

Cambridge IGCSE

Chuyên luyện thi IELTS/SAT → AP / IB / A-levels



Cambridge IGCSE Mathematics

Giáo trình luyện thi chuyên sâu

Song ngữ Anh-Việt

8020 ENGLISH

5A/2 Trần Phú, P.4, Q.5, TP.HCM · luyenthi8020.com

Thầy Tường 0332 747 169 · Cô Nancy 0983 422 692

Lời mở đầu • Foreword

Cuốn sách này thuộc bộ giáo trình luyện thi chương trình quốc tế của **8020 English (8020 Education)** — trung tâm luyện thi trọng điểm **IELTS • SAT • AP • IB • A-level • IGCSE** và sẵn học bổng du học. Toàn bộ nội dung được biên soạn bởi đội ngũ **Giáo sư • Tiến sĩ • Thạc sĩ** tốt nghiệp các trường top đầu thế giới, bám sát khung chương trình chính thức, trình bày đầy đủ lý thuyết, ví dụ mẫu, hình minh họa và hệ thống bài tập có lời giải chi tiết.

This book is part of the 8020 English international exam-prep series: complete English theory with Vietnamese explanations, worked examples, illustrations and fully-solved practice, aligned to the official framework.

Thành tích 8020 English

9.0 IELTS cao nhất

1570 SAT cao nhất

5/5 AP — điểm tuyệt đối

90/100 IB Diploma

100% GV $\geq$ 8.0 IELTS / 1500 SAT

CMU Tiến sĩ ĐH #1 Hoa Kỳ về CS

Đội ngũ tiêu biểu: Thầy Châu Cát Tường (Academic Head, ThS Western Sydney, top 1% IELTS 8.5) · TS Nguyễn Anh Huy (Carnegie Mellon, cựu kỹ sư Amazon) · TS Nguyễn Phước Trường (Toán, ĐH Klagenfurt) · cùng đội ngũ giảng viên SAT 1500–1600, IELTS 8.0–8.5.

Kết quả học viên — điểm thi thật: IELTS 8.0–9.0 · SAT 1550 / 1570 / 1590 · AP 5/5 (Calculus BC, Microeconomics) · IB 90/100 (Economics) · Duolingo 110 · PTE 90 · TOEFL 120. **Bảng vàng SAT:** Khánh Đăng 1510 · Thảo Nguyên 1520 · Tâm Anh 1530.

“Cuối cùng đã đậu vào trường top như mong muốn.” — Phan Thị Thanh Hằng, IELTS Overall 8.5.

Cách dùng sách hiệu quả: mỗi Unit gồm (1) **Lý thuyết trọng tâm** tiếng Anh kèm **giải thích tiếng Việt**; (2) **Ví dụ mẫu** có lời giải; (3) **Hệ thống bài tập** kèm **lời giải chi tiết**. Hãy tự làm bài trước khi xem lời giải để đạt hiệu quả tối đa.

THÀNH TÍCH THỰC TẾ • 8020 ENGLISH

Điểm thi thật • Bảng & bảng điểm thật của giảng viên và học viên 8020 English — Điểm thật • Thầy thật • Kết quả thật

ĐỘI NGŮ

ĐỘI NGŮ GIÁO VIÊN TẬN TÂM

***Tối thiểu 8.0 IELTS Overall**



Gv. Nguyễn Nhật Nam
IELTS 8.5 Overall



Gv. Nguyễn Khanh
IELTS 8.0 Overall



Gv. Nguyễn Đan Vy
IELTS 8.0 Overall



Giảng viên 8020 — IELTS 8.5 & 8.0 Overall (British Council • IDP • Cambridge)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

THÀNH TÍCH HỌC VIÊN

Bảng điểm thi thật – chất lượng được giám sát nghiêm ngặt. Một số học viên chỉ cần 1–2 khóa để đạt kết quả mong muốn.



Học viên 8020 — IELTS 8.0 Overall (bảng điểm thật)

ĐỘI NGŨ

ĐỘI NGŨ GIÁO VIÊN TẬN TÂM

*Tối thiểu 1500 SAT Overall

8020
ENGLISH

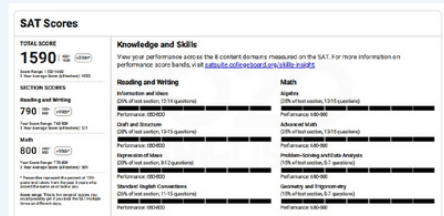
Thầy Quang Minh

Đại học Bách Khoa Hà Nội



SAT 1590

IELTS 8.0



THẾ MẠNH & KINH NGHIỆM

- Học sinh đạt 1450–1560 SAT
- Day nhanh band 1400–1550+
- Chiến thuật làm bài & quản lý thời gian

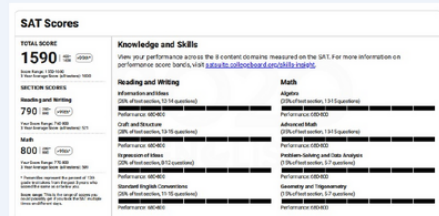
Cô Phương Vy

Đại học Ngoại thương



SAT 1590

IELTS 8.0



THẾ MẠNH & KINH NGHIỆM

- SAT Verbal Instructor (Springboard, QAS)
- Day lớp nhỏ & xây dựng tài liệu riêng
- Chuyên Reading & Writing: Logic – Grammar

Giảng viên 8020 – SAT 1590 (ĐH Bách Khoa Hà Nội & ĐH Ngoại thương)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

TUTOR 1-1 – ĐIỂM SỐ ẤN TƯỢNG

8020
ENGLISH

SAT

Your Scores

Name: Tam T Nguyen
Grade: 12
Test administration: SAT May 3, 2025
Record Locator: 410244771



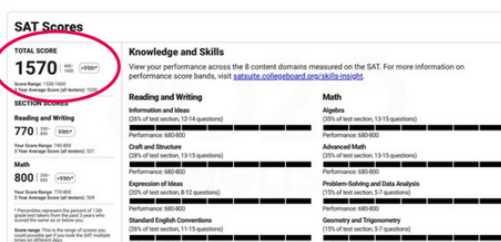
Build your future, your way, with free personalized career and college planning tools



SAT

Your Scores

Name: Linh Pham
Grade: 12
Test administration: SAT December 7, 2024
Record Locator: 409986376



Build your future, your way, with free personalized career and college planning tools



Học viên 8020 – SAT 1550 & 1570 (College Board)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

BẢNG VÀNG HỌC VIÊN

SAT
CHAU CÁT TƯỜNG
Tư vấn hướng nghiệp học & điểm số8020
ENGLISH

Bảng vàng học viên



Bé Khanh Đăng

SAT Bứt phá + Năng cao Cam kết 140++ => Kết quả 1510



Bé Phan Nguyễn Thảo Nguyễn

SAT Năng cao



Bé Lê Tâm Anh

SAT Bứt phá + Năng cao Cam kết 140++ => Bứt phá kết quả 1530

KHÁNH ĐĂNG – SAT 1510

“SAT Bứt phá + Năng cao cam kết 140++ → 1510”

THẢO NGUYỄN – SAT 1520

“SAT Năng cao → 1520”

TÂM ANH – SAT 1530

“SAT Bứt phá + Năng cao cam kết 140++ → 1530”

Bảng vàng SAT – Học viên đạt 1510 · 1520 · 1530

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

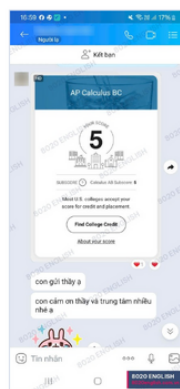
ĐIỂM SỐ AP

8020
ENGLISH

AP Biology: 4 · AP Chemistry: 4



AP Calculus AB: 5



AP Calculus BC: 5



AP Chemistry: 5

Bảng điểm AP thật của học viên – nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Điểm AP thật – Calculus AB/BC 5/5 · Biology & Chemistry 4–5 (College Board)

