ cm. Find side b , correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\text{By the sine rule: } b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{10 \sin 65^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 11.8 \text{ cm}.$$

Bài tập luyện tập

In triangle ABC , $a = 9$ cm, $b = 7$ cm, $A = 40^\circ$. Find angle B and angle C , correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{7 \sin 40^\circ}{9} \approx 0.4999 \Rightarrow B \approx 30.0^\circ. \text{ (Since } a > b, \text{ only the acute solution is valid — not the ambiguous case.)}$$

$$C = 180^\circ - 40^\circ - 30.0^\circ \approx 110.0^\circ.$$

Bài tập luyện tập

In triangle ABC , $a = 11$ cm, $b = 14$ cm, and the included angle $C = 48^\circ$. Find side c , correct to 3 s.f.

(A) 10.5 cm

(C) 13.9 cm

(B) 8.62 cm

(D) 121 cm

Lời giải chi tiết

$$c^2 = 11^2 + 14^2 - 2(11)(14) \cos 48^\circ \Rightarrow c \approx 10.5 \text{ cm. (A).}$$

Bài tập luyện tập

In triangle ABC , $a = 6$ cm, $b = 8$ cm, $c = 11$ cm. Find the largest angle of the triangle (the one opposite the longest side), correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

The largest angle is opposite the longest side $c = 11$:

$$\cos C = \frac{6^2 + 8^2 - 11^2}{2(6)(8)} = \frac{-21}{96} \approx -0.21875 \Rightarrow C \approx 102.6^\circ.$$

Bài tập luyện tập

In triangle ABC , $a = 13$ cm, $b = 9$ cm, and the included angle $C = 110^\circ$. Find the area of the triangle, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(13)(9) \sin 110^\circ \approx 55.0 \text{ cm}^2.$$

Bài tập luyện tập

In triangle ABC , $A = 30^\circ$, $a = 7$ cm, $b = 10$ cm. Show that this is the ambiguous case, and find both possible values of angle C , correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

Check: $b \sin A = 10 \sin 30^\circ = 5$. Since $5 < 7 < 10$, this is the ambiguous case (two triangles).

$$\sin B = \frac{10 \sin 30^\circ}{7} \approx 0.7143 \Rightarrow B_1 \approx 45.6^\circ, \quad B_2 = 180^\circ - 45.6^\circ = 134.4^\circ.$$

$$C_1 = 180^\circ - 30^\circ - 45.6^\circ \approx 104.4^\circ, \quad C_2 = 180^\circ - 30^\circ - 134.4^\circ \approx 15.6^\circ.$$

So $C \approx 104.4^\circ$ or $C \approx 15.6^\circ$.

Bài tập luyện tập

Two hikers leave the same camp. One walks on a bearing of 020° for 6 km; the other walks on a bearing of 100° for 8 km. Find the distance between the two hikers, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Angle between paths at camp: $100^\circ - 020^\circ = 80^\circ$.

$$d = \sqrt{6^2 + 8^2 - 2(6)(8) \cos 80^\circ} \approx 9.13 \text{ km.}$$

Bài tập luyện tập

A cuboid has length 9 m, width 6 m, and height 4 m. Find the length of its space diagonal, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$d = \sqrt{9^2 + 6^2 + 4^2} = \sqrt{133} \approx 11.5 \text{ m.}$$

Bài tập luyện tập

For the cuboid in the previous question ($9 \times 6 \times 4$ m), find the angle between the space diagonal and the base, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

$$\text{Base diagonal} = \sqrt{9^2 + 6^2} = \sqrt{117} \approx 10.82 \text{ m.}$$

$$\tan \phi = \frac{4}{10.82} \Rightarrow \phi \approx 20.3^\circ.$$

Bài tập luyện tập

A storage tank is a hemisphere of radius 4 m topped by a cone of the same radius and height 9 m. Find the total volume of the tank, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi(4)^2(9) \approx 150.8 \text{ m}^3. \quad V_{\text{hemi}} = \frac{2}{3}\pi(4)^3 \approx 134.0 \text{ m}^3.$$

$$V_{\text{total}} \approx 150.8 + 134.0 = 285 \text{ m}^3 \text{ (3 s.f.)}$$

Bài tập luyện tập

For the tank in the previous question (hemisphere radius 4 m + cone radius 4 m, height 9 m), find the total exterior surface area (curved cone surface + curved hemisphere surface, excluding the internal join), correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\text{Slant height of cone: } \ell = \sqrt{4^2 + 9^2} \approx 9.849 \text{ m.}$$

$$\text{CSA}_{\text{cone}} = \pi(4)(9.849) \approx 123.8 \text{ m}^2, \quad \text{CSA}_{\text{hemi}} = 2\pi(4)^2 \approx 100.5 \text{ m}^2.$$

$$\text{Total} \approx 123.8 + 100.5 = 224 \text{ m}^2 \text{ (3 s.f.)}$$

Bài tập luyện tập

A greenhouse roof has a symmetric triangular cross-section: base 4 m, ridge height 1.5 m. Find the angle between the two roof planes at the ridge, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

Slant side = $\sqrt{2^2 + 1.5^2} = 2.5$ m.

$$\cos(\text{apex}) = \frac{2.5^2 + 2.5^2 - 4^2}{2(2.5)(2.5)} = \frac{-3.5}{12.5} = -0.28 \Rightarrow \text{apex} \approx 106.3^\circ.$$

Bài tập luyện tập

A tent-shaped storage box is a triangular prism: cross-section base 2.4 m, height 1.8 m, and the box is 5 m long. Find (a) the volume of the box, and (b) the total surface area of the two triangular ends plus the two sloped rectangular sides (excluding the bottom), correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Cross-sectional area = $\frac{1}{2}(2.4)(1.8) = 2.16$ m².

(a) $V = 2.16 \times 5 = 10.8$ m³.

(b) Slant side of triangle = $\sqrt{1.2^2 + 1.8^2} \approx 2.163$ m. SA = $2(2.16) + 2(2.163)(5) \approx 4.32 + 21.63 \approx 26.0$ m².

Bài tập luyện tập

A cube has side length 6 cm. Find the angle between one edge of the cube and a space diagonal that shares the same vertex, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

The space diagonal has length $6\sqrt{3}$. In the right-angled triangle formed by the edge, the face diagonal, and the space diagonal, the angle ϕ between the edge and the space diagonal satisfies

$$\cos \phi = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi \approx 54.7^\circ.$$

Bài tập luyện tập

Find the equation (in the form $y = mx + c$) of the perpendicular bisector of $P(2, 3)$ and $Q(8, 7)$.

Lời giải chi tiết

Midpoint = $(5, 5)$. Slope of $PQ = \frac{7-3}{8-2} = \frac{2}{3}$, so the perpendicular slope is $-\frac{3}{2}$.

$$y - 5 = -\frac{3}{2}(x - 5) \Rightarrow \boxed{y = -1.5x + 12.5}.$$

Bài tập luyện tập

Three weather stations (sites) are at $S_1(0, 0)$, $S_2(10, 0)$, $S_3(5, 8)$ (km). Determine which station is closest to the point $Q(4, 3)$, i.e. in which station's Voronoi cell does Q lie?

Lời giải chi tiết

$$QS_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.00, \quad QS_2 = \sqrt{6^2 + 3^2} \approx 6.71, \quad QS_3 = \sqrt{1^2 + 5^2} \approx 5.10.$$

Q is closest to S_1 (by a narrow margin over S_3), so Q lies in the Voronoi cell of S_1 .

Bài tập luyện tập

Three sites are located at $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(2, 6)$ (km). Find the Voronoi vertex (circumcentre) of the triangle formed by these sites, and confirm it is equidistant from all three.

Lời giải chi tiết

Bisector of AB : $x = 4$. Bisector of AC : midpoint $(1, 3)$, slope $AC = 3$, perpendicular slope $= -\frac{1}{3}$: $y - 3 = -\frac{1}{3}(x - 1)$. At $x = 4$: $y = 3 - \frac{1}{3}(3) = 2$. Voronoi vertex $= (4, 2)$. Check: $\sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} \approx 4.47$ from all three sites (verify C : $\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \checkmark$).

Bài luyện nâng cao · HL

Three existing warehouses form a triangle. A new distribution hub must be placed as far as possible from all three warehouses, but must remain within the delivery region. Without calculating coordinates, explain which point of the Voronoi diagram of the three warehouse-sites gives the optimal location, and under what condition this point is actually achievable.

Lời giải chi tiết

The optimal location is the **Voronoi vertex** of the three sites (the circumcentre of the triangle they form), since it is the unique point equidistant from all three and it maximises the minimum distance to the nearest site among all points in the plane. This is achievable **only if** the Voronoi vertex lies inside the permitted delivery region; if it falls outside that region, the true optimal point (maximising minimum distance while staying inside the region) is instead found on the region's boundary.

Bài tập luyện tập

The boundary between two neighbouring cells in a Voronoi diagram is always a portion of which of the following?

- (A) The perpendicular bisector of the two sites (C) The line segment joining the two sites
(B) The angle bisector between the two sites (D) A circle centred at one of the two sites

Lời giải chi tiết

(A). The boundary is the set of points equidistant from the two neighbouring sites, which is exactly their perpendicular bisector.

Bài tập luyện tập

Two clinics are located at $C_1(0, 0)$ and $C_2(8, 0)$ (km). Using nearest-neighbour reasoning, determine which clinic a patient at $(3, 4)$ should be referred to (i.e. which clinic is closer), and by how much (correct to 3 s.f.).

Lời giải chi tiết

$$\text{dist to } C_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.00, \quad \text{dist to } C_2 = \sqrt{5^2 + 4^2} = \sqrt{41} \approx 6.40.$$

C_1 is closer, by approximately $6.40 - 5.00 = 1.40$ km.

Bài luyện nâng cao · HL

Find the magnitude of $\begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$ and of $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Lời giải chi tiết

$$\left| \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13. \quad \left| \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Find the unit vector in the direction of $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{4 + 9 + 36} = \sqrt{49} = 7.$$

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.286 \\ -0.429 \\ 0.857 \end{pmatrix}.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Let $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \end{pmatrix}$. Find $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$, and $|\mathbf{u} + \mathbf{v}|$.

Lời giải chi tiết

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u} - \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad |\mathbf{u} + \mathbf{v}| = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} \approx 4.47.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Points $A(2, 5)$ and $B(9, 1)$ have position vectors as given. Find $\overrightarrow{AB}$ and its magnitude, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 9-2 \\ 1-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}. |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{49+16} = \sqrt{65} \approx 8.06.$$

Bài luyện nâng cao · HL

A line passes through $C(1, 2, -3)$ and $D(4, -1, 3)$. Write down its vector equation, and determine whether the point $(7, -4, 9)$ lies on it.

Lời giải chi tiết

Direction vector $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$, so $\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$. From x : $1 + 3t = 7 \Rightarrow t = 2$. Check: $y = 2 - 3(2) = -4 \checkmark$; $z = -3 + 6(2) = 9 \checkmark$. The point **does** lie on the line (at $t = 2$).

Bài luyện nâng cao · HL

Find the point of intersection of $L_1 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $L_2 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lời giải chi tiết

$x : 1 + 2t = 8 - s \Rightarrow 2t + s = 7$. $y : 5 + t = -2 + 3s \Rightarrow t - 3s = -7$. Solving simultaneously: $t = 3s - 7$, so $2(3s - 7) + s = 7 \Rightarrow 7s = 21 \Rightarrow s = 3, t = 2$. Point: $(1 + 2(2), 5 + 2) = \boxed{(5, 7)}$ (check with L_2 : $(8 - 3, -2 + 9) = (5, 7) \checkmark$).

Bài luyện nâng cao · HL

Determine whether $L_1 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ and $L_2 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ intersect, are parallel, or are skew.

Lời giải chi tiết

Direction vectors are not parallel. From y : $1 = 3 + s \Rightarrow s = -2$. From z : $t = 1 - s = 3$. Check x : LHS = $2 + t = 5$, RHS = $2s = -4$. Since $5 \neq -4$, the system is inconsistent: the lines are skew.

Bài luyện nâng cao · HL

Find $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ for $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

(A) -5 (C) 21 (B) 5 (D) -21

Lời giải chi tiết

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 3(4) + (-2)(1) + 5(-3) = 12 - 2 - 15 = -5. \text{ (A)}$$

Bài luyện nâng cao · HL

Find the angle between $\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = 2 - 4 - 2 = -4. |\mathbf{p}| = 3, |\mathbf{q}| = 3.$$

$$\cos \theta = \frac{-4}{9} \approx -0.4444 \Rightarrow \theta \approx 116.4^\circ.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Show that $\mathbf{m} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ are perpendicular.

Lời giải chi tiết

$$\mathbf{m} \cdot \mathbf{n} = 6(1) + (-3)(4) + 2(3) = 6 - 12 + 6 = 0, \text{ so } \mathbf{m} \text{ and } \mathbf{n} \text{ are perpendicular.}$$

Bài luyện nâng cao · HL

Find $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ for $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Lời giải chi tiết

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} (-1)(-2) - (3)(4) \\ (3)(0) - (2)(-2) \\ (2)(4) - (-1)(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Points $A(1, 1, 1)$, $B(4, 2, 1)$, $C(2, 5, 3)$ (metres) mark a triangular plot. Find its area, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} (1)(2) - (0)(4) \\ (0)(1) - (3)(2) \\ (3)(4) - (1)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}.$$

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{4 + 36 + 121} = \sqrt{161} \approx 12.7. \text{ Area} \approx \frac{1}{2}(12.7) \approx 6.34 \text{ m}^2.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Using the plot from the previous question ($A(1, 1, 1)$, $B(4, 2, 1)$, $C(2, 5, 3)$), state a normal vector to the plane containing the plot.

Lời giải chi tiết

$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 11 \end{pmatrix}$ is perpendicular to both $\overrightarrow{AB}$ and $\overrightarrow{AC}$, so it is a valid normal vector to the plane.

Bài luyện nâng cao · HL

A graph has 5 vertices $V_1, \dots, V_5$ with edges $V_1V_2, V_1V_4, V_1V_5, V_2V_3, V_2V_5, V_3V_4, V_4V_5$. Write down the degree of each vertex.

Lời giải chi tiết

V_1 : edges to $V_2, V_4, V_5 \Rightarrow 3$. V_2 : edges to $V_1, V_3, V_5 \Rightarrow 3$. V_3 : edges to $V_2, V_4 \Rightarrow 2$. V_4 : edges to $V_1, V_3, V_5 \Rightarrow 3$. V_5 : edges to $V_1, V_2, V_4 \Rightarrow 3$.

Bài luyện nâng cao · HL

Using the graph from the previous question, the adjacency matrix M (order $V_1, \dots, V_5$) satisfies

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Find the number of walks of length 2 from V_2 to V_4 , and list them.

Lời giải chi tiết

$(M^2)_{V_2, V_4} = 3$. Since V_2 and V_4 are both adjacent to V_1, V_3 , and V_5 , the three walks are $V_2 \rightarrow V_1 \rightarrow V_4$, $V_2 \rightarrow V_3 \rightarrow V_4$, $V_2 \rightarrow V_5 \rightarrow V_4$.

Bài luyện nâng cao · HL

Six towns P, Q, R, S, T, U have candidate cable routes and costs: $PQ = 5, PR = 9, QR = 4, QS = 7, RS = 3, RT = 8, ST = 6, SU = 10, TU = 2$. Use Kruskal's algorithm to find the minimum spanning tree and its total cost.

Lời giải chi tiết

Sorted edges: $TU(2), RS(3), QR(4), PQ(5), ST(6), RT(8), QS(7), PR(9), SU(10)$. Add $TU(2)$: $\{T, U\}$. Add $RS(3)$: $\{R, S\}$. Add $QR(4)$: $\{Q, R, S\}$. Add $PQ(5)$: $\{P, Q, R, S\}$. Add $ST(6)$: connects $\{P, Q, R, S\}$ with $\{T, U\} \Rightarrow$ all six towns connected. (5 edges = $n - 1$, stop.) Total cost = $2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \boxed{20}$.

Bài luyện nâng cao · HL

Apply Prim's algorithm (starting at A) to the graph of Example 19 (towns A, B, C, D, E with $AB = 4, AC = 6, AD = 3, BC = 5, BE = 7, CD = 2, CE = 8, DE = 9$), and confirm it produces the same minimum total cost as Kruskal's algorithm.

Lời giải chi tiết

Start at A : cheapest edge is $AD(3)$; tree = $\{A, D\}$. Cheapest edge out: $CD(2)$; tree = $\{A, C, D\}$. Cheapest edge out: $AB(4)$ (cheaper than $CB = 5, CE = 8$); tree = $\{A, B, C, D\}$. Cheapest edge out: $BE(7)$ (cheaper than $CE = 8$); tree = $\{A, B, C, D, E\}$, complete. Total = $3 + 2 + 4 + 7 = \boxed{16}$ – the same total cost found by Kruskal's algorithm, confirming both algorithms find a minimum spanning tree.

Bài luyện nâng cao · HL

A graph has 4 vertices W, X, Y, Z with every pair joined by an edge (a complete graph K_4): WX, XY, YZ, ZW, WY, XZ . Determine whether an Eulerian circuit or Eulerian trail exists.

Lời giải chi tiết

Each vertex is joined to the other 3, so every vertex has degree 3 (odd). All 4 vertices are odd-degree, which is more than 2, so **neither** an Eulerian trail nor an Eulerian circuit exists.

Bài luyện nâng cao · HL

A road network on corners M, N, O, P has streets $MN = 4, NO = 3, OP = 5, PM = 2, MO = 6$ (km). Confirm that exactly two vertices have odd degree, then find the minimum distance for a route that covers every street at least once and returns to the starting point.

Lời giải chi tiết

Degrees: $M: MN, PM, MO \Rightarrow 3$ (odd). $N: MN, NO \Rightarrow 2$ (even). $O: NO, OP, MO \Rightarrow 3$ (odd). $P: OP, PM \Rightarrow 2$ (even). Exactly two odd vertices, M and O . Total street length = $4 + 3 + 5 + 2 + 6 = 20$ km. Shortest path M to O : direct edge $MO = 6$ (vs. via N : $4 + 3 = 7$; via P : $2 + 5 = 7$). Minimum route = $20 + 6 = \boxed{26}$ km.

Bài luyện nâng cao · HL

A network has 9 edges. Use the handshake lemma to find the sum of the degrees of all its vertices. If the network has 6 vertices, all of equal degree, find that common degree.

Lời giải chi tiết

Sum of degrees = $2 \times 9 = 18$. With 6 vertices of equal degree d : $6d = 18 \Rightarrow d = \boxed{3}$.

Mixed and Extended Problems**Ôn tập tổng hợp**

A ship sails from port P on a bearing of 048° for 32 km to point Q , then changes course and sails on a bearing of 130° for 21 km to point R .

- Find the interior angle $\angle PQR$ of the triangle formed.
- Use the cosine rule to find the distance PR , correct to 3 s.f.
- Find the area enclosed by triangle PQR , correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

(a) The bearing from Q back to P is $048^\circ + 180^\circ = 228^\circ$. The angle between this and the outgoing bearing 130° is

$$\angle PQR = 228^\circ - 130^\circ = \boxed{98^\circ}.$$

(b) By the cosine rule (SAS, with $PQ = 32$, $QR = 21$, included angle 98°):

$$PR = \sqrt{32^2 + 21^2 - 2(32)(21)\cos 98^\circ} \approx 40.6 \text{ km (3 s.f.)}.$$

(c) Area = $\frac{1}{2}(32)(21)\sin 98^\circ \approx 333 \text{ km}^2 \text{ (3 s.f.)}$.

Ôn tập tổng hợp

A grain silo is a cylinder of radius 4 m and height 10 m, topped with a cone of slant height 5 m (same radius).

- Find the vertical height of the conical roof.
- Find the total volume of the silo, correct to 3 s.f.
- Find the total exterior surface area (lateral cylinder + lateral cone, excluding the base and the internal join), correct to 3 s.f.
- Find the angle of elevation of the apex of the roof from a point on the ground 15 m from the centre of the silo's base, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

(a) $h_{\text{cone}} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3 \text{ m}$.

(b) $V_{\text{cyl}} = \pi(4)^2(10) \approx 502.7 \text{ m}^3$; $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi(4)^2(3) \approx 50.3 \text{ m}^3$.

$$V_{\text{total}} \approx 502.7 + 50.3 = 553 \text{ m}^3 \text{ (3 s.f.)}.$$

(c) $\text{CSA}_{\text{cyl}} = 2\pi(4)(10) \approx 251.3 \text{ m}^2$; $\text{CSA}_{\text{cone}} = \pi(4)(5) \approx 62.8 \text{ m}^2$.

$$\text{Total} \approx 251.3 + 62.8 = 314 \text{ m}^2 \text{ (3 s.f.)}.$$

(d) Total height = $10 + 3 = 13$ m.

$$\tan(\text{elevation}) = \frac{13}{15} \Rightarrow \text{elevation} \approx 40.9^\circ \text{ (1 d.p.)}.$$

Ôn tập tổng hợp

Three towns $X(2, 2)$, $Y(12, 2)$, $Z(7, 10)$ (km) lie inside a rectangular district with corners $(0, 0)$ and $(14, 12)$. A new waste facility must be placed as far as possible from all three towns, while remaining inside the district.

- (a) Find the Voronoi vertex (circumcentre) of triangle XYZ .
- (b) Find the distance from this point to each town, and confirm they are equal.
- (c) Explain why this point is (or is not) the optimal location for the facility.

Lời giải chi tiết

(a) Bisector of XY : midpoint $(7, 2)$, and since XY is horizontal, the bisector is the vertical line $x = 7$. Bisector of XZ : midpoint $(4.5, 6)$, slope of $XZ = \frac{10-2}{7-2} = 1.6$, perpendicular slope = -0.625 : $y - 6 = -0.625(x - 4.5)$. At $x = 7$: $y = 6 - 0.625(2.5) = 4.4375$. Voronoi vertex = $(7, 4.4375)$.

(b) $\sqrt{(7-2)^2 + (4.4375-2)^2} = \sqrt{25 + 5.941} \approx 5.5625$ km; by construction this is the same distance to Y and Z (equidistant, since the point lies on all three perpendicular bisectors).

(c) Since $(7, 4.4375)$ satisfies $0 \leq 7 \leq 14$ and $0 \leq 4.4375 \leq 12$, it lies **inside** the district, so it is achievable and is indeed the optimal location: the maximum possible "distance to the nearest town," ≈ 5.56 km.

Ôn tập tổng hợp · HL

Five warehouses have position vectors (km): $A(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(9, 5)$, $D(4, 8)$, $E(0, 5)$. Engineers have surveyed candidate cable routes AB , AE , BC , BE , CD , CE , DE (no others are possible due to terrain).

- (a) Using vector subtraction and magnitudes, find the length of each candidate route, correct to 3 d.p. where needed.
- (b) Use Kruskal's algorithm to find the minimum-length cable network connecting all five warehouses, and its total length.

Lời giải chi tiết

(a) Using $|\overrightarrow{PQ}| = |\mathbf{q} - \mathbf{p}|$:

$$AB = 6, \quad AE = 5, \quad BC = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{34} \approx 5.831, \quad BE = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} \approx 7.810,$$

$$CD = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5.831, \quad CE = 9, \quad DE = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

(b) Sorted: $AE(5)$, $DE(5)$, $BC(5.831)$, $CD(5.831)$, $AB(6)$, $BE(7.810)$, $CE(9)$. Add AE : $\{A, E\}$. Add DE : $\{A, D, E\}$. Add BC : $\{B, C\}$. Add CD : connects $\{B, C\}$ with $\{A, D, E\} \Rightarrow$ all five connected (4 edges, done).

$$\text{Total length} = 5 + 5 + 5.831 + 5.831 \approx \boxed{21.7 \text{ km (3 s.f.)}}.$$

Ôn tập tổng hợp · HL

A triangular solar panel is mounted with corners at position vectors $A(0, 0, 0)$, $B(5, 0, 2)$, $C(1, 6, 3)$ (metres).

(a) Find $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

(b) Find the area of the panel, correct to 3 s.f.

(c) Find the angle between the panel and the horizontal ground, correct to 1 d.p. (the angle between two planes equals the angle between their normal vectors; the ground's normal is vertical, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$).

Lời giải chi tiết

$$(a) \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} (0)(3) - (2)(6) \\ (2)(1) - (5)(3) \\ (5)(6) - (0)(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

$$(b) \left| \begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ 30 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{144 + 169 + 900} = \sqrt{1213} \approx 34.83. \text{ Area} \approx \frac{1}{2}(34.83) \approx 17.4 \text{ m}^2.$$

$$(c) \text{ Using the normal vector } \mathbf{n} = \begin{pmatrix} -12 \\ -13 \\ 30 \end{pmatrix} \text{ and vertical } \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}:$$

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{n}||\mathbf{k}|} = \frac{30}{34.83} \approx 0.8614 \Rightarrow \theta \approx 30.5^\circ.$$

The panel is tilted about 30.5° from horizontal.

Ôn tập tổng hợp

Bearings, sine/cosine rule, and 3D geometry combined: a lighthouse L is 52 m tall. From the top of the lighthouse, the angle of depression to a small boat B is 9° , on a bearing of 200° . A second boat C is observed from the same point at an angle of depression of 6° , on a bearing of 260° .

(a) Find the horizontal distance from the base of the lighthouse to each boat, correct to 3 s.f.

(b) Find the angle $\angle BLC'$ between the two boats' bearings, where L' is the base of the lighthouse (i.e. the angle between the two horizontal directions).

(c) Use the cosine rule to find the distance between the two boats, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$(a) d_B = \frac{52}{\tan 9^\circ} \approx 328 \text{ m. } d_C = \frac{52}{\tan 6^\circ} \approx 495 \text{ m.}$$

(b) The angle between the two bearings is $260^\circ - 200^\circ = 60^\circ$.

(c) By the cosine rule (SAS) in the horizontal plane, with sides 328 m and 495 m and included

angle 60° :

$$BC = \sqrt{328^2 + 495^2 - 2(328)(495) \cos 60^\circ} \approx 436 \text{ m (3 s.f.)}.$$

Statistics and Probability

Mục tiêu Unit: Phân biệt tổng thể (population) và mẫu (sample), dữ liệu rời rạc và liên tục, cùng các phương pháp chọn mẫu: ngẫu nhiên đơn giản, hệ thống, phân tầng, định ngạch, thuận tiện, và sai số chọn mẫu; trình bày dữ liệu bằng bảng tần số ghép nhóm, biểu đồ tần số (histogram), biểu đồ tần số tích lũy (đường cong ogive) để đọc trung vị/tứ phân vị, biểu đồ hộp và quy tắc $1,5 \times \text{IQR}$ để phát hiện giá trị ngoại lai; tính số trung bình, trung vị, mode, khoảng biến thiên, khoảng tứ phân vị, phương sai và độ lệch chuẩn (kể cả từ dữ liệu ghép nhóm), và ảnh hưởng của phép biến đổi tuyến tính $y = ax + b$; xác suất cơ bản qua biểu đồ Venn, quy tắc cộng, bảng không gian mẫu kết hợp; sơ đồ cây cho biến cố độc lập và phụ thuộc, xác suất có điều kiện và kiểm tra tính độc lập, suy luận kiểu Bayes qua sơ đồ cây; biến ngẫu nhiên rời rạc, kỳ vọng $E(X)$ và phương sai $\text{Var}(X)$; phân phối nhị thức và phân phối chuẩn (chuẩn hoá Z , dùng GDC thay vì bảng z in sẵn, quy tắc 68–95–99,7); hệ số tương quan hạng Spearman; cùng các chủ đề HL: phân phối Poisson, kiểm định giả thuyết (giả thuyết không/đối, mức ý nghĩa, p -value, sai lầm loại I và loại II), kiểm định Chi-bình phương (độ phù hợp và tính độc lập), kiểm định t (một mẫu, ghép cặp), và khoảng tin cậy cho trung bình tổng thể.

4.1 Sampling Techniques and Data Types

4.1.1 Population, sample, and data types

The **population** is the entire group about which information is wanted; a **sample** is a subset of the population actually observed, chosen because studying the whole population is usually too costly, slow, or (for destructive testing) impossible. A **parameter** is a numerical summary of the population (e.g. the population mean μ); a **statistic** is a numerical summary of a sample (e.g. the sample mean $\bar{x}$), used to **estimate** the corresponding parameter. Data is **discrete** if it can only take a countable set of separate values (e.g. number of siblings, shoe size in half-sizes), and **continuous** if it can take any value in an interval, limited only by the precision of measurement (e.g. height, time, mass).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tổng thể (population) là toàn bộ nhóm đối tượng cần nghiên cứu; **mẫu** (sample) là một tập con của tổng thể được chọn ra để quan sát thực tế, vì khảo sát toàn bộ tổng thể thường quá tốn kém, chậm, hoặc bất khả thi (ví dụ kiểm tra phá huỷ sản phẩm). **Tham số** (parameter, như μ) mô tả tổng thể; **thống kê mẫu** (statistic, như $\bar{x}$) mô tả mẫu và dùng để **ước lượng** tham số tương ứng. Dữ liệu **rời rạc** chỉ nhận các giá trị đếm được, tách biệt nhau (số con trong gia đình); dữ liệu **liên tục** có thể nhận bất kỳ giá trị nào trong một khoảng (chiều cao, thời gian).

4.1.2 Simple random and systematic sampling

Simple random sampling (SRS): every member of the population has an equal chance of being selected, typically using a random number generator or table applied to a numbered list of the whole population. **Systematic sampling:** order the population (size N) in a list, choose a sampling interval $k = N/n$ (rounded to a whole number) for a desired sample size n , pick a random starting point between 1 and k , then select every k -th member thereafter.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Chọn mẫu ngẫu nhiên đơn giản (SRS): mọi thành viên của tổng thể có **cơ hội được chọn bằng nhau**, thường dùng máy tạo số ngẫu nhiên áp dụng lên danh sách đã đánh số toàn bộ tổng thể. **Chọn mẫu hệ thống:** đánh số tổng thể (cỡ N), chọn khoảng cách lấy mẫu $k = N/n$, chọn ngẫu nhiên một điểm khởi đầu trong khoảng 1 đến k , rồi lấy **đều đặn** cứ cách k phần tử lại chọn một phần tử.

Ví dụ mẫu 1 • Systematic sampling interval

A company has 840 employees on its payroll system, numbered 1 to 840. A systematic sample of 40 employees is needed for a workplace satisfaction survey. Find the sampling interval, and list the first three employee numbers selected if the random starting point is 13.

$$k = \frac{N}{n} = \frac{840}{40} = 21.$$

Starting at 13, the first three selected employee numbers are 13, $13 + 21 = 34$, and $34 + 21 = 55$ (and so on, up to $13 + 21(39) = 832$, giving exactly 40 employees).

4.1.3 Stratified, quota, and convenience sampling

Stratified sampling: divide the population into non-overlapping **strata** (subgroups sharing a characteristic, e.g. year group, gender), then take a simple random sample from **each** stratum, with the sample size from stratum i proportional to that stratum's share of the population: $n_i = \frac{N_i}{N} \times n$. **Quota sampling:** the interviewer is given quotas to fill for each subgroup (e.g. 20 men, 20 women) but selects individuals **non-randomly** within each quota (e.g. by approaching passers-by) – quicker than stratified sampling but not free of selection bias. **Convenience sampling:** choosing whichever subjects are easiest to reach (e.g. the first 30 people passing by); this is the **least reliable** method, since it has no random element at all and typically over-represents whichever group happens to be most accessible.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Chọn mẫu phân tầng (stratified): chia tổng thể thành các **tầng** (nhóm con) không chồng lấn, rồi lấy mẫu ngẫu nhiên đơn giản từ **mỗi tầng**, với cỡ mẫu của tầng i tỉ lệ thuận với tỉ trọng của tầng đó: $n_i = \frac{N_i}{N} \times n$. **Chọn mẫu định ngạch (quota):** người khảo sát được giao chỉ tiêu số lượng cho từng nhóm con nhưng **tự chọn** người trong mỗi nhóm (không ngẫu nhiên) – nhanh hơn phân tầng nhưng vẫn có thể thiên lệch. **Chọn mẫu thuận tiện (convenience):** chọn bất kỳ ai dễ tiếp cận nhất – đây là phương pháp **kém tin cậy nhất** vì hoàn toàn không có yếu tố ngẫu nhiên.

Ví dụ mẫu 2 • Stratified sampling allocation

A school has 900 students: 400 in Year 12 and 500 in Year 13. A stratified sample of 90 students is required for a survey on university applications, with representation proportional to year-group size. Find the number of students to be sampled from each year group.

$$n_{12} = \frac{400}{900} \times 90 = 40, \quad n_{13} = \frac{500}{900} \times 90 = 50.$$

Check: $40 + 50 = 90$ ✓, matching the required total sample size.

4.1.4 Sampling bias and reliability

Comparing the Sampling Methods

Simple random and systematic sampling give every population member a known (usually equal) chance of selection, making them the most statistically reliable, but they require a complete numbered list of the population (a **sampling frame**), which is not always available. Stratified sampling improves on plain random sampling when subgroups differ meaningfully, ensuring every subgroup is fairly represented. Quota and convenience sampling are faster and cheaper but introduce **sampling bias**: a systematic tendency for the sample to misrepresent the population, because selection is not random (e.g. interviewing only shoppers at a mall misses people who do not shop there). A **non-response** bias can also arise even in a properly randomised sample, if the people who decline to respond differ systematically from those who do.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

So sánh các phương pháp: chọn mẫu ngẫu nhiên đơn giản và hệ thống **đáng tin cậy nhất** về mặt thống kê (mọi phần tử có xác suất được chọn đã biết) nhưng cần một **danh sách đầy đủ** của tổng thể (sampling frame), điều không phải lúc nào cũng có sẵn. Chọn mẫu phân tầng tốt hơn khi các nhóm con khác biệt đáng kể. Chọn mẫu định ngạch và thuận tiện nhanh và rẻ hơn nhưng gây ra **sai số chọn mẫu** (sampling bias) — xu hướng hệ thống khiến mẫu không đại diện đúng cho tổng thể, vì việc chọn không ngẫu nhiên. **Sai số không phản hồi** (non-response bias) có thể xảy ra ngay cả với mẫu chọn ngẫu nhiên đúng cách, nếu những người từ chối trả lời khác biệt hệ thống so với người trả lời.

Every remaining technique in this chapter — from a simple mean to a confidence interval or a hypothesis test — is only as trustworthy as the **sample** it is calculated from. A perfectly executed calculation on a biased sample still produces a misleading conclusion about the population; this is why every later section, in describing a scenario, is implicitly assuming the underlying sample was collected in a reasonably unbiased way (typically simple random, systematic, or stratified sampling).

4.2 Presenting Data: Frequency Tables, Histograms, and Cumulative Frequency

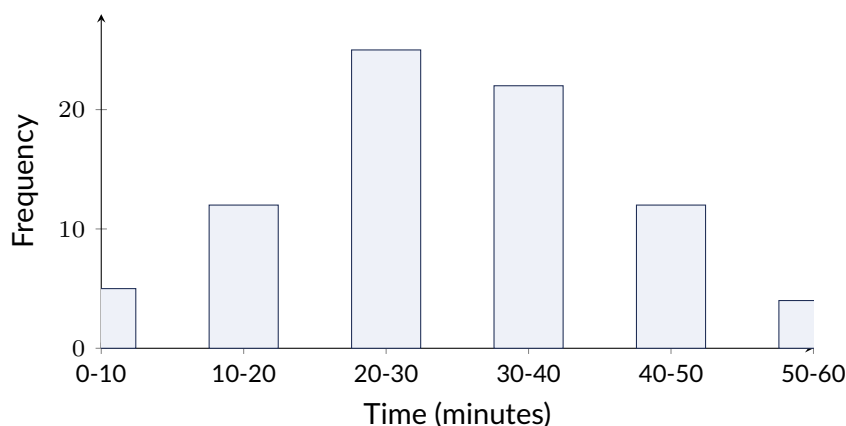
4.2.1 Grouped frequency tables and histograms

For continuous (or wide-ranging discrete) data, values are grouped into **classes** of equal width, each with a **frequency** (count of data values in that class). The **mid-interval value** of a class is used to represent every value in that class when estimating summary statistics (e.g. the class $20 \leq t < 30$ has mid-interval value 25). A **histogram** displays a grouped frequency distribution with **no gaps** between bars (unlike a bar chart for categorical data), since the horizontal axis represents a continuous variable; for classes of **equal width**, bar height is simply the frequency.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với dữ liệu liên tục (hoặc rời rạc trải rộng), giá trị được nhóm vào các **lớp** (class) có độ rộng bằng nhau, mỗi lớp có một **tần số**. **Giá trị trung điểm** (mid-interval value) của mỗi lớp đại diện cho mọi giá trị trong lớp đó khi ước lượng các đại lượng thống kê. **Histogram** không có khoảng trống giữa các cột (khác với biểu đồ cột cho dữ liệu định danh), vì trục hoành biểu diễn một biến **liên tục**; khi các lớp có độ rộng **bằng nhau**, chiều cao cột chính là tần số.



Histogram of the completion times (minutes) of 80 runners in a road race, grouped into six equal-width classes: frequencies 5, 12, 25, 22, 12, 4 (total 80). The modal class is $20 \leq t < 30$.

4.2.2 Cumulative frequency graphs (ogives)

The **cumulative frequency** up to the upper boundary of a class is the running total of frequencies for that class and all classes below it. Plotting cumulative frequency (vertical axis) against the **upper class boundary** (horizontal axis) and joining consecutive points produces a **cumulative frequency graph** (ogive). For a data set of size n , the **median** is read at cumulative frequency $\frac{n}{2}$, the **lower quartile** Q_1 at $\frac{n}{4}$, and the **upper quartile** Q_3 at $\frac{3n}{4}$; within a class, values are estimated by **linear interpolation** between the two cumulative-frequency points bounding that class.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tần số tích lũy (cumulative frequency) đến **cận trên** của một lớp là tổng dồn tần số của lớp đó và mọi lớp phía dưới. Vẽ tần số tích lũy theo cận trên của lớp và nối các điểm lại cho ra **đường cong tần số tích lũy** (ogive). Với cỡ dữ liệu n : **trung vị** đọc tại tần số tích lũy $\frac{n}{2}$, **tứ phân vị dưới** Q_1 tại $\frac{n}{4}$, **tứ phân vị trên** Q_3 tại $\frac{3n}{4}$ — dùng **nội suy tuyến tính** trong lớp chứa vị trí đó.

Ví dụ mẫu 3 • Reading median and quartiles from cumulative frequency

Using the runners' completion-time data above (frequencies 5, 12, 25, 22, 12, 4 in classes of width 10 starting at 0, total $n = 80$), estimate the median, Q_1 , and Q_3 , correct to 1 d.p. Cumulative frequencies at the upper boundary of each class: 5, 17, 42, 64, 76, 80 (at $t = 10, 20, 30, 40, 50, 60$).

Median (position $\frac{80}{2} = 40$): this falls in the class $20 \leq t < 30$ (cumulative frequency rises from 17 to 42 across this class):

$$\text{median} \approx 20 + \frac{40 - 17}{42 - 17} \times 10 = 20 + \frac{23}{25} \times 10 = 20 + 9.2 = 29.2 \text{ min.}$$

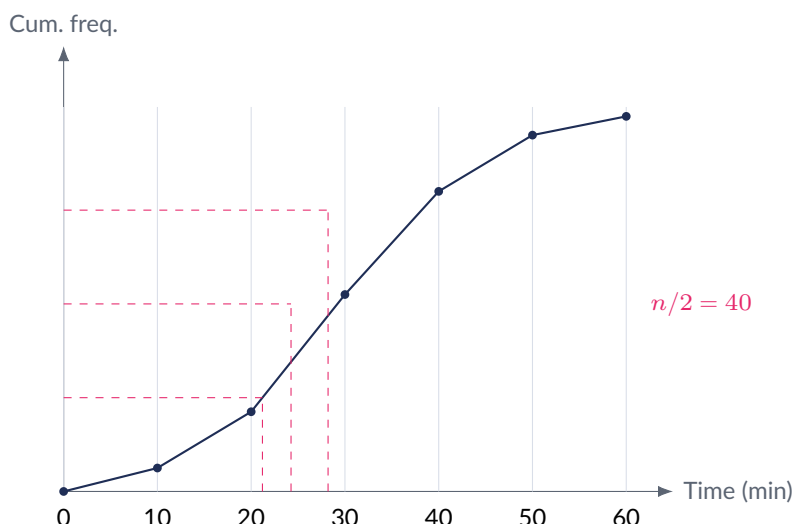
Q_1 (position $\frac{80}{4} = 20$): also in the class $20 \leq t < 30$:

$$Q_1 \approx 20 + \frac{20 - 17}{42 - 17} \times 10 = 20 + \frac{3}{25} \times 10 = 20 + 1.2 = 21.2 \text{ min.}$$

Q_3 (position $\frac{3(80)}{4} = 60$): in the class $30 \leq t < 40$ (cumulative frequency rises from 42 to 64):

$$Q_3 \approx 30 + \frac{60 - 42}{64 - 42} \times 10 = 30 + \frac{18}{22} \times 10 \approx 30 + 8.2 = 38.2 \text{ min.}$$

So $\text{IQR} = Q_3 - Q_1 \approx 38.2 - 21.2 = 17.0$ minutes.



Cumulative frequency graph (ogive) for the runners' completion times. Reading across from $\frac{n}{4} = 20$, $\frac{n}{2} = 40$, and $\frac{3n}{4} = 60$ gives $Q_1 \approx 21.2$, median ≈ 29.2 , and $Q_3 \approx 38.2$ minutes.

(!) Lỗi thường gặp: Khi ước lượng trung bình từ bảng tần số ghép nhóm, luôn dùng **giá trị trung điểm** (mid-interval value) của mỗi lớp — **không** dùng cận dưới hay cận trên của lớp. Ngoài ra, khi đọc trung vị/tứ phân vị từ đồ thị tần số tích lũy, vị trí cần tìm là $\frac{n}{4}$, $\frac{n}{2}$, $\frac{3n}{4}$ theo **tần số tích lũy** (trục dọc), rồi mới đọc sang giá trị dữ liệu tương ứng (trục ngang) — nhầm lẫn hai trục là lỗi rất phổ biến.

4.2.3 Box-and-whisker plots and outliers

The **five-number summary** of a data set is (minimum, Q_1 , median, Q_3 , maximum), displayed graphically as a **box-and-whisker plot**: a box from Q_1 to Q_3 (with a line at the median), and whiskers extending to the minimum and maximum **non-outlier** values. The **interquartile range** is $IQR = Q_3 - Q_1$. A data value is classified as an **outlier** if it lies

$$\text{below } Q_1 - 1.5 \times IQR \quad \text{or} \quad \text{above } Q_3 + 1.5 \times IQR;$$

outliers are plotted as separate points, and the whisker is drawn only as far as the most extreme **non-outlier** value.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bảng tóm tắt năm số (min, Q_1 , trung vị, Q_3 , max) được vẽ thành **biểu đồ hộp** (box-and-whisker plot): hộp từ Q_1 đến Q_3 (có vạch trung vị bên trong), và hai râu (whisker) kéo đến giá trị nhỏ nhất/lớn nhất **không phải ngoại lai**. Một giá trị được coi là **ngoại lai** (outlier) nếu nó nằm ngoài khoảng $[Q_1 - 1.5 \times IQR, Q_3 + 1.5 \times IQR]$ — khi đó, giá trị ngoại lai được vẽ thành một **điểm riêng biệt**, và râu chỉ kéo dài đến giá trị hợp lệ gần nhất.

Ví dụ mẫu 4 • Five-number summary and the 1.5 IQR outlier rule

Thirteen students' project scores (out of 60) are, in order: 12, 15, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 27, 29, 31, 33, 52. Find the five-number summary, and determine whether 52 is an outlier.

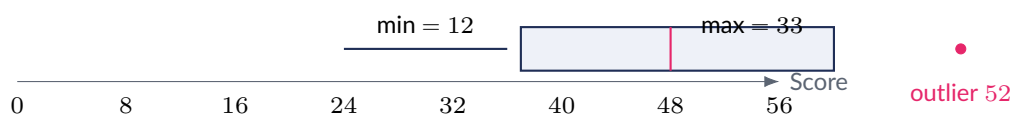
With $n = 13$ (odd), the median is the 7th value: median = 24. The lower half (first 6 values,

12, 15, 18, 19, 21, 22) has $Q_1 = \text{average of the 3rd and 4th values} = \frac{18 + 19}{2} = 18.5$. The upper half (last 6 values, 25, 27, 29, 31, 33, 52) has $Q_3 = \frac{29 + 31}{2} = 30$.

$$\text{IQR} = 30 - 18.5 = 11.5.$$

$$\text{Upper fence} = 30 + 1.5(11.5) = 30 + 17.25 = 47.25.$$

Since $52 > 47.25$, the value 52 is an outlier. The five-number summary (excluding the outlier from the whisker) is Min = 12, $Q_1 = 18.5$, Median = 24, $Q_3 = 30$, and the whisker extends only to the largest non-outlier value, 33; the point 52 is plotted separately.



Box-and-whisker plot for Example 4: box from $Q_1 = 18.5$ to $Q_3 = 30$ (median 24 marked in pink), whiskers to the extreme non-outlier values 12 and 33, and the outlier 52 plotted as a separate point beyond the upper fence 47.25.

A box-and-whisker plot also reveals **skewness** at a glance: if the whisker (and half-box) above the median is noticeably longer than the one below, the data is **right-skewed** (a "tail" of higher, more spread-out values, exactly as in Example 4); if the lower whisker/half-box is longer, the data is **left-skewed**; and if both sides are roughly equal in length, the data is approximately **symmetric**. This visual check is a quick companion to comparing the mean and median directly (a mean noticeably above the median usually signals right skew, and vice versa).

4.3 Measures of Central Tendency and Dispersion

4.3.1 Mean, median, and mode

For raw data $x_1, \dots, x_n$: **mean** $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$; **median** is the middle value when data is ordered (average of the two middle values if n is even); **mode** is the most frequently occurring value. For data in a frequency table, $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$; for **grouped** data, x is replaced by the **mid-interval value** of each class, and the class with the highest frequency is called the **modal class**. In practice, these statistics are usually obtained directly from a GDC's one-variable statistics menu once the data (or frequency table) has been entered.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với dữ liệu thô: **trung bình** $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$; **trung vị** là giá trị ở giữa khi sắp xếp thứ tự; **mode** là giá trị xuất hiện nhiều nhất. Với bảng tần số: $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$; với dữ liệu **ghép nhóm**, thay x bằng **giá trị trung điểm** của mỗi lớp, và lớp có tần số cao nhất gọi là **lớp mode** (modal class). Trên thực tế, các đại lượng này thường được lấy trực tiếp từ menu thống kê một biến của máy tính GDC.

Ví dụ mẫu 5 • Estimating the mean from grouped data

The ages of 50 members of a community club are grouped as follows: $10 \leq a < 20$: 6; $20 \leq a < 30$: 14; $30 \leq a < 40$: 18; $40 \leq a < 50$: 8; $50 \leq a < 60$: 4. Estimate the mean age, and state

the modal class.

Mid-interval values are 15, 25, 35, 45, 55.

$$\sum fx = 6(15) + 14(25) + 18(35) + 8(45) + 4(55) = 90 + 350 + 630 + 360 + 220 = 1650.$$

$$\bar{x} \approx \frac{1650}{50} = 33.0 \text{ years.}$$

The modal class (highest frequency, 18) is $30 \leq a < 40$.

Mean vs Median: Which to Report?

The mean uses every data value and is the natural choice for further calculation (e.g. combining with other statistics), but it is **strongly affected** by extreme values or a skewed distribution — a handful of very high incomes can pull a mean well above the "typical" value. The median depends only on the **position** of values, not their exact size, so it is **resistant** to outliers and skew, and is generally the better single summary for strongly skewed data (e.g. household income, house prices). When a distribution is roughly symmetric, mean and median are close together and either is a reasonable summary; when they differ noticeably, this itself is a signal that the distribution is skewed.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trung bình dùng **mọi giá trị** dữ liệu và thuận tiện cho các tính toán tiếp theo, nhưng **rất nhạy** với giá trị cực đoan hoặc phân phối lệch — một vài thu nhập cực cao có thể kéo trung bình lên cao hơn hẳn mức "điển hình". Trung vị chỉ phụ thuộc **vị trí** của giá trị, không phụ thuộc độ lớn cụ thể, nên **ít bị ảnh hưởng** bởi ngoại lai và độ lệch — thường là đại diện tốt hơn cho dữ liệu lệch mạnh (thu nhập hộ gia đình, giá nhà). Khi trung bình và trung vị **khác nhau đáng kể**, đó chính là dấu hiệu cho thấy phân phối bị lệch.

4.3.2 Range, interquartile range, variance, and standard deviation

Range = maximum – minimum; **IQR** = $Q_3 - Q_1$ (less sensitive to outliers than the range). The **population variance** is the mean squared deviation from the mean,

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2,$$

and the **standard deviation** is $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. Both formulas above are algebraically equivalent; the second (using $\sum x^2$) is usually faster by hand, while a GDC's one-variable statistics menu computes σ directly from raw or grouped data.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khoảng biến thiên = giá trị lớn nhất – nhỏ nhất; **IQR** = $Q_3 - Q_1$ (ít bị ảnh hưởng bởi ngoại lai hơn khoảng biến thiên). **Phương sai tổng thể** là trung bình bình phương độ lệch so với trung bình: $\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2$ (hai công thức tương đương về đại số, công thức thứ hai thường nhanh hơn khi tính tay); **độ lệch chuẩn** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$.

Ví dụ mẫu 6 • Variance and standard deviation by hand

Find the population variance and standard deviation of the data set 4, 7, 9, 10, 15.

$$\text{Mean: } \bar{x} = \frac{4 + 7 + 9 + 10 + 15}{5} = \frac{45}{5} = 9.$$

Method 1 (deviations): deviations from the mean are $-5, -2, 0, 1, 6$; squared, $25, 4, 0, 1, 36$, summing to 66.

$$\sigma^2 = \frac{66}{5} = 13.2, \quad \sigma = \sqrt{13.2} \approx 3.63.$$

Method 2 (check, using $\sum x^2$): $\sum x^2 = 16 + 49 + 81 + 100 + 225 = 471$.

$$\sigma^2 = \frac{471}{5} - 9^2 = 94.2 - 81 = 13.2 \checkmark$$

Both methods agree: $\sigma^2 = 13.2, \sigma \approx 3.63$.

4.3.3 Linear transformations of data

If every value in a data set is transformed by $y = ax + b$ (a linear rescaling), the new mean and standard deviation are

$$\bar{y} = a\bar{x} + b, \quad \sigma_y = |a| \sigma_x \quad (\text{so } \sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2).$$

The additive constant b shifts the mean but has **no effect at all** on spread (every value shifts by the same amount, so distances between values are unchanged); the multiplicative constant a scales **both** the mean and the standard deviation (but the **variance** scales by a^2 , since it involves squared deviations).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nếu mọi giá trị được biến đổi theo $y = ax + b$: trung bình mới $\bar{y} = a\bar{x} + b$, độ lệch chuẩn mới $\sigma_y = |a| \sigma_x$. Hằng số cộng b chỉ **dịch chuyển trung bình, không ảnh hưởng** đến độ lệch chuẩn (mọi giá trị dịch cùng một lượng nên khoảng cách giữa chúng không đổi); hằng số nhân a làm thay đổi **cả hai**, nhưng lưu ý **phương sai** nhân với a^2 (vì phương sai liên quan đến bình phương độ lệch), còn độ lệch chuẩn nhân với $|a|$.

Ví dụ mẫu 7 • Effect of a linear rescaling

A set of test scores (out of 100) has mean 60 and standard deviation 8. The teacher rescales every score using $y = 1.5x - 10$ to fit a different marking scale. Find the new mean and new standard deviation.

$$\bar{y} = 1.5(60) - 10 = 90 - 10 = 80. \quad \sigma_y = |1.5|(8) = 12.$$

(!) Lỗi thường gặp: Với phép biến đổi $y = ax + b$: hằng số b **tuyệt đối không** ảnh hưởng đến độ lệch chuẩn hay phương sai — chỉ dịch chuyển trung bình. Lỗi phổ biến nhất là cộng luôn b vào độ lệch chuẩn mới, hoặc nhân phương sai với a thay vì a^2 (độ lệch chuẩn mới nhân với $|a|$, nhưng **phương sai** phải nhân với a^2 vì phương sai chứa bình phương độ lệch).

4.4 Probability Fundamentals

4.4.1 Sample space, events, and theoretical versus relative-frequency probability

The **sample space** S is the set of all possible outcomes of an experiment; an **event** A is any subset of S . The **theoretical probability** of A (when all outcomes are equally likely) is $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$. The **relative frequency** (experimental) probability from repeated trials is $\frac{\text{number of times } A \text{ occurs}}{\text{number of trials}}$; as the number of trials increases, the relative frequency tends to settle close to the theoretical probability (the **law of large numbers**). The **complement** A' of event A consists of all outcomes **not** in A , and satisfies $P(A') = 1 - P(A)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Không gian mẫu S là tập hợp tất cả kết quả có thể xảy ra; một **biến cố** A là một tập con của S . **Xác suất lý thuyết** (khi mọi kết quả đồng khả năng) là $P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$. **Xác suất thực nghiệm** (tần suất tương đối) từ các lần thử lặp lại tiến gần đến xác suất lý thuyết khi số lần thử tăng lên (**luật số lớn**). **Biến cố đối** A' gồm mọi kết quả **không thuộc** A : $P(A') = 1 - P(A)$.

4.4.2 Mutually exclusive events, Venn diagrams, and the addition rule

Two events are **mutually exclusive** if they cannot both occur, i.e. $P(A \cap B) = 0$. For any two events, the **addition rule** is

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B),$$

which corrects for double-counting outcomes in the overlap $A \cap B$; for mutually exclusive events this reduces to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. A **Venn diagram** represents events as overlapping regions inside a rectangle (the sample space), making it straightforward to read off probabilities for unions, intersections, and complements directly from the diagram.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai biến cố **xung khắc** (mutually exclusive) không thể cùng xảy ra: $P(A \cap B) = 0$. **Quy tắc cộng** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ trừ đi phần giao để tránh **đếm trùng**; với biến cố xung khắc, công thức rút gọn thành $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. **Biểu đồ Venn** biểu diễn các biến cố bằng các vùng chồng lấn trong một hình chữ nhật (không gian mẫu), giúp đọc trực tiếp xác suất hợp/giao/biến cố đối.

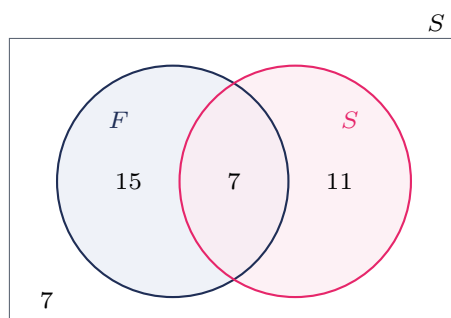
Ví dụ mẫu 8 • Venn diagram and the addition rule

In a class of 40 students, 22 study French, 18 study Spanish, and 7 study both. Find the probability that a randomly chosen student studies French or Spanish, and the probability that a student studies neither.

$$P(F \cup S) = P(F) + P(S) - P(F \cap S) = \frac{22}{40} + \frac{18}{40} - \frac{7}{40} = \frac{33}{40} = 0.825.$$

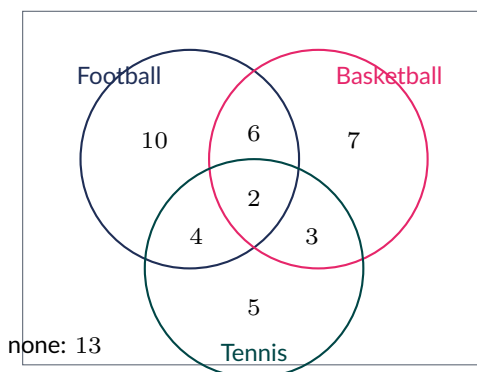
$$P(\text{neither}) = 1 - P(F \cup S) = 1 - 0.825 = 0.175.$$

Check by Venn regions: French only = $22 - 7 = 15$; Spanish only = $18 - 7 = 11$; both = 7; neither = $40 - (15 + 11 + 7) = 7$, giving $P(\text{neither}) = \frac{7}{40} = 0.175 \checkmark$.



Venn diagram for Example 8: French only = 15, Spanish only = 11, both = 7, neither = 7 (bottom-left corner, outside both circles) – total $15 + 11 + 7 + 7 = 40$ ✓.

For **three** events, the same idea extends to a three-circle Venn diagram with up to 8 regions. Suppose in a survey of 50 students, the number playing *only* football is 10, *only* basketball is 7, *only* tennis is 5, football and basketball only (not tennis) is 6, football and tennis only is 4, basketball and tennis only is 3, all three sports is 2, and none of the three is 13 (check: $10 + 7 + 5 + 6 + 4 + 3 + 2 + 13 = 50$ ✓). Then $P(\text{plays at least one sport}) = \frac{50 - 13}{50} = \frac{37}{50} = 0.74$, and $P(\text{plays exactly one sport}) = \frac{10 + 7 + 5}{50} = \frac{22}{50} = 0.44$ – reading each answer directly from the appropriate combination of regions, exactly as with a two-set Venn diagram. Similarly, $P(\text{plays exactly two sports}) = \frac{6 + 4 + 3}{50} = \frac{13}{50} = 0.26$ (the three “double-overlap-only” regions), and $P(\text{plays all three}) = \frac{2}{50} = 0.04$ (the central region) – every one of the 8 regions corresponds to a distinct, mutually exclusive combination of sports, so the probabilities of any such combinations can always be read directly off the diagram without further calculation.



A three-set Venn diagram: 8 regions in total (seven inside the circles plus “none” outside), with region counts summing to the total of 50 students surveyed.

4.4.3 Two-way tables and combined sample spaces

A **two-way table** (or combined sample space table) lists outcomes of two combined trials (e.g. two dice, or a categorical survey cross-tabulated by two variables), making it straightforward to count favourable outcomes directly for probabilities, unions, and (as seen in Section 5) conditional probabilities.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bảng hai chiều (two-way table) liệt kê kết quả của hai phép thử kết hợp (như tung hai xúc xắc, hoặc khảo sát chéo hai biến định danh), giúp **đếm trực tiếp** số kết quả thuận lợi để tính xác suất, hợp, và (ở Section 5) xác suất có điều kiện.

Ví dụ mẫu 9 • Combined sample space: two dice

Two fair six-sided dice are rolled, and their scores are added. Using the 36-outcome combined sample space table, find $P(\text{sum} = 7)$ and $P(\text{sum} > 9)$.

Sum = 7 occurs for (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) – exactly 6 outcomes out of 36:

$$P(\text{sum} = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.167.$$

Sum > 9 means sum = 10, 11, 12: sum 10 has 3 outcomes {(4, 6), (5, 5), (6, 4)}, sum 11 has 2 outcomes, sum 12 has 1 outcome, totalling 6 outcomes:

$$P(\text{sum} > 9) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 0.167.$$

4.5 Tree Diagrams, Conditional and Independent Events

4.5.1 Independent events and the multiplication rule

Two events A and B are **independent** if the occurrence of one does not affect the probability of the other. For independent events, the **multiplication rule** gives

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$

This extends to any number of mutually independent events: multiply all their individual probabilities together.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai biến cố **độc lập** khi việc xảy ra biến cố này không ảnh hưởng đến xác suất biến cố kia. Với biến cố độc lập, **quy tắc nhân**: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ – mở rộng cho nhiều biến cố độc lập bằng cách nhân tất cả xác suất riêng lẻ lại với nhau.

Ví dụ mẫu 10 • The multiplication rule for independent events

Two independent quality-control machines inspect items on a production line. Machine 1 detects a genuine fault with probability 0.9; Machine 2 detects it with probability 0.85 (independently of Machine 1). Find the probability that **both** machines detect a given fault, and the probability that **at least one** does.

$$P(\text{both detect}) = 0.9 \times 0.85 = 0.765.$$

$$P(\text{neither detects}) = 0.1 \times 0.15 = 0.015 \quad \Rightarrow \quad P(\text{at least one detects}) = 1 - 0.015 = 0.985.$$

4.5.2 Tree diagrams for sequential trials (with and without replacement)

A **tree diagram** displays the possible outcomes of a sequence of trials as branches, with the probability of each branch written on it; multiplying probabilities **along** a branch path gives the probability of that particular sequence of outcomes, and adding the probabilities of all paths leading to a given final outcome gives its overall probability. When trials are performed **without replacement**, the probabilities on later branches change to reflect the reduced (and altered) pool of remaining outcomes; **with replacement**, the branch probabilities stay identical at every stage (this is the independent case above).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Sơ đồ cây (tree diagram) biểu diễn các kết quả có thể của một chuỗi phép thử bằng các nhánh, mỗi nhánh ghi xác suất tương ứng; **nhân** xác suất **đọc theo** một đường đi cho ra xác suất của chuỗi kết quả đó, rồi **cộng** xác suất của mọi đường dẫn đến cùng một kết quả cuối. Khi lấy **không hoàn lại** (without replacement), xác suất ở các nhánh sau **thay đổi** vì tổng số phần tử còn lại đã khác; khi **có hoàn lại**, xác suất nhánh giữ nguyên ở mọi giai đoạn (chính là trường hợp độc lập).

Ví dụ mẫu 11 · Tree diagram: drawing without replacement

A bag contains 5 red and 3 blue balls. Two balls are drawn at random without replacement. Find $P(\text{both red})$, $P(\text{exactly one red})$, and $P(\text{at least one blue})$.

$$P(\text{both red}) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14} \approx 0.357.$$

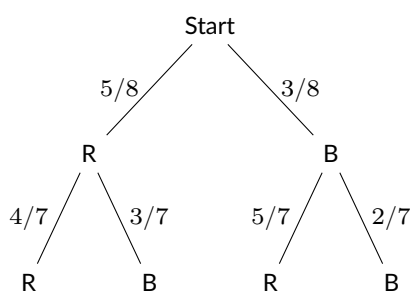
$$P(\text{exactly one red}) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{5}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28} \approx 0.536.$$

$\boxed{\blacksquare} \{ \blacksquare \}$
 $R \text{ then } B$

$\boxed{\blacksquare} \{ \blacksquare \}$
 $B \text{ then } R$

$$P(\text{at least one blue}) = 1 - P(\text{both red}) = 1 - \frac{5}{14} = \frac{9}{14} \approx 0.643.$$

Check: $P(\text{both blue}) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56}$, and $\frac{20}{56} + \frac{30}{56} + \frac{6}{56} = \frac{56}{56} = 1 \checkmark$.



Tree diagram for drawing two balls without replacement from 5 red + 3 blue: probabilities on second-draw branches change depending on the first draw, since one ball has already been removed from the bag.

4.5.3 Conditional probability and testing for independence

The **conditional probability** of A given that B has occurred is

$$P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (P(B) \neq 0).$$

Events A and B are independent **if and only if** $P(A | B) = P(A)$ (equivalently, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$) – that is, knowing B has occurred does not change the probability of A . This gives a formal test: compute $P(A | B)$ and compare it to $P(A)$; if they differ, the events are **not** independent.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Xác suất có điều kiện của A với điều kiện B đã xảy ra: $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$. Hai biến cố **độc lập khi và chỉ khi** $P(A | B) = P(A)$ – tức là biết B đã xảy ra **không làm thay đổi** xác suất của A . Đây là cách **kiểm tra tính độc lập** chính thức: tính $P(A | B)$ rồi so với $P(A)$; nếu khác nhau, hai biến cố **không độc lập**.

Ví dụ mẫu 12 • Conditional probability from a two-way table

A health survey of 200 people cross-tabulates smoking status with the presence of a respiratory condition:

	Condition present	Condition absent	Total
Smoker	38	62	100
Non-smoker	12	88	100
Total	50	150	200

Find $P(\text{condition} | \text{smoker})$, and determine whether smoking status and the condition are independent.

$$P(\text{condition} | \text{smoker}) = \frac{P(\text{condition} \cap \text{smoker})}{P(\text{smoker})} = \frac{38/200}{100/200} = \frac{38}{100} = 0.38.$$

Compare to the overall (unconditional) probability of the condition, $P(\text{condition}) = \frac{50}{200} = 0.25$. Since $0.38 \neq 0.25$, smoking status and the respiratory condition are **not independent**: smokers in this sample are considerably more likely to have the condition than the population as a whole.

4.5.4 Reversing a conditional probability with a tree diagram

A tree diagram can also be used to reverse a known conditional probability – finding $P(A | B)$ when only $P(B | A)$ and $P(B | A')$ are directly known – a reasoning pattern in the spirit of Bayes' theorem.

VN Ví dụ mẫu 13 • Reversing a conditional probability: a diagnostic test

A disease affects 2% of a population. A screening test correctly gives a positive result for 95% of people who **have** the disease (true positive rate), but also gives a positive result for 3% of people who do **not** have the disease (false positive rate). Given that a randomly selected person tests **positive**, find the probability that they actually have the disease.

Let D = has the disease, $+$ = tests positive. From the tree diagram: $P(D) = 0.02$, $P(D') = 0.98$, $P(+ | D) = 0.95$, $P(+ | D') = 0.03$.

$$P(+) = P(D)P(+ | D) + P(D')P(+ | D') = (0.02)(0.95) + (0.98)(0.03) = 0.019 + 0.0294 = 0.0484.$$

$$P(D | +) = \frac{P(D \cap +)}{P(+)} = \frac{0.019}{0.0484} \approx 0.393.$$

So even with a positive result from a fairly accurate test, there is only about a 39.3% chance the person actually has the disease – because the disease is rare, the (comparatively small) false-positive rate still generates many more false alarms than true detections among the whole population.