Mục lục • Contents

1	Number	7
1.1	Types of Number and Set Notation	7
1.2	Prime Factorisation, HCF and LCM	10
1.3	The Four Rules, Directed Numbers, and Order of Operations	11
1.4	Standard Form and Laws of Indices	12
1.5	Fractions, Decimals and Percentages	14
1.6	Ratio, Rate and Proportion	15
1.7	Personal Finance	17
1.8	Surds (Extended)	18
1.9	Bounds / Limits of Accuracy (Extended)	20
1.10	Time, Timetables and the 24-Hour Clock	21
1.11	Problem Bank	22
2	Algebra and graphs	30
2.1	Algebraic manipulation	30
2.2	Algebraic fractions (Extended)	32
2.3	Linear equations and changing the subject of a formula	33
2.4	Simultaneous equations	34
2.5	Quadratic equations	35
2.6	Inequalities	36
2.7	Indices in algebra	38
2.8	Sequences	38
2.9	Function notation (Extended)	39
2.10	Graphs of functions	40
2.11	Introduction to differentiation (Extended)	43
2.12	Problem bank	44
3	Coordinate geometry	54
3.1	Coordinates and the gradient of a line	54
3.2	Midpoint and distance between two points	56
3.3	The equation of a straight line	57
3.4	Parallel and perpendicular lines	59
3.5	The point of intersection of two lines	60
3.6	The perpendicular bisector of a line segment (Extended)	61
3.7	Further applications (Extended)	63
3.8	Problem bank	65
4	Geometry	75
4.1	Angle Facts and Parallel Lines	75
4.2	Triangles, Quadrilaterals, and Symmetry	78
4.3	Congruence and Similarity	80
4.4	Circle Theorems (Extended)	83
4.5	Constructions and Loci	87
4.6	Problem Bank	89

5	Mensuration	97
5.1	Perimeter and Area of 2D Shapes	97
5.2	Arc Length and Sector Area (Extended)	100
5.3	Volume and Surface Area of Prisms and Cylinders	102
5.4	Cones, Spheres, and Pyramids (Extended)	103
5.5	Units and Accuracy	106
5.6	Formula Summary	108
5.7	Problem Bank	109
6	Trigonometry	117
6.1	Pythagoras' Theorem and Right-Angled Trigonometry	117
6.2	Angles of Elevation and Depression, and Bearings	119
6.3	The Sine Rule and Cosine Rule (Extended)	122
6.4	3D Trigonometry (Extended)	124
6.5	Graphs of Trigonometric Functions (Extended)	126
6.6	Problem Bank	128
7	Transformations and vectors	136
7.1	Reflection	136
7.2	Rotation	138
7.3	Translation	140
7.4	Enlargement	141
7.5	Combined transformations (Extended)	143
7.6	Vectors	144
7.7	Position vectors and vector geometry (Extended)	145
7.8	Problem Bank	148
8	Probability	156
8.1	Basic Probability	156
8.2	Combined Events	158
8.3	Venn Diagrams and Set Notation (Extended)	160
8.4	Tree Diagrams	162
8.5	Conditional Probability (Extended)	164
8.6	Problem Bank	166
9	Statistics	177
9.1	Averages and Range	177
9.2	Grouped (Continuous) Data	179
9.3	Stem-and-Leaf Diagrams	180
9.4	Histograms	181
9.5	Cumulative Frequency Diagrams and Box Plots (Extended)	183
9.6	Scatter Diagrams and Correlation	186
9.7	Problem Bank	188

Number

Mục tiêu Unit: Các tập hợp số (tự nhiên, nguyên, hữu tỉ, vô tỉ, thực) và ký hiệu tập hợp; phân tích thừa số nguyên tố, ƯCLN–BCNN; bốn phép tính với số nguyên âm/dương và thứ tự thực hiện phép tính; dạng chuẩn và lũy thừa (kể cả số mũ phân số – Extended); phân số – thập phân – phần trăm; tỉ lệ, tỉ số, tốc độ; tài chính cá nhân (lãi đơn, lãi kép, khấu hao); căn thức (Extended); cận trên/cận dưới (Extended); và thời gian – bảng giờ tàu xe.

1.1 Types of Number and Set Notation

1.1.1 Natural numbers, integers, and the real number system

Every number used in IGCSE Mathematics belongs to one or more of the following families.

Number families

- **Natural numbers** ($\mathbb{N}$): 1, 2, 3, 4, ... – the counting numbers (some syllabuses include 0; Cambridge treats natural numbers as positive integers).
- **Integers** ($\mathbb{Z}$): ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... – natural numbers, their negatives, and zero.
- **Rational numbers** ($\mathbb{Q}$): any number that can be written as $\frac{p}{q}$ with $p, q \in \mathbb{Z}$, $q \neq 0$. This includes all integers, all terminating decimals (e.g. $0.375 = \frac{3}{8}$) and all recurring decimals (e.g. $0.\dot{3} = \frac{1}{3}$).
- **Irrational numbers:** real numbers that *cannot* be written as a fraction of integers – their decimal expansion never terminates and never repeats. Examples: $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π . (Note: $\sqrt{4} = 2$ is rational – a surd is only irrational if the number under the root is not a perfect square/cube.)
- **Real numbers** ($\mathbb{R}$): the union of all rational and irrational numbers – every number on the number line.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Số tự nhiên là các số đếm dương 1, 2, 3, ...; **số nguyên** thêm số 0 và các số âm. **Số hữu tỉ** là mọi số viết được dưới dạng phân số $\frac{p}{q}$ (p, q nguyên, $q \neq 0$) – bao gồm cả số nguyên, số thập phân hữu hạn, và số thập phân tuần hoàn. **Số vô tỉ** có phần thập phân không dừng và không lặp lại theo chu kỳ (ví dụ $\sqrt{2} = 1.41421356 \dots$) – lưu ý $\sqrt{4} = 2$ vẫn là số hữu tỉ vì 4 là số chính phương. **Số thực** là hợp của tất cả số hữu tỉ và vô tỉ, tức là mọi điểm trên trục số.

1.1.2 Special number families: primes, squares, cubes, triangular numbers

Special families

- A **prime number** has *exactly two* distinct factors, 1 and itself: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, ... Note 1 is *not* prime (it has only one factor), and 2 is the only even prime.
- A **square number** is n^2 for integer n : 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ...
- A **cube number** is n^3 for integer n : 1, 8, 27, 64, 125, 216, ...
- A **triangular number** is the sum $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, ...

Ví dụ mẫu · Classifying numbers

Classify each of -7 , $\sqrt{16}$, $\sqrt{20}$, 0.6 , 36 , and π as fully as possible.

-7 : integer, rational, real (not natural, not prime, not square). $\sqrt{16} = 4$: natural number, integer, rational, real, and a **square number**. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$: since 20 is not a perfect square, this is **irrational**, real. $0.6 = \frac{3}{5}$: rational, real (not an integer). 36 : natural number, integer, rational, real, and *both* a **square number** (6^2) and a **triangular number** ($T_8 = \frac{8 \times 9}{2} = 36$). $\pi = 3.14159 \dots$: irrational, real.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Số nguyên tố chỉ có đúng hai ước số (1 và chính nó) — số 1 **không** phải số nguyên tố vì chỉ có một ước. Số chính phương là n^2 , số lập phương là n^3 , và số tam giác là tổng $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (số điểm xếp thành hình tam giác đều). Một số thú vị: 36 vừa là số chính phương (6^2) vừa là số tam giác (T_8) — đây là dạng câu hỏi "tìm số vừa... vừa..." rất hay gặp trong đề 0580.

1.1.3 Set notation and Venn diagrams

A **set** is a well-defined collection of objects (elements). IGCSE 0580 uses the following notation.

Set notation: $x \in A$ (x is an element of A); $A \subset B$ (A is a subset of B); $A \cup B$ (union — in A or both); $A \cap B$ (intersection — in *both* A and B); A' (complement — everything in the universal set $\mathcal{E}$ that is *not* in A); $\mathcal{E}$ (the universal set — everything under consideration); $\emptyset$ (the empty set — contains no elements); $n(A)$ (the *number* of elements in A).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$\mathcal{E}$ là "tập hợp phổ dụng" (mọi phần tử đang xét); A' là phần **bù** của A trong $\mathcal{E}$ (những gì *không* thuộc A); $A \cup B$ là hợp (thuộc A hoặc B , kể cả cả hai); $A \cap B$ là giao (thuộc *cả hai* A và B cùng lúc); $n(A)$ là *số lượng* phần tử của A (một con số, không phải một tập hợp); $\emptyset$ là tập rỗng. Công thức hay dùng: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ — trừ phần giao vì nó bị đếm hai lần.

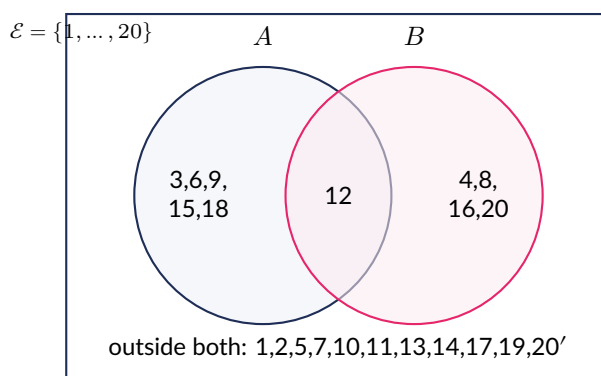
Ví dụ mẫu · Two-set Venn diagram

$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$. $A = \{\text{multiples of } 3\}$, $B = \{\text{multiples of } 4\}$. Find $n(A)$, $n(B)$, $n(A \cap B)$, $n(A \cup B)$, and $n(A')$.

$A = \{3, 6, 9, 12, 15, 18\}$, so $n(A) = 6$. $B = \{4, 8, 12, 16, 20\}$, so $n(B) = 5$. The only common multiple of 3 and 4 up to 20 is 12, so $A \cap B = \{12\}$ and $n(A \cap B) = 1$.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B) = 6 + 5 - 1 = 10.$$

Since $n(\mathcal{E}) = 20$: $n(A') = 20 - 6 = 14$, and $n((A \cup B)') = 20 - 10 = 10$.



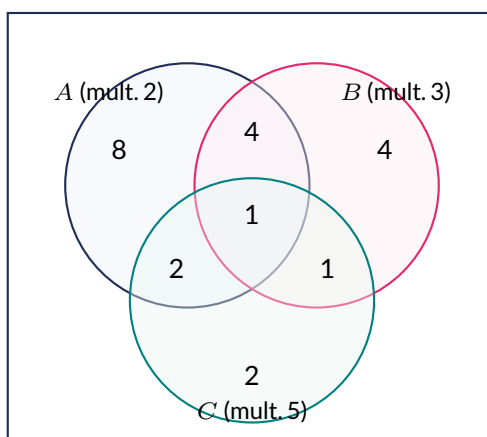
Two-set Venn diagram for $A = \text{multiples of 3}$, $B = \text{multiples of 4}$, in $\mathcal{E} = \{1, \dots, 20\}$. The overlap $\{12\}$ is counted once in $n(A \cup B)$.

Ví dụ mẫu · Three-set Venn diagram

$\mathcal{E} = \{1, 2, \dots, 30\}$. $A = \{\text{multiples of 2}\}$, $B = \{\text{multiples of 3}\}$, $C = \{\text{multiples of 5}\}$. Find the number of elements in each region of a three-set Venn diagram.

Counting multiples up to 30: $n(A) = 15$, $n(B) = 10$, $n(C) = 6$. Pairwise: $n(A \cap B) = 5$ (multiples of 6), $n(A \cap C) = 3$ (multiples of 10), $n(B \cap C) = 2$ (multiples of 15). All three: $n(A \cap B \cap C) = 1$ (multiples of 30).

Working from the centre outward: **centre** $(A \cap B \cap C) = 1$. $A \cap B$ **only** $= 5 - 1 = 4$. $A \cap C$ **only** $= 3 - 1 = 2$. $B \cap C$ **only** $= 2 - 1 = 1$. A **only** $= 15 - 4 - 2 - 1 = 8$. B **only** $= 10 - 4 - 1 - 1 = 4$. C **only** $= 6 - 2 - 1 - 1 = 2$. Check total inside the union: $8 + 4 + 2 + 4 + 2 + 1 + 1 = 22$, and outside all three: $30 - 22 = 8$.



Three-set Venn diagram: $A = \text{mult. of 2}$, $B = \text{mult. of 3}$, $C = \text{mult. of 5}$ in $\{1, \dots, 30\}$. Centre region $(A \cap B \cap C) = 1$ (i.e. 30); 8 elements lie outside all three circles.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với biểu đồ Venn 3 tập hợp, luôn tính từ **trong ra ngoài**: trước tiên tìm phần giao của cả ba ($A \cap B \cap C$), sau đó lấy từng giao đôi **trừ** đi phần giao ba (để không đếm trùng), cuối cùng lấy từng tập hợp **trừ** đi cả hai phần giao liên quan **cộng** lại phần giao ba (vì đã bị trừ hai lần). Đây

là kỹ thuật loại trừ-cộng hay gặp nhất trong các câu hỏi tập hợp của đề 0580 Extended.

1.2 Prime Factorisation, HCF and LCM

1.2.1 Prime factorisation

Every integer greater than 1 can be written as a product of prime numbers in exactly one way (up to the order of the factors) – the **Fundamental Theorem of Arithmetic**. This is usually found using a **factor tree**, and written using index notation.

Ví dụ mẫu · Prime factorisation

Express 360 as a product of prime factors.

$$360 = 2 \times 180 = 2 \times 2 \times 90 = 2 \times 2 \times 2 \times 45 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 15 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5.$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phân tích ra thừa số nguyên tố bằng cách chia liên tiếp cho các số nguyên tố nhỏ nhất có thể (2, rồi 3, rồi 5,...) cho đến khi thương số bằng 1. Kết quả luôn viết dưới dạng lũy thừa của các số nguyên tố, ví dụ $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$ – đây là bước nền tảng bắt buộc trước khi tìm ƯCLN hoặc BCNN.

1.2.2 HCF and LCM by prime factors, including three numbers

HCF and LCM

To find the **HCF** (highest common factor) of two or more numbers from their prime factorisations, take the *lowest* power of each prime that is **common to all** the numbers. To find the **LCM** (lowest common multiple), take the *highest* power of **every** prime that appears in any of the numbers. For exactly **two** numbers a, b : $\text{HCF}(a, b) \times \text{LCM}(a, b) = a \times b$ – this identity does *not* extend to three or more numbers.

Ví dụ mẫu · HCF and LCM of two numbers

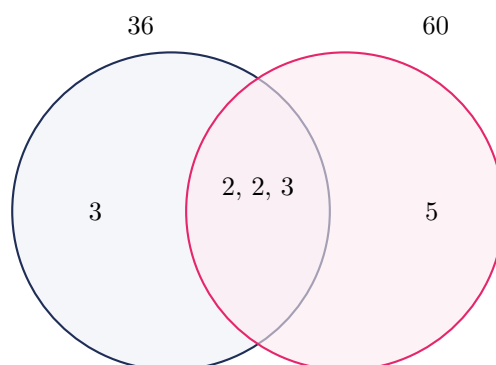
Find the HCF and LCM of 36 and 60.

$$36 = 2^2 \times 3^2, \quad 60 = 2^2 \times 3 \times 5.$$

HCF: lowest powers of common primes 2 and 3: $2^2 \times 3 = 12$.