(!) Lỗi thường gặp: Đừng nhầm lẫn $P(A | B)$ với $P(B | A)$ – đây là "ngụy biện công tố" (prosecutor's fallacy) nổi tiếng, và chính là bài học của Ví dụ mẫu 13: $P(+ | D) = 0.95$ (xác suất test dương **biết** có bệnh) hoàn toàn khác với $P(D | +) \approx 0.393$ (xác suất có bệnh **biết** test dương). Luôn xác định rõ **biến cố nào là điều kiện đã biết** trước khi viết công thức $P(\cdot | \cdot)$.

4.6 Discrete Random Variables and Expected Value

4.6.1 Probability distributions

A **discrete random variable** X takes a countable set of values, each with an associated probability, displayed in a **probability distribution table**. Every valid probability distribution must satisfy

$$\sum P(X = x) = 1, \quad \text{with every } P(X = x) \geq 0.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Biến ngẫu nhiên rời rạc X nhận một tập giá trị đếm được, mỗi giá trị gắn với một xác suất, trình bày trong **bảng phân phối xác suất**. Mọi phân phối xác suất hợp lệ phải thỏa $\sum P(X = x) = 1$ và mọi $P(X = x) \geq 0$.

4.6.2 Expected value and variance

The **expected value** (mean) of a discrete random variable is

$$E(X) = \sum xP(X = x),$$

and its **variance** is

$$\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2, \quad \text{where } E(X^2) = \sum x^2P(X = x).$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kỳ vọng (giá trị trung bình) của biến ngẫu nhiên rời rạc: $E(X) = \sum xP(X = x)$. **Phương sai:** $\text{Var}(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, với $E(X^2) = \sum x^2P(X = x)$ – công thức này song song hoàn toàn với công thức phương sai của Section 3, chỉ thay tần số tương đối bằng xác suất.

Ví dụ mẫu 14 • Probability distribution: finding $E(X)$ and $\text{Var}(X)$

A discrete random variable X has distribution $P(X = 1) = k$, $P(X = 2) = 2k$, $P(X = 3) = 3k$, $P(X = 4) = 4k$. Find k , then find $E(X)$ and $\text{Var}(X)$.

Since probabilities sum to 1: $k + 2k + 3k + 4k = 10k = 1 \Rightarrow k = 0.1$, giving $P(X = 1, 2, 3, 4) = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$.

$$E(X) = 1(0.1) + 2(0.2) + 3(0.3) + 4(0.4) = 0.1 + 0.4 + 0.9 + 1.6 = 3.0.$$

$$E(X^2) = 1(0.1) + 4(0.2) + 9(0.3) + 16(0.4) = 0.1 + 0.8 + 2.7 + 6.4 = 10.0.$$

$$\text{Var}(X) = 10.0 - 3.0^2 = 10.0 - 9.0 = 1.0.$$

Exactly as for data in Section 3, a **linear transformation** of a random variable, $Y = aX + b$, satisfies

$$E(aX + b) = aE(X) + b, \quad \text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X).$$

For example, using X from Example 14 ($E(X) = 3.0$, $\text{Var}(X) = 1.0$), if $Y = 2X + 3$ then $E(Y) = 2(3.0) + 3 = 9.0$ and $\text{Var}(Y) = 2^2(1.0) = 4.0$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cũng như dữ liệu ở Section 3, phép biến đổi tuyến tính của một biến ngẫu nhiên $Y = aX + b$ thoả $E(aX + b) = aE(X) + b$ và $\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X)$ – quy tắc bình phương a cho phương sai lại xuất hiện, đúng như với độ lệch chuẩn của dữ liệu thống kê.

4.6.3 Applications: games and expected profit**Ví dụ mẫu 15 • Expected profit in a game**

A game costs \$5 to play: a fair six-sided die is rolled. Rolling a 6 wins \$20; rolling a 4 or 5 wins \$8; any other roll wins nothing. Find the expected **profit** per game (winnings minus the \$5 cost), and state whether the game favours the player or the organiser.

$$P(6) = \frac{1}{6}, \quad P(4 \text{ or } 5) = \frac{1}{3}, \quad P(1, 2, \text{ or } 3) = \frac{1}{2}.$$

Net profit in each case: $20 - 5 = 15$; $8 - 5 = 3$; $0 - 5 = -5$.

$$E(\text{profit}) = 15\left(\frac{1}{6}\right) + 3\left(\frac{1}{3}\right) + (-5)\left(\frac{1}{2}\right) = 2.5 + 1.0 - 2.5 = \boxed{\$1.00}.$$

Since $E(\text{profit}) > 0$, the game favours the **player** on average (a genuine, if unusual, feature of this constructed game, in contrast with most commercial games where the organiser holds the edge).

4.7 The Binomial Distribution**4.7.1 Conditions for a binomial setting**

A random variable X follows a **binomial distribution**, written $X \sim B(n, p)$, when all four conditions hold: (1) a **fixed number** n of trials; (2) each trial has exactly **two outcomes** (success/-failure); (3) the probability of success p is **constant** across trials; (4) trials are **independent** of one another.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Biến ngẫu nhiên X tuân theo **phân phối nhị thức** $X \sim B(n, p)$ khi thoả cả 4 điều kiện: (1) **số phép thử cố định** n ; (2) mỗi phép thử chỉ có **hai kết quả** (thành công/thất bại); (3) xác suất thành công p **không đổi**; (4) các phép thử **độc lập** với nhau.

4.7.2 The binomial probability formula

For $X \sim B(n, p)$, the probability of exactly k successes is

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

where $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. On a GDC, $P(X = k)$ is found using the binomial **pdf** function, and cumulative probabilities such as $P(X \leq k)$ using the binomial **cdf** function.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với $X \sim B(n, p)$: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Trên GDC, dùng hàm **binomial pdf** để tính $P(X = k)$, và hàm **binomial cdf** để tính xác suất tích lũy $P(X \leq k)$ – luôn đọc kỹ đề bài để phân biệt "đúng k ", "nhiều nhất k " (*at most*, dùng cdf), hay "ít nhất k " (*at least*, dùng $1 - \text{cdf}(k-1)$).

Ví dụ mẫu 16 • Binomial probabilities by hand

A multiple-choice quiz has 10 independent questions; by pure guessing, each has probability 0.3 of being answered correctly. Find $P(\text{exactly 3 correct})$ and $P(\text{at most 2 correct})$.

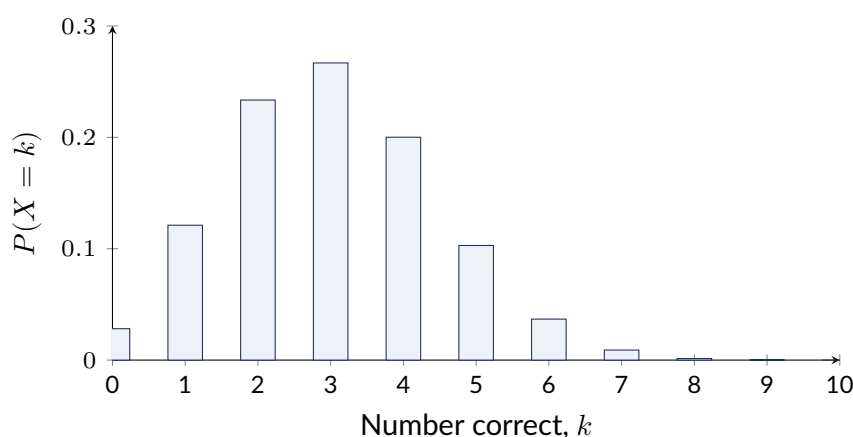
Here $n = 10, p = 0.3$.

$$P(X = 3) = \binom{10}{3} (0.3)^3 (0.7)^7 = 120(0.027)(0.0823543) \approx 0.267.$$

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2).$$

$$P(0) = (0.7)^{10} \approx 0.02825, \quad P(1) = 10(0.3)(0.7)^9 \approx 0.12106, \quad P(2) = \binom{10}{2} (0.3)^2 (0.7)^8 \approx 0.23347.$$

$$P(X \leq 2) \approx 0.02825 + 0.12106 + 0.23347 \approx 0.383.$$



Probability distribution of $X \sim B(10, 0.3)$ (Example 16): the distribution peaks at $k = 3$ and is right-skewed, consistent with $p < 0.5$.

4.7.3 Mean and variance of a binomial distribution

For $X \sim B(n, p)$: $E(X) = np$, $\text{Var}(X) = np(1 - p)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Với $X \sim B(n, p)$: $E(X) = np$ và $\text{Var}(X) = np(1 - p)$ — hai công thức này nên **học thuộc**, vì chúng cho phép trả lời nhanh các câu hỏi về giá trị trung bình/độ lệch chuẩn mà không cần liệt kê toàn bộ bảng phân phối.

Ví dụ mẫu 17 • Binomial mean and variance in context

A factory finds that 4% of bolts it produces are defective. In a batch of 200 bolts (modelled as $X \sim B(200, 0.04)$), find the expected number of defective bolts and the standard deviation.

$$E(X) = np = 200(0.04) = 8.$$

$$\text{Var}(X) = np(1 - p) = 200(0.04)(0.96) = 7.68, \quad \text{SD}(X) = \sqrt{7.68} \approx 2.77.$$

(!) **Lỗi thường gặp:** Khi gặp cụm từ "**nhều nhất**" (at most, $\leq$) hay "**ít nhất**" (at least, $\geq$), luôn kiểm tra kỹ có bao gồm giá trị biên hay không: $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$, **không phải** $1 - P(X \leq k)$. Nhầm lẫn " $\leq k$ " với " $< k$ " (hoặc " $\geq k$ " với " $> k$ ") khi nhập vào hàm cdf của GDC là lỗi sai lệch 1 đơn vị (off-by-one) rất phổ biến.

4.8 The Normal Distribution

4.8.1 The normal curve and standardization

The **normal distribution**, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, is a continuous, symmetric, bell-shaped distribution centred at the mean μ with spread controlled by the standard deviation σ . Any normal variable can be **standardized** to the standard normal variable $Z \sim N(0, 1)$ using

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}.$$

Standardizing converts a probability question about any normal distribution into an equivalent question about the standard normal distribution, whose cumulative probabilities $\Phi(z) = P(Z < z)$ are found using a GDC's normal cumulative distribution function (rather than a printed table).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN **Phân phối chuẩn** $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ là phân phối liên tục, đối xứng, hình chuông, tâm tại trung bình μ , độ rộng do độ lệch chuẩn σ quyết định. **Chuẩn hoá** (standardize) bất kỳ biến chuẩn nào về biến chuẩn tắc $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, biến đổi câu hỏi xác suất về phân phối chuẩn **bất kỳ** thành câu hỏi tương đương trên phân phối chuẩn tắc — tính bằng hàm **normal cdf** trên GDC (không cần tra bảng z in sẵn như trước đây).

4.8.2 Using the standard normal distribution

Ví dụ mẫu 18 · Standardizing and reading a normal probability

Scores on a standardized test are normally distributed with mean $\mu = 500$ and standard deviation $\sigma = 100$. Find $P(X < 628)$, correct to 3 d.p., using $\Phi(1.28) = 0.8997$.

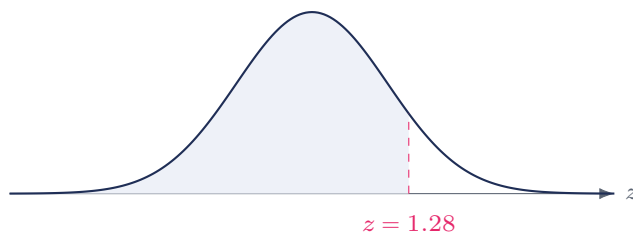
$$Z = \frac{628 - 500}{100} = \frac{128}{100} = 1.28.$$

$$P(X < 628) = P(Z < 1.28) = \Phi(1.28) = 0.8997 \approx 0.900.$$

By symmetry, $P(X < 372) = P(Z < -1.28) = 1 - \Phi(1.28) = 1 - 0.8997 = 0.1003$, so

$$P(372 < X < 628) = 0.8997 - 0.1003 = 0.7994 \approx 0.799.$$

Sanity check with the empirical rule: since 372 and 628 are each 1.28σ from the mean, and the empirical rule states that about 95% of values lie within 2σ (300 to 700) of the mean, a middle interval narrower than 2σ containing about 80% of the data (as found exactly above) is entirely consistent — a useful cross-check that the calculated answer is of a reasonable size.



The shaded region is $P(Z < 1.28) = \Phi(1.28) = 0.8997$, the standardized version of $P(X < 628)$ for $X \sim N(500, 100^2)$ in Example 18.

4.8.3 Inverse normal

The **inverse normal** function reverses the standardizing process: given a cumulative probability p , it returns the boundary value x such that $P(X < x) = p$. On a GDC this is the **invNorm** (or equivalent) function; by hand, find the corresponding z from $\Phi(z) = p$, then convert back using $x = \mu + z\sigma$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Inverse normal làm ngược lại quá trình chuẩn hoá: cho trước xác suất tích lũy p , tìm ra giá trị biên x sao cho $P(X < x) = p$. Trên GDC dùng hàm **invNorm**; tính tay thì tìm z từ $\Phi(z) = p$ rồi đổi ngược $x = \mu + z\sigma$.

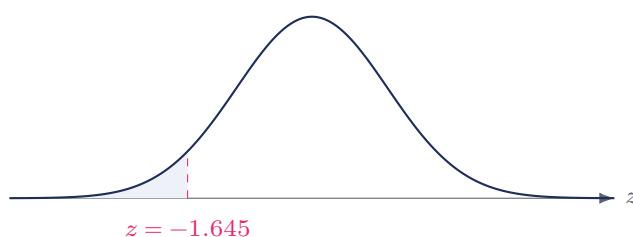
Ví dụ mẫu 19 · Inverse normal: finding a boundary value

A bottling machine fills bottles with a volume that is normally distributed with mean $\mu = 500$ ml and standard deviation $\sigma = 5$ ml. Find the volume V such that only 5% of bottles contain less than V ml, using $\Phi(1.645) = 0.9500$.

Since $\Phi(1.645) = 0.9500$, by symmetry $P(Z < -1.645) = 1 - 0.9500 = 0.0500$, so the required z -value is $z = -1.645$.

$$V = \mu + z\sigma = 500 + (-1.645)(5) = 500 - 8.225 = 491.775 \approx 491.8 \text{ ml (1 d.p.)}$$

So only about 5% of bottles are expected to contain less than approximately 491.8 ml.



The shaded lower-tail region has area 0.0500, so $z = -1.645$ is the boundary for the lowest 5% of a standard normal distribution (Example 19).

(!) Lỗi thường gặp: Luôn xác định rõ GDC/normal cdf đang tính $P(Z < z)$ (đuôi trái) hay $P(Z > z)$ (đuôi phải) trước khi kết luận, và kiểm tra **dấu** của z – nếu $x < \mu$ thì z phải âm. Quên chuẩn hoá (dùng thẳng x thay vì $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ trước khi tra/tính) là lỗi nền tảng phổ biến nhất của toàn bộ phần phân phối chuẩn.

4.9 Spearman's Rank Correlation Coefficient

4.9.1 Ranking data and handling ties

To compute Spearman's rank correlation, each variable's raw data is first converted to **ranks** (rank 1 for the largest or smallest value, consistently for both variables). When two or more values are **tied**, each receives the **average** of the ranks they would otherwise occupy (e.g. two values tied for ranks 1 and 2 both receive rank 1.5).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Để tính hệ số tương quan hạng Spearman, dữ liệu thô mỗi biến trước tiên được đổi thành **hạng** (rank). Khi có giá trị **trùng nhau** (tied), mỗi giá trị nhận **hạng trung bình** của các hạng mà chúng lẽ ra chiếm giữ (ví dụ hai giá trị cùng tranh hạng 1 và 2 đều nhận hạng 1.5).

4.9.2 The Spearman's rank formula

With d denoting the difference between the two ranks of each data pair, and n the number of pairs, **Spearman's rank correlation coefficient** is

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}.$$

Like Pearson's r (Topic 2), r_s ranges from -1 to 1 ; $r_s = 1$ indicates a perfect **increasing monotonic** relationship (as one rank increases, so does the other, every time), $r_s = -1$ a perfect **decreasing** monotonic relationship, and $r_s = 0$ no monotonic association.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với d là hiệu hai hạng của mỗi cặp dữ liệu và n là số cặp: $r_s = 1 - \frac{6 \sum d^2}{n(n^2 - 1)}$. Cũng như r của Pearson, r_s nằm trong $[-1, 1]$: $r_s = 1$ nghĩa là quan hệ **đơn điệu tăng hoàn hảo**, $r_s = -1$ là đơn điệu giảm hoàn hảo, $r_s = 0$ là không có liên hệ đơn điệu.

Ví dụ mẫu 20 • Spearman's rank correlation with tied ranks

Six students' scores in two subjects, X and Y , are: X : 88, 95, 95, 72, 65, 80; Y : 90, 85, 92, 60, 55, 75 (for students A, B, C, D, E, F respectively; note the tie between B and C in X). Find r_s .

Ranking X (largest = rank 1): B and C tie for ranks 1 and 2, so both receive rank 1.5; then $A = 3, F = 4, D = 5, E = 6$. Ranking Y (largest = rank 1, no ties): $C = 1, A = 2, B = 3, F = 4, D = 5, E = 6$.

Student	A	B	C	D	E	F
Rank X	3	1.5	1.5	5	6	4
Rank Y	2	3	1	5	6	4
d	1	-1.5	0.5	0	0	0
d^2	1	2.25	0.25	0	0	0

$$\sum d^2 = 1 + 2.25 + 0.25 = 3.5, \quad n = 6.$$

$$r_s = 1 - \frac{6(3.5)}{6(6^2 - 1)} = 1 - \frac{21}{6(35)} = 1 - \frac{21}{210} = 1 - 0.1 = 0.9.$$

An r_s of 0.9 indicates a strong positive (increasing) monotonic association between the two subjects' scores.

4.9.3 Spearman's versus Pearson's r When Is Spearman's Preferable to Pearson's r

Pearson's product-moment correlation coefficient r (Topic 2) measures the strength of a **linear** relationship, and can be distorted by outliers or by a genuinely curved (but still monotonic) trend. Spearman's r_s , working with ranks rather than raw values, measures the strength of **any monotonic** relationship (increasing or decreasing, whether the underlying trend is a straight line or a curve), and is far less sensitive to outliers, since an extreme value can only ever occupy an extreme **rank**, not an extreme raw magnitude. Spearman's is also the natural choice when the raw data is **ordinal** to begin with (e.g. rankings or ratings), rather than a numerical scale.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hệ số r của Pearson đo mức độ liên hệ **tuyến tính**, dễ bị lệch bởi giá trị ngoại lai hoặc bởi một xu hướng cong (nhưng vẫn đơn điệu). Hệ số r_s của Spearman, làm việc trên **hạng** thay vì giá trị thô, đo mức độ liên hệ **đơn điệu bất kỳ** (tăng hoặc giảm, dù là đường thẳng hay đường cong), và **ít nhạy** với ngoại lai hơn nhiều, vì giá trị cực đoan chỉ có thể chiếm một **hạng** cực đoan chứ không "kéo lệch" toàn bộ phép tính như giá trị thô. Spearman cũng là lựa chọn tự nhiên khi dữ liệu gốc vốn đã là **thứ bậc** (ordinal).

Ví dụ mẫu 21 • A perfect monotonic but non-linear relationship

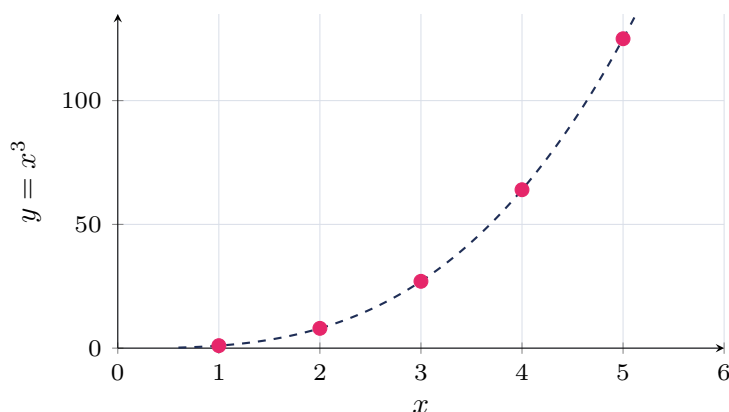
For $x = 1, 2, 3, 4, 5$ and $y = x^3$ (so $y = 1, 8, 27, 64, 125$), find Spearman's r_s , and compare briefly with Pearson's $r \approx 0.943$ (computed by technology as in Topic 2).

Since $y = x^3$ is strictly increasing in x , the rank of each y -value exactly matches the rank of the corresponding x -value: ranks of x are 1, 2, 3, 4, 5 and ranks of y are also 1, 2, 3, 4, 5, so every

$d = 0$ and

$$r_s = 1 - \frac{6(0)}{5(24)} = 1.$$

Although the relationship is perfectly monotonic ($r_s = 1$), it is **not linear** (it is cubic), so Pearson's $r \approx 0.943$ is high but noticeably below 1 – a clear illustration that r_s captures monotonic trend regardless of shape, while r specifically measures straight-line fit.



Scatter plot of $y = x^3$ for Example 21: the points lie on a strictly increasing curve, so every rank of y matches the corresponding rank of x exactly ($r_s = 1$), even though the curve itself is visibly not a straight line (Pearson's $r \approx 0.943$).

4.10 The Poisson Distribution (HL)

4.10.1 Conditions for a Poisson setting

A random variable X follows a **Poisson distribution** with parameter λ (the mean number of occurrences per fixed interval), written $X \sim \text{Po}(\lambda)$, when events occur **independently** of one another, at a **constant average rate** λ over the interval, and (in principle) any number of events could occur in that interval. Typical contexts: number of calls to a call centre per hour, number of flaws per metre of cable, number of accidents at a junction per month.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Biến ngẫu nhiên X tuân theo **phân phối Poisson** với tham số λ (số lần xảy ra trung bình trong một khoảng cố định) khi các sự kiện xảy ra **độc lập** với nhau, với **tốc độ trung bình không đổi** λ trong khoảng đó. Bối cảnh thường gặp: số cuộc gọi đến tổng đài mỗi giờ, số lỗi trên mỗi mét cáp, số tai nạn tại một giao lộ mỗi tháng.

4.10.2 The Poisson probability formula

For $X \sim \text{Po}(\lambda)$: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, and remarkably $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$ (mean and variance are equal).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với $X \sim \text{Po}(\lambda)$: $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$, và đặc biệt $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$ – trung bình và phương sai **bằng nhau**, một đặc điểm nhận dạng riêng của phân phối Poisson.

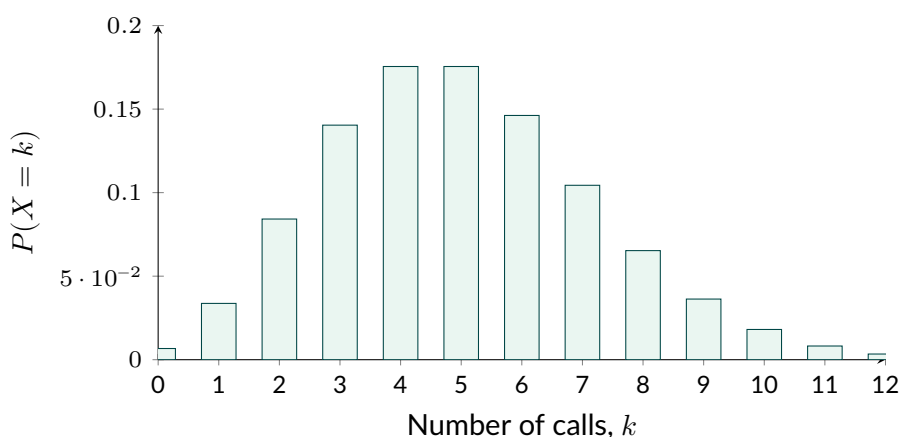
Ví dụ mẫu 22 • Poisson probability by hand

A call centre receives, on average, 5 calls every 10-minute period, modelled as $X \sim \text{Po}(5)$. Find $P(X = 3)$ and $P(X \leq 2)$, correct to 3 d.p.

Using $e^{-5} \approx 0.006738$:

$$P(X = 3) = \frac{e^{-5}(5^3)}{3!} = \frac{0.006738(125)}{6} \approx 0.140.$$

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = e^{-5} + e^{-5}(5) + \frac{e^{-5}(5^2)}{2} \approx 0.00674 + 0.03369 + 0.08422 \approx 0.125.$$



Probability distribution of $X \sim \text{Po}(5)$ (Example 22): the distribution peaks around $k = 4$ and $k = 5$ (both equal to the mean $\lambda = 5$) and is mildly right-skewed.

4.10.3 Sums of independent Poisson variables

If $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$ and $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$ are **independent**, then $X + Y \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Nếu $X \sim \text{Po}(\lambda_1)$ và $Y \sim \text{Po}(\lambda_2)$ **độc lập**, thì $X + Y \sim \text{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$ – tổng của hai biến Poisson độc lập vẫn là một biến Poisson, với tham số bằng **tổng** hai tham số ban đầu.

Ví dụ mẫu 23 • Sum of independent Poisson variables

Two independent shops receive customer complaints at average rates of $\lambda_A = 3$ per day and $\lambda_B = 4$ per day. Find the probability that the **total** number of complaints across both shops on a given day is exactly 5.

Since the shops are independent, the total $X = X_A + X_B \sim \text{Po}(3 + 4) = \text{Po}(7)$.

$$P(X = 5) = \frac{e^{-7}(7^5)}{5!} = \frac{0.000912(16807)}{120} \approx 0.128.$$

The Poisson distribution is closely related to the binomial distribution: if $X \sim B(n, p)$ with n **large** and p **small** (so that events are individually rare but there are many opportunities for them), then X is well approximated by a Poisson distribution with $\lambda = np$. Recalling Example 17 (defective bolts, $X \sim B(200, 0.04)$, $E(X) = 8$): treating this instead as $X \sim \text{Po}(8)$ would give essentially the same probabilities, since $n = 200$ is large and $p = 0.04$ is small – a useful cross-check between the two distributions, and the historical reason the Poisson distribution was first developed as a simplification of the binomial.

4.11 Hypothesis Testing Fundamentals (HL)

4.11.1 Null and alternative hypotheses

A **hypothesis test** assesses whether sample evidence is strong enough to reject a claim about a population parameter. The **null hypothesis** H_0 is the default/no-effect claim (e.g. $\mu = \mu_0$); the **alternative hypothesis** H_1 is what the test seeks evidence for. A **two-tailed** test has $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (evidence of a difference in *either* direction); a **one-tailed** test has $H_1 : \mu < \mu_0$ or $H_1 : \mu > \mu_0$ (evidence of a difference in a *specific* direction only).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kiểm định giả thuyết đánh giá xem bằng chứng từ mẫu có đủ mạnh để bác bỏ một khẳng định về tham số tổng thể hay không. **Giả thuyết không** H_0 là khẳng định mặc định (không có hiệu ứng); **giả thuyết đối** H_1 là điều kiểm định muốn tìm bằng chứng ủng hộ. Kiểm định **hai phía** có $H_1 : \mu \neq \mu_0$; kiểm định **một phía** có $H_1 : \mu < \mu_0$ hoặc $H_1 : \mu > \mu_0$ (chỉ quan tâm một hướng lệch cụ thể).

Choosing a One-Tailed or Two-Tailed Alternative

The choice between a one-tailed and a two-tailed alternative hypothesis must be made **before** looking at the sample data, based only on what the question is actually asking. If the context specifically asks whether a mean has **decreased** (or **increased**) — for instance, whether a company is under-filling boxes, or whether a new process has **reduced** defect rates — a one-tailed test with $H_1 : \mu < \mu_0$ (or $\mu > \mu_0$) is appropriate. If the context only asks whether a mean has **changed**, without specifying a direction — for instance, whether a machine's output has drifted away from its target setting in either direction — a two-tailed test with $H_1 : \mu \neq \mu_0$ is appropriate. For the same significance level α , a one-tailed test places the entire rejection region in a single tail, so it is easier to reject H_0 in that specific direction than a two-tailed test (which splits α between both tails) would be.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Việc chọn kiểm định **một phía** hay **hai phía** phải được quyết định **trước khi** xem dữ liệu mẫu, chỉ dựa vào nội dung câu hỏi. Nếu ngữ cảnh hỏi cụ thể liệu trung bình có **giảm** (hoặc **tăng**) hay không, dùng kiểm định một phía. Nếu ngữ cảnh chỉ hỏi liệu trung bình có **thay đổi** hay không (không rõ hướng), dùng kiểm định hai phía. Với cùng mức ý nghĩa α , kiểm định một phía dồn toàn bộ α vào **một đuôi**, nên dễ bác bỏ H_0 theo hướng đó hơn so với kiểm định hai phía (chia α cho cả hai đuôi).

4.11.2 Significance level, test statistic, and p-value

The **significance level** α (commonly 5%) is the threshold probability used to judge whether sample evidence is unusual enough, **assuming** H_0 is true, to reject H_0 . The **test statistic** (e.g. a z - or t -value) measures how far the sample result is from what H_0 predicts, in standardized units. The **p-value** is the probability, assuming H_0 is true, of obtaining a test statistic at least as extreme as the one observed. **Decision rule:** reject H_0 if the p -value is less than α (equivalently, if the test statistic is more extreme than the critical value for that significance level).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Mức ý nghĩa α (thường 5%) là ngưỡng xác suất dùng để đánh giá liệu kết quả mẫu có đủ bất thường (giả sử H_0 đúng) để bác bỏ H_0 . **Thống kê kiểm định** (như giá trị z hay t) đo mức độ

lệch của kết quả mẫu so với dự đoán của H_0 . **Giá trị p** (p -value) là xác suất, giả sử H_0 đúng, để có được một thống kê kiểm định **cực đoan bằng hoặc hơn** giá trị quan sát được. **Quy tắc quyết định:** bác bỏ H_0 nếu p -value nhỏ hơn α .

Ví dụ mẫu 24 • A one-tailed z -test, and Type I/II errors in context

A cereal company claims the mean mass of its cereal boxes is at least 500 g; from long production history, the population standard deviation is known to be $\sigma = 8$ g. A consumer group, suspecting under-filling, samples $n = 64$ boxes and finds a sample mean of 497.6 g. Test at the 5% significance level whether there is evidence the mean mass is less than 500 g.

$H_0 : \mu = 500$, $H_1 : \mu < 500$ (one-tailed).

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{497.6 - 500}{8/\sqrt{64}} = \frac{-2.4}{1} = -2.4.$$

The critical value for a one-tailed test at 5% is $z_{\text{crit}} = -1.645$ (since $\Phi(1.645) = 0.9500$). Since $-2.4 < -1.645$ (i.e. z is more extreme than the critical value), we **reject H_0** ; there is significant evidence at the 5% level that the mean mass is less than 500 g. (Since $z = -2.4$ is even more extreme than -2.33 , for which $P(Z < -2.33) = 1 - 0.9901 = 0.0099$, the exact p -value is certainly below 0.01, reinforcing the decision.)

In this context, a **Type I error** would be concluding the boxes are under-filled when in fact the true mean is really 500 g (rejecting a true H_0) – e.g. due to an unusually light random sample. A **Type II error** would be failing to detect genuine under-filling that is actually occurring (not rejecting a false H_0) – e.g. if the sample happened to include more full boxes than typical, masking a true problem.

Type I and Type II Errors

A **Type I error** occurs when H_0 is rejected but H_0 was actually true – a “false alarm,” with probability equal to the chosen significance level α . A **Type II error** occurs when H_0 is **not** rejected but H_0 was actually false – a “missed detection.” Lowering α (making the test stricter) reduces the chance of a Type I error but, all else equal, **increases** the chance of a Type II error, since real effects now need to be even more extreme to be detected – a fundamental trade-off in test design.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Sai lầm loại I: bác bỏ H_0 trong khi H_0 thực ra đúng (“báo động giả”), xác suất chính là mức ý nghĩa α đã chọn. **Sai lầm loại II:** không bác bỏ H_0 trong khi H_0 thực ra sai (“bỏ sót”). Giảm α (kiểm định chặt hơn) làm giảm xác suất sai lầm loại I nhưng lại **tăng** xác suất sai lầm loại II – đây là sự **đánh đổi** cơ bản trong thiết kế kiểm định giả thuyết.