LCM: highest powers of every prime appearing (2, 3, 5): $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$.

Check: $\text{HCF} \times \text{LCM} = 12 \times 180 = 2160$, and $36 \times 60 = 2160$. ✓



Prime factors of $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ and $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$: the overlap $2, 2, 3$ multiplies to give $\text{HCF} = 12$; multiplying *everything* shown (overlap $\times$ leftover $3 \times$ leftover 5) gives $\text{LCM} = 12 \times 3 \times 5 = 180$.

Ví dụ mẫu · HCF and LCM of three numbers

Find the HCF and LCM of 30, 42 and 70.

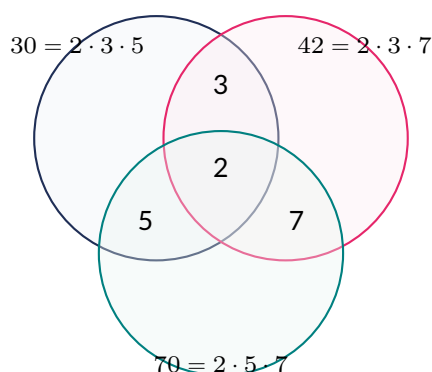
$$30 = 2 \times 3 \times 5, \quad 42 = 2 \times 3 \times 7, \quad 70 = 2 \times 5 \times 7.$$

HCF: the *only* prime common to all three is 2 (to power 1), so $\text{HCF} = 2$.

LCM: every distinct prime that appears at all is 2, 3, 5, 7 (each to power 1), so $\text{LCM} = 2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$.

Check: $210 \div 30 = 7$, $210 \div 42 = 5$, $210 \div 70 = 3$ — all whole numbers, and no smaller number works.

✓



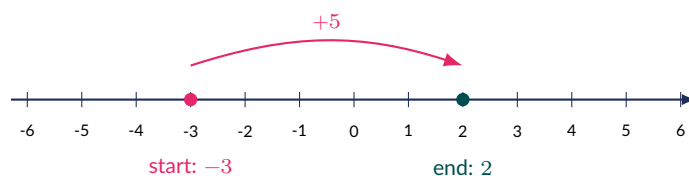
Prime-factor Venn diagram for 30, 42, 70: the only prime shared by *all three* circles is 2 (centre), so $\text{HCF} = 2$; multiplying every prime shown once ($2 \times 3 \times 5 \times 7$) gives $\text{LCM} = 210$.

(!) Lỗi thường gặp: Không được áp dụng công thức $\text{HCF} \times \text{LCM} = a \times b$ cho *ba số trở lên*. Với ví dụ trên: $\text{HCF} \times \text{LCM} = 2 \times 210 = 420$, nhưng $30 \times 42 \times 70 = 88\,200$ — hoàn toàn khác nhau. Công thức tích này *chỉ đúng cho đúng hai số*.

1.3 The Four Rules, Directed Numbers, and Order of Operations

1.3.1 Directed numbers

Directed numbers are positive and negative numbers combined. Adding a negative number is the same as subtracting its positive value; subtracting a negative number is the same as adding its positive value. Multiplying or dividing two numbers with the *same* sign gives a positive result; with *different* signs gives a negative result.



Number line for $-3 + 5 = 2$: moving 5 units to the *right* from -3 lands on 2.

Ví dụ mẫu · Directed number arithmetic

Evaluate: (a) $-8 + 5$; (b) $-3 - (-7)$; (c) $(-4) \times (-6)$; (d) $-36 \div 9$.

(a) $-8 + 5 = -3$. (b) $-3 - (-7) = -3 + 7 = 4$. (c) $(-4) \times (-6) = 24$ (same signs $\Rightarrow$ positive).
(d) $-36 \div 9 = -4$ (different signs $\Rightarrow$ negative).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cộng số âm = trừ số dương tương ứng; trừ số âm = cộng số dương tương ứng (hai dấu trừ liền nhau "triệt tiêu" thành dấu cộng). Nhân/chia: **cùng dấu** cho kết quả **dương**, **khác dấu** cho kết quả **âm**. Đây là quy tắc nền tảng — sai một dấu là sai toàn bộ bài toán phía sau.

1.3.2 Order of operations (BIDMAS)

BIDMAS / BODMAS: Brackets, Indices (Orders), Division and Multiplication (left to right, equal priority), Addition and Subtraction (left to right, equal priority).

Ví dụ mẫu · Order of operations

Evaluate $3 + 4 \times (7 - 2)^2 \div 5 - 1$.

Brackets: $7 - 2 = 5$. Indices: $5^2 = 25$. Multiplication/division (left to right): $4 \times 25 = 100$, then $100 \div 5 = 20$. Addition/subtraction (left to right): $3 + 20 - 1 = 22$.

Ví dụ mẫu · Negative bases and indices

Evaluate $(-2)^3 - (-3)^2 \div 3 + 4$.

Indices first: $(-2)^3 = -8$ (odd power of a negative number stays negative); $(-3)^2 = 9$ (even power of a negative number becomes positive). Division: $9 \div 3 = 3$. Left to right: $-8 - 3 + 4 = -7$.

(!) Lỗi thường gặp: -5^2 và $(-5)^2$ **không bằng nhau!** Không có dấu ngoặc, số mũ chỉ áp dụng cho chữ số ngay trước nó: $-5^2 = -(5^2) = -25$. Có dấu ngoặc bao quanh cả số âm: $(-5)^2 = (-5) \times (-5) = 25$. Luôn kiểm tra kỹ xem dấu trừ có nằm *trong* ngoặc hay không trước khi bình phương.

1.4 Standard Form and Laws of Indices

1.4.1 Standard form

A number is in **standard form** (scientific notation) when written as $a \times 10^n$, where $1 \leq a < 10$ and $n \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ mẫu · Converting to standard form

Write (a) 356 000 and (b) 0.0000728 in standard form.

(a) $356\,000 = 3.56 \times 10^5$ (decimal point moves 5 places left). (b) $0.0000728 = 7.28 \times 10^{-5}$ (decimal point moves 5 places right, so the exponent is negative).

Ví dụ mẫu · Multiplying and dividing in standard form

Simplify, giving each answer in standard form: (a) $(4.5 \times 10^6) \times (2 \times 10^{-9})$; (b) $(9.6 \times 10^{-3}) \div (1.6 \times 10^5)$.

(a) Multiply the coefficients, add the exponents: $4.5 \times 2 = 9$, $10^{6+(-9)} = 10^{-3}$, so the product is 9×10^{-3} (already valid standard form).

(b) Divide the coefficients, subtract the exponents: $9.6 \div 1.6 = 6$, $10^{-3-5} = 10^{-8}$, so the quotient is 6×10^{-8} .

(!) Lỗi thường gặp: Sau khi nhân hoặc chia dạng chuẩn, hệ số kết quả **phải nằm trong khoảng** $[1, 10)$. Ví dụ: $(6 \times 10^4) \times (5 \times 10^7) = 30 \times 10^{11}$ — đây **chưa** phải dạng chuẩn vì $30 \geq 10$. Phải chuẩn hoá lại: $30 \times 10^{11} = 3 \times 10^{12}$ (dịch dấu phẩy 1 vị trí, cộng thêm 1 vào số mũ). Rất nhiều học sinh mất điểm chỉ vì quên bước chuẩn hoá này.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi nhân/chia dạng chuẩn: nhân (hoặc chia) phần hệ số a với nhau, cộng (hoặc trừ) số mũ của 10. Nếu hệ số kết quả không còn nằm trong khoảng $[1, 10)$, phải **chuẩn hoá lại**: ví dụ $30 \times 10^{11} = 3 \times 10^{12}$. Đây là lỗi phổ biến nhất khi làm bài dạng chuẩn.

1.4.2 Laws of indices

Laws of indices: $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $a^m \div a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $a^0 = 1$ (for $a \neq 0$); $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Ví dụ mẫu · Simplifying with indices

Simplify $(x^3)^2 \times x^{-4} \div x^{-5}$.

$(x^3)^2 = x^6$. Then $x^6 \times x^{-4} = x^{6+(-4)} = x^2$. Then $x^2 \div x^{-5} = x^{2-(-5)} = x^7$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ba quy tắc cốt lõi: nhân cùng cơ số thì **cộng** số mũ; chia cùng cơ số thì **trừ** số mũ; lũy thừa của lũy thừa thì **nhân** số mũ. Số mũ 0 luôn cho kết quả 1 (trừ cơ số 0); số mũ âm nghĩa là "nghịch đảo" ($a^{-n} = 1/a^n$), không phải là số âm.

1.4.3 Fractional and negative rational indices (Extended)

[(Extended)] $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$ (the n -th root of a); more generally $a^{p/q} = (\sqrt[q]{a})^p = \sqrt[q]{a^p}$. Negative rational exponents combine both rules: $a^{-p/q} = \frac{1}{a^{p/q}}$.

Ví dụ mẫu · Fractional indices (Extended)

Evaluate (a) $27^{2/3}$ and (b) $16^{-3/4}$.

(a) $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$, then square it: $27^{2/3} = 3^2 = 9$.

(b) $16^{1/4} = \sqrt[4]{16} = 2$, then cube it: $16^{3/4} = 2^3 = 8$; the negative exponent inverts it: $16^{-3/4} = \frac{1}{8}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với số mũ dạng phân số $a^{p/q}$: mẫu số q là căn bậc q , tử số p là lũy thừa bậc p – thứ tự thực hiện không quan trọng (khai căn trước rồi lũy thừa, hoặc ngược lại, đều ra cùng kết quả), nhưng nên khai căn trước để làm việc với số nhỏ hơn. Số mũ âm vẫn có nghĩa là nghịch đảo như với số mũ nguyên.

1.5 Fractions, Decimals and Percentages

1.5.1 Conversions

Ví dụ mẫu · Converting between forms

Convert (a) $\frac{5}{8}$ to a decimal and a percentage; (b) 0.35 to a fraction in lowest terms.

(a) $\frac{5}{8} = 0.625 = 62.5\%$. (b) $0.35 = \frac{35}{100} = \frac{7}{20}$ (dividing top and bottom by 5).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phân số → thập phân: chia tử cho mẫu. Thập phân → phần trăm: nhân với 100. Thập phân → phân số: viết dưới dạng phân số có mẫu là lũy thừa của 10, rồi rút gọn về dạng tối giản (chia cả tử và mẫu cho ước chung lớn nhất).

1.5.2 Percentage of an amount, increase and decrease

To find $r\%$ of an amount, multiply by $\frac{r}{100}$. To **increase** by $r\%$, multiply the original amount by $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$. To **decrease** by $r\%$, multiply by $\left(1 - \frac{r}{100}\right)$.

Ví dụ mẫu · Percentage of an amount, increase and decrease

(a) Find 24% of 350. (b) Increase \$150 by 12%. (c) Decrease \$240 by 15%.

(a) $0.24 \times 350 = 84$. (b) $150 \times 1.12 = \$168$. (c) $240 \times 0.85 = \$204$.

1.5.3 Reverse percentage

Reverse percentage

If a value has already been increased or decreased by $r\%$ and you are given the **new** value, find the **original** value by **dividing** the new value by $\left(1 \pm \frac{r}{100}\right)$ – never by adding/subtracting $r\%$ of the new value.

Ví dụ mẫu · Reverse percentage

(a) A sale price of \$102 follows a 15% reduction. Find the original price.

(b) After an 8% increase, an item costs \$486. Find the original price.

(a) Original = $102 \div 0.85 = \$120$. Check: $120 \times 0.85 = 102$. ✓

(b) Original = $486 \div 1.08 = \$450$. Check: $450 \times 1.08 = 486$. ✓

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi kinh điển: với bài (a) ở trên, nhiều học sinh tính sai bằng cách **cộng** 15% của \$102 vào giá bán: $102 + 0.15 \times 102 = \117.30 — **sai**, vì 15% luôn được tính trên giá **gốc** (chưa biết), không phải trên giá **đã giảm**. Cách đúng duy nhất là **chia** giá mới cho $\left(1 - \frac{r}{100}\right)$, ở đây là $102 \div 0.85 = \$120$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Lãi kép nhân dồn theo từng năm: giá trị sau n năm = $P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$. Đừng nhầm với lãi đơn (chỉ cộng thêm $r\%$ của vốn gốc mỗi năm) — đề IGCSE luôn phân biệt rõ “simple” và “compound”. Với bài phần trăm ngược, luôn **chia**, không bao giờ cộng/trừ trực tiếp trên giá trị mới.

1.6 Ratio, Rate and Proportion

1.6.1 Sharing in a ratio

Ví dụ mẫu · Sharing in a ratio

Share \$980 in the ratio 3 : 4 : 7.

Total parts = $3 + 4 + 7 = 14$. One part = $980 \div 14 = \$70$. Amounts: $3 \times 70 = \$210$, $4 \times 70 = \$280$, $7 \times 70 = \$490$. Check: $210 + 280 + 490 = 980$. ✓

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Chia một đại lượng theo tỉ lệ: cộng tất cả các phần để tìm tổng số phần, chia đại lượng cho tổng số phần để tìm giá trị “một phần”, rồi nhân với từng thành phần của tỉ lệ. Luôn kiểm tra lại bằng cách cộng các phần đã tính để so khớp với tổng ban đầu.

1.6.2 Best buy and unit rates

Ví dụ mẫu · Best buy

Which is better value: 750 g of coffee for \$4.50, or 1.2 kg for \$6.84?

Brand A: $\$4.50 \div 0.75 \text{ kg} = \6.00 per kg. Brand B: $\$6.84 \div 1.2 \text{ kg} = \5.70 per kg. Since $\$5.70 < \6.00 , **Brand B (1.2 kg for \$6.84)** is better value.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

So sánh giá trị: luôn quy về **cùng một đơn vị** (ví dụ giá trên mỗi kg hoặc mỗi lít), rồi so sánh trực tiếp. Đơn giá càng **thấp** thì càng có lợi cho người mua.

1.6.3 Speed, distance, time and density

$$\text{speed} = \frac{\text{distance}}{\text{time}}, \quad \text{density} = \frac{\text{mass}}{\text{volume}}. \quad \text{Rearrange as needed: distance} = \text{speed} \times \text{time},$$

$$\text{time} = \frac{\text{distance}}{\text{speed}}.$$

Ví dụ mẫu · Speed and density

- (a) A car travels 180 km in 2 hours 15 minutes. Find its average speed.
 (b) A metal cube has side 4 cm and mass 340 g. Find its density.
 (a) 2 h 15 min = 2.25 h. Speed = $180 \div 2.25 = 80$ km/h.
 (b) Volume = $4^3 = 64$ cm³. Density = $340 \div 64 = 5.3125 \approx 5.31$ g/cm³ (3 s.f.).

1.6.4 Direct and inverse proportion (Extended)

(Extended) Proportion families

- $y \propto x$: $y = kx$ (straight line through the origin).
- $y \propto x^2$: $y = kx^2$.
- $y \propto x^3$: $y = kx^3$.
- $y \propto \sqrt{x}$: $y = k\sqrt{x}$.
- $y \propto \frac{1}{x}$ (inverse proportion): $y = \frac{k}{x}$.
- $y \propto \frac{1}{x^2}$: $y = \frac{k}{x^2}$.