The Five Steps of Any Hypothesis Test

Every hypothesis test in this chapter (the z -test above, and the chi-squared and t -tests of the next two sections) follows the same five-step structure: (1) state H_0 and H_1 clearly, in terms of the relevant population parameter; (2) state the significance level α ; (3) calculate the test statistic from the sample data (a z -, t -, or χ^2 -value, using the formula appropriate to the situation); (4) compare the test statistic to the critical value (or compare the p -value to α); (5) state the conclusion **in the context of the original question** – not merely “reject H_0 ,” but what that means for the claim being tested. Recognising which of the three test statistics applies is

mostly a matter of identifying the type of data: a single categorical breakdown or contingency table calls for χ^2 ; a numerical mean with a known population standard deviation calls for z ; a numerical mean with only a sample standard deviation available calls for t .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Mọi kiểm định giả thuyết trong chương này đều theo cùng **5 bước**: (1) phát biểu rõ H_0 và H_1 theo tham số tổng thể liên quan; (2) nêu mức ý nghĩa α ; (3) tính thống kê kiểm định (z , t , hay χ^2) từ dữ liệu mẫu; (4) so sánh với giá trị tới hạn (hoặc so p -value với α); (5) **kết luận theo đúng ngữ cảnh** câu hỏi ban đầu — không chỉ dừng ở "bác bỏ H_0 " mà phải nói rõ điều đó có ý nghĩa gì. Việc chọn đúng loại thống kê phần lớn dựa vào loại dữ liệu: dữ liệu định danh/bảng liên hợp → dùng χ^2 ; trung bình số với σ tổng thể đã biết → dùng z ; trung bình số chỉ có độ lệch chuẩn mẫu → dùng t .

4.12 The Chi-Squared Test (HL)

4.12.1 Goodness-of-fit test

A **chi-squared goodness-of-fit test** checks whether observed categorical frequencies are consistent with a claimed (expected) distribution. With observed frequencies O and expected frequencies E in each of several categories, the test statistic is

$$\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}, \quad \text{df} = (\text{number of categories}) - 1,$$

compared against a critical value from the chi-squared distribution at the chosen significance level; if χ^2 exceeds the critical value, H_0 (the claimed distribution fits) is rejected.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kiểm định Chi-bình phương về độ phù hợp kiểm tra xem tần số quan sát có phù hợp với một phân phối kỳ vọng (đã khẳng định) hay không: $\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$, với bậc tự do = (số nhóm) – 1. So sánh χ^2 tính được với giá trị tới hạn tra bảng ở mức ý nghĩa đã chọn; nếu χ^2 **vượt** giá trị tới hạn, bác bỏ H_0 .

Ví dụ mẫu 25 • Chi-squared goodness-of-fit test

A die is rolled 120 times to test whether it is fair. Observed frequencies for faces 1–6 are 22, 17, 23, 16, 21, 21. Test at the 5% significance level whether the die is fair.

H_0 : the die is fair (each face has probability $\frac{1}{6}$). Expected frequency per face: $E = \frac{120}{6} = 20$.

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(22 - 20)^2}{20} + \frac{(17 - 20)^2}{20} + \frac{(23 - 20)^2}{20} + \frac{(16 - 20)^2}{20} + \frac{(21 - 20)^2}{20} + \frac{(21 - 20)^2}{20} \\ &= \frac{4 + 9 + 9 + 16 + 1 + 1}{20} = \frac{40}{20} = 2.0. \end{aligned}$$

Degrees of freedom = 6 – 1 = 5; the critical value at $\alpha = 0.05$ is 11.070. Since $2.0 < 11.070$, we **do not reject** H_0 : there is no evidence at the 5% level that the die is unfair.

4.12.2 Test for independence

A **chi-squared test for independence** checks whether two categorical variables, cross-tabulated in an $r \times c$ **contingency table**, are associated. The expected frequency for each cell is

$$E = \frac{(\text{row total}) \times (\text{column total})}{\text{grand total}}, \quad \text{df} = (r - 1)(c - 1),$$

and the test statistic $\chi^2 = \sum \frac{(O - E)^2}{E}$ is compared to the critical value exactly as in the goodness-of-fit test; a large χ^2 indicates the variables are **not** independent (i.e. they are associated).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kiểm định Chi-bình phương về tính độc lập kiểm tra xem hai biến định danh, trình bày trong bảng liên hợp $r \times c$, có liên hệ với nhau hay không. Tần số kỳ vọng mỗi ô: $E = \frac{(\text{tổng hàng}) \times (\text{tổng cột})}{\text{tổng chung}}$, bậc tự do $= (r - 1)(c - 1)$. χ^2 lớn cho thấy hai biến có liên hệ (không độc lập).

Ví dụ mẫu 26 · Chi-squared test for independence

A survey of 200 people cross-tabulates preferred transport mode against area of residence:

	Car	Bus	Bike	Total
Urban	40	50	30	120
Rural	40	20	20	80
Total	80	70	50	200

Test at the 5% significance level whether area of residence and transport preference are independent.

Expected frequencies, $E = \frac{\text{row total} \times \text{column total}}{200}$:

$$E_{\text{Urban,Car}} = 48, E_{\text{Urban,Bus}} = 42, E_{\text{Urban,Bike}} = 30, E_{\text{Rural,Car}} = 32, E_{\text{Rural,Bus}} = 28, E_{\text{Rural,Bike}} = 20.$$

$$\begin{aligned} \chi^2 &= \frac{(40 - 48)^2}{48} + \frac{(50 - 42)^2}{42} + \frac{(30 - 30)^2}{30} + \frac{(40 - 32)^2}{32} + \frac{(20 - 28)^2}{28} + \frac{(20 - 20)^2}{20} \\ &= 1.333 + 1.524 + 0 + 2.000 + 2.286 + 0 \approx 7.14. \end{aligned}$$

Degrees of freedom $= (2 - 1)(3 - 1) = 2$; the critical value at $\alpha = 0.05$ is 5.991. Since $7.14 > 5.991$, we **reject** H_0 : there is evidence at the 5% level that area of residence and transport preference are associated.



A right-skewed chi-squared distribution (illustrative, $\text{df} = 2$): the shaded critical region beyond $\chi^2_{\text{crit}} = 5.991$ is where H_0 is rejected; the calculated $\chi^2 \approx 7.14$ of Example 26 lies inside this region.

4.13 The t-Test (HL)

4.13.1 One-sample t-test

When the population standard deviation σ is **unknown** (estimated instead by the sample standard deviation s) and the sample is small, the appropriate test statistic follows a ***t*-distribution** rather than the normal distribution, with $df = n - 1$:

$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}.$$

The *t*-distribution is symmetric and bell-shaped like the normal distribution, but with heavier tails (more spread out) for small n , converging to the normal distribution as n grows large. As with the normal/*z* case, the test statistic is compared to a critical value from the *t*-distribution at the appropriate degrees of freedom.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi độ lệch chuẩn tổng thể σ **chưa biết** (phải ước lượng bằng độ lệch chuẩn mẫu s) và cỡ mẫu nhỏ, thống kê kiểm định phù hợp tuân theo **phân phối *t*** thay vì phân phối chuẩn, với bậc tự do $df = n - 1$: $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$. Phân phối *t* đối xứng, hình chuông như phân phối chuẩn, nhưng **đuôi dày hơn** khi n nhỏ, và tiến gần phân phối chuẩn khi n lớn.

Ví dụ mẫu 27 • One-sample t-test

A nutrition label claims a granola bar contains, on average, 180 mg of sodium. A dietitian tests $n = 10$ bars, finding a sample mean $\bar{x} = 185.4$ mg and sample standard deviation $s = 6.5$ mg. Test at the 5% two-tailed significance level whether the true mean sodium content differs from 180 mg.

$$H_0 : \mu = 180, \quad H_1 : \mu \neq 180.$$

$$t = \frac{185.4 - 180}{6.5/\sqrt{10}} = \frac{5.4}{2.0555} \approx 2.627.$$

Degrees of freedom = $10 - 1 = 9$; the two-tailed critical value at $\alpha = 0.05$ is 2.262. Since $|2.627| > 2.262$, we **reject** H_0 : there is significant evidence at the 5% level that the true mean sodium content differs from (specifically, exceeds) the claimed 180 mg.

4.13.2 Paired t-test

A **paired *t*-test** is used when two measurements are taken on the **same** subjects (e.g. before and after a treatment). Work with the differences $d = (\text{before} - \text{after})$ for each subject, then apply the one-sample *t*-test to the differences, testing $H_0 : \mu_d = 0$:

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}, \quad df = n - 1,$$

where $\bar{d}$ and s_d are the mean and sample standard deviation of the differences. (A related but distinct situation, the **two-sample independent *t*-test**, compares the means of two separate, unrelated groups rather than paired measurements on the same subjects; it is set up and interpreted the same way, but uses a pooled estimate of variance from both independent samples.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kiểm định t ghép cặp (paired t -test) dùng khi hai phép đo được thực hiện trên **cùng một đối tượng** (như trước và sau một liệu trình). Làm việc với các **hiệu số d** = (trước – sau) của từng đối tượng, rồi áp dụng kiểm định t một mẫu cho các hiệu số đó, kiểm định $H_0 : \mu_d = 0$. Khác với kiểm định t **hai mẫu độc lập** (so sánh trung bình của hai nhóm tách biệt, không ghép cặp).

Ví dụ mẫu 28 • Paired t -test

A weight-loss program is tested on 6 participants, with weights (kg) recorded before and after a 6-week program:

Participant	1	2	3	4	5	6
Before	82	76	90	85	79	88
After	78	75	84	82	77	83
Difference d	4	1	6	3	2	5

Test at the 5% two-tailed significance level whether the program produces a genuine mean change in weight.

$$\bar{d} = \frac{4 + 1 + 6 + 3 + 2 + 5}{6} = \frac{21}{6} = 3.5.$$

Deviations from $\bar{d}$: 0.5, -2.5, 2.5, -0.5, -1.5, 1.5; squared: 0.25, 6.25, 6.25, 0.25, 2.25, 2.25, summing to 17.5.

$$s_d^2 = \frac{17.5}{5} = 3.5, \quad s_d = \sqrt{3.5} \approx 1.871.$$

$$t = \frac{3.5}{1.871/\sqrt{6}} = \frac{3.5}{0.7638} \approx 4.583.$$

Degrees of freedom = 6 - 1 = 5; the two-tailed critical value at $\alpha = 0.05$ is 2.571. Since $4.583 > 2.571$, we **reject** $H_0 : \mu_d = 0$: there is significant evidence at the 5% level that the program is associated with a genuine mean weight change (a mean loss of 3.5 kg in the sample).

4.13.3 Two-sample independent t -test (pooled)

The **two-sample independent t -test** compares the means of two separate, unrelated groups (sizes n_1, n_2 , with sample means $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ and sample standard deviations s_1, s_2), testing $H_0 : \mu_1 = \mu_2$. Assuming the two populations share a common variance, the two sample variances are first combined into a **pooled variance**

$$s_p^2 = \frac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$

and the test statistic is

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{s_p^2 \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right)}}, \quad \text{df} = n_1 + n_2 - 2.$$

As always, t is compared against the critical value from the t -distribution at the appropriate degrees of freedom.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kiểm định t hai mẫu độc lập (two-sample independent t -test) so sánh trung bình của hai nhóm tách biệt, không liên quan nhau, kiểm định $H_0: \mu_1 = \mu_2$. Giả sử hai tổng thể có **phương sai chung**, ta gộp hai phương sai mẫu thành **phương sai gộp** s_p^2 , rồi tính thống kê t với bậc tự do $df = n_1 + n_2 - 2$ – khác với kiểm định t ghép cặp, ở đây **không có** sự tương ứng từng cặp giữa hai nhóm dữ liệu.

Ví dụ mẫu 28b · Two-sample independent t -test

Two independent groups of students are taught using different methods. Group A ($n_1 = 6$) has mean test score $\bar{x}_1 = 81$ with $s_1 = 6$; Group B ($n_2 = 6$) has mean test score $\bar{x}_2 = 72$ with $s_2 = 4$. Assuming equal population variances, test at the 5% two-tailed level whether the two teaching methods produce different mean scores.

$$s_p^2 = \frac{(6-1)(6^2) + (6-1)(4^2)}{6+6-2} = \frac{5(36) + 5(16)}{10} = \frac{180 + 80}{10} = 26.$$

$$t = \frac{81 - 72}{\sqrt{26 \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \right)}} = \frac{9}{\sqrt{26(0.33333)}} = \frac{9}{\sqrt{8.6667}} = \frac{9}{2.944} \approx 3.057.$$

Degrees of freedom = $6 + 6 - 2 = 10$; the two-tailed critical value at $\alpha = 0.05$ is 2.228. Since $3.057 > 2.228$, we **reject** $H_0: \mu_1 = \mu_2$: there is significant evidence at the 5% level that the two teaching methods produce different mean scores.

The pooled two-sample t -test assumes the two populations share a common (but unknown) variance – a reasonable assumption when the two sample standard deviations are of a similar order of magnitude (as in Example 28b, where $s_1 = 6$ and $s_2 = 4$), but questionable if one sample's spread is dramatically larger than the other's. In such cases, a GDC typically also offers a two-sample t -test that does **not** assume equal variances, using a more conservative (and non-integer) degrees-of-freedom formula; at IB AI level, it is enough to recognise *that* this distinction exists and to state the equal-variance assumption explicitly when using the pooled version above.

(!) Lỗi thường gặp: Trước khi chọn công cụ kiểm định, luôn hỏi: độ lệch chuẩn **tổng thể** σ đã biết hay chưa? Nếu **đã biết** σ (hoặc n rất lớn), dùng phân phối chuẩn (z); nếu **chưa biết** σ và phải ước lượng bằng s từ mẫu (đặc biệt khi n nhỏ), dùng phân phối t với bậc tự do $n - 1$. Dùng nhầm z khi lẽ ra phải dùng t (hoặc ngược lại) là lỗi khái niệm nghiêm trọng, dù các bước tính toán có thể giống nhau về hình thức.

4.14 Confidence Intervals for the Mean (HL)

4.14.1 Point estimates and margin of error

A **point estimate** of a population mean is simply the sample mean $\bar{x}$. A **confidence interval (CI)** gives a **range** of plausible values for the population mean, of the form

$$\bar{x} \pm (\text{critical value}) \times (\text{standard error}),$$

where the term added and subtracted is called the **margin of error**. A "95% confidence interval" means that, if the sampling procedure were repeated many times, about 95% of the resulting intervals would contain the true population mean – it is **not** a statement that there is a 95% probability the (fixed, unknown) population mean lies in this **one particular** interval.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ước lượng điểm của trung bình tổng thể đơn giản là trung bình mẫu $\bar{x}$. **Khoảng tin cậy** (confidence interval) cho một **khoảng** giá trị hợp lý của trung bình tổng thể: $\bar{x} \pm$ (giá trị tới hạn) $\times$ (sai số chuẩn), phần cộng/trừ gọi là **sai số biên** (margin of error). Khoảng tin cậy 95% nghĩa là nếu lặp lại việc lấy mẫu nhiều lần, khoảng 95% các khoảng tính được sẽ chứa trung bình tổng thể thật — **không phải** là xác suất 95% cho riêng khoảng cụ thể này.

4.14.2 Confidence intervals using the normal and t-distributions

When σ is **known** (or n is large), the CI for the mean uses the normal distribution:

$$\bar{x} \pm z^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

with $z^* = 1.96$ for 95% confidence (since $\Phi(1.96) = 0.9750$, leaving 2.5% in each tail). When σ is **unknown** (estimated by s) and n is small, the CI uses the t -distribution with $df = n - 1$:

$$\bar{x} \pm t^* \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi σ **đã biết** (hoặc n lớn), khoảng tin cậy dùng phân phối chuẩn: $\bar{x} \pm z^* \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, với $z^* = 1.96$ cho độ tin cậy 95%. Khi σ **chưa biết** (ước lượng bằng s) và n nhỏ, dùng phân phối t với bậc tự do $n - 1$: $\bar{x} \pm t^* \frac{s}{\sqrt{n}}$ — cùng nguyên tắc lựa chọn z so với t như ở kiểm định giả thuyết.

Ví dụ mẫu 29 • Confidence interval using the normal distribution

Using the cereal-box data of Example 24 ($\sigma = 8$ g known, $n = 64$, $\bar{x} = 497.6$ g), construct a 95% confidence interval for the true mean mass.

$$\text{margin of error} = 1.96 \times \frac{8}{\sqrt{64}} = 1.96 \times 1 = 1.96.$$

$$\text{CI} = 497.6 \pm 1.96 = (495.64, 499.56) \text{ g}.$$

We are 95% confident the true mean mass lies between 495.64 g and 499.56 g. Notice this interval does **not** contain 500 g, consistent with Example 24's conclusion that there is significant evidence the mean mass is below the claimed value.

Ví dụ mẫu 30 • Confidence interval using the t-distribution

Using the granola-bar data of Example 27 ($n = 10$, $\bar{x} = 185.4$ mg, $s = 6.5$ mg, σ unknown), construct a 95% confidence interval for the true mean sodium content.

Degrees of freedom = $10 - 1 = 9$; the 95% two-tailed critical value is $t^* = 2.262$.

$$\text{margin of error} = 2.262 \times \frac{6.5}{\sqrt{10}} = 2.262 \times 2.0555 \approx 4.65.$$

$$\text{CI} = 185.4 \pm 4.65 = (180.75, 190.05) \text{ mg}.$$

This interval does **not** contain the claimed 180 mg (it lies just below the lower bound 180.75),

consistent with Example 27's conclusion that the true mean sodium content differs significantly from 180 mg at the 5% level.

In general, for a two-tailed test at significance level α , checking whether the claimed value μ_0 falls inside or outside the corresponding $(1 - \alpha)$ confidence interval gives **exactly the same** reject/do-not-reject conclusion as running the hypothesis test directly: μ_0 outside the interval corresponds to rejecting $H_0 : \mu = \mu_0$, and μ_0 inside the interval corresponds to not rejecting it – confidence intervals and two-tailed hypothesis tests are, in this precise sense, two different views of the same underlying calculation.

Practice

Bài tập luyện tập

A company with 500 employees wants a systematic sample of 25 employees. Find the sampling interval.

- (A) 10 (C) 25
(B) 20 (D) 40

Lời giải chi tiết

$$k = \frac{500}{25} = 20. \text{ (B).}$$

Bài tập luyện tập

Which sampling method involves dividing the population into subgroups and sampling proportionally, at random, from each?

- (A) Stratified sampling (C) Convenience sampling
(B) Quota sampling (D) Systematic sampling

Lời giải chi tiết

(A). Stratified sampling divides the population into strata and takes a random sample from each, proportional to stratum size.

Bài tập luyện tập

A school of 900 students has 400 in Year 12 and 500 in Year 13. Find the stratified sample sizes from each year group for a total sample of 90.

Lời giải chi tiết

$$n_{12} = \frac{400}{900} \times 90 = 40; \quad n_{13} = \frac{500}{900} \times 90 = 50. \text{ Check: } 40 + 50 = 90 \checkmark.$$

Bài tập luyện tập

A researcher stands outside a gym and surveys the first 30 people who leave. Identify the sampling method used, and state one source of bias it introduces.

Lời giải chi tiết

This is **convenience sampling**. Bias: only people who attend that particular gym are surveyed, so the sample is unlikely to represent the fitness habits of the general population.

Bài tập luyện tập

A grouped frequency table for the weights (kg) of 60 parcels has classes 0–5: 8; 5–10: 18; 10–15: 20; 15–20: 10; 20–25: 4. State the modal class.

Lời giải chi tiết

The modal class (highest frequency, 20) is $10 \leq w < 15$ kg.

Bài tập luyện tập

Using the parcel-weight data of the previous question (classes 0–5: 8; 5–10: 18; 10–15: 20; 15–20: 10; 20–25: 4; $n = 60$), estimate the median weight, correct to 1 d.p.

Lời giải chi tiết

Cumulative frequencies: 8, 26, 46, 56, 60. Median position = $\frac{60}{2} = 30$, which falls in the class $10 \leq w < 15$ (cf rises from 26 to 46):

$$\text{median} \approx 10 + \frac{30 - 26}{46 - 26} \times 5 = 10 + \frac{4}{20} \times 5 = 10 + 1 = 11.0 \text{ kg.}$$

Bài tập luyện tập

A data set has five-number summary $\text{Min} = 5$, $Q_1 = 12$, $\text{Median} = 18$, $Q_3 = 25$, $\text{Max} = 40$. Determine whether the maximum value 40 is an outlier.

Lời giải chi tiết

$\text{IQR} = 25 - 12 = 13$. Upper fence = $25 + 1.5(13) = 25 + 19.5 = 44.5$. Since $40 < 44.5$, the value 40 is **not** an outlier.

Bài tập luyện tập

In a box-and-whisker plot, the box itself (from one edge to the other) represents which portion of the data?

(A) The middle 50% (the IQR)

(C) The upper 25% only

(B) The full range

(D) The lower 25% only

Lời giải chi tiết

(A). The box spans from Q_1 to Q_3 , which by definition contains the middle 50% of the data (the interquartile range).

Bài tập luyện tập

A box-and-whisker plot has a much longer whisker and half-box above the median than below it. Describe the skewness of the data, and state whether the mean is more likely to be above or below the median.

Lời giải chi tiết

A longer upper whisker/half-box indicates the data is **right-skewed** (a tail of higher, more spread-out values). In a right-skewed distribution, the mean is pulled toward the tail, so the mean is more likely to be **above** the median.

Bài tập luyện tập

Find the mean, median, and mode of the data set 3, 6, 6, 9, 12, 15, 21.

Lời giải chi tiết

Mean = $\frac{3 + 6 + 6 + 9 + 12 + 15 + 21}{7} = \frac{72}{7} \approx 10.3$. Median (4th of 7 ordered values) = 9.
Mode = 6 (appears twice).

Bài tập luyện tập

A grouped data set has classes 0–10: frequency 4; 10–20: frequency 10; 20–30: frequency 6. Estimate the mean.

Lời giải chi tiết

Mid-interval values 5, 15, 25. $\sum fx = 4(5) + 10(15) + 6(25) = 20 + 150 + 150 = 320$. $\sum f = 20$.

$$\bar{x} \approx \frac{320}{20} = 16.0.$$

Bài tập luyện tập

Find the population variance and standard deviation of the data set 2, 5, 5, 8, 10.

Lời giải chi tiết

Mean = $\frac{2 + 5 + 5 + 8 + 10}{5} = \frac{30}{5} = 6$. Deviations: $-4, -1, -1, 2, 4$; squares: 16, 1, 1, 4, 16, summing to 38.

$$\sigma^2 = \frac{38}{5} = 7.6, \quad \sigma = \sqrt{7.6} \approx 2.76.$$

Bài tập luyện tập

A data set has mean 40 and standard deviation 6. Every value is transformed using $y = 2x + 5$. Find the new mean and new standard deviation.

(A) Mean 85, SD 12

(C) Mean 80, SD 12

(B) Mean 85, SD 17

(D) Mean 85, SD 6

Lời giải chi tiết

New mean = $2(40) + 5 = 85$. New SD = $|2|(6) = 12$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

If a constant 10 is added to every value in a data set (no scaling), which statement correctly describes the effect on the mean and standard deviation?

(A) Mean increases by 10; SD unchanged

(C) Both increase by 10

(B) Mean unchanged; SD increases by 10

(D) Both remain unchanged

Lời giải chi tiết

(A). Adding a constant shifts every value equally, so the mean shifts by that constant but the spread (SD) is unaffected.

Bài tập luyện tập

In a survey of 60 people, 35 like coffee, 28 like tea, and 15 like both. Find the probability that a randomly chosen person likes coffee or tea, and the probability that they like neither.

Lời giải chi tiết

$$P(\text{coffee} \cup \text{tea}) = \frac{35 + 28 - 15}{60} = \frac{48}{60} = 0.8. \quad P(\text{neither}) = 1 - 0.8 = 0.2.$$

Bài tập luyện tập

Events A and B are mutually exclusive, with $P(A) = 0.3$ and $P(B) = 0.45$. Find $P(A \cup B)$ and $P(A')$.

Lời giải chi tiết

Since mutually exclusive, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 0.3 + 0.45 = 0.75$. $P(A') = 1 - 0.3 = 0.7$.

Bài tập luyện tập

Given $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.5$, and $P(A \cap B) = 0.2$, are A and B mutually exclusive?

(A) Yes, since $P(A) + P(B) > 1$

(C) Cannot be determined

(B) No, since $P(A \cap B) \neq 0$

(D) Yes, by definition

Lời giải chi tiết

(B). Mutually exclusive events must have $P(A \cap B) = 0$; here $P(A \cap B) = 0.2 \neq 0$, so they are not mutually exclusive.

Bài tập luyện tập

A two-way table cross-tabulates eye colour and gender for 70 people: Male – Brown 18, Blue 12 (total 30); Female – Brown 22, Blue 18 (total 40). Find $P(\text{Blue} \mid \text{Female})$ and $P(\text{Female} \mid \text{Blue})$.

Lời giải chi tiết

$P(\text{Blue} \mid \text{Female}) = \frac{18}{40} = 0.45$. Total with Blue eyes = $12 + 18 = 30$, so $P(\text{Female} \mid \text{Blue}) = \frac{18}{30} = 0.6$.

Bài tập luyện tập

A card is drawn from a standard 52-card deck. Find $P(\text{King or Heart})$.

Lời giải chi tiết

There are 4 Kings, 13 Hearts, and 1 King of Hearts (the overlap).

$$P(\text{King} \cup \text{Heart}) = \frac{4 + 13 - 1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13} \approx 0.308.$$

Bài tập luyện tập

Two independent machines have daily failure probabilities 0.05 and 0.08. Find $P(\text{both fail})$ and $P(\text{neither fails})$.

Lời giải chi tiết

$P(\text{both fail}) = 0.05 \times 0.08 = 0.004$. $P(\text{neither fails}) = 0.95 \times 0.92 = 0.874$.

Bài tập luyện tập

A bag contains 4 red and 6 green balls. Two balls are drawn without replacement. Find $P(\text{both green})$.

(A) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{3}{10}$

(B) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{2}{5}$

Lời giải chi tiết

$P(\text{both green}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} = \frac{30}{90} = \frac{1}{3}$. (A).

Bài tập luyện tập

Using the bag from the previous question (4 red, 6 green, 10 total), find $P(\text{exactly one red})$ when two balls are drawn without replacement.

Lời giải chi tiết

$$P(\text{exactly one red}) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{48}{90} = \frac{8}{15} \approx 0.533.$$

Bài tập luyện tập

Given $P(A) = 0.4$, $P(B) = 0.3$, and $P(A \cap B) = 0.12$, determine whether A and B are independent.

Lời giải chi tiết

$$P(A) \times P(B) = 0.4 \times 0.3 = 0.12 = P(A \cap B), \text{ so } A \text{ and } B \text{ are independent.}$$

Bài tập luyện tập

A disease affects 1% of a population. A test correctly gives a positive result for 98% of people who have the disease, but also for 5% of people who do not. Given a positive result, find $P(\text{disease} \mid \text{positive})$, correct to 3 d.p.

Lời giải chi tiết

$$P(+) = (0.01)(0.98) + (0.99)(0.05) = 0.0098 + 0.0495 = 0.0593.$$

$$P(\text{disease} \mid +) = \frac{0.0098}{0.0593} \approx 0.165.$$

Bài tập luyện tập

A discrete random variable X has distribution $P(X = 1) = 0.2$, $P(X = 2) = 0.5$, $P(X = 3) = 0.3$. Find $E(X)$.

Lời giải chi tiết

$$E(X) = 1(0.2) + 2(0.5) + 3(0.3) = 0.2 + 1.0 + 0.9 = 2.1.$$

Bài tập luyện tập

Using the distribution of the previous question, find $E(X^2)$ and $\text{Var}(X)$.

Lời giải chi tiết

$$E(X^2) = 1(0.2) + 4(0.5) + 9(0.3) = 0.2 + 2.0 + 2.7 = 4.9.$$

$$\text{Var}(X) = 4.9 - 2.1^2 = 4.9 - 4.41 = 0.49.$$

Bài tập luyện tập

A raffle sells 200 tickets at \$2 each; one prize of \$150 is awarded to a randomly selected ticket. Find the expected profit for a person who buys one ticket.

Lời giải chi tiết

$P(\text{win}) = \frac{1}{200}$. Net if win: $150 - 2 = 148$; net if lose: -2 .

$$E(\text{profit}) = 148 \left(\frac{1}{200} \right) + (-2) \left(\frac{199}{200} \right) = 0.74 - 1.99 = -\$1.25.$$

Bài tập luyện tập

A game has $E(\text{profit}) = 0$. What is such a game called?

(A) A fair game

(C) An independent game

(B) A biased game

(D) A conditional game

Lời giải chi tiết

(A). A game where the expected profit is exactly zero is called a fair game.

Bài tập luyện tập

For $X \sim B(8, 0.4)$, find $P(X = 3)$, correct to 3 d.p.

Lời giải chi tiết

$$P(X = 3) = \binom{8}{3} (0.4)^3 (0.6)^5 = 56(0.064)(0.07776) \approx 0.279.$$

Bài tập luyện tập

For $X \sim B(8, 0.4)$, find the mean and variance of X .

Lời giải chi tiết

$$E(X) = np = 8(0.4) = 3.2. \quad \text{Var}(X) = np(1 - p) = 8(0.4)(0.6) = 1.92.$$

Bài tập luyện tập

A biased coin has $P(\text{heads}) = 0.6$. It is tossed 12 times. Find $P(\text{exactly 7 heads})$, correct to 3 d.p.

Lời giải chi tiết

$$P(X = 7) = \binom{12}{7} (0.6)^7 (0.4)^5 = 792(0.0279936)(0.01024) \approx 0.227.$$

Bài tập luyện tập

Which of the following is **not** a required condition for a binomial distribution?

- (A) A fixed number of trials
(B) A constant probability of success
(C) The trials must be dependent
(D) Only two possible outcomes per trial

Lời giải chi tiết

(C). A binomial setting requires the trials to be **independent**, not dependent.

Bài tập luyện tập

A factory finds 5% of items are defective. In a sample of 20 items, modelled as binomial, find the expected number of defective items and the standard deviation.

Lời giải chi tiết

$E(X) = 20(0.05) = 1$. $\text{Var}(X) = 20(0.05)(0.95) = 0.95$, so $\text{SD} = \sqrt{0.95} \approx 0.975$.

Bài tập luyện tập

$X \sim N(60, 10^2)$. Using $\Phi(1.28) = 0.8997$, find $P(X < 72.8)$.

Lời giải chi tiết

$z = \frac{72.8 - 60}{10} = 1.28$. $P(X < 72.8) = \Phi(1.28) = 0.8997$.

Bài tập luyện tập

Using the distribution of the previous question ($X \sim N(60, 10^2)$), find $P(X > 72.8)$.

- (A) 0.1003
(B) 0.8997
(C) 0.5000
(D) 0.0500

Lời giải chi tiết

$P(X > 72.8) = 1 - 0.8997 = 0.1003$. (A).

Bài tập luyện tập

$X \sim N(100, 15^2)$. Using $\Phi(1.96) = 0.9750$, find the value k such that $P(X < k) = 0.9750$.

Lời giải chi tiết

$k = 100 + 1.96(15) = 100 + 29.4 = 129.4$.

Bài tập luyện tập

Approximately what percentage of values in a normal distribution lie within 2 standard deviations of the mean (the empirical rule)?

- (A) 68% (C) 99.7%
(B) 95% (D) 50%

Lời giải chi tiết

(B). The empirical (68–95–99.7) rule states approximately 95% of values lie within 2 standard deviations of the mean.

Bài tập luyện tập

$X \sim N(40, 5^2)$. Using $\Phi(1.645) = 0.9500$, find the value k such that $P(X > k) = 0.05$.

Lời giải chi tiết

Since $P(X > k) = 0.05$, the upper 5% boundary has $z = 1.645$.

$$k = 40 + 1.645(5) = 40 + 8.225 \approx 48.2.$$

Bài tập luyện tập

Two judges rank 5 contestants with no ties: Judge 1's ranks are 1, 2, 3, 4, 5; Judge 2's ranks (for the same contestants, in the same order) are 2, 1, 3, 5, 4. Find r_s .

Lời giải chi tiết

d : -1, 1, 0, -1, 1; d^2 : 1, 1, 0, 1, 1, summing to 4. $n = 5$.

$$r_s = 1 - \frac{6(4)}{5(24)} = 1 - \frac{24}{120} = 1 - 0.2 = 0.8.$$

Bài tập luyện tập

Spearman's rank correlation coefficient is most appropriate for detecting which type of relationship between two variables?

- (A) Linear relationships only (C) Purely random relationships
(B) Monotonic relationships, not necessarily linear (D) Relationships that are always negative

Lời giải chi tiết

(B). Spearman's r_s measures the strength of any monotonic association, whether or not it is linear.

Bài tập luyện tập

Two rankings of 6 items give $\sum d^2 = 14$. Find r_s .

Lời giải chi tiết

$$r_s = 1 - \frac{6(14)}{6(35)} = 1 - \frac{84}{210} = 1 - 0.4 = 0.6.$$

Bài tập luyện tập

If $\sum d^2 = 0$ for a set of rankings, what does this imply about r_s , and what does that mean about the relationship between the two rankings?

Lời giải chi tiết

$r_s = 1 - 0 = 1$, meaning the two rankings agree perfectly (a perfect increasing monotonic relationship: as one rank increases, so does the other, every time).