In every case, find k first by substituting a known pair of values, then use that k to answer the question.

Ví dụ mẫu · Direct proportion, $y \propto x^2$ (Extended)

y is directly proportional to x^2 . When $x = 5$, $y = 50$. Find y when $x = 8$.
 $y = kx^2 \Rightarrow 50 = k(25) \Rightarrow k = 2$. When $x = 8$: $y = 2(64) = 128$.

Ví dụ mẫu · Inverse proportion, $y \propto 1/x$ (Extended)

y is inversely proportional to x . When $x = 4$, $y = 6$. Find y when $x = 12$.
 $y = \frac{k}{x} \Rightarrow k = xy = 4 \times 6 = 24$. When $x = 12$: $y = \frac{24}{12} = 2$.

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Với mọi bài tỉ lệ thuận/tỉ lệ nghịch (kể cả các dạng phi tuyến $y \propto x^2, x^3, \sqrt{x}, 1/x, 1/x^2$), luôn làm theo 3 bước: (1) viết phương trình liên hệ dùng hằng số k ; (2) thay một cặp giá trị đã biết vào để tìm k ; (3) dùng k vừa tìm để tính giá trị còn thiếu. Tỉ lệ **thuận**: khi x tăng thì y cũng tăng theo cùng "kiểu" ($x, x^2, x^3, \sqrt{x}$). Tỉ lệ **nghịch**: khi x tăng thì y giảm ($1/x, 1/x^2$).

1.7 Personal Finance

1.7.1 Simple interest

Simple interest: $I = \frac{P \times r \times t}{100}$, where P is the principal, r is the annual rate (%), and t is the time in years. Interest is calculated on the *original* principal every year – it does not compound.

Ví dụ mẫu · Simple interest

Find the simple interest on \$2500 at 4% per year for 3 years, and the total amount repayable.

$$I = \frac{2500 \times 4 \times 3}{100} = \$300. \text{ Total repayable} = 2500 + 300 = \$2800.$$

1.7.2 Compound interest

Compound interest: value after n years = $P \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$. Unlike simple interest, each year's interest is calculated on the **previous year's total**, not just the original principal.

Ví dụ mẫu · Compound interest over several years

\$4500 is invested at 4% per year compound interest. Find its value after 3 years, and the total interest earned.

$$4500 \times 1.04^3 = 4500 \times 1.124864 = \$5061.888 \dots \approx \$5061.89 \text{ (2 d.p.)}. \text{ Interest earned} = 5061.89 - 4500 = \$561.89.$$

Ví dụ mẫu · Finding the rate or the time (Extended)

- (a) \$4000 grows to \$4410 after 2 years of compound interest. Find the annual rate.
 (b) \$2000 grows to \$2662 under compound interest at 10% per year. Find the number of years.

$$(a) \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 = \frac{4410}{4000} = 1.1025 \Rightarrow 1 + \frac{r}{100} = \sqrt{1.1025} = 1.05 \Rightarrow r = 5\%.$$

$$(b) 1.1^n = \frac{2662}{2000} = 1.331. \text{ Since } 1.1^3 = 1.331, \text{ we get } n = 3 \text{ years.}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức lãi kép $P(1 + r/100)^n$ có thể dùng để tìm bất kỳ đại lượng nào trong bốn đại lượng P, r, n, A (giá trị cuối), miễn là biết ba đại lượng còn lại: nếu thiếu r hoặc n , hãy cô lập $(1 + \frac{r}{100})^n$ trước, sau đó dùng căn bậc n (nếu tìm r) hoặc thử nghiệm/logarit (nếu tìm n).

1.7.3 Depreciation and exponential growth/decay (Extended)

[(Extended)] **Depreciation** (value decreasing by a fixed % each year) uses the same structure as compound interest but with a *decreasing* factor: value after n years = $P \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$. This is one case of general **exponential growth/decay**: value = $P \times k^n$, with $k > 1$ for growth and $0 < k < 1$ for decay.

Ví dụ mẫu · Depreciation

A machine bought for \$12 000 depreciates by 10% per year (compound). Find its value after 3 years.

$$12\,000 \times 0.9^3 = 12\,000 \times 0.729 = \$8748.$$

Ví dụ mẫu · Exponential growth and decay (Extended)

(a) A bacteria culture of 500 cells grows at 20% per hour. Find the population after 5 hours.

(b) A radioactive sample of mass 80 g decays at 15% per year. Find its mass after 6 years, to 2 d.p.

$$(a) 500 \times 1.2^5 = 500 \times 2.48832 = 1244.16 \approx 1244 \text{ cells.}$$

$$(b) 80 \times 0.85^6 = 80 \times 0.377149 \dots = 30.1719 \dots \approx 30.17 \text{ g.}$$

1.7.4 Currency conversion, profit, loss and discount

Profit % = $\frac{\text{profit}}{\text{cost price}} \times 100$. **Discount:** sale price = marked price $\times \left(1 - \frac{\text{discount}\%}{100}\right)$. **Currency conversion:** multiply by the exchange rate to convert *into* the foreign currency, divide to convert *back*.

Ví dụ mẫu · Currency, profit and discount

(a) A trader buys goods for 15,000,000 VND and sells them for 18,300,000 VND. Find the profit percentage, and the profit in USD if 1 USD = 24,500 VND.

(b) A shirt marked \$150 is sold at a 12% discount. Find the sale price.

$$(a) \text{Profit} = 18,300,000 - 15,000,000 = 3,300,000 \text{ VND. Profit\%} = \frac{3\,300\,000}{15\,000\,000} \times 100 = 22\%. \text{ In USD: } 3\,300\,000 \div 24\,500 = \$132.$$

$$(b) \text{Sale price} = 150 \times 0.88 = \$132.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phần trăm lợi nhuận luôn tính trên **giá vốn (cost price)**, không phải giá bán. Đổi tiền tệ: nhân với tỉ giá để đổi *sang* ngoại tệ, chia cho tỉ giá để đổi về nội tệ – luôn kiểm tra chiều đổi bằng cách ước lượng xem kết quả có "hợp lý" hay không (ví dụ VND sang USD phải cho một số rất nhỏ hơn).

1.8 Surds (Extended)**1.8.1 Simplifying and combining surds****(Extended) Surds**

A **surd** is an irrational root left in exact form, e.g. $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$. Simplify a surd by extracting the largest perfect-square factor: $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$. Surds can only be added or subtracted directly if they are **like surds** (same number under the root) – simplify first if needed.

Ví dụ mẫu · Simplifying and adding surds (Extended)

Simplify $\sqrt{200}$, then simplify $\sqrt{48} + \sqrt{75}$.

$$\sqrt{200} = \sqrt{100 \times 2} = 10\sqrt{2}.$$

$$\sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = 4\sqrt{3}, \quad \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = 5\sqrt{3}. \quad \text{Sum: } 4\sqrt{3} + 5\sqrt{3} = 9\sqrt{3}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Để rút gọn căn thức, luôn tìm **ước chính phương lớn nhất** của số dưới dấu căn (ví dụ $48 = 16 \times 3$, mà 16 là số chính phương). Chỉ được cộng/trừ các căn thức **cùng loại** (cùng số dưới dấu căn) sau khi đã rút gọn – giống như cộng các đơn thức đồng dạng trong đại số.

1.8.2 Expanding brackets containing surds

Ví dụ mẫu · Expanding brackets with surds (Extended)

Expand and simplify $(2 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3})$.

$$(2 + \sqrt{3})(4 - \sqrt{3}) = 8 - 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} - 3 = 5 + 2\sqrt{3} \quad (\text{using } \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3).$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khai triển ngoặc chứa căn thức giống hệt khai triển đại số bình thường (FOIL) – chỉ khác ở bước cuối: $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$ (không còn dấu căn). Luôn gom các số hạng "thuần túy" (không có căn) và các số hạng "có căn cùng loại" riêng biệt.