Bài luyện nâng cao · HL

$X \sim \text{Po}(4)$. Find $P(X = 2)$, correct to 4 d.p.

Lời giải chi tiết

$$P(X = 2) = \frac{e^{-4}(4^2)}{2!} = \frac{0.018316(16)}{2} \approx 0.1465.$$

Bài luyện nâng cao · HL

Using the same distribution ($X \sim \text{Po}(4)$), find $P(X = 0)$, correct to 4 d.p.

Lời giải chi tiết

$$P(X = 0) = e^{-4} \approx 0.0183.$$

Bài luyện nâng cao · HL

$X \sim \text{Po}(6)$ and $Y \sim \text{Po}(3)$ are independent. State the distribution of $X + Y$, and its mean and variance.

Lời giải chi tiết

$X + Y \sim \text{Po}(9)$, so $E(X + Y) = \text{Var}(X + Y) = 9$.

Bài luyện nâng cao · HL

For a Poisson distribution with parameter λ , which of the following is true?

- | | |
|---|---|
| (A) $E(X) = \text{Var}(X) = \lambda$ | (C) $E(X) = \lambda, \text{Var}(X) = \lambda^2$ |
| (B) $E(X) = \lambda^2, \text{Var}(X) = \lambda$ | (D) Mean and variance are unrelated |

Lời giải chi tiết

(A). A defining feature of the Poisson distribution is that its mean and variance are both equal to λ .

Bài luyện nâng cao · HL

A battery manufacturer claims a mean life of 40 hours ($\sigma = 3$ hours, known). A sample of $n = 36$ batteries gives a mean life of 38.8 hours. Test $H_0: \mu = 40$ against $H_1: \mu < 40$ at the 5% level, using $z_{\text{crit}} = -1.645$.

Lời giải chi tiết

$$z = \frac{38.8 - 40}{3/\sqrt{36}} = \frac{-1.2}{0.5} = -2.4.$$

Since $-2.4 < -1.645$, reject H_0 : there is evidence the mean battery life is less than 40 hours.

Bài luyện nâng cao · HL

A Type I error in hypothesis testing occurs when:

- (A) H_0 is rejected when it is actually true (C) The test statistic is calculated incorrectly
(B) H_0 is not rejected when it is actually false (D) The sample size is too small

Lời giải chi tiết

(A). A Type I error is rejecting a true null hypothesis (a "false alarm").

Bài luyện nâng cao · HL

In a two-tailed test at the 5% significance level, the calculated p -value is 0.032. State the decision and briefly justify it.

Lời giải chi tiết

Since $0.032 < 0.05$, reject H_0 : there is significant evidence against H_0 at the 5% level.

Bài luyện nâng cao · HL

Observed frequencies for 4 categories (total 100) are 30, 25, 20, 25, with equal expected frequencies of 25 each. Find χ^2 , and state the conclusion at the 5% level using $df = 3$, critical value 7.815.

Lời giải chi tiết

$$\chi^2 = \frac{25}{25} + \frac{0}{25} + \frac{25}{25} + \frac{0}{25} = 1 + 0 + 1 + 0 = 2.0.$$

Since $2.0 < 7.815$, do not reject H_0 : the observed frequencies are consistent with the claimed equal distribution.

Bài luyện nâng cao · HL

A 2×2 contingency table (total 100) has observed values: row 1: 30, 20 (total 50); row 2: 20, 30 (total 50); columns total 50, 50. Find the expected frequencies, χ^2 , and state the conclusion at the 5% level using $df = 1$, critical value 3.841.

Lời giải chi tiết

All four expected frequencies are $\frac{50 \times 50}{100} = 25$.

$$\chi^2 = \frac{(30 - 25)^2}{25} + \frac{(20 - 25)^2}{25} + \frac{(20 - 25)^2}{25} + \frac{(30 - 25)^2}{25} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4.0.$$

Since $4.0 > 3.841$, reject H_0 : there is evidence of association between the row and column variables.

Bài luyện nâng cao · HL

For a chi-squared test of independence on an $r \times c$ contingency table, the degrees of freedom is:

(A) $r \times c$

(C) $r + c - 2$

(B) $(r - 1)(c - 1)$

(D) $rc - 1$

Lời giải chi tiết

(B).

Bài luyện nâng cao · HL

A goodness-of-fit test with 6 categories gives $\chi^2 = 10.2$. Using $df = 5$, critical value 11.070, state the conclusion at the 5% level.

Lời giải chi tiết

Since $10.2 < 11.070$, do not reject H_0 : the data is consistent with the claimed distribution.

Bài luyện nâng cao · HL

A sample of $n = 15$ ($df = 14$) gives a test statistic $t = 2.30$. Using the two-tailed critical value 2.145 ($\alpha = 0.05$), state the conclusion.

Lời giải chi tiết

Since $2.30 > 2.145$, reject H_0 .

Bài luyện nâng cao · HL

A manufacturer claims a mean fill volume of 50 ml. A sample of $n = 10$ gives $\bar{x} = 53.5$ ml, $s = 5$ ml. Test $H_0: \mu = 50$ against $H_1: \mu \neq 50$ at the 5% level, using $df = 9$, critical value 2.262.

Lời giải chi tiết

$$t = \frac{53.5 - 50}{5/\sqrt{10}} = \frac{3.5}{1.5811} \approx 2.214.$$

Since $|2.214| < 2.262$, do not reject H_0 : the evidence is not quite strong enough at the 5% level (a close call).

Bài luyện nâng cao · HL

Paired differences (before – after) for $n = 6$ subjects are 4, 2, 6, 3, 5, 4. Test at the 5% two-tailed level whether the mean difference is significantly different from 0, using $df = 5$, critical value 2.571.

Lời giải chi tiết

Mean $\bar{d} = \frac{24}{6} = 4$. Deviations: 0, -2, 2, -1, 1, 0; squares: 0, 4, 4, 1, 1, 0, summing to 10.

$$s_d^2 = \frac{10}{5} = 2, \quad s_d = \sqrt{2} \approx 1.41421.$$

$$t = \frac{4}{1.41421/\sqrt{6}} = \frac{4}{0.57735} \approx 6.928.$$

Since $6.928 > 2.571$, reject H_0 : there is a significant mean difference.

Bài luyện nâng cao · HL

The paired t-test is most appropriate when:

- | | |
|--|--|
| (A) Comparing two entirely independent samples | (C) Testing goodness-of-fit against a claimed distribution |
| (B) Comparing measurements taken on the same subjects before and after a treatment | (D) Testing independence in a contingency table |

Lời giải chi tiết

(B).

Bài luyện nâng cao · HL

A large sample ($n = 49$, $\sigma = 14$ known) gives $\bar{x} = 205$. Construct a 95% confidence interval for the population mean, using $z^* = 1.96$.

Lời giải chi tiết

$$\text{margin} = 1.96 \times \frac{14}{\sqrt{49}} = 1.96 \times 2 = 3.92.$$

$$CI = 205 \pm 3.92 = (201.08, 208.92).$$

Bài luyện nâng cao · HL

A small sample ($n = 15$, σ unknown, $s = 8$) gives $\bar{x} = 72$. Construct a 95% confidence interval for the population mean, using $df = 14$, $t^* = 2.145$.

Lời giải chi tiết

$$\text{margin} = 2.145 \times \frac{8}{\sqrt{15}} = 2.145 \times 2.0656 \approx 4.43.$$

$$CI = 72 \pm 4.43 = (67.57, 76.43).$$

Bài luyện nâng cao · HL

For the same sample data, a wider confidence interval results from:

- (A) A higher confidence level (C) A smaller margin of error
(B) A larger sample size (D) A lower confidence level

Lời giải chi tiết

(A). A higher confidence level requires a larger critical value, widening the interval (all else equal).

Bài luyện nâng cao · HL

A 95% confidence interval for a population mean is (48.2, 55.8). State the point estimate and the margin of error.

Lời giải chi tiết

Point estimate (midpoint) = $\frac{48.2 + 55.8}{2} = 52.0$. Margin of error = $\frac{55.8 - 48.2}{2} = 3.8$.

Mixed and Extended Problems**Ôn tập tổng hợp**

A retail chain uses stratified sampling across three branches with 200, 150, and 150 customers respectively (total 500), to select a total sample of 50 customers for a satisfaction survey.

- (a) Find the number of customers to sample from each branch.
(b) The resulting sample of 50 has a mean satisfaction score of 7.2 (out of 10) with standard deviation 1.5. Construct a 95% confidence interval for the true mean satisfaction score, using $z^* = 1.96$.

Lời giải chi tiết

(a) $\frac{200}{500}(50) = 20$, $\frac{150}{500}(50) = 15$, $\frac{150}{500}(50) = 15$. Check: $20 + 15 + 15 = 50$ ✓.

(b) margin = $1.96 \times \frac{1.5}{\sqrt{50}} = 1.96 \times 0.2121 \approx 0.416$.

$$CI = 7.2 \pm 0.416 = (6.78, 7.62).$$

Ôn tập tổng hợp

A bag contains 5 red, 3 blue, and 2 green counters (10 total). Two counters are drawn without replacement. To play, a customer pays a \$5 entry fee; if both counters drawn are the **same colour**, they win \$15 (a net profit of \$10); otherwise they win nothing (a net loss of \$5).

- (a) Find $P(\text{both same colour})$.
(b) Find the expected profit per game.

Lời giải chi tiết

$$(a) P(\text{both red}) = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{90}; P(\text{both blue}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{6}{90}; P(\text{both green}) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90}.$$

$$P(\text{same colour}) = \frac{20 + 6 + 2}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45} \approx 0.311.$$

$$(b) P(\text{different colours}) = 1 - \frac{14}{45} = \frac{31}{45}.$$

$$E(\text{profit}) = 10 \left(\frac{14}{45} \right) + (-5) \left(\frac{31}{45} \right) = \frac{140 - 155}{45} = \frac{-15}{45} \approx -\$0.33.$$

Ôn tập tổng hợp · HL

A simple random sample of 150 voters, drawn from the full electoral roll, is cross-tabulated by region and party preference:

	Party X	Party Y	Party Z	Total
North	25	20	15	60
South	20	30	40	90
Total	45	50	55	150

(a) State the sampling method used, and one advantage it has.

(b) Test at the 5% level whether region and party preference are independent, using $df = 2$, critical value 5.991.

Lời giải chi tiết

(a) Simple random sampling: every voter on the electoral roll has an equal chance of selection, minimising selection bias.

(b) Expected frequencies: $E_{N,X} = 18$, $E_{N,Y} = 20$, $E_{N,Z} = 22$, $E_{S,X} = 27$, $E_{S,Y} = 30$, $E_{S,Z} = 33$.

$$\chi^2 = \frac{(25 - 18)^2}{18} + \frac{(20 - 20)^2}{20} + \frac{(15 - 22)^2}{22} + \frac{(20 - 27)^2}{27} + \frac{(30 - 30)^2}{30} + \frac{(40 - 33)^2}{33}$$

$$\approx 2.722 + 0 + 2.227 + 1.815 + 0 + 1.485 \approx 8.25.$$

Since $8.25 > 5.991$, reject H_0 : region and party preference are associated at the 5% level.

Ôn tập tổng hợp · HL

An insurance company sells policies to 15 independent policyholders; the probability a given policyholder files a claim in a year is 0.08 (binomial model). Each claim costs the company \$3000; premium income is \$600 per policyholder per year.

(a) Find the expected number of claims and the standard deviation.

(b) Find $P(\text{exactly 2 claims})$, correct to 3 d.p.

(c) Find the company's expected annual profit across all 15 policyholders.

Lời giải chi tiết

(a) $E(X) = 15(0.08) = 1.2$. $\text{Var}(X) = 15(0.08)(0.92) = 1.104$, so $\text{SD}(X) = \sqrt{1.104} \approx 1.051$.

(b) $P(X = 2) = \binom{15}{2} (0.08)^2 (0.92)^{13} = 105(0.0064)(0.33826) \approx 0.227$.

(c) Premium income = $15(600) = 9000$. Expected claims cost = $1.2(3000) = 3600$.

$$\text{Expected profit} = 9000 - 3600 = \boxed{\$5400}.$$

Calculus

Mục tiêu Unit: Đạo hàm định nghĩa bằng giới hạn của tỉ số sai phân (from first principles) và ý nghĩa hình học là độ dốc tiếp tuyến; các quy tắc đạo hàm (luỹ thừa, tổng/hiệu, đạo hàm hàm mũ-log-lượng giác, quy tắc dây chuyền, quy tắc tích, quy tắc thương); phương trình tiếp tuyến và pháp tuyến, khoảng đồng biến/ngịch biến và phân loại điểm dừng; đạo hàm cấp hai, độ lõm và điểm uốn (kèm phản ví dụ khi $f'' = 0$ nhưng không phải điểm uốn); bài toán tối ưu hoá thực tế (vật liệu, diện tích, lợi nhuận); động học một chiều bằng đạo hàm (vận tốc, gia tốc, phân biệt độ dịch chuyển và quãng đường đi được); nguyên hàm (tích phân bất định) và hằng số $+C$; tích phân xác định, định lý cơ bản của giải tích, diện tích dưới đường cong (kể cả phần dưới trục hoành) và diện tích giữa hai đường cong, quy tắc hình thang; động học bằng tích phân; và các chủ đề HL: đạo hàm ẩn và bài toán tốc độ liên quan (related rates), thể tích khối tròn xoay và phép đổi biến khi tích phân, phương trình vi phân (trường hướng, phương pháp Euler, phương trình tách biến), và động học hai chiều bằng vectơ.

5.1 Limits and the Derivative from First Principles

5.1.1 The gradient of a curve and the idea of a limit

Unlike a straight line, a curve $y = f(x)$ does not have a single constant gradient – its steepness changes from point to point. To make sense of "the gradient of a curve at a point P ," consider a second point Q on the curve, close to P . The straight line joining P and Q is called a **chord** (or secant), and its gradient is easy to compute using the usual formula $\frac{\text{rise}}{\text{run}}$. As Q is chosen closer and closer to P along the curve, the chord PQ rotates and approaches a fixed limiting line – the **tangent** to the curve at P . The gradient of this tangent line is called the **gradient of the curve at P** .

This idea of a value "getting closer and closer to" a fixed number, without necessarily ever reaching it, is called a **limit**. Writing $P = (x, f(x))$ and $Q = (x + h, f(x + h))$ for a small (nonzero) number h , the gradient of chord PQ is

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

As $h \rightarrow 0$ (read: "as h tends to 0"), Q slides along the curve towards P , and this chord gradient tends to the gradient of the tangent at P .

To see this numerically before proving it algebraically, consider $f(x) = x^2$ at $x = 2$: the chord gradient $\frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \frac{4h + h^2}{h} = 4 + h$ equals 5 when $h = 1$, 4.1 when $h = 0.1$, 4.01 when $h = 0.01$, and 4.001 when $h = 0.001$ – visibly approaching the value 4 as h shrinks, matching $f'(2) = 2x|_{x=2} = 4$ found algebraically in Example 1 below. No single value of h ever gives the exact gradient at P – only the **limit** does.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Một đường cong $y = f(x)$ không có một độ dốc cố định như đường thẳng – độ dốc thay đổi theo từng điểm. Để định nghĩa "độ dốc tại một điểm P ," ta xét một điểm Q khác trên đường cong, gần P ; đường thẳng nối P và Q gọi là **dây cung** (chord/secant), có độ dốc tính được bình thường. Khi Q tiến **càng lúc càng gần** P dọc theo đường cong, dây cung PQ xoay dần và tiến tới một đường thẳng giới hạn cố định – **tiếp tuyến** tại P . Ý tưởng "tiến gần tới một giá trị mà không nhất thiết phải chạm tới nó" chính là khái niệm **giới hạn** (limit), nền tảng của toàn bộ giải

tích.

5.1.2 The derivative from first principles

The **derivative** of f at x , written $f'(x)$, is defined as the limit of the gradient of the chord as $h \rightarrow 0$:

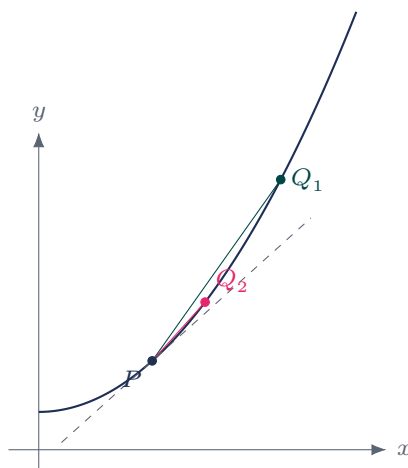
$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

provided this limit exists. Finding $f'(x)$ using this formula directly is called differentiating **from first principles**. Crucially, h is never actually set equal to 0 (that would make the fraction $\frac{0}{0}$, which is undefined) – instead, the expression must first be simplified algebraically (usually by expanding the numerator and cancelling a factor of h) so that the limit as $h \rightarrow 0$ can be evaluated directly on the simplified form.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm $f'(x)$ được định nghĩa là **giới hạn** của độ dốc dây cung khi $h \rightarrow 0$. Điểm mấu chốt: **không bao giờ được thay trực tiếp** $h = 0$ vào phân thức ban đầu (vì sẽ ra dạng $\frac{0}{0}$ vô nghĩa) – luôn phải **khai triển và rút gọn đại số trước** (thường bằng cách khai triển tử số rồi triệt tiêu nhân tử h ở mẫu), **rồi mới** lấy giới hạn khi $h \rightarrow 0$ trên biểu thức đã rút gọn.



As Q slides along the curve towards P (from Q_1 to Q_2 and beyond), the gradient of chord PQ approaches the gradient of the tangent line (grey, dashed) at P – this limiting gradient is the derivative $f'(x)$.

5.1.3 Differentiating polynomials from first principles

Ví dụ mẫu 1 • First principles: $f(x) = x^2$

Use the definition of the derivative to show that if $f(x) = x^2$, then $f'(x) = 2x$.

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h}.$$

Since $h \neq 0$ throughout this process, we may cancel a factor of h from numerator and denominator:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h).$$

Now, and only now, does it make sense to let $h \rightarrow 0$: the remaining expression $2x + h$ is a

perfectly ordinary algebraic expression, so

$$f'(x) = 2x + 0 = \boxed{2x}.$$

Ví dụ mẫu 2 · First principles: $f(x) = x^3$

Use the definition of the derivative to show that if $f(x) = x^3$, then $f'(x) = 3x^2$.

Expanding $(x + h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (3x^2 + 3xh + h^2).$$

As $h \rightarrow 0$, the terms $3xh$ and h^2 both tend to 0, leaving

$$f'(x) = \boxed{3x^2}.$$

(!) Lỗi thường gặp: Học sinh thường viết tắt sai bằng cách "thay $h = 0$ " ngay từ dòng đầu tiên (trước khi rút gọn), dẫn đến biểu thức $\frac{0}{0}$ không xác định. Trình tự **bắt buộc** luôn là: (1) khai triển $(x + h)^n$; (2) trừ x^n và rút gọn; (3) **chia hết** cho h (triệt tiêu nhân tử h chung); (4) **chỉ sau đó** mới cho $h \rightarrow 0$ trên biểu thức đã không còn h ở mẫu.

The same technique generalises to any positive integer power. Using the binomial expansion,

$$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + h^n,$$

so that

$$\frac{(x + h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + h^{n-1}.$$

Every term after the first contains at least one factor of h , so as $h \rightarrow 0$ every one of those terms vanishes, leaving exactly nx^{n-1} . This proves, directly from first principles, the general **power rule**:

For $f(x) = x^n$ (any positive integer n , and in fact any real number $n \neq 0$):

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khai triển nhị thức $(x + h)^n$ cho thấy mọi số hạng ngoại trừ số hạng đầu tiên $nx^{n-1}h$ đều chứa ít nhất một thừa số h bậc ≥ 2 ; sau khi chia cho h và cho $h \rightarrow 0$, tất cả các số hạng này triệt tiêu, chỉ còn lại đúng nx^{n-1} . Đây chính là cách chứng minh **quy tắc lũy thừa** (power rule)

$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ một cách chặt chẽ từ định nghĩa giới hạn, thay vì chỉ ghi nhớ công thức.

5.2 Rules of Differentiation

5.2.1 The power rule, and sum and difference rules

Power rule: $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ for any real $n \neq 0$ (derived in Section 1). **Constant multiple:** $\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$. **Sum/difference rule:** $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$. The derivative of a constant is 0.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc lũy thừa áp dụng được cho **mọi** số mũ thực (nguyên dương, nguyên âm, hoặc phân số) – luôn viết lại căn thức và phân thức dưới dạng lũy thừa ($\sqrt{x} = x^{1/2}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$) trước khi áp dụng công thức. Đạo hàm của một **tổng/hiệu** chỉ đơn giản là tổng/hiệu của từng đạo hàm thành phần – đạo hàm "phân phối" qua dấu cộng/trừ.

Ví dụ mẫu 3 • Power and sum rules with negative/fractional exponents

Differentiate $y = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 3 + 6x^{-2} - 4x^{1/2}$.

Applying the power rule term by term:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^2 - 10x + 7 + 0 - 12x^{-3} - 2x^{-1/2} = 12x^2 - 10x + 7 - \frac{12}{x^3} - \frac{2}{\sqrt{x}}.$$

5.2.2 Derivatives of exponential, logarithmic, and trigonometric functions

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x, \quad \frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \ (x > 0), \quad \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x, \quad \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x, \quad \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

(All angles in **radians**.) Notice e^x is the unique function that is its own derivative – this is precisely why e plays such a central role in calculus.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Năm công thức đạo hàm cơ bản này (hàm mũ, log tự nhiên, và ba hàm lượng giác) phải được **ghi nhớ chính xác**, vì hầu như mọi bài toán đạo hàm phức tạp hơn (quy tắc dây chuyền, tích, thương) đều xây dựng trên nền các công thức này. Lưu ý: các công thức đạo hàm lượng giác **chỉ đúng khi góc tính bằng radian** – một lý do quan trọng khác khiến radian là đơn vị bắt buộc trong giải tích.

Ví dụ mẫu 4 • Standard derivatives, evaluated numerically

Differentiate $y = 3e^x + 2 \ln x - 5 \sin x + \cos x$, and evaluate $\frac{dy}{dx}$ at $x = 1$, correct to 3 s.f.

$$\frac{dy}{dx} = 3e^x + \frac{2}{x} - 5 \cos x - \sin x.$$

At $x = 1$ (radians): $3e \approx 8.1548$, $\frac{2}{1} = 2$, $5 \cos 1 \approx 2.7015$, $\sin 1 \approx 0.8415$.

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} \approx 8.1548 + 2 - 2.7015 - 0.8415 \approx 6.61 \text{ (3 s.f.)}.$$

5.2.3 The chain rule

If $y = f(g(x))$ is a **composite function**, the **chain rule** states

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x)) \cdot g'(x),$$

i.e. (in Leibniz notation, with $u = g(x)$) $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$: differentiate the "outer" function, leaving the "inner" function unchanged, then multiply by the derivative of the inner function.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc dây chuyền dùng khi có một **hàm hợp** (hàm bên trong một hàm khác): đạo hàm hàm **ngoài** trước (giữ nguyên phần bên trong), rồi **nhân thêm** đạo hàm của hàm **trong**. Đây là quy tắc bị áp dụng sai nhiều nhất trong toàn bộ chương trình giải tích – lỗi phổ biến nhất là **quên nhân đạo hàm hàm trong**.

Ví dụ mẫu 5 • The chain rule

Differentiate: (a) $y = (3x^2 - 4x + 1)^5$; (b) $y = \sin(4x^2 + 1)$; (c) $y = e^{-2x^3}$.

(a) Outer function u^5 , inner $u = 3x^2 - 4x + 1$ (so $u' = 6x - 4$):

$$\frac{dy}{dx} = 5(3x^2 - 4x + 1)^4(6x - 4).$$

(b) Outer $\sin u$, inner $u = 4x^2 + 1$ (so $u' = 8x$):

$$\frac{dy}{dx} = 8x \cos(4x^2 + 1).$$

(c) Outer e^u , inner $u = -2x^3$ (so $u' = -6x^2$):

$$\frac{dy}{dx} = -6x^2 e^{-2x^3}.$$

(!) **Lỗi thường gặp:** Lỗi phổ biến nhất khi áp dụng quy tắc dây chuyền là **quên nhân đạo hàm của hàm bên trong**: ví dụ tính $\frac{d}{dx} \sin(3x)$ và chỉ viết ra $\cos(3x)$ – đúng phải là $3 \cos(3x)$ (nhân thêm đạo hàm của $3x$ là 3). Luôn tự hỏi: "hàm bên trong (argument) là gì, và đạo hàm của nó là gì?" trước khi kết luận.

5.2.4 The product rule

If $y = f(x)g(x)$, the **product rule** states

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

In words: (derivative of first) $\times$ (second) + (first) $\times$ (derivative of second).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc tích dùng khi hai hàm được **nhân** với nhau (không phải hàm hợp). Công thức: đạo hàm hàm thứ nhất nhân hàm thứ hai, **cộng** hàm thứ nhất nhân đạo hàm hàm thứ hai. Lỗi phổ

biến: nhầm tưởng $(fg)' = f'g'$ (nhân hai đạo hàm) – điều này **sai**, phải luôn dùng đúng công thức tổng hai số hạng ở trên.

Ví dụ mẫu 6 • The product rule

Differentiate: (a) $y = x^2 e^x$; (b) $y = x^3 \sin x$.

(a) $f = x^2$ ($f' = 2x$), $g = e^x$ ($g' = e^x$):

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^x + x^2e^x = e^x(2x + x^2) = xe^x(x + 2).$$

(b) $f = x^3$ ($f' = 3x^2$), $g = \sin x$ ($g' = \cos x$):

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$$

5.2.5 The quotient rule

If $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, the **quotient rule** states

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

Note the order in the numerator matters (it is *not* symmetric): "derivative of top times bottom, minus top times derivative of bottom, all over bottom squared."

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc thương dùng khi một hàm được **chia** cho hàm khác. Vì phép trừ ở tử số **không đối xứng**, thứ tự rất quan trọng: luôn là (đạo hàm tử)×(mẫu) – (tử)×(đạo hàm mẫu), tất cả chia cho (mẫu)². Đảo ngược thứ tự trừ là lỗi rất phổ biến khi mới học quy tắc này.

Ví dụ mẫu 7 • The quotient rule

Differentiate $y = \frac{2x + 1}{x^2 + 3}$.

$f = 2x + 1$ ($f' = 2$), $g = x^2 + 3$ ($g' = 2x$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2(x^2 + 3) - (2x + 1)(2x)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2x^2 + 6 - 4x^2 - 2x}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2x^2 - 2x + 6}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2(x^2 + x - 3)}{(x^2 + 3)^2}.$$

Ví dụ mẫu 8 • Combining the chain and quotient rules

Differentiate $y = \frac{(2x + 1)^3}{\ln x}$.

Let $f = (2x + 1)^3$; by the chain rule $f' = 3(2x + 1)^2 \cdot 2 = 6(2x + 1)^2$. Let $g = \ln x$; $g' = \frac{1}{x}$. By the quotient rule:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6(2x + 1)^2 \ln x - (2x + 1)^3 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{(2x + 1)^2 \left[6 \ln x - \frac{2x + 1}{x} \right]}{(\ln x)^2},$$

where in the last step the common factor $(2x + 1)^2$ was taken out of the numerator to present the answer more compactly.

Choosing which differentiation rule to use

Given an unfamiliar expression, ask, in order: Is it a **sum or difference** of simpler terms? Apply the sum/difference rule term by term. Is it a single function "wrapped around" another (e.g. $\sin(\dots)$, $(\dots)^n$, $e^{(\dots)}$)? Use the **chain rule**. Is it a **product** of two clearly different factors? Use the **product rule**. Is it one expression **divided by** another? Use the **quotient rule**. Many expressions (as in Example 8) require **more than one** rule applied together – always identify the outermost structure of the expression first, then work inward.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi gặp một biểu thức chưa quen, hãy tự hỏi **theo thứ tự**: đây có phải **tổng/hiệu** của các số hạng đơn giản không (dùng quy tắc tổng/hiệu cho từng số hạng)? Đây có phải một hàm "bọc quanh" một hàm khác không (dùng quy tắc dây chuyền)? Đây có phải **tích** của hai biểu thức rõ ràng khác nhau không (dùng quy tắc tích)? Đây có phải một biểu thức **chia** cho biểu thức khác không (dùng quy tắc thương)? Nhiều biểu thức cần **kết hợp nhiều quy tắc** cùng lúc (như Example 8) – luôn xác định **cấu trúc ngoài cùng** của biểu thức trước, rồi đi dần vào bên trong.

5.3 Tangents, Normals, and Increasing/Decreasing Functions

5.3.1 Equations of tangent and normal lines

At a point $(a, f(a))$ on a curve, the **tangent line** has gradient $f'(a)$ and equation

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

The **normal line** is perpendicular to the tangent at the same point, so (provided $f'(a) \neq 0$) it has gradient $-\frac{1}{f'(a)}$ and equation

$$y - f(a) = -\frac{1}{f'(a)}(x - a).$$

(If $f'(a) = 0$, the tangent is horizontal, $y = f(a)$, and the normal is vertical, $x = a$.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương trình tiếp tuyến dùng **chính độ dốc** $f'(a)$ tại điểm chạm; phương trình pháp tuyến (đường vuông góc với tiếp tuyến tại cùng điểm đó) dùng **ngược đảo âm** của độ dốc tiếp tuyến, vì hai đường vuông góc có tích hai độ dốc bằng -1 . Luôn tính $f(a)$ (toạ độ y của điểm chạm) và $f'(a)$ (độ dốc) trước khi viết phương trình đường thẳng dạng điểm-độ dốc.

Ví dụ mẫu 9 • Tangent and normal to a cubic

Find the equations of the tangent and normal to $y = x^3 - 3x^2 + 2$ at the point where $x = 1$. $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$, so the point of contact is $(1, 0)$. $f'(x) = 3x^2 - 6x$, so $f'(1) = 3 - 6 = -3$.

$$\text{Tangent: } y - 0 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 3.$$

The normal gradient is the negative reciprocal of -3 , namely $\frac{1}{3}$:

$$\text{Normal: } y - 0 = \frac{1}{3}(x - 1) \implies y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}.$$

Ví dụ mẫu 9b · A tangent parallel to a given line

Find the point on the curve $y = x^2 - 6x + 5$ where the tangent is parallel to the line $y = 2x - 3$. Two lines are parallel exactly when they share the same gradient, so we need $f'(x) = 2$:

$$f'(x) = 2x - 6 = 2 \implies x = 4.$$

$f(4) = 16 - 24 + 5 = -3$, so the point is $(4, -3)$, and the tangent there is $y + 3 = 2(x - 4) \implies y = 2x - 11$ - indeed parallel to $y = 2x - 3$ (same gradient, different intercept).

5.3.2 Increasing and decreasing functions; stationary points

A function f is **increasing** on an interval where $f'(x) > 0$, and **decreasing** where $f'(x) < 0$. A **stationary point** occurs where $f'(x) = 0$ (the tangent is horizontal there). **First derivative test**: at a stationary point $x = a$, if f' changes sign from $+$ to $-$, f has a **local maximum** at a ; if f' changes from $-$ to $+$, f has a **local minimum** at a ; if f' does not change sign, a is neither (a "horizontal inflection").

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Dấu của $f'(x)$ cho biết hàm số đang **tăng** ($f' > 0$) hay **giảm** ($f' < 0$). Tại điểm dừng ($f' = 0$), **kiểm tra dấu đổi** của f' ngay trước và ngay sau điểm đó: đổi từ dương sang âm $\implies$ cực đại địa phương; đổi từ âm sang dương $\implies$ cực tiểu địa phương; **không đổi dấu** $\implies$ không phải cực trị (điểm uốn nằm ngang).

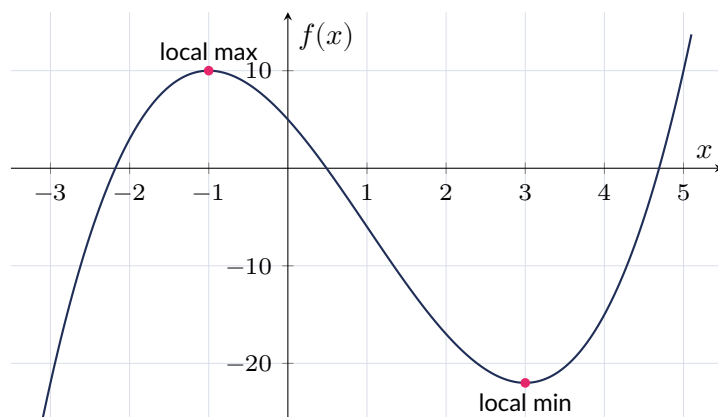
Ví dụ mẫu 10 · Stationary points via the first derivative test

For $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, find the stationary points, classify each using the sign of f' , and state the intervals of increase and decrease.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1).$$

Stationary points at $x = -1$ and $x = 3$: $f(-1) = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$ and $f(3) = 27 - 27 - 27 + 5 = -22$.