1.8.3 Rationalising the denominator

(Extended) Rationalising

To rationalise a **monomial** surd denominator (e.g. $\frac{1}{\sqrt{3}}$), multiply top and bottom by that surd.
To rationalise a **binomial** denominator (e.g. $\frac{1}{2+\sqrt{3}}$), multiply top and bottom by the **conjugate** (same terms, opposite middle sign), using $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ to clear the surd from the denominator.

Ví dụ mẫu · Rationalising a monomial denominator (Extended)

Rationalise (a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ and (b) $\frac{5}{2\sqrt{7}}$.

$$(a) \frac{1}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad (b) \frac{5}{2\sqrt{7}} \times \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{14}.$$

Ví dụ mẫu · Rationalising a binomial denominator (Extended)

Rationalise (a) $\frac{1}{2 + \sqrt{3}}$ and (b) $\frac{4}{3 - \sqrt{5}}$.

$$(a) \text{ Multiply by the conjugate } 2 - \sqrt{3}: \frac{1 \times (2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})} = \frac{2 - \sqrt{3}}{4 - 3} = 2 - \sqrt{3}.$$

$$(b) \text{ Multiply by the conjugate } 3 + \sqrt{5}: \frac{4(3 + \sqrt{5})}{(3 - \sqrt{5})(3 + \sqrt{5})} = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = \frac{4(3 + \sqrt{5})}{4} = 3 + \sqrt{5}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với mẫu số đơn (chỉ một căn thức), nhân cả tử và mẫu với chính căn thức đó. Với mẫu số kép (dạng $a + \sqrt{b}$ hoặc $a - \sqrt{b}$), nhân với **liên hợp** (conjugate) – cùng hai số hạng nhưng đổi dấu ở giữa – để áp dụng hằng đẳng thức $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$, xoá bỏ hoàn toàn dấu căn ở mẫu.

1.9 Bounds / Limits of Accuracy (Extended)

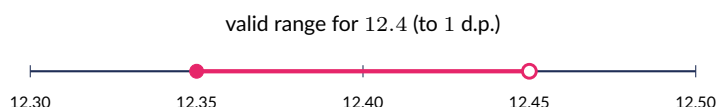
1.9.1 Upper and lower bounds

(Extended) Bounds

A measurement rounded to a given precision could have been anything within half a unit of that precision above or below the stated value. If a value is rounded to the nearest d , then **lower bound** = stated value $-\frac{d}{2}$, and **upper bound** = stated value $+\frac{d}{2}$ (the upper bound itself is not actually attainable, but Cambridge accepts writing it as $<$ the upper bound).

Ví dụ mẫu · Bounds from rounding and significant figures (Extended)

- (a) A mass is 8.6 kg, correct to 1 d.p. Find its bounds.
 (b) A distance is 380 m, correct to 3 s.f. Find its bounds.
 (a) Rounded to the nearest 0.1, so half-unit = 0.05: $8.55 \leq m < 8.65$.
 (b) To 3 s.f., the last significant digit is the units digit, so half-unit = 0.5: $379.5 \leq d < 380.5$.



A length of 12.4 cm (1 d.p.) can be anywhere in $12.35 \leq l < 12.45$: filled circle = lower bound included; open circle = upper bound excluded.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nếu số được làm tròn đến d chữ số thập phân hoặc d chữ số có nghĩa, sai số tối đa là $\pm \frac{1}{2}$ đơn vị của chữ số cuối cùng được giữ lại. Ví dụ làm tròn đến 0.1 thì cận là ± 0.05 ; làm tròn đến hàng đơn vị (như 3 chữ số có nghĩa của 380) thì cận là ± 0.5 . Cận trên về lý thuyết không đạt được (dùng dấu $<$), nhưng cận dưới thì đạt được (dùng dấu $\leq$).

1.9.2 Combining bounds in calculations

[(Extended) Combining bounds] For quantities p (bounds $p_{\min} \leq p < p_{\max}$) and q (bounds $q_{\min} \leq q < q_{\max}$):

- **Sum** $p + q$: upper bound = $p_{\max} + q_{\max}$; lower bound = $p_{\min} + q_{\min}$.
- **Difference** $p - q$: upper bound = $p_{\max} - q_{\min}$; lower bound = $p_{\min} - q_{\max}$.
- **Product** pq : upper bound = $p_{\max} \times q_{\max}$; lower bound = $p_{\min} \times q_{\min}$.
- **Quotient** $p \div q$: upper bound = $p_{\max} \div q_{\min}$; lower bound = $p_{\min} \div q_{\max}$.

The quotient rule is the one students most often get backwards: to make a *fraction as large as possible*, you want the **largest** numerator combined with the **smallest** denominator; to make it *as small as possible*, use the **smallest** numerator combined with the **largest** denominator.

Ví dụ mẫu · Combining bounds (Extended)

$a = 15.2$ cm and $b = 8.7$ cm, both correct to 1 d.p. Find the upper and lower bounds of (i) $a + b$; (ii) $a - b$; (iii) ab ; (iv) $a \div b$.

Bounds: $15.15 \leq a < 15.25$; $8.65 \leq b < 8.75$.

(i) Sum: lower = $15.15 + 8.65 = 23.80$; upper = $15.25 + 8.75 = 24.00$.

(ii) Difference: lower = $15.15 - 8.75 = 6.40$; upper = $15.25 - 8.65 = 6.60$.

(iii) Product: lower = $15.15 \times 8.65 = 131.0475$; upper = $15.25 \times 8.75 = 133.4375$.

(iv) Quotient: lower = $15.15 \div 8.75 \approx 1.7314$; upper = $15.25 \div 8.65 \approx 1.7630$ (largest numerator over smallest denominator).

Ví dụ mẫu · Upper bound of an area (Extended)

A rectangle has length 8.4 cm and width 3.6 cm, both correct to 1 d.p. Find the upper bound of its area.

Length bounds: $8.35 \leq l < 8.45$. Width bounds: $3.55 \leq w < 3.65$. Upper bound of area = $8.45 \times 3.65 = 30.8425 \text{ cm}^2$.

(!) Lỗi thường gặp: Với phép chia, học sinh hay lấy nhầm "cận lớn chia cận lớn" để tìm cận trên. Thực tế: để tối đa hoá một thương số $p \div q$, cần tử số lớn nhất và mẫu số nhỏ nhất; để tối thiểu hoá, cần tử số nhỏ nhất và mẫu số lớn nhất – mẫu số càng nhỏ thì thương càng lớn (chia cho một số nhỏ hơn cho kết quả lớn hơn), đây là điểm ngược trực giác khiến rất nhiều học sinh mất điểm.

1.10 Time, Timetables and the 24-Hour Clock

Cambridge IGCSE timetable questions use the **24-hour clock** (e.g. 21:48 for 9:48 pm) and require converting between clock times and elapsed durations.

Ví dụ mẫu · Reading a timetable

The table shows three buses running the same route.

Stop	Bus 1	Bus 2	Bus 3
Market Square	07:15	08:00	08:45
Town Hall	07:24	08:09	08:54
Central Station	07:41	08:26	09:11
Retail Park	07:58	08:43	09:28
Airport	08:20	09:05	09:50

(a) How long does Bus 1 take from Market Square to the Airport? (b) A passenger arrives at Central Station at 08:30. Which bus should they catch, and when do they reach the Airport? (c) If the distance from Market Square to the Airport is 14.5 km, find Bus 1's average speed.

(a) From 07:15 to 08:20 is 1 hour 5 minutes.