Testing the sign of $f'(x) = 3(x - 3)(x + 1)$: at $x = -2$, $f' = 3(-5)(-1) = 15 > 0$; at $x = 0$, $f' = 3(-3)(1) = -9 < 0$; at $x = 4$, $f' = 3(1)(5) = 15 > 0$. So f is increasing on $(-\infty, -1)$, decreasing on $(-1, 3)$, increasing on $(3, \infty)$: f' changes $+$ $\rightarrow$ $-$ at $x = -1$ (**local max** $(-1, 10)$) and $-$ $\rightarrow$ $+$ at $x = 3$ (**local min** $(3, -22)$).



The graph of $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ (Example 10): increasing on $(-\infty, -1)$, decreasing on $(-1, 3)$, increasing again on $(3, \infty)$, giving a local maximum at $(-1, 10)$ and a local minimum at $(3, -22)$.

5.4 Second Derivatives, Concavity, and Points of Inflection

5.4.1 The second derivative test

The **second derivative** $f''(x)$ is the derivative of $f'(x)$. **Second derivative test:** at a stationary point $x = a$ (where $f'(a) = 0$): if $f''(a) > 0$, f has a **local minimum** at a ; if $f''(a) < 0$, f has a **local maximum** at a ; if $f''(a) = 0$, the test is **inconclusive** and the first derivative (sign-change) test must be used instead.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kiểm tra đạo hàm cấp hai là cách **nhANH** để phân loại điểm dừng, thay thế cho việc xét dấu f' ở hai phía: $f''(a) > 0$ (đường cong lõm lên tại đó) $\Rightarrow$ cực tiểu; $f''(a) < 0$ (lõm xuống) $\Rightarrow$ cực đại. Nếu $f''(a) = 0$, phép thử này **không kết luận được gì** – bắt buộc quay lại dùng phép thử dấu f' (Section 3).

Ví dụ mẫu 11 • The second derivative test

For $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ (as in Example 10), use the second derivative test to classify the stationary points at $x = -1$ and $x = 3$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9, \text{ so } f''(x) = 6x - 6.$$

$$f''(-1) = 6(-1) - 6 = -12 < 0 \Rightarrow \text{local max at } x = -1,$$

$$f''(3) = 6(3) - 6 = 12 > 0 \Rightarrow \text{local min at } x = 3,$$

exactly matching the conclusions of the first derivative test in Example 10.

5.4.2 Concavity and points of inflection

A curve is **concave up** on an interval where $f''(x) > 0$ (it curves upward, like a "smile"; tangent lines lie below the curve); **concave down** where $f''(x) < 0$ (like a "frown"; tangent lines lie above the curve). A **point of inflection** is a point where the concavity **genuinely changes** – this requires $f''(x) = 0$ **and** a real sign change in f'' on either side of that point. $f''(x) = 0$ alone is **not sufficient**: the sign change must be verified.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

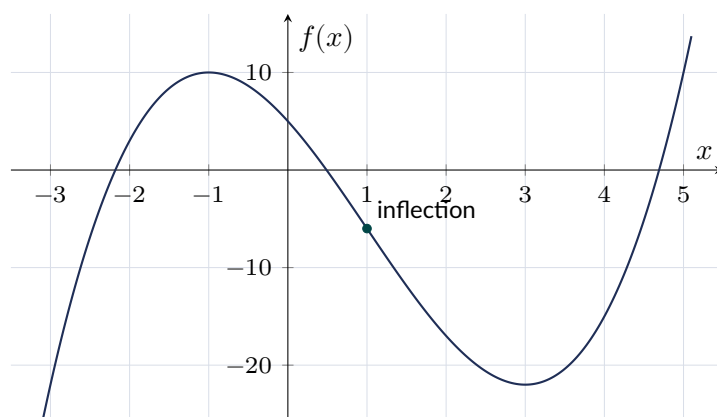
Độ lõm (concavity) do **đạo hàm cấp hai** quyết định: $f'' > 0$ là lõm lên (concave up), $f'' < 0$ là

lõm xuống (concave down). Điểm uốn (point of inflection) là nơi độ lõm **thực sự đổi** từ lõm lên sang lõm xuống (hoặc ngược lại) – điều kiện $f''(x) = 0$ **chỉ là cần, chưa đủ**: bắt buộc phải **kiểm tra dấu f'' ở hai bên điểm đó** để xác nhận có đổi dấu thật hay không.

Ví dụ mẫu 12 · Finding a point of inflection

Find the point of inflection of $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$, and verify that the concavity genuinely changes there.

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$. Check the sign of f'' on either side: $f''(0) = -6 < 0$ (concave down), $f''(2) = 6 > 0$ (concave up). Since f'' does change sign at $x = 1$, this is a genuine point of inflection. $f(1) = 1 - 3 - 9 + 5 = -6$, so the point of inflection is $(1, -6)$.



The same curve $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ is concave down for $x < 1$ and concave up for $x > 1$ (Example 12): a genuine point of inflection at $(1, -6)$, exactly where the concavity switches.

Ví dụ mẫu 12b · A counterexample: $f'' = 0$ without an inflection point

Show that $f(x) = x^4$ has $f''(0) = 0$, but that $x = 0$ is **not** a point of inflection.

$f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$. Indeed $f''(0) = 0$. However, $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ for **every** real x – it is never negative, so the concavity never actually changes; the curve is concave up on both sides of $x = 0$ (and only touches zero curvature momentarily at $x = 0$ itself). Hence $x = 0$ is **not** a point of inflection, despite satisfying $f''(0) = 0$. (In fact, since $f'(x) = 4x^3 < 0$ for $x < 0$ and $f'(x) > 0$ for $x > 0$, the first derivative test shows $x = 0$ is actually a local – and global – minimum.)

(!) Lỗi thường gặp: $f''(a) = 0$ **không tự động** suy ra $x = a$ là điểm uốn – đây là một trong những lỗi khái niệm phổ biến nhất của chương giải tích. Ví dụ $f(x) = x^4$ có $f''(0) = 0$ nhưng $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ với mọi x , tức là **không hề đổi dấu** quanh $x = 0$. Luôn thực hiện bước kiểm tra dấu f'' ở **cả hai phía** của nghiệm $f''(x) = 0$ trước khi kết luận đó là điểm uốn.

5.4.3 An application: the point of diminishing returns

Điểm bắt đầu giảm tốc độ tăng trưởng

In many applied contexts (revenue, production output, the spread of information), an inflection point marks the **point of diminishing returns**: the quantity itself is *still increasing*, but its *rate* of increase has started to decline. Concretely, if $R(t)$ models a growing quantity, the point of

diminishing returns occurs where $R''(t) = 0$ with a genuine sign change – this is **not** the same as where $R(t)$ itself stops increasing (that would instead be a stationary point of R , found from $R'(t) = 0$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong nhiều bối cảnh thực tế (doanh thu, sản lượng, mức độ lan truyền thông tin), điểm uốn đánh dấu "điểm bắt đầu giảm tốc độ tăng trưởng" (point of diminishing returns): đại lượng **vẫn đang tăng**, nhưng **tốc độ tăng** đã bắt đầu chậm lại. Đây là điểm mà $R''(t) = 0$ và đổi dấu thật – **khác hoàn toàn** với điểm mà $R(t)$ ngừng tăng (đó lại là điểm dừng của R , tìm từ $R'(t) = 0$). Phân biệt rõ hai khái niệm này rất quan trọng trong các bài toán ứng dụng thực tế.

Ví dụ mẫu 12c · Point of diminishing returns

Revenue from an advertising campaign after t weeks is modelled by $R(t) = -t^3 + 18t^2 + 10$ (in thousands of dollars), $0 \leq t \leq 15$. Find the point of diminishing returns, and interpret it.

$R'(t) = -3t^2 + 36t$ (the rate of revenue growth). $R''(t) = -6t + 36 = 0 \Rightarrow t = 6$. Checking the sign change: $R''(5) = 6 > 0$ (rate of growth still accelerating), $R''(7) = -6 < 0$ (rate of growth now decelerating) – a genuine inflection.

$$R(6) = -216 + 18(36) + 10 = -216 + 648 + 10 = 442.$$

So at $t = 6$ weeks, revenue is \$442,000: this is the point of diminishing returns. Crucially, revenue is **still increasing** at $t = 6$ (since $R'(6) = -3(36) + 36(6) = 108 > 0$) – it is only the *rate* of that increase that has begun to slow.

5.5 Optimization Problems

5.5.1 A general strategy for optimization

Chiến lược giải bài toán tối ưu hoá

1. Identify the quantity to be maximised or minimised, and write it as an **objective function** of two (or more) variables.
2. Use the given **constraint** to express all but one variable in terms of a single variable, and substitute, reducing the objective function to a function of **one** variable.
3. Differentiate the resulting one-variable function, set the derivative equal to 0, and solve for the critical value(s).
4. **Justify** whether each critical value gives a maximum or a minimum (first derivative sign-change test, second derivative test, or by checking the domain endpoints/behaviour).
5. Answer the original question, including units, and (if required) back-substitute to find any other requested quantities.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Chiến lược giải bài toán tối ưu hoá luôn theo đúng 5 bước: (1) viết **hàm mục tiêu** theo ≥ 2 biến; (2) dùng **ràng buộc** đã cho để rút một biến theo biến còn lại, đưa về hàm **một biến**; (3) đạo hàm, cho bằng 0, giải tìm điểm tới hạn; (4) **bắt buộc biện luận** đó là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất (bằng dấu f' , dấu f'' , hoặc so sánh với biên miền xác định); (5) trả lời đúng câu hỏi ban

đầu kèm đơn vị. Bỏ qua bước biện luận (bước 4) là lỗi bị trừ điểm nặng nhất trong dạng bài này.

Ví dụ mẫu 13 · Minimizing material for a fixed volume

An open-top cylindrical can must hold a volume of 500 cm^3 . Find the radius and height that minimize the surface area of material used, and find this minimum surface area, correct to 3 s.f.

Let r be the radius and h the height. **Constraint:** $V = \pi r^2 h = 500 \Rightarrow h = \frac{500}{\pi r^2}$.

Objective (open top: base circle plus curved side only):

$$SA(r) = \pi r^2 + 2\pi r h = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{500}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{1000}{r}.$$

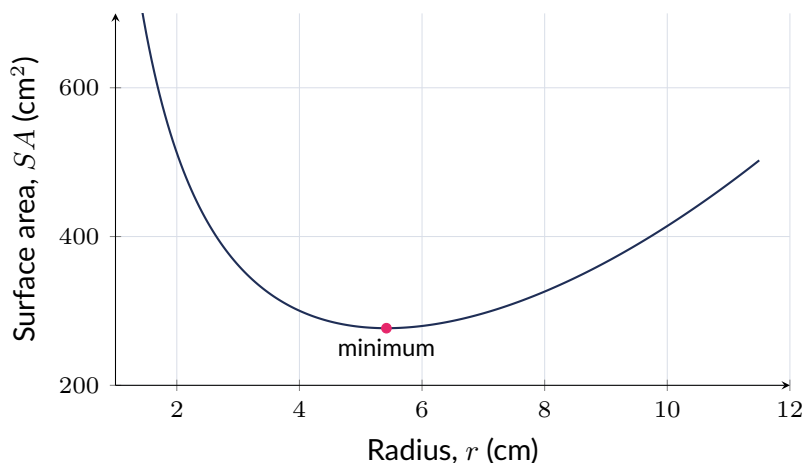
$$SA'(r) = 2\pi r - \frac{1000}{r^2} = 0 \Rightarrow 2\pi r^3 = 1000 \Rightarrow r^3 = \frac{500}{\pi} \approx 159.15 \Rightarrow r \approx 5.419 \text{ cm}.$$

Justification: $SA''(r) = 2\pi + \frac{2000}{r^3} > 0$ for every $r > 0$, so this critical value is genuinely a minimum.

$$h = \frac{500}{\pi(5.419)^2} \approx 5.419 \text{ cm} \quad (\text{in fact } h = r \text{ exactly at the optimum, since } V = \pi r^3 \text{ there}).$$

$$SA_{\min} = \pi(5.419)^2 + \frac{1000}{5.419} \approx 92.3 + 184.5 \approx 277 \text{ cm}^2 \text{ (3 s.f.)}.$$

So $r \approx 5.42 \text{ cm}$, $h \approx 5.42 \text{ cm}$, and the minimum surface area is $\approx 277 \text{ cm}^2$.



Surface area $SA(r) = \pi r^2 + 1000/r$ of the open-top can (Example 13) as a function of radius: the minimum occurs at $r \approx 5.42 \text{ cm}$, giving $SA \approx 277 \text{ cm}^2$.

Ví dụ mẫu 14 · Maximizing area with fixed fencing

A farmer has 80 m of fencing to enclose a rectangular pen against an existing straight wall, so fencing is needed only on the side parallel to the wall and the two perpendicular sides. Find the dimensions that maximize the enclosed area, and state the maximum area.

Let x be the side parallel to the wall and y each perpendicular side. **Constraint:** $x + 2y = 80 \Rightarrow$

$$x = 80 - 2y.$$

$$A(y) = xy = (80 - 2y)y = 80y - 2y^2.$$

$$A'(y) = 80 - 4y = 0 \Rightarrow y = 20, \quad A''(y) = -4 < 0 \text{ (confirms a maximum).}$$

$x = 80 - 2(20) = 40$. Maximum area: $A = 40 \times 20 = \boxed{800 \text{ m}^2}$, achieved with $x = 40$ m (parallel to the wall) and $y = 20$ m (each perpendicular side).

Ví dụ mẫu 15 · Maximizing profit from a demand function

A company's demand function is $p = 120 - 2x$ (selling price in dollars when x units are sold), and its total cost is $C(x) = 500 + 20x + 0.5x^2$ dollars. Find the number of units that maximizes profit, and the maximum profit.

Revenue $R(x) = px = 120x - 2x^2$. Profit:

$$P(x) = R(x) - C(x) = (120x - 2x^2) - (500 + 20x + 0.5x^2) = -2.5x^2 + 100x - 500.$$

$$P'(x) = -5x + 100 = 0 \Rightarrow x = 20, \quad P''(x) = -5 < 0 \text{ (confirms a maximum).}$$

$$P(20) = -2.5(400) + 100(20) - 500 = -1000 + 2000 - 500 = \boxed{500}.$$

Maximum profit is \$500, achieved by selling $x = 20$ units at price $p = 120 - 2(20) = \$80$ each. (Check: $R(20) = 1600$, $C(20) = 500 + 400 + 200 = 1100$, profit = $1600 - 1100 = 500$ ✓.)

Ví dụ mẫu 15b · A closed cylinder, contrasted with the open-top can

A **closed** cylindrical can (with both a top and a bottom) must hold a volume of 400 cm^3 . Find the radius minimizing the total surface area, correct to 3 s.f.

$V = \pi r^2 h = 400 \Rightarrow h = \frac{400}{\pi r^2}$. Now **both** circular ends contribute:

$$SA(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{800}{r}.$$

$$SA'(r) = 4\pi r - \frac{800}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \frac{200}{\pi} \approx 63.66 \Rightarrow r \approx 3.99 \text{ cm (3 s.f.).}$$

$SA''(r) = 4\pi + \frac{1600}{r^3} > 0$ confirms a minimum. $h = \frac{400}{\pi(3.99)^2} \approx 7.99 \text{ cm}$ – notice $h \approx 2r$ here, in contrast to Example 13's open-top can, where the optimum instead gave $h = r$. Closed cylinders are most efficient when the height equals the **diameter**, not the radius.

(!) Lỗi thường gặp: Trong bài toán tối ưu hoá, luôn **biện luận rõ ràng** điểm tới hạn tìm được là giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất (dùng dấu f'' hoặc dấu đổi của f') – chỉ tìm ra $f'(x) = 0$ rồi dừng lại **không đủ**. Ngoài ra, luôn kiểm tra điểm tới hạn có **nằm trong miền khả thi** của bài toán thực tế hay không (ví dụ bán kính, chiều dài không thể âm) – một nghiệm đại số hợp lệ nhưng vô nghĩa về mặt vật lý phải bị loại.

5.6 Kinematics: Displacement, Velocity, and Acceleration

5.6.1 Velocity and acceleration as derivatives

For a particle moving along a line with displacement $s(t)$ at time t : **velocity** is $v(t) = s'(t)$, and **acceleration** is $a(t) = v'(t) = s''(t)$. Interpreting the signs: $v > 0$ means moving in the positive direction, $v < 0$ means moving in the negative direction, and $v = 0$ means momentarily (or permanently) at rest. The particle **changes direction** exactly when $v(t) = 0$ and v changes sign there (the same sign-change idea as the first derivative test, one level up).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vận tốc $v(t)$ là đạo hàm bậc nhất của độ dịch chuyển $s(t)$; gia tốc $a(t)$ là đạo hàm bậc hai của $s(t)$ (hay đạo hàm bậc nhất của $v(t)$). Dấu của v cho biết **hướng chuyển động** (dương/âm ứng với chiều dương/âm đã chọn); vật **đổi hướng** chính xác khi $v(t) = 0$ và v **thực sự đổi dấu** tại đó – hoàn toàn tương tự việc xét điểm dừng của f bằng dấu f' , chỉ khác là áp dụng lên một bậc đạo hàm cao hơn.

Ví dụ mẫu 16 · Velocity, direction, and distance versus displacement

A particle moves along a line so that its displacement (m) from a fixed origin at time t seconds ($t \geq 0$) is $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$. (a) Find $v(t)$ and $a(t)$. (b) Find when the particle is at rest. (c) Determine when it changes direction. (d) Find the total distance travelled during the first 4 seconds, and compare it with the displacement over the same interval.

(a) $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$; $a(t) = 6t - 12$.

(b) $v(t) = 0$ at $t = 1$ and $t = 3$.

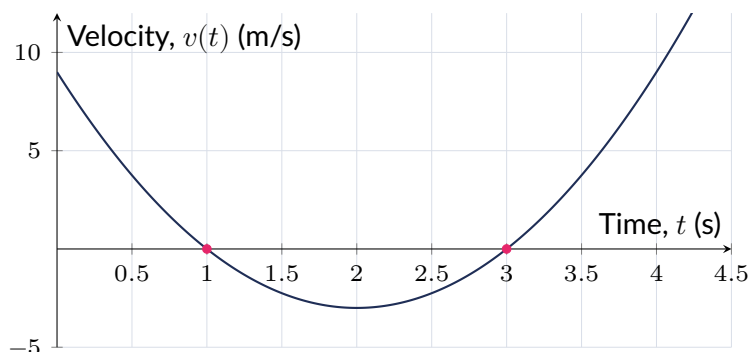
(c) Sign of v : $v(0) = 9 > 0$, $v(2) = 3(1)(-1) = -3 < 0$, $v(4) = 3(3)(1) = 9 > 0$. So the particle moves in the positive direction on $[0, 1)$, negative on $(1, 3)$, positive again on $(3, \infty)$ – it changes direction at both $t = 1$ and $t = 3$.

(d) $s(0) = 0$, $s(1) = 1 - 6 + 9 = 4$, $s(3) = 27 - 54 + 27 = 0$, $s(4) = 64 - 96 + 36 = 4$.

$$\text{Distance} = |4 - 0| + |0 - 4| + |4 - 0| = 4 + 4 + 4 = \boxed{12 \text{ m}},$$

$$\underbrace{|\{z\}|}_{[0,1]} \quad \underbrace{|\{z\}|}_{[1,3]} \quad \underbrace{|\{z\}|}_{[3,4]}$$

whereas the net **displacement** over $[0, 4]$ is simply $s(4) - s(0) = 4 - 0 = 4 \text{ m}$ – a very different number from the total distance travelled.



Velocity $v(t) = 3(t-1)(t-3)$ for the particle of Example 16: $v > 0$ (moving positively) on $(0, 1)$ and $(3, \infty)$, $v < 0$ (moving negatively) on $(1, 3)$; the particle changes direction at $t = 1$ and $t = 3$.

5.7 Introduction to Integration

5.7.1 The indefinite integral as an antiderivative

The **indefinite integral** $\int f(x) dx = F(x) + C$, where $F'(x) = f(x)$ and C is an arbitrary **constant of integration** (since the derivative of any constant is 0, infinitely many antiderivatives all differ only by a constant). Standard results:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Tích phân bất định (nguyên hàm) là phép **ngược** của đạo hàm: tìm $F(x)$ sao cho $F'(x) = f(x)$. Vì đạo hàm của **bất kỳ** hằng số nào cũng bằng 0, luôn phải cộng thêm **hằng số** C vào kết quả – thiếu C là lỗi bị trừ điểm ở **mọi** bài toán tích phân bất định trong đề thi IB.

Ví dụ mẫu 17 · A general antiderivative

Find $\int (6x^2 - 4x + 5) dx$.

$$\int (6x^2 - 4x + 5) dx = 2x^3 - 2x^2 + 5x + C.$$

5.7.2 Finding a particular antiderivative

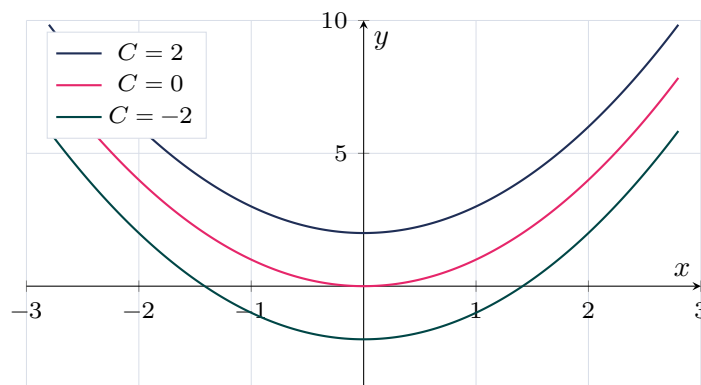
Ví dụ mẫu 17b · Using an initial condition

A curve has gradient function $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x + 1$, and passes through the point $(2, 5)$. Find y in terms of x .

$$y = \int (3x^2 - 4x + 1) dx = x^3 - 2x^2 + x + C.$$

Substituting $(2, 5)$: $8 - 8 + 2 + C = 5 \Rightarrow 2 + C = 5 \Rightarrow C = 3$.

$$y = x^3 - 2x^2 + x + 3.$$



Three antiderivatives of $f(x) = 2x$: the curves $y = x^2 + C$ for $C = 2, 0, -2$ are simply vertical shifts of one another, all sharing the same gradient $2x$ at every value of x – exactly why an arbitrary constant C must always be included in an indefinite integral.

(!) Lỗi thường gặp: Quên cộng hằng số $+C$ là lỗi phổ biến nhất khi tìm **tích phân bất định** – ngay cả khi đề bài không cho điều kiện ban đầu để tìm C cụ thể, câu trả lời **vẫn phải** chứa $+C$ ở dạng tổng quát. Chỉ khi đề cho một điểm cụ thể trên đường cong (điều kiện ban đầu) mới có thể thay số để giải ra giá trị C chính xác.

5.8 Definite Integrals and Areas

5.8.1 The fundamental theorem of calculus

Fundamental Theorem of Calculus: if $F'(x) = f(x)$, then

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a).$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý cơ bản của giải tích cho phép tính **tích phân xác định** chỉ bằng cách tìm một nguyên hàm $F(x)$ bất kỳ (không cần $+C$ vì nó sẽ tự triệt tiêu khi lấy $F(b) - F(a)$), rồi thay hai cận vào và trừ. Đây là cầu nối quan trọng nhất giữa đạo hàm (Sections 1–6) và tích phân (Sections 7–9).

Ví dụ mẫu 18 • Evaluating a definite integral

Evaluate $\int_1^3 (2x^2 - 3) dx$.

$$F(x) = \frac{2x^3}{3} - 3x. \quad F(3) = 18 - 9 = 9. \quad F(1) = \frac{2}{3} - 3 = -\frac{7}{3}.$$

$$\int_1^3 (2x^2 - 3) dx = 9 - \left(-\frac{7}{3}\right) = 9 + \frac{7}{3} = \frac{34}{3} \approx 11.3 \text{ (3 s.f.)}.$$

5.8.2 Area under a curve, and the sign of the integral

If $f(x) \geq 0$ on $[a, b]$, the area between the curve and the x -axis is $A = \int_a^b f(x) dx$. If $f(x) < 0$ on (part of) $[a, b]$, the definite integral there is **negative** (a "signed area") – to find the true geometric area, either take the **absolute value** of the integral over that piece, or **split the interval at the roots** of f and sum the absolute value of each piece.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

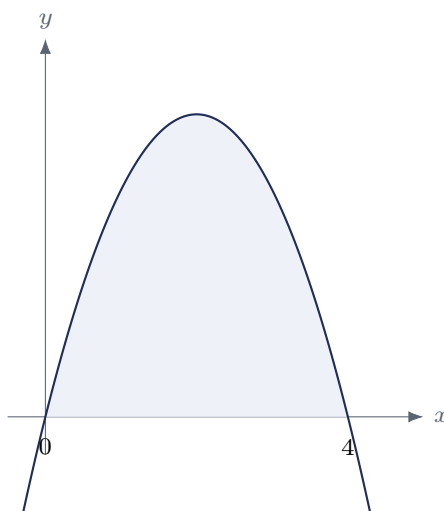
Tích phân xác định $\int_a^b f(x) dx$ chỉ cho ra **đúng diện tích hình học** khi $f(x) \geq 0$ trên toàn bộ $[a, b]$. Nếu đường cong **cắt xuống dưới trục hoành** ở đâu đó trong khoảng, tích phân tại phần đó sẽ **âm** – muốn có diện tích hình học thật (luôn dương), bắt buộc phải **tách khoảng tại nghiệm** $f(x) = 0$ và lấy **trị tuyệt đối** của tích phân từng phần rồi cộng lại.

Ví dụ mẫu 19 · Area under a curve above the x -axis

Find the area enclosed between the curve $y = 4x - x^2$ and the x -axis.

Roots: $x(4 - x) = 0 \Rightarrow x = 0, 4$; since the parabola opens downward, $y \geq 0$ on $[0, 4]$.

$$A = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left[2x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3} \approx 10.7 \text{ (3 s.f.)}$$



The shaded area under $y = 4x - x^2$ between $x = 0$ and $x = 4$ (Example 19) equals $\int_0^4 (4x - x^2) dx = \frac{32}{3} \approx 10.7$ square units.

Ví dụ mẫu 20 · A region that dips below the x -axis

Find the (true, geometric) area enclosed by the curve $y = x^3 - 4x$, the x -axis, between $x = 0$ and $x = 3$.

$y = x^3 - 4x = x(x - 2)(x + 2)$ has roots at $x = 0, 2, -2$; on $[0, 2]$, $y < 0$ (e.g. at $x = 1$, $y = 1 - 4 = -3 < 0$), while on $[2, 3]$, $y > 0$ (e.g. at $x = 2.5$, $y = 15.625 - 10 = 5.625 > 0$). We must **split at $x = 2$** . With $F(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2$: $F(0) = 0$, $F(2) = 4 - 8 = -4$, $F(3) = 20.25 - 18 = 2.25$.

$$\int_0^2 (x^3 - 4x) dx = -4 - 0 = -4 \text{ (negative, since } y < 0 \text{ there),} \quad \int_2^3 (x^3 - 4x) dx = 2.25 - (-4) = 6.25.$$

$$\text{True area} = |-4| + 6.25 = 4 + 6.25 = \boxed{10.25}.$$

(By contrast, naively computing $\int_0^3 (x^3 - 4x) dx = F(3) - F(0) = 2.25 - 0 = 2.25$ without splitting gives only the **net signed** value, not the true area – exactly the pitfall to avoid.)

5.8.3 Area between two curves

If $f(x) \geq g(x)$ throughout $[a, b]$ (i.e. $y = f(x)$ is the "top" curve and $y = g(x)$ the "bottom" curve), the area of the region enclosed between them is

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx.$$

The limits a, b are usually the x -coordinates of the curves' points of intersection, found by solving $f(x) = g(x)$.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

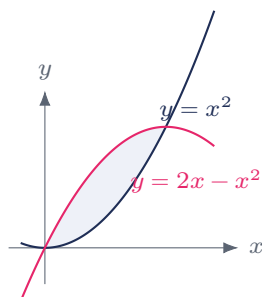
Diện tích giữa hai đường cong luôn lấy (đường trên trừ đường dưới), tích phân trên khoảng giữa hai giao điểm. Bước đầu tiên luôn là giải phương trình $f(x) = g(x)$ để tìm cận tích phân, sau đó kiểm tra bằng một điểm bất kỳ trong khoảng để xác định đường nào thực sự nằm trên.

Ví dụ mẫu 21 • Area between two curves

Find the area of the region enclosed between $y = x^2$ and $y = 2x - x^2$.

Intersections: $x^2 = 2x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow 2x(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 0, 1$. Testing $x = 0.5$: $y = x^2 = 0.25$ and $y = 2x - x^2 = 0.75$, so $y = 2x - x^2$ is on top.

$$A = \int_0^1 [(2x - x^2) - x^2] dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$



The shaded region between $y = 2x - x^2$ (top, pink) and $y = x^2$ (bottom, navy) from $x = 0$ to $x = 1$ (Example 21) has area $\int_0^1 [(2x - x^2) - x^2] dx = \frac{1}{3}$.

5.8.4 The trapezoidal rule

Rather than approximating each thin vertical strip under a curve with a rectangle, the trapezoidal rule approximates each strip with a **trapezoid** whose parallel sides are the function values at the two ends of that strip. This typically gives a noticeably more accurate estimate than a simple rectangle-based approximation using the same number of strips, especially when the curve is smoothly increasing or decreasing throughout each strip.

For a function known only at $n + 1$ equally spaced points $x_0, x_1, \dots, x_n$ (strip width $h = \frac{b - a}{n}$) with values $y_0, y_1, \dots, y_n$, the **trapezoidal rule** approximates

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{h}{2} [y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n].$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc hình thang dùng để **ước lượng** tích phân xác định khi chỉ có **bảng số liệu rời rạc** (không có công thức $f(x)$ tường minh): chia khoảng thành n dải đều nhau, cộng giá trị đầu và cuối, **nhân đôi** tất cả các giá trị ở giữa, rồi nhân với $\frac{h}{2}$. Đây là công thức được cho trong sách dữ kiện IB – không cần nhớ, nhưng cần biết **áp dụng đúng** (đặc biệt là nhân đôi các giá trị giữa, không nhân đôi hai đầu).

Ví dụ mẫu 22 • The trapezoidal rule

Use the trapezoidal rule to estimate $\int_0^4 f(x) dx$ from the table:

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	2	5	6	4	3

Here $h = 1$ ($n = 4$ strips).

$$\int_0^4 f(x) dx \approx \frac{1}{2}[2 + 2(5) + 2(6) + 2(4) + 3] = \frac{1}{2}[2 + 10 + 12 + 8 + 3] = \frac{1}{2}(35) = \boxed{17.5}.$$

(!) Lỗi thường gặp: Khi tính diện tích có phần đường cong nằm **dưới trục hoành**, lỗi phổ biến nhất là tính thẳng $\int_a^b f(x) dx$ trên toàn khoảng **mà không tách** tại nghiệm – kết quả chỉ là **diện tích có dấu** (signed area, các phần dương/âm triệt tiêu lẫn nhau), **không phải** diện tích hình học thật. Luôn tìm nghiệm của $f(x) = 0$ trong khoảng, tách tích phân tại đó, lấy trị tuyệt đối từng phần rồi cộng lại (xem Example 20).

5.9 Kinematics via Integration

5.9.1 Displacement and total distance from velocity

Given velocity $v(t)$, the **displacement** over $[t_1, t_2]$ is $s(t_2) - s(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$; the antiderivative $s(t) = \int v(t) dt + C$ is found in full using an initial condition (e.g. a given value of s at some time). The **total distance travelled** over $[t_1, t_2]$ is $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$, computed by **splitting the interval at every point where $v(t) = 0$ changes sign** and summing the absolute value of the displacement on each sub-interval – exactly the same idea as area-under-the-curve calculations, since $|v(t)| \geq 0$ everywhere by definition.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Độ dịch chuyển (displacement) từ t_1 đến t_2 là tích phân xác định $\int_{t_1}^{t_2} v(t) dt$ – có thể **âm** nếu vật kết thúc lùi so với điểm xuất phát. Quãng đường đi được (total distance) luôn **dương**, tính bằng $\int_{t_1}^{t_2} |v(t)| dt$: phải **tách khoảng** tại các thời điểm $v(t) = 0$ đổi dấu (vật đổi hướng), tính trị tuyệt đối từng đoạn rồi cộng lại – giống hệt kỹ thuật tính diện tích khi đường cong cắt trục hoành (Section 8).

Ví dụ mẫu 23 · Displacement and total distance from a velocity function

A particle's velocity (m/s) at time t seconds ($0 \leq t \leq 5$) is $v(t) = t^2 - 4t + 3 = (t-1)(t-3)$, and $s(0) = 2$ m. (a) Find $s(t)$. (b) Find the displacement at $t = 5$. (c) Find the total distance travelled between $t = 0$ and $t = 5$.

(a) $s(t) = \int (t^2 - 4t + 3) dt = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + C$. Since $s(0) = 2$, $C = 2$:

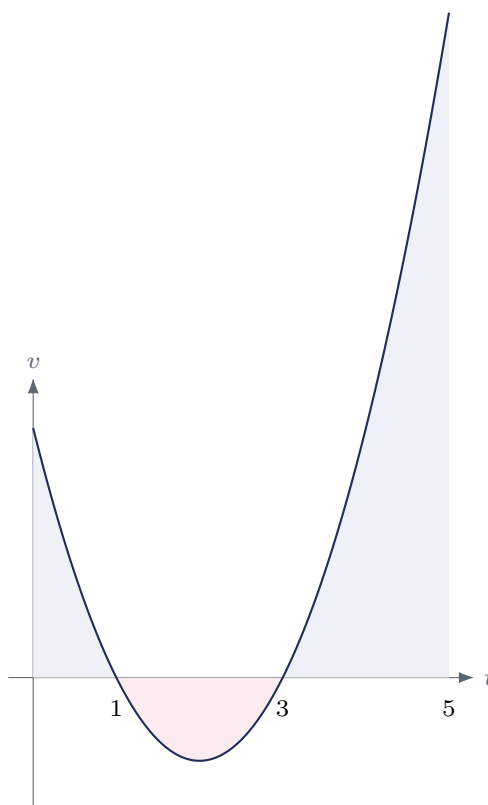
$$s(t) = \frac{t^3}{3} - 2t^2 + 3t + 2.$$

(b) $s(5) = \frac{125}{3} - 50 + 15 + 2 = \frac{125}{3} - 33 = \frac{26}{3} \approx 8.67$ m. So displacement over $[0, 5]$ is $s(5) - s(0) = \frac{26}{3} - 2 = \frac{20}{3} \approx 6.67$ m.

(c) $v(t) = 0$ at $t = 1, 3$; sign: $v(0) = 3 > 0$, $v(2) = -1 < 0$, $v(4) = 3 > 0$. Need $s(1) = \frac{1}{3} - 2 + 3 + 2 = \frac{10}{3}$ and $s(3) = 9 - 18 + 9 + 2 = 2$.

$$\text{Distance} = \underbrace{\left| \frac{10}{3} - 2 \right|}_{[0,1]} + \underbrace{\left| 2 - \frac{10}{3} \right|}_{[1,3]} + \underbrace{\left| \frac{26}{3} - 2 \right|}_{[3,5]} = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{28}{3} \approx 9.33 \text{ m},$$

which differs from the net displacement of $\frac{20}{3} \approx 6.67$ m found in part (b), because the particle reverses direction twice.



Velocity $v(t) = t^2 - 4t + 3$ for the particle of Example 23: the navy regions ($v > 0$) and pink region ($v < 0$) must be treated *separately*, using absolute values, to get the true total distance travelled ($\frac{28}{3}$ m) – simply integrating $v(t)$ over $[0, 5]$ directly gives only the net displacement, $\frac{20}{3}$ m.

(!) Lỗi thường gặp: Nhầm lẫn giữa **độ dịch chuyển** (displacement, $\int v \, dt$, có thể âm) và **quãng đường đi được** (total distance, $\int |v| \, dt$, luôn dương) là lỗi rất phổ biến. Nếu vận tốc **đổi dấu** trong khoảng thời gian đang xét, hai đại lượng này **chắc chắn khác nhau** – chỉ tính một tích phân duy nhất trên toàn khoảng (không tách tại điểm đổi dấu) sẽ cho ra độ dịch chuyển ròng, **không phải** tổng quãng đường đã đi.

5.10 Implicit Differentiation and Related Rates (HL)

5.10.1 Implicit differentiation

When an equation relating x and y is not solved explicitly for y , we may still find $\frac{dy}{dx}$ by **implicit differentiation**: differentiate **both sides** of the equation with respect to x , term by term, treating y as an (unspecified) function of x and applying the chain rule every time a term involving y is differentiated (since $\frac{d}{dx}[g(y)] = g'(y) \cdot \frac{dy}{dx}$). Then collect every $\frac{dy}{dx}$ term on one side and solve algebraically.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm ẩn (implicit differentiation) dùng khi phương trình **không được giải sẵn theo y** (ví dụ phương trình đường tròn). Đạo hàm **cả hai vế** theo x , coi y là một hàm ẩn của x : mỗi khi đạo hàm một số hạng chứa y , phải **nhân thêm $\frac{dy}{dx}$** (đúng quy tắc dây chuyền, vì y chính là "hàm bên trong"). Cuối cùng, gom các số hạng chứa $\frac{dy}{dx}$ về một vế và giải đại số bình thường.

Ví dụ mẫu 24 • Implicit differentiation of a circle

Find $\frac{dy}{dx}$ for the circle $x^2 + y^2 = 25$, and find the gradient of the tangent at the point $(3, 4)$.

Differentiating both sides with respect to x : $2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. At $(3, 4)$: $\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$.

Ví dụ mẫu 24b • Implicit differentiation of a general curve

Find $\frac{dy}{dx}$ for the curve $x^2y + y^3 = 10$ at the point $(1, 2)$ (check: $1(2) + 2^3 = 2 + 8 = 10 \checkmark$).

Differentiate term by term. For x^2y , use the **product rule**: $\frac{d}{dx}(x^2y) = 2xy + x^2 \frac{dy}{dx}$. For y^3 , use the **chain rule**: $\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2 \frac{dy}{dx}$.

$$2xy + x^2 \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx}(x^2 + 3y^2) = -2xy \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{x^2 + 3y^2}.$$

$$\text{At } (1, 2): \frac{dy}{dx} = -\frac{2(1)(2)}{1 + 3(4)} = -\frac{4}{13} \approx -0.308.$$

5.10.2 Related rates

Chiến lược giải bài toán tốc độ liên quan

1. Identify every variable that changes with time t ; write down the given rate(s) and the rate to be found.
2. Find an equation (often geometric) relating the variables.
3. Differentiate **both sides with respect to t** (implicit differentiation in t): every variable's derivative becomes $\frac{d(\text{variable})}{dt}$, via the chain rule.
4. Substitute the known values **at the specific instant** in question, and solve for the required rate.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bài toán tốc độ liên quan (related rates) luôn theo 4 bước: xác định các biến thay đổi theo thời gian và tốc độ đã biết/cần tìm; tìm một **phương trình liên hệ** các biến (thường là hình học, ví dụ thể tích hay định lý Pythagoras); đạo hàm **cả hai vế theo thời gian t** (mỗi biến sinh ra một đạo hàm $\frac{d(\cdot)}{dt}$ theo quy tắc dây chuyền); cuối cùng **thay số tại đúng thời điểm** được hỏi rồi giải ra tốc độ cần tìm.

Ví dụ mẫu 25 • Related rates: an expanding balloon

A spherical balloon is inflated so its volume increases at a constant rate of $100 \text{ cm}^3/\text{s}$. Find the rate at which the radius is increasing when the radius is 15 cm , correct to 3 s.f.

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Differentiating with respect to t : $\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$. Given $\frac{dV}{dt} = 100$ and $r = 15$:

$$100 = 4\pi(15)^2 \frac{dr}{dt} = 900\pi \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{100}{900\pi} = \frac{1}{9\pi} \approx 0.0354 \text{ cm/s (3 s.f.)}$$

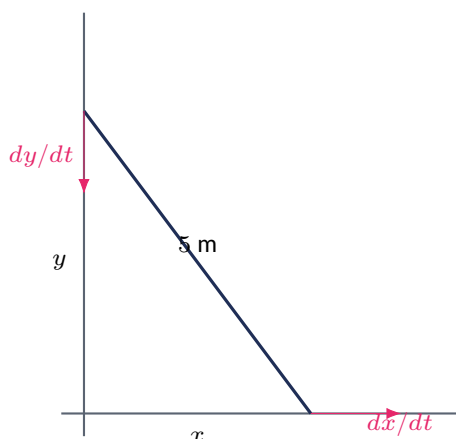
Ví dụ mẫu 26 • Related rates: a sliding ladder

A 5 m ladder leans against a vertical wall, foot on horizontal ground. The foot is pulled away from the wall at a constant 0.6 m/s . Find the rate at which the top slides down the wall when the foot is 3 m from the wall, correct to 3 s.f.

Let x = distance of the foot from the wall, y = height of the top on the wall. Constraint (Pythagoras, ladder length fixed): $x^2 + y^2 = 25$. Differentiating with respect to t : $2x \frac{dx}{dt} + 2y \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$. When $x = 3$: $y = \sqrt{25 - 9} = 4$. Given $\frac{dx}{dt} = 0.6$:

$$3(0.6) + 4 \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow 1.8 + 4 \frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -0.45 \text{ m/s.}$$

The negative sign confirms y is **decreasing**: the top slides down at 0.45 m/s .



A 5 m ladder leaning against a wall (Example 26): as the foot slides away from the wall ($dx/dt > 0$), the top slides down ($dy/dt < 0$); the constraint $x^2 + y^2 = 25$ links the two rates at every instant.

5.11 Volumes of Revolution and Integration by Substitution (HL)

5.11.1 Volume of revolution about the x-axis

When the region under $y = f(x)$ between $x = a$ and $x = b$ is rotated 360° about the x -axis, the volume of the resulting solid is

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

(Each thin vertical slice becomes, after rotation, a circular disc of radius $f(x)$ and area $\pi[f(x)]^2$; integrating these disc areas along the axis gives the total volume.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

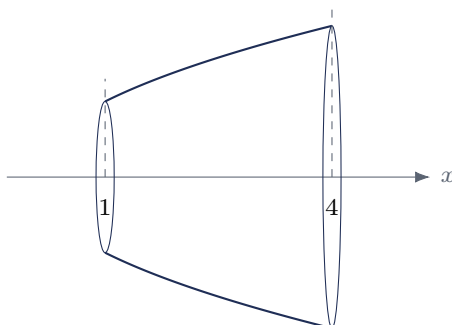
VN

Khi vùng dưới đường cong $y = f(x)$ (từ $x = a$ đến $x = b$) quay quanh trục hoành, mỗi lát cắt mỏng vuông góc với trục x trở thành một **hình tròn** bán kính $f(x)$, diện tích $\pi[f(x)]^2$; tích phân các diện tích hình tròn này dọc theo trục x cho ra công thức thể tích $V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$. Lưu ý luôn **bình phương** $f(x)$ trước khi tích phân – quên bình phương là lỗi phổ biến của công thức này.

Ví dụ mẫu 27 · Volume of revolution

Find the volume generated when the region under $y = \sqrt{x}$ between $x = 1$ and $x = 4$ is rotated 360° about the x -axis.

$$V = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 dx = \pi \int_1^4 x dx = \pi \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^4 = \pi \left(8 - \frac{1}{2} \right) = 7.5\pi \approx 23.6 \text{ (3 s.f., cubic units).}$$



The solid formed by rotating $y = \sqrt{x}$ ($1 \leq x \leq 4$) about the x -axis (Example 27): each cross-section is a circle of radius $\sqrt{x}$, giving volume $V = \pi \int_1^4 x \, dx = 7.5\pi \approx 23.6$ cubic units.

5.11.2 Integration by substitution

To evaluate $\int f(g(x)) g'(x) \, dx$, let $u = g(x)$, so $du = g'(x) \, dx$; the integral becomes $\int f(u) \, du$ (hopefully simpler). For a **definite** integral, either substitute back to x before applying the original limits, or (often faster) **change the limits** to the corresponding u -values and evaluate entirely in terms of u .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phép đổi biến (substitution) tìm một biểu thức $u = g(x)$ sao cho $du = g'(x)dx$ **xuất hiện sẵn** trong tích phân ban đầu, biến tích phân phức tạp theo x thành một tích phân **đơn giản** theo u . Với tích phân **xác định**, cách nhanh nhất là **đổi luôn cả hai cận** sang giá trị u tương ứng, tránh phải đổi ngược về x ở bước cuối.

Ví dụ mẫu 28 • Substitution: indefinite integral

Find $\int 2x(x^2 + 1)^4 \, dx$.

Let $u = x^2 + 1$, so $du = 2x \, dx$ – exactly the factor already present.

$$\int 2x(x^2 + 1)^4 \, dx = \int u^4 \, du = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^5}{5} + C.$$

Ví dụ mẫu 28b • Substitution: definite integral, changing the limits

Evaluate $\int_0^2 x\sqrt{x^2 + 5} \, dx$ using substitution.

Let $u = x^2 + 5$, so $du = 2x \, dx \Rightarrow x \, dx = \frac{1}{2} du$. When $x = 0$, $u = 5$; when $x = 2$, $u = 9$.

$$\int_0^2 x\sqrt{x^2 + 5} \, dx = \int_5^9 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} \, du = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} u^{3/2} \right]_5^9 = \frac{1}{3} (9^{3/2} - 5^{3/2}) = \frac{1}{3} (27 - 11.180) \approx 5.27 \text{ (3 s.f.)}$$

5.12 Differential Equations (HL)

5.12.1 Setting up a differential equation, and slope fields

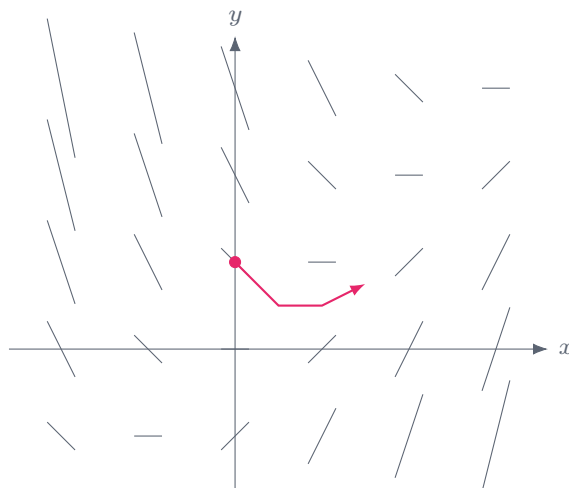
A **differential equation** relates an unknown function to its own derivative(s). In an applied context, a rate-of-change statement translates directly into a differential equation: e.g. "the rate of increase of a population is proportional to its current size" becomes $\frac{dP}{dt} = kP$.

A **slope field** (direction field) for $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ is a grid of short line segments: at each grid point (x, y) , the segment's gradient equals $f(x, y)$. Without solving the differential equation, the slope field shows the general shape of **every** solution curve, since any solution curve must be tangent to the field's segments at every point it passes through.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương trình vi phân liên hệ một hàm số chưa biết với chính đạo hàm của nó – các phát biểu "tốc độ thay đổi tỉ lệ với..." trong đề bài luôn dịch trực tiếp thành một phương trình vi phân dạng $\frac{dy}{dx} = \dots$ (hoặc $\frac{dP}{dt} = \dots$). **Trường hướng** (slope field) là một lưới các đoạn thẳng ngắn, mỗi đoạn có độ dốc bằng $f(x, y)$ tại điểm đó – cho phép **hình dung** hình dạng nghiệm mà **không cần giải** phương trình vi phân, vì mọi đường cong nghiệm luôn tiếp xúc với các đoạn của trường hướng tại mọi điểm nó đi qua.



Slope field for $\frac{dy}{dx} = x - y$: each short grey segment shows the gradient a solution curve must have at that point. The pink polyline is the Euler's-method approximation of Example 29 (step size $h = 0.5$, starting at $(0, 1)$), which follows the direction of the surrounding field.

5.12.2 Euler's method

Given $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ with $y(x_0) = y_0$ and a chosen step size h , **Euler's method** generates successive approximations to the solution curve using

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

Smaller step sizes give a more accurate approximation to the true solution curve, at the cost of more steps.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương pháp Euler ước lượng nghiệm của phương trình vi phân bằng cách **đi từng bước nhỏ**: tại mỗi điểm, dùng độ dốc hiện tại $f(x_n, y_n)$ (từ chính phương trình vi phân) để **dự đoán tuyến tính** giá trị y tại bước tiếp theo. Bước nhảy h càng nhỏ, xấp xỉ càng chính xác (nhưng cần nhiều bước tính hơn) – đây là phương pháp **số** (numerical), không cho ra công thức nghiệm tường minh.

Ví dụ mẫu 29 • Euler's method, step by step

Given $\frac{dy}{dx} = x - y$ with $y(0) = 1$, use Euler's method with step size $h = 0.5$ to estimate $y(1.5)$ (3 steps).

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = x_n - y_n$
0	0	1	-1
1	0.5	$1 + 0.5(-1) = 0.5$	$0.5 - 0.5 = 0$
2	1.0	$0.5 + 0.5(0) = 0.5$	$1.0 - 0.5 = 0.5$
3	1.5	$0.5 + 0.5(0.5) = 0.75$	-

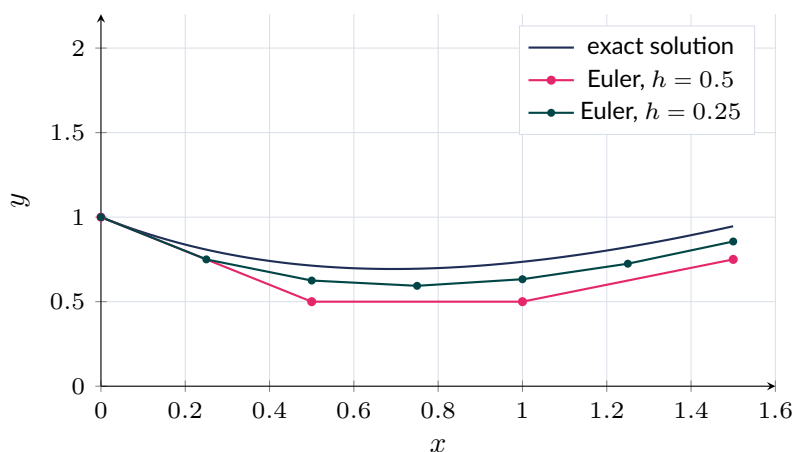
So Euler's method gives $y(1.5) \approx \boxed{0.75}$.

Ví dụ mẫu 29b • Refining Euler's method with a smaller step size

Repeat the previous example ($\frac{dy}{dx} = x - y$, $y(0) = 1$) using the smaller step size $h = 0.25$ to estimate $y(1.5)$, and compare the accuracy with the $h = 0.5$ result.

n	x_n	y_n	$f(x_n, y_n) = x_n - y_n$	$y_{n+1} = y_n + 0.25f(x_n, y_n)$
0	0	1	-1	0.75
1	0.25	0.75	-0.5	0.625
2	0.5	0.625	-0.125	0.594
3	0.75	0.594	0.156	0.633
4	1.0	0.633	0.367	0.725
5	1.25	0.725	0.525	0.856

So with $h = 0.25$, $y(1.5) \approx 0.856$, compared with 0.75 using $h = 0.5$. This equation is in fact linear and solvable exactly: the exact solution is $y = x - 1 + 2e^{-x}$ (check: $y' = 1 - 2e^{-x}$, and $x - y = x - (x - 1 + 2e^{-x}) = 1 - 2e^{-x} = y'$), giving the true value $y(1.5) = 0.5 + 2e^{-1.5} \approx 0.946$. The $h = 0.5$ estimate has error ≈ 0.196 ; the $h = 0.25$ estimate has error ≈ 0.090 – roughly **half** the error from **half** the step size, exactly as expected for Euler's method.



Euler's method estimates for $\frac{dy}{dx} = x - y$, $y(0) = 1$ (Example 29b), compared with the exact solution $y = x - 1 + 2e^{-x}$: halving the step size from $h = 0.5$ to $h = 0.25$ roughly halves the error at $x = 1.5$.

5.12.3 Separable differential equations

A first-order differential equation is **separable** if it can be written $\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$. Rearranging to $\frac{1}{h(y)} dy = g(x) dx$ and integrating both sides independently,

$$\int \frac{1}{h(y)} dy = \int g(x) dx + C,$$

gives the **general solution**; an initial condition fixes C , giving the **particular solution**.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Phương trình vi phân **tách biến** (separable) là loại có thể viết thành dạng "mọi thứ chứa y và dy ở một vế, mọi thứ chứa x và dx ở vế còn lại." Sau khi tách, tích phân độc lập hai vế cho ra **ng nghiệm tổng quát** (chứa hằng số C); một điều kiện ban đầu (một cặp giá trị x, y đã biết) sẽ xác định C cụ thể, cho ra **ng nghiệm riêng**.

Ví dụ mẫu 30 · Solving a separable differential equation

Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y}$, given $y = 3$ when $x = 0$. Find y in terms of x , and evaluate y at $x = 2$, correct to 3 s.f.

Separating variables: $y dy = 2x dx$. Integrating both sides: $\frac{y^2}{2} = x^2 + C_1 \Rightarrow y^2 = 2x^2 + C$. At $x = 0, y = 3$: $9 = 0 + C \Rightarrow C = 9$. So $y^2 = 2x^2 + 9 \Rightarrow y = \sqrt{2x^2 + 9}$ (positive root, since $y = 3 > 0$ initially).

$$\text{At } x = 2: y = \sqrt{2(4) + 9} = \sqrt{17} \approx 4.12 \text{ (3 s.f.)}$$

Check: differentiating $y^2 = 2x^2 + 9$ implicitly gives $2yy' = 4x \Rightarrow y' = \frac{2x}{y}$ ✓, matching the original equation.

Ví dụ mẫu 30b · A separable growth model

A population P grows at a rate proportional to its current size: $\frac{dP}{dt} = 0.03P$, with $P(0) = 5000$. Find $P(t)$, and estimate the population after 10 years, correct to 3 s.f.

Separating: $\frac{1}{P} dP = 0.03 dt \Rightarrow \ln P = 0.03t + C_1 \Rightarrow P = Ae^{0.03t}$ (where $A = e^{C_1}$). $P(0) = A = 5000$, so $P(t) = 5000e^{0.03t}$.

$$P(10) = 5000e^{0.3} \approx 5000(1.34986) \approx 6750 \text{ (3 s.f.)}$$

5.13 Kinematics in Two Dimensions with Vectors (HL)

5.13.1 Position, velocity, and acceleration vectors

The **position vector** $\mathbf{r}(t)$ describes a moving particle's location at time t . The **velocity vector** $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ is found by differentiating **each component** of $\mathbf{r}(t)$ separately with respect to t ; the **acceleration vector** $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$ similarly, componentwise. **Speed** is the magnitude of the velocity vector, $|\mathbf{v}(t)| = \sqrt{v_1(t)^2 + v_2(t)^2}$. The **displacement** over $[t_1, t_2]$ is found by integrating the velocity vector componentwise: $\mathbf{r}(t_2) - \mathbf{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(t) dt$.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Với chuyển động trong mặt phẳng, vector vị trí $\mathbf{r}(t)$, vector vận tốc $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$, và vector gia tốc $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$ đều được tính bằng cách đạo hàm (hoặc tích phân) **từng thành phần một cách độc lập** – hoàn toàn không có gì khác thường so với đạo hàm/tích phân một biến, chỉ cần lặp lại cho mỗi toạ độ. **Tốc độ** (speed, một đại lượng vô hướng, luôn ≥ 0) là **độ lớn** của vector vận tốc, khác với chính vector vận tốc (có hướng).

Ví dụ mẫu 31 • Two-dimensional projectile-style motion

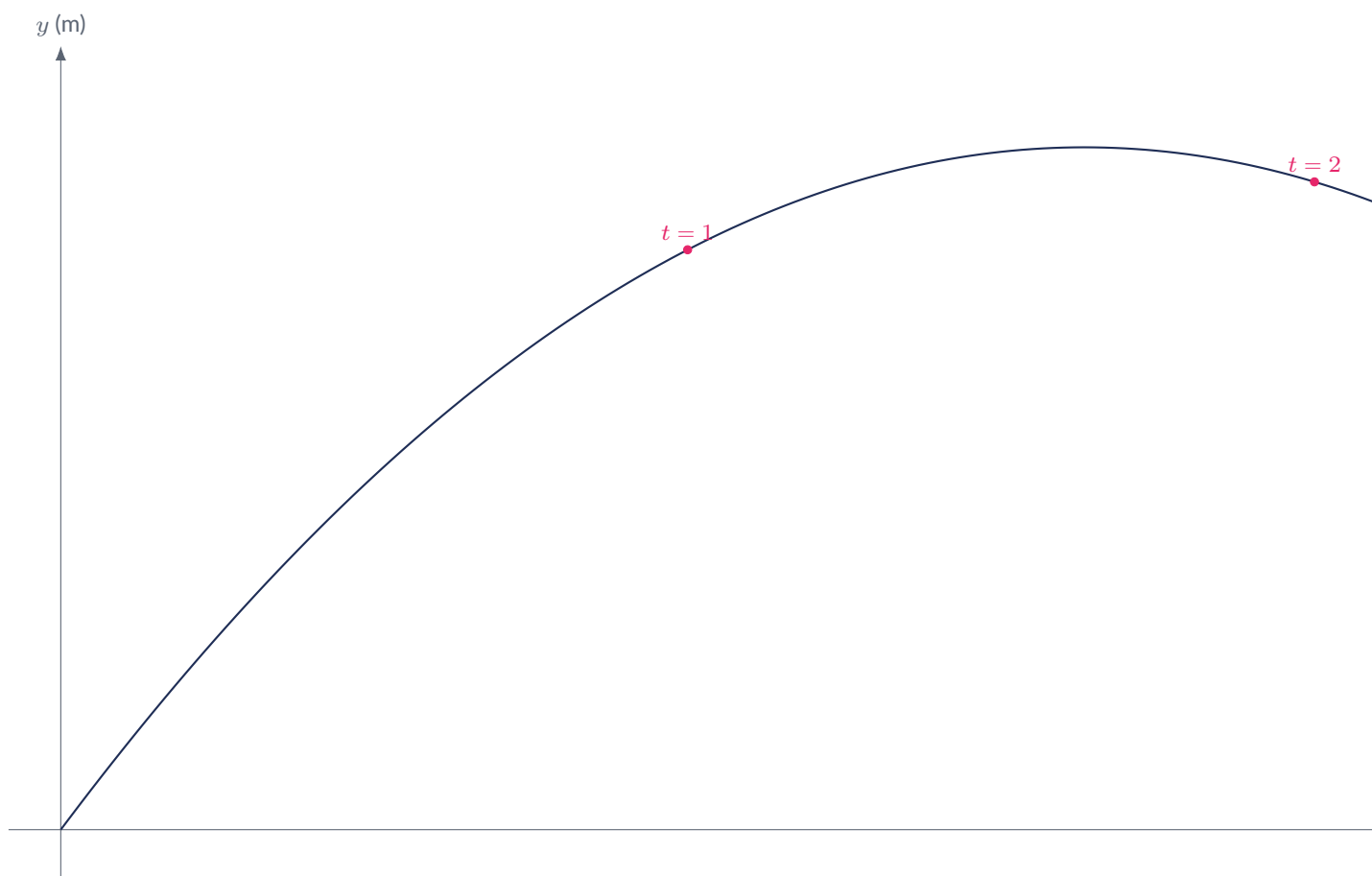
A projectile's position vector (t seconds after launch, in metres) is $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 12t \\ 16t - 4.9t^2 \end{pmatrix}$. (a) Find $\mathbf{v}(t)$ and $\mathbf{a}(t)$. (b) Find the speed at $t = 1$, correct to 3 s.f. (c) Find the displacement vector between $t = 1$ and $t = 2$.

(a) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 - 9.8t \end{pmatrix}$, $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -9.8 \end{pmatrix}$ (constant, gravity).

(b) $\mathbf{v}(1) = \begin{pmatrix} 12 \\ 6.2 \end{pmatrix}$. Speed = $|\mathbf{v}(1)| = \sqrt{12^2 + 6.2^2} = \sqrt{182.44} \approx 13.5$ m/s (3 s.f.).

(c) $\mathbf{r}(1) = \begin{pmatrix} 12 \\ 11.1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} 24 \\ 12.4 \end{pmatrix}$.

Displacement = $\mathbf{r}(2) - \mathbf{r}(1) = \begin{pmatrix} 24 - 12 \\ 12.4 - 11.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 1.3 \end{pmatrix}$ m, $|\text{displacement}| = \sqrt{12^2 + 1.3^2} \approx 12.1$ m (3 s.f.).



The trajectory traced by $\mathbf{r}(t) = (12t, 16t - 4.9t^2)$ (Example 31): positions at $t = 1$ and $t = 2$ (pink) are used to find the displacement vector between them, $\begin{pmatrix} 12 \\ 1.3 \end{pmatrix}$ m.

Practice

Bài tập luyện tập

Using differentiation from first principles, find $f'(x)$ for $f(x) = x^2 + 3x$.

Lời giải chi tiết

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 + 3(x+h) - (x^2 + 3x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 + 3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h + 3) = 2x + 3.$$

Bài tập luyện tập

Which expression correctly represents the *raw* (pre-simplification) definition of $f'(x)$ for $f(x) = x^2$, using the limit definition directly?

(A) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$

(C) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 - h^2}{h}$

(B) $2x$

(D) $\frac{(x+h)^2}{h}$

Lời giải chi tiết

By definition, $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}$. (A).

Bài tập luyện tập

Differentiate $f(x) = 5x^2 - 2x$ from first principles, showing all steps.

Lời giải chi tiết

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5(x+h)^2 - 2(x+h) - (5x^2 - 2x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10xh + 5h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10x + 5h - 2) = 10x - 2.$$

Bài tập luyện tập

Given that $f(x) = x^3$ has derivative $f'(x) = 3x^2$ (found from first principles in Example 2), evaluate $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h}$ without re-expanding from scratch.

Lời giải chi tiết

This limit is exactly the definition of $f'(2)$ for $f(x) = x^3$. Since $f'(x) = 3x^2$, $f'(2) = 3(4) = \boxed{12}$.

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = 7x^4 - 3x^3 + 2x - 9$.

Lời giải chi tiết

$$y' = 28x^3 - 9x^2 + 2.$$

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = \frac{4}{x^3} - 3\sqrt{x}$.

Lời giải chi tiết

$$\text{Rewrite } y = 4x^{-3} - 3x^{1/2}: y' = -12x^{-4} - \frac{3}{2}x^{-1/2} = -\frac{12}{x^4} - \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

Bài tập luyện tập

$$\frac{d}{dx}(\sin x + 3 \cos x - 2e^x) = ?$$

(A) $\cos x - 3 \sin x - 2e^x$

(C) $\cos x + 3 \sin x - 2e^x$

(B) $-\cos x + 3 \sin x - 2e^x$

(D) $\cos x - 3 \sin x + 2e^x$

Lời giải chi tiết

$$\cos x + 3(-\sin x) - 2e^x = \cos x - 3\sin x - 2e^x. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = (5x - 2)^6$ using the chain rule.

Lời giải chi tiết

$$y' = 6(5x - 2)^5 \cdot 5 = 30(5x - 2)^5.$$

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = x^4 \ln x$ using the product rule.

Lời giải chi tiết

$$y' = 4x^3 \ln x + x^4 \cdot \frac{1}{x} = 4x^3 \ln x + x^3 = x^3(4 \ln x + 1).$$

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = \frac{\sin x}{x^2}$ using the quotient rule.

Lời giải chi tiết

$$y' = \frac{x^2 \cos x - \sin x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}.$$

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = e^{3x} \cos(2x)$.

Lời giải chi tiết

Product rule with $f = e^{3x}$ ($f' = 3e^{3x}$), $g = \cos(2x)$ ($g' = -2 \sin(2x)$):

$$y' = 3e^{3x} \cos(2x) - 2e^{3x} \sin(2x) = e^{3x} [3 \cos(2x) - 2 \sin(2x)].$$

Bài tập luyện tập

Differentiate $y = \frac{e^{2x}}{x^2 + 1}$.

Lời giải chi tiết

Quotient rule with $f = e^{2x}$ ($f' = 2e^{2x}$), $g = x^2 + 1$ ($g' = 2x$):

$$y' = \frac{2e^{2x}(x^2 + 1) - e^{2x}(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2e^{2x}(x^2 - x + 1)}{(x^2 + 1)^2}.$$

Bài tập luyện tập

Find the equation of the tangent to $y = x^2 - 4x + 1$ at $x = 3$.

Lời giải chi tiết

$f(3) = 9 - 12 + 1 = -2$. $f'(x) = 2x - 4$, $f'(3) = 2$. Tangent: $y + 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 8$.

Bài tập luyện tập

Find the equation of the normal to $y = \sqrt{x}$ at $x = 4$.

Lời giải chi tiết

$f(4) = 2$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $f'(4) = \frac{1}{4}$. Normal gradient = -4 . $y - 2 = -4(x - 4) \Rightarrow y = -4x + 18$.

Bài tập luyện tập

The curve $y = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$ has stationary points at:

(A) $x = 1, 3$

(C) $x = -1, -3$

(B) $x = 0, 2$

(D) $x = 2$ only

Lời giải chi tiết

$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 1, 3$. (A).

Bài tập luyện tập

For $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 2$, classify the stationary points at $x = 1$ and $x = 3$ using the first derivative test, and state the intervals of increase/decrease.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 3(x - 1)(x - 3)$. Sign: $f'(0) = 9 > 0$, $f'(2) = -3 < 0$, $f'(4) = 9 > 0$. Increasing on $(-\infty, 1) \cup (3, \infty)$, decreasing on $(1, 3)$. Local max at $x = 1$ ($f(1) = 6$); local min at $x = 3$ ($f(3) = 2$).

Bài tập luyện tập

Find the values of x for which $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$ is decreasing.

Lời giải chi tiết

$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x - 2)(x + 1)$. $f' < 0$ when $-1 < x < 2$, so f is decreasing on $(-1, 2)$.

Bài tập luyện tập

Find $f''(x)$ for $f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2$.

Lời giải chi tiết

$$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 + 12x. \quad f''(x) = 12x^2 - 24x + 12 = 12(x-1)^2.$$

Bài tập luyện tập

For $f(x) = x^3 - 3x + 2$, use the second derivative test to classify the stationary point at $x = 1$.

(A) Local maximum

(C) Point of inflection

(B) Local minimum

(D) Cannot be determined

Lời giải chi tiết

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1. \quad f''(x) = 6x, \quad f''(1) = 6 > 0 \Rightarrow \text{local minimum. (B).}$$

Bài tập luyện tập

Find the point of inflection of $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$, and confirm the concavity genuinely changes sign.

Lời giải chi tiết

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2. \quad f''(1) = -6 < 0, \quad f''(3) = 6 > 0: \text{ genuine sign change.} \\ f(2) = 8 - 24 + 18 + 1 = 3. \text{ Inflection point } (2, 3).$$

Bài tập luyện tập

Determine the intervals of concavity of $f(x) = x^4 - 6x^2$.

Lời giải chi tiết

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x-1)(x+1). \text{ Concave up for } x < -1 \text{ or } x > 1; \text{ concave down for } -1 < x < 1. \text{ Inflection points at } x = \pm 1 \text{ (sign changes at both).}$$

Bài tập luyện tập

Show that $f(x) = (x-1)^4$ has $f''(1) = 0$, but explain why $x = 1$ is not a point of inflection.

Lời giải chi tiết

$$f'(x) = 4(x-1)^3, \quad f''(x) = 12(x-1)^2 \geq 0 \text{ for all } x: \text{ it never becomes negative, so the concavity never changes sign. Hence } x = 1 \text{ is not an inflection point - it is in fact a local (global) minimum, since } f' \text{ changes sign from } - \text{ to } + \text{ there.}$$

Bài tập luyện tập

Find the point(s) of inflection of $g(x) = x^4 - 4x^3$, and confirm each is genuine.

Lời giải chi tiết

$g'(x) = 4x^3 - 12x^2$, $g''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)$, zero at $x = 0, 2$. Sign: $g''(-1) = 36 > 0$, $g''(1) = -12 < 0$, $g''(3) = 36 > 0$: both sign changes are genuine. $g(0) = 0$, $g(2) = 16 - 32 = -16$. Inflection points: $(0, 0)$ and $(2, -16)$.

Bài tập luyện tập

A rectangular box with a square base and no top is to have volume 108 cm^3 . Find the dimensions minimizing the surface area, and the minimum surface area.

Lời giải chi tiết

Base side x , height h : $V = x^2h = 108 \Rightarrow h = 108/x^2$. $SA(x) = x^2 + 4xh = x^2 + 432/x$. $SA'(x) = 2x - 432/x^2 = 0 \Rightarrow x^3 = 216 \Rightarrow x = 6 \text{ cm}$. $h = 108/36 = 3 \text{ cm}$. $SA''(x) = 2 + 864/x^3 > 0$: confirms minimum. $SA_{\min} = 36 + 432/6 = 36 + 72 = \boxed{108 \text{ cm}^2}$.

Bài tập luyện tập

A rectangular field of area 200 m^2 is to be enclosed on all four sides. If x is one side length, which function of x should be minimized to find the least amount of fencing?

(A) $P(x) = 2x + 400/x$

(C) $P(x) = 2x + 200/x$

(B) $P(x) = x + 200/x$

(D) $P(x) = 4x + 200$

Lời giải chi tiết

$xy = 200 \Rightarrow y = 200/x$. $P = 2x + 2y = 2x + 400/x$. (A).

Bài tập luyện tập

Solve the optimization of the previous question fully: find the dimensions minimizing the perimeter, and state the minimum perimeter, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$P(x) = 2x + 400/x$. $P'(x) = 2 - 400/x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 200 \Rightarrow x = 10\sqrt{2} \approx 14.1 \text{ m}$. Then $y = 200/x = 10\sqrt{2}$ as well (a square). $P''(x) = 800/x^3 > 0$ confirms a minimum.

$$P_{\min} = 4(10\sqrt{2}) = 40\sqrt{2} \approx 56.6 \text{ m (3 s.f.)}$$

Bài tập luyện tập

A 30 cm by 20 cm sheet of cardboard has equal squares of side x cut from each corner, and the flaps folded up to form an open-top box. Find the value of x that maximizes the volume, and the maximum volume, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$V(x) = x(30-2x)(20-2x) = 4x^3 - 100x^2 + 600x$, for $0 < x < 10$. $V'(x) = 12x^2 - 200x + 600 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 50x + 150 = 0 \Rightarrow x = \frac{50 \pm \sqrt{700}}{6}$. Only $x = \frac{50 - \sqrt{700}}{6} \approx 3.92 \text{ cm}$ lies in $(0, 10)$ (the

other root, ≈ 12.7 , is rejected). Since V' changes from $+$ to $-$ at $x \approx 3.92$ (a downward-then-upward-opening check confirms this is the only valid critical point in range), this is a maximum.

$$V(3.92) \approx 3.92(30 - 7.85)(20 - 7.85) \approx 3.92(22.15)(12.15) \approx 1060 \text{ cm}^3 \text{ (3 s.f.)}$$

Bài tập luyện tập

A particle's displacement is $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ m, $t \geq 0$. Find $v(t)$ and $a(t)$, and the times when the particle is at rest.

Lời giải chi tiết

$$v(t) = 3t^2 - 18t + 24 = 3(t - 2)(t - 4); a(t) = 6t - 18. \text{ At rest when } v = 0: t = 2, 4.$$

Bài tập luyện tập

For the particle of the previous question, is it speeding up or slowing down at $t = 1$?

- | | |
|------------------|-----------------|
| (A) Speeding up | (C) At rest |
| (B) Slowing down | (D) Cannot tell |

Lời giải chi tiết

$v(1) = 3(-1)(-3) = 9 > 0$; $a(1) = 6 - 18 = -12 < 0$. Velocity and acceleration have **opposite** signs, so the particle is slowing down. **(B)**.

Bài tập luyện tập

For the particle $s(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$, find the total distance travelled in the first 5 seconds.

Lời giải chi tiết

Critical times in $[0, 5]$: $t = 2, 4$. $s(0) = 0$, $s(2) = 8 - 36 + 48 = 20$, $s(4) = 64 - 144 + 96 = 16$, $s(5) = 125 - 225 + 120 = 20$. Distance = $|20 - 0| + |16 - 20| + |20 - 16| = 20 + 4 + 4 = \boxed{28 \text{ m}}$ (net displacement is only 20 m).

Bài tập luyện tập

A ball's height (m) above ground after t seconds is $h(t) = 30t - 5t^2$ ($0 \leq t \leq 6$). Find the maximum height and when it occurs.

Lời giải chi tiết

$h'(t) = 30 - 10t = 0 \Rightarrow t = 3$; $h''(t) = -10 < 0$ confirms a maximum. $h(3) = 90 - 45 = 45$ m at $t = 3$ s.

Bài tập luyện tập

Find $\int (6x^2 - 4x + 7) dx$.

Lời giải chi tiết

$$2x^3 - 2x^2 + 7x + C.$$

Bài tập luyện tập

$$\int (3 \cos x - 2 \sin x) dx = ?$$

(A) $3 \sin x + 2 \cos x + C$

(C) $-3 \sin x + 2 \cos x + C$

(B) $3 \sin x - 2 \cos x + C$

(D) $3 \sin x - 2 \cos x$

Lời giải chi tiết

$$3 \sin x - 2(-\cos x) + C = 3 \sin x + 2 \cos x + C. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

$$\text{Find } \int \left(\frac{3}{x^2} + 4e^x \right) dx.$$

Lời giải chi tiết

$$\text{Rewrite } 3x^{-2}: \int (3x^{-2} + 4e^x) dx = -\frac{3}{x} + 4e^x + C.$$

Bài tập luyện tập

A curve's gradient function is $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - 2$, and it passes through $(1, -3)$. Find y .

Lời giải chi tiết

$$y = 2x^3 - 2x + C. \text{ At } (1, -3): 2 - 2 + C = -3 \Rightarrow C = -3. y = 2x^3 - 2x - 3.$$

Bài tập luyện tập

$$\text{Evaluate } \int_0^2 (3x^2 - 2x + 1) dx.$$

Lời giải chi tiết

$$F(x) = x^3 - x^2 + x. F(2) - F(0) = (8 - 4 + 2) - 0 = 6.$$

Bài tập luyện tập

$$\int_1^4 \frac{2}{\sqrt{x}} dx = ?$$

(A) 4

(C) 8

(B) 2

(D) 6

Lời giải chi tiết

Antiderivative $4\sqrt{x}$. $F(4) - F(1) = 8 - 4 = 4$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Find the area enclosed between $y = 6x - x^2$ and the x -axis.

Lời giải chi tiết

Roots at $x = 0, 6$; $y \geq 0$ throughout. $A = \int_0^6 (6x - x^2) dx = [3x^2 - \frac{x^3}{3}]_0^6 = 108 - 72 = 36$.

Bài tập luyện tập

Find the true (geometric) area enclosed by $y = x^3 - x$, the x -axis, and the lines $x = -1$, $x = 1$, taking care with the sign of the curve.

Lời giải chi tiết

$y = x(x-1)(x+1)$: $y > 0$ on $(-1, 0)$, $y < 0$ on $(0, 1)$. $F(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$. $\int_{-1}^0 (x^3 - x) dx = 0 - (-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4}$. $\int_0^1 (x^3 - x) dx = -\frac{1}{4} - 0 = -\frac{1}{4}$. True area = $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$ (note the signed integral over $[-1, 1]$ is 0, which is not the true area).

Bài tập luyện tập

Find the area of the region enclosed between $y = x^2 + 1$ and $y = 5 - x^2$.

Lời giải chi tiết

Intersections: $x^2 + 1 = 5 - x^2 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$. Top curve is $y = 5 - x^2$ (check at $x = 0$).

$$A = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} (4 - 2x^2) dx = [4x - \frac{2}{3}x^3]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{3} \approx 7.54 \text{ (3 s.f.)}$$

Bài tập luyện tập

Using the trapezoidal rule with $x = 0, 2, 4, 6, 8$ and $f(x) = 3, 7, 9, 6, 4$, estimate $\int_0^8 f(x) dx$.

Lời giải chi tiết

$h = 2$. Estimate = $\frac{2}{2}[3 + 2(7) + 2(9) + 2(6) + 4] = 1[3 + 14 + 18 + 12 + 4] = \boxed{51}$.

Bài tập luyện tập

A car's speed (m/s) is recorded every 2 s: $t = 0, 2, 4, 6, 8, 10$ with $v = 0, 8, 14, 18, 20, 21$. Use the trapezoidal rule to estimate the distance travelled in the first 10 s.

Lời giải chi tiết

$$h = 2. \text{ Estimate} = \frac{2}{2}[0+2(8)+2(14)+2(18)+2(20)+21] = 1[0+16+28+36+40+21] = \boxed{141 \text{ m}}.$$

Bài tập luyện tập

Find the area enclosed between $y = \sin x$ and the x -axis for $0 \leq x \leq \pi$.

Lời giải chi tiết

Since $\sin x \geq 0$ throughout $[0, \pi]$, no splitting is needed:

$$A = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = (-\cos \pi) - (-\cos 0) = 1 + 1 = \boxed{2}.$$

Bài tập luyện tập

A particle's velocity is $v(t) = 4t - t^2$ m/s, $0 \leq t \leq 5$, with $s(0) = 0$. Find $s(t)$ and $s(5)$.

Lời giải chi tiết

$$s(t) = 2t^2 - \frac{t^3}{3} + C; s(0) = 0 \Rightarrow C = 0. s(5) = 50 - \frac{125}{3} = \frac{25}{3} \approx 8.33 \text{ m}.$$

Bài tập luyện tập

For the particle in the previous question, at what time(s) in $(0, 5)$ does it change direction?

(A) $t = 0$ only

(C) $t = 0$ and $t = 4$

(B) $t = 4$ only

(D) Never

Lời giải chi tiết

$v(t) = t(4 - t) = 0$ at $t = 0, 4$; $v > 0$ on $(0, 4)$, $v < 0$ on $(4, 5)$. Since $t = 0$ is the starting boundary (not an interior sign change), the only direction change is at $t = 4$. **(B)**.

Bài tập luyện tập

Find the total distance travelled by the particle $v(t) = 4t - t^2$ between $t = 0$ and $t = 5$.

Lời giải chi tiết

$$s(0) = 0, s(4) = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}, s(5) = \frac{25}{3} \text{ (from before). Distance} = \frac{32}{3} + \left| \frac{25}{3} - \frac{32}{3} \right| = \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \boxed{13 \text{ m}} \text{ (net displacement was only } \frac{25}{3} \approx 8.33 \text{ m).}$$

Bài tập luyện tập

A stone is dropped with velocity $v(t) = 9.8t$ m/s (downward positive). Find its displacement after 4 s, and confirm it matches $\frac{1}{2}gt^2$.

Lời giải chi tiết

$$s(4) = \int_0^4 9.8t \, dt = [4.9t^2]_0^4 = 4.9(16) = 78.4 \text{ m. Check: } \frac{1}{2}(9.8)(4)^2 = 4.9(16) = 78.4 \text{ m } \checkmark.$$

Bài tập luyện tập

A particle's velocity is $v(t) = 2 \sin t$ m/s for $0 \leq t \leq 2\pi$, with $s(0) = 0$. Find the displacement after $t = \pi$, and the total distance travelled from $t = 0$ to $t = \pi$.

Lời giải chi tiết

Since $\sin t \geq 0$ throughout $[0, \pi]$, velocity never changes sign there, so displacement and distance are equal on this interval. $s(t) = -2 \cos t + C$; $s(0) = -2 + C = 0 \Rightarrow C = 2$, so $s(t) = 2 - 2 \cos t$.

$$s(\pi) = 2 - 2(-1) = \boxed{4 \text{ m}} = \text{total distance travelled (since } v \text{ did not change sign).}$$

Bài tập luyện tập

Find $\frac{dy}{dx}$ by implicit differentiation for $x^2 + 4y^2 = 20$ at $(2, 2)$.

Lời giải chi tiết

$$2x + 8y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}. \text{ At } (2, 2): -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$$

Bài tập luyện tập

Implicit differentiation of $xy = 12$ gives $\frac{dy}{dx} = ?$

(A) $-y/x$

(C) $-x/y$

(B) y/x

(D) $12/x$

Lời giải chi tiết

Product rule: $y + x \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$. (A).

Bài tập luyện tập

Find $\frac{dy}{dx}$ for $x^2 + xy + y^2 = 7$ at the point $(1, 2)$.

Lời giải chi tiết

$$2x + y + x \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x + y}{x + 2y}. \text{ At } (1, 2): -\frac{4}{5} = -0.8.$$

Bài tập luyện tập

A spherical snowball melts so its volume decreases at a constant rate of $2 \text{ cm}^3/\text{min}$. Find the rate its radius is decreasing when $r = 5 \text{ cm}$, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \cdot -2 = 4\pi(25) \frac{dr}{dt} = 100\pi \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -\frac{1}{50\pi} \approx -0.00637 \text{ cm/min.}$$

Bài tập luyện tập

A rectangular tank with fixed base 3 m by 2 m is filled so the depth h rises at 0.2 m/min . Find the rate the volume is increasing.

Lời giải chi tiết

$$V = 6h \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 6 \frac{dh}{dt} = 6(0.2) = 1.2 \text{ m}^3/\text{min.}$$

Bài tập luyện tập

A street lamp is 6 m high. A person 1.8 m tall walks directly away from the lamp at 1.2 m/s . Find the rate at which the length of the person's shadow is increasing, correct to 3 s.f.

Lời giải chi tiết

Let x = distance of the person from the lamp base, s = shadow length. By similar triangles,
$$\frac{6}{x+s} = \frac{1.8}{s} \Rightarrow 6s = 1.8x + 1.8s \Rightarrow 4.2s = 1.8x \Rightarrow s = \frac{3}{7}x.$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{3}{7} \frac{dx}{dt} = \frac{3}{7}(1.2) \approx 0.514 \text{ m/s.}$$

Bài tập luyện tập

Find the volume generated when the region under $y = x + 1$, $0 \leq x \leq 3$, is rotated about the x -axis.

Lời giải chi tiết

$$V = \pi \int_0^3 (x+1)^2 dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right]_0^3 = \pi(9 + 9 + 3) = 21\pi \approx 66.0 \text{ (3 s.f.)}$$

Bài tập luyện tập

The volume formed by rotating $y = \sqrt{2x}$ about the x -axis between $x = 0$ and $x = 5$ is:

(A) 25π

(C) 5π

(B) 10π

(D) 50π

Lời giải chi tiết

$$V = \pi \int_0^5 2x \, dx = \pi [x^2]_0^5 = 25\pi. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Use substitution to find $\int 3x^2(x^3 + 4)^5 \, dx$.

Lời giải chi tiết

$$u = x^3 + 4, \, du = 3x^2 \, dx. \int u^5 \, du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{(x^3 + 4)^6}{6} + C.$$

Bài tập luyện tập

Evaluate $\int_0^1 x^2 \sqrt{x^3 + 1} \, dx$ using substitution, changing the limits.

Lời giải chi tiết

$$u = x^3 + 1, \, du = 3x^2 \, dx \Rightarrow x^2 \, dx = \frac{1}{3} du. \text{ Limits: } x = 0 \rightarrow u = 1; x = 1 \rightarrow u = 2.$$

$$\int_1^2 \sqrt{u} \cdot \frac{1}{3} du = \frac{2}{9} [u^{3/2}]_1^2 = \frac{2}{9}(2\sqrt{2} - 1) \approx 0.406 \text{ (3 s.f.)}$$

Bài tập luyện tập

Use substitution to evaluate $\int \cos(3x + 1) \, dx$.

Lời giải chi tiết

$$u = 3x + 1, \, du = 3 \, dx. \int \cos u \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \sin u + C = \frac{1}{3} \sin(3x + 1) + C.$$

Bài tập luyện tập

Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ ($x, y > 0$), given $y = 2$ when $x = 1$.

Lời giải chi tiết

$$\frac{1}{y} dy = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \ln y = \ln x + C_1 \Rightarrow y = Ax. \text{ At } (1, 2): A = 2. \text{ So } y = 2x.$$

Bài tập luyện tập

For $\frac{dy}{dx} = -0.4y$, which best describes the behaviour of solutions?

(A) Exponential growth

(C) Linear growth

(B) Exponential decay

(D) Oscillation

Lời giải chi tiết $y = Ae^{-0.4x}$ decays exponentially since the rate constant is negative. **(B).****Bài tập luyện tập**Given $\frac{dy}{dx} = x + y$, $y(0) = 1$, use Euler's method with $h = 0.25$ to estimate $y(0.75)$ (3 steps).**Lời giải chi tiết** $f(x, y) = x + y$. $n = 0$: $f = 1$, $y_1 = 1 + 0.25(1) = 1.25$. $n = 1$: $f = 0.25 + 1.25 = 1.5$, $y_2 = 1.25 + 0.25(1.5) = 1.625$. $n = 2$: $f = 0.5 + 1.625 = 2.125$, $y_3 = 1.625 + 0.25(2.125) = 2.15625$. So $y(0.75) \approx 2.16$.**Bài tập luyện tập**Solve $\frac{dy}{dx} = 2xy^2$, given $y(0) = 1$. Find $y(0.5)$, correct to 3 s.f.**Lời giải chi tiết** $\frac{1}{y^2} dy = 2x dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x^2 + C$. At $(0, 1)$: $C = -1$, so $y = \frac{1}{1 - x^2}$. $y(0.5) = \frac{1}{0.75} = \frac{4}{3} \approx 1.33$.**Bài tập luyện tập**Solve $\frac{dy}{dx} = y \cos x$, given $y = 2$ when $x = 0$. Find y in terms of x .**Lời giải chi tiết** $\frac{1}{y} dy = \cos x dx \Rightarrow \ln y = \sin x + C_1 \Rightarrow y = Ae^{\sin x}$. At $(0, 2)$: $A = 2$. So $y = 2e^{\sin x}$.**Bài tập luyện tập**A particle has position vector $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 3t \end{pmatrix}$ m, $t \geq 0$. Find its velocity vector and speed at $t = 2$.**Lời giải chi tiết** $\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 3 \end{pmatrix}$. $\mathbf{v}(2) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$. Speed = $\sqrt{16 + 9} = 5$ m/s.

Bài tập luyện tập

A particle's velocity vector is $\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2t \end{pmatrix}$. Its acceleration vector is:

(A) $(0, -2)$

(C) $(6t, -t^2)$

(B) $(6, -2t)$

(D) $(0, -2t)$

Lời giải chi tiết

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = (0, -2). \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

A particle's velocity vector is $\mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 - 2t \end{pmatrix}$ m/s, with $\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Find $\mathbf{r}(2)$ by integrating componentwise.

Lời giải chi tiết

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 3t + 1 \\ 4t - t^2 \end{pmatrix} \text{ (constants fixed using } \mathbf{r}(0) = (1, 0)). \mathbf{r}(2) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Bài tập luyện tập

A particle has constant acceleration vector $\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$, with $\mathbf{v}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ and $\mathbf{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Find $\mathbf{v}(t)$ and $\mathbf{r}(t)$.

Lời giải chi tiết

Integrating $\mathbf{a}(t)$ componentwise: $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}(0) + \int_0^t \mathbf{a} \, dt = \begin{pmatrix} 3 + 2t \\ 5 - 4t \end{pmatrix}$. Integrating $\mathbf{v}(t)$ componentwise: $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v} \, dt = \begin{pmatrix} 3t + t^2 \\ 5t - 2t^2 \end{pmatrix}$.

Mixed and Extended Problems

Ôn tập tổng hợp

A manufacturer's total cost (\$) to produce x units is $C(x) = 0.01x^2 + 40x + 2000$; each unit sells for a fixed \$100.

(a) Find the profit function $P(x)$.

(b) Find the number of units maximizing profit, and the maximum profit.

(c) Find the marginal cost $C'(x)$ at $x = 500$, and interpret it.

Lời giải chi tiết

$$(a) R(x) = 100x; P(x) = 100x - 0.01x^2 - 40x - 2000 = -0.01x^2 + 60x - 2000.$$

(b) $P'(x) = -0.02x + 60 = 0 \Rightarrow x = 3000$; $P''(x) = -0.02 < 0$ confirms a maximum.

$$P(3000) = -0.01(9\,000\,000) + 60(3000) - 2000 = -90\,000 + 180\,000 - 2000 = \boxed{\$88\,000}.$$

(c) $C'(x) = 0.02x + 40$. $C'(500) = 10 + 40 = \$50$: producing one more unit beyond 500 costs approximately \$50.

Ôn tập tổng hợp

A particle moves with velocity $v(t) = t^2 - 6t + 8$ m/s, $0 \leq t \leq 6$, and $s(0) = 3$.

(a) Find $s(t)$.

(b) Find all times the particle is at rest, and state whether each is a direction change.

(c) Find the total distance travelled over $[0, 6]$, and compare it with the net displacement.

Lời giải chi tiết

(a) $s(t) = \frac{t^3}{3} - 3t^2 + 8t + 3$ (using $s(0) = 3$).

(b) $v(t) = (t-2)(t-4) = 0$ at $t = 2, 4$. **Sign:** $v(0) = 8 > 0$, $v(3) = -1 < 0$, $v(5) = 3 > 0$: **both** $t = 2$ and $t = 4$ are genuine direction changes.

(c) $s(0) = 3$, $s(2) = \frac{29}{3}$, $s(4) = \frac{25}{3}$, $s(6) = 15$.

$$\text{Distance} = \left| \frac{29}{3} - 3 \right| + \left| \frac{25}{3} - \frac{29}{3} \right| + \left| 15 - \frac{25}{3} \right| = \frac{20}{3} + \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = \frac{44}{3} \approx 14.7 \text{ m},$$

while the net displacement is $s(6) - s(0) = 15 - 3 = 12$ m - again, a different number from the total distance.

Ôn tập tổng hợp · HL

A cylindrical tank of fixed radius 3 m is filled at a constant rate of $5 \text{ m}^3/\text{min}$.

(a) Find the rate the water depth h rises (show that it is independent of h).

(b) If instead the tank were a cone (apex down) with $r = h$ at every level, find the rate the depth rises when $h = 2$ m, for the same fill rate.

Lời giải chi tiết

(a) $V = \pi(3)^2 h = 9\pi h$ (constant r). $\frac{dV}{dt} = 9\pi \frac{dh}{dt} = 5 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{5}{9\pi} \approx 0.177 \text{ m/min}$ (independent of h , since the cross-section never changes).

(b) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi h^3$ (using $r = h$). $\frac{dV}{dt} = \pi h^2 \frac{dh}{dt} = 5$. At $h = 2$: $4\pi \frac{dh}{dt} = 5 \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{5}{4\pi} \approx 0.398 \text{ m/min}$.

Ôn tập tổng hợp

Consider $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$.

(a) Find and classify both stationary points.

(b) Find the point of inflection.

(c) Find the tangent to the curve at the point of inflection, and verify its gradient is the most negative gradient anywhere on the decreasing portion of the curve.

Lời giải chi tiết

(a) $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1, 3$. $y(-1) = 15$, $y(3) = -17$. Sign of y' : positive, negative, positive across $x = -2, 0, 4 \Rightarrow$ local max $(-1, 15)$, local min $(3, -17)$.

(b) $y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$; $y''(0) = -6 < 0$, $y''(2) = 6 > 0$: genuine inflection. $y(1) = -1$, so $(1, -1)$.

(c) $y'(1) = 3 - 6 - 9 = -12$. Tangent: $y + 1 = -12(x - 1) \Rightarrow y = -12x + 11$. Since $y'(x) = 3x^2 - 6x - 9$ is itself an upward parabola in x with vertex at $x = 1$ (where $y'' = 0$), $y'(1) = -12$ is indeed the minimum (most negative) value of y' on the interval $(-1, 3)$ – the curve is falling fastest exactly at its inflection point.

Ôn tập tổng hợp · HL

Consider the region under $y = e^x$ between $x = 0$ and $x = 1$, rotated about the x -axis.

(a) Find the exact volume of the solid formed, then evaluate it correct to 3 s.f.

(b) Without recomputing the integral, explain why this volume must lie strictly between the volumes of two cylinders: one of radius 1 (the curve's minimum height on $[0, 1]$) and one of radius e (its maximum height), both of length 1. Verify this bound numerically.

Lời giải chi tiết

(a) $V = \pi \int_0^1 e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) \approx \frac{\pi}{2} (6.3891) \approx 10.0$ (3 s.f., cubic units).

(b) Since $1 \leq e^x \leq e$ for all $x \in [0, 1]$, every circular cross-section has radius between 1 and e , so its volume must lie strictly between $\pi(1)^2(1) = \pi \approx 3.14$ and $\pi(e)^2(1) = \pi e^2 \approx 23.2$. Indeed $3.14 < 10.0 < 23.2 \checkmark$ – this kind of bounding check is a useful way to sanity-check a volume-of-revolution answer.

Ôn tập nhanh

- **Số và Đại số:** giá trị làm tròn luôn nằm trong khoảng $v - \frac{u}{2} \leq x < v + \frac{u}{2}$; giữ nguyên độ chính xác đầy đủ trên GDC (dùng ANS), chỉ làm tròn ở bước cuối; dãy cộng dùng công sai d ($u_n = u_1 + (n-1)d$), dãy nhân dùng công bội r ($u_n = u_1 r^{n-1}$); lãi kép $FV = PV(1+i)^n$ khác lãi đơn; logarit chỉ xác định với cơ số dương khác 1 và đối số dương; ma trận chỉ khả nghịch khi định thức khác 0.
- **Hàm số:** tập xác định phải loại trừ mẫu bằng 0, biểu thức dưới căn âm, và đối số log không dương; hàm ngược là phản chiếu qua $y = x$ (tập xác định và tập giá trị hoán đổi cho nhau); hàm hợp $f \circ g$ và $g \circ f$ nói chung khác nhau, luôn áp dụng hàm trong trước; khi hồi quy (regression), chỉ nội suy trong phạm vi dữ liệu đã cho, tương quan không chứng minh nhân quả, và phải chọn đúng dạng mô hình (tuyến tính/bậc hai/hàm mũ) dựa trên hình dạng biểu đồ phân tán.
- **Hình học và Lượng giác:** SOH-CAH-TOA chỉ dùng cho tam giác vuông; tam giác thường dùng định lý sin hoặc định lý cosin; luôn kiểm tra trường hợp mơ hồ (SSA) trước khi kết luận số nghiệm; phương vị luôn viết đúng 3 chữ số, đo theo chiều kim đồng hồ từ hướng Bắc; radian là đơn vị bắt buộc trong công thức độ dài cung, diện tích hình quạt, và toàn bộ giải tích; (HL) vectơ chỉ phương tỉ lệ $\Rightarrow$ song song, tích vô hướng bằng 0 $\Rightarrow$ vuông góc.
- **Thống kê và Xác suất:** chọn đúng thước đo xu hướng trung tâm (trung vị thay vì trung bình khi có ngoại lệ); dữ liệu nhóm dùng giá trị giữa khoảng (midpoint); hệ số tương quan r chỉ đo mức độ và chiều của quan hệ **tuyến tính**, không chứng minh nhân quả; phân biệt phân phối nhị thức (số phép thử cố định, độc lập, rời rạc), phân phối chuẩn (liên tục, dùng z -score hoặc hàm nghịch đảo trên GDC), và phân phối Poisson (biến cố hiếm theo tỷ lệ); xác suất có điều kiện $P(A | B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$; hai biến cố độc lập khi và chỉ khi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$; kiểm định χ^2 yêu cầu tần số kỳ vọng đủ lớn (thường ≥ 5) ở mỗi ô.
- **Giải tích:** $f'(x) > 0 \Rightarrow$ đồng biến, $f'(x) < 0 \Rightarrow$ nghịch biến; điểm dừng $f'(x) = 0$ được phân loại bằng dấu đổi của f' hoặc dấu của f'' ; $f''(x) = 0$ **không** tự động cho điểm uốn – bắt buộc kiểm tra độ lõm thực sự đổi dấu; luôn cộng hằng số $+C$ khi tìm nguyên hàm; diện tích dưới trục hoành cho tích phân xác định mang dấu âm – phải tách khoảng tại nghiệm và lấy trị tuyệt đối từng phần để ra diện tích hình học thật; độ dịch chuyển ($\int v dt$) khác quãng đường đi được ($\int |v| dt$) – chỉ bằng nhau khi vận tốc không đổi dấu; chọn đúng công cụ đạo hàm (dây chuyền cho hàm hợp, tích cho tích hai hàm, thương cho tỉ số hai hàm) và luôn kiểm tra lại bằng cách đạo hàm ngược nguyên hàm vừa tìm được.

Đồng hành cùng 8020 English

Cảm ơn bạn đã học cùng bộ giáo trình quốc tế 8020. **Điểm thật · Thầy thật · Kết quả thật** — nhiều học viên chỉ cần 1–2 khoá để đạt kết quả mong muốn. Đội ngũ 100% giáo viên đạt tối thiểu **8.0 IELTS** hoặc **1500 SAT**, gồm Giáo sư · Tiến sĩ · Thạc sĩ tốt nghiệp các trường top đầu thế giới (Carnegie Mellon — #1 Hoa Kỳ về Khoa học Máy tính).

“Bạn cần tất cả kỹ năng trên 7.5 để xét vào trường top 1 Anh Quốc về Y học (UKFPO của NHS) — và đã đạt mục tiêu.” — Trần Hoàng Bảo Ngọc, IELTS Overall 8.0.

Bảng vàng học viên

AP Calculus BC — 5/5
SAT 1590 / 1570 / 1550

AP Microeconomics — 5/5
IELTS 8.0–9.0

IB Economics — 90/100
Duolingo 110 · PTE 90



8020 ENGLISH — CHƯƠNG TRÌNH QUỐC TẾ

Test đầu vào & tư vấn lộ trình MIỄN PHÍ

Hotline Thầy Tường (Head of 8020): 0332 747 169
Cô Nancy: 0983 422 692 · 0772 631 496
Offline Trần Phú, P.4, Q.5, TP.HCM
Online Lớp trực tuyến toàn quốc
Web luyenthi8020.com