(b) Bus 2 has already left Central Station ($08:26 < 08:30$), so the passenger must catch **Bus 3**, departing 09:11, arriving Airport at **09:50**.

(c) $1 \text{ h } 5 \text{ min} = 1\frac{5}{60} \text{ h} = \frac{65}{60} \text{ h}$. Speed = $14.5 \div \frac{65}{60} = 14.5 \times \frac{60}{65} = \frac{870}{65} \approx 13.4 \text{ km/h}$ (3 s.f.).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi đọc bảng giờ tàu xe, luôn để ý xem hành khách có **kịp giờ** chuyển gần nhất hay không (nếu giờ khởi hành đã qua thời điểm hành khách có mặt, phải chọn chuyển **tiếp theo**). Khi đổi giờ phút sang giờ thập phân để tính tốc độ, nhớ $1 \text{ phút} = \frac{1}{60} \text{ giờ}$ — đây là lỗi quy đổi phổ biến nhất (nhầm phút với phần trăm của giờ, ví dụ nhầm 15 phút thành 0.15 giờ thay vì 0.25 giờ).

Ví dụ mẫu · Multi-stage speed, distance, time

A cyclist rides the first 20 km of a journey at 16 km/h, then the next 15 km at 12 km/h. Find the total time taken and the average speed for the whole journey.

Time for stage 1: $20 \div 16 = 1.25 \text{ h}$. Time for stage 2: $15 \div 12 = 1.25 \text{ h}$. Total time = 2.5 h. Total distance = $20 + 15 = 35 \text{ km}$. Average speed = $35 \div 2.5 = 14 \text{ km/h}$.

(!) Lỗi thường gặp: Tốc độ trung bình của cả hành trình **không phải** là trung bình cộng của các tốc độ từng chặng (ở đây *tính cò* $\frac{16+12}{2} = 14$ trùng với đáp án đúng vì hai chặng có **thời gian bằng nhau** — nhưng nếu thời gian hai chặng khác nhau, cách lấy trung bình cộng tốc độ sẽ cho kết quả sai). Công thức đúng luôn là tốc độ trung bình = $\frac{\text{tổng quãng đường}}{\text{tổng thời gian}}$.

1.11 Problem Bank

Bài tập luyện tập

Which of the following numbers is irrational?

(A) $\sqrt{16}$

(C) $\sqrt{20}$

(B) $\frac{22}{7}$

(D) $0.\dot{3}$

Lời giải chi tiết

$\sqrt{16} = 4$ (rational, an integer). $\frac{22}{7}$ is already a ratio of integers, so rational. $0.\dot{3} = \frac{1}{3}$, a recurring decimal, so rational. $\sqrt{20} = 2\sqrt{5}$; since 20 is not a perfect square, this is irrational. **(C)**.

Bài tập luyện tập

$\mathcal{E} = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$, $A = \{\text{multiples of } 3\}$, $B = \{\text{multiples of } 5\}$. List A and B , then find $A \cap B$, $A \cup B$, $n((A \cup B)')$, and A' .

Lời giải chi tiết

$A = \{3, 6, 9, 12, 15\}$, $n(A) = 5$. $B = \{5, 10, 15\}$, $n(B) = 3$. $A \cap B = \{15\}$ (the only common multiple of 3 and 5 up to 15), so $n(A \cap B) = 1$. $A \cup B = \{3, 5, 6, 9, 10, 12, 15\}$, $n(A \cup B) = 5 + 3 - 1 = 7$. Since $n(\mathcal{E}) = 15$: $n((A \cup B)') = 15 - 7 = 8$. $A' = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13, 14\}$ (the 10 elements of $\mathcal{E}$ not in A).

Bài tập luyện tập

Find $\text{LCM}(24, 36)$.

(A) 72

(C) 12

(B) 144

(D) 216

Lời giải chi tiết

$24 = 2^3 \times 3$, $36 = 2^2 \times 3^2$. LCM takes the highest power of each prime: $2^3 \times 3^2 = 8 \times 9 = 72$. (A).

Bài tập luyện tập

Find the HCF and LCM of 12, 18 and 30.

Lời giải chi tiết

$12 = 2^2 \times 3$, $18 = 2 \times 3^2$, $30 = 2 \times 3 \times 5$. HCF (lowest powers of primes common to all three, here 2 and 3): $2 \times 3 = 6$. LCM (highest powers of every prime appearing): $2^2 \times 3^2 \times 5 = 4 \times 9 \times 5 = 180$. Check: $180 \div 12 = 15$, $180 \div 18 = 10$, $180 \div 30 = 6$, all integers.

Bài tập luyện tập

Evaluate $(-6) - (-9) + (-4)$.

(A) -1

(C) -19

(B) 1

(D) 19

Lời giải chi tiết

$(-6) - (-9) + (-4) = -6 + 9 - 4$. Working left to right: $-6 + 9 = 3$, then $3 - 4 = -1$. (A).

Bài tập luyện tập

Evaluate $5 + 3 \times (8 - 2)^2 \div 4 - 6$.

Lời giải chi tiết

Brackets: $8 - 2 = 6$. Indices: $6^2 = 36$. Multiplication/division: $3 \times 36 = 108$, then $108 \div 4 = 27$. Addition/subtraction: $5 + 27 - 6 = 26$.

Bài tập luyện tập

Evaluate $(-3)^2 - 2 \times (-4)$.

(A) 17

(C) -17

(B) 1

(D) -1

Lời giải chi tiết

$(-3)^2 = 9$ and $2 \times (-4) = -8$, so the expression is $9 - (-8) = 9 + 8 = 17$. (A).

Bài tập luyện tập

Simplify $(2.5 \times 10^4) \times (3 \times 10^{-7})$, giving your answer in standard form.

(A) 7.5×10^{-3}

(C) 0.75×10^{-2}

(B) 7.5×10^3

(D) 75×10^{-4}

Lời giải chi tiết

Multiply coefficients: $2.5 \times 3 = 7.5$. Add exponents: $10^{4+(-7)} = 10^{-3}$. Result: 7.5×10^{-3} , already valid standard form since $1 \leq 7.5 < 10$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Simplify $(8 \times 10^5) \times (4 \times 10^6)$, giving your answer in standard form.

Lời giải chi tiết

$8 \times 4 = 32$; $10^{5+6} = 10^{11}$. This gives 32×10^{11} , which is not standard form since $32 \geq 10$. Renormalise: $32 \times 10^{11} = 3.2 \times 10^{12}$.

Bài tập luyện tập

Simplify $(2x^3)^2 \div x^4$.

(A) $4x^2$

(C) $2x^2$

(B) $4x^6$

(D) $4x^{10}$

Lời giải chi tiết

$(2x^3)^2 = 4x^6$. Then $4x^6 \div x^4 = 4x^{6-4} = 4x^2$. **(A).**

Bài tập luyện tập

(Extended) Evaluate $8^{2/3} + 32^{1/5}$.

Lời giải chi tiết

$8^{1/3} = 2$, so $8^{2/3} = 2^2 = 4$. Also $32^{1/5} = 2$ (since $2^5 = 32$). Sum: $4 + 2 = 6$.

Bài tập luyện tập

A shirt priced at \$45 is sold at a 20% discount. Find the sale price.

(A) \$36

(C) \$40

(B) \$38

(D) \$42

Lời giải chi tiết

Sale price = $45 \times (1 - 0.20) = 45 \times 0.8 = \36 . **(A).**

Bài tập luyện tập

After a 25% increase, the price of an item is \$175. Find the original price, and the increase in dollars.

Lời giải chi tiết

Original = $175 \div 1.25 = \$140$. Increase = $175 - 140 = \$35$. Check: $140 \times 1.25 = 175$.

Bài tập luyện tập

Find 35% of 220, then increase the result by 10%.

- (A) 84.7 (C) 88
(B) 77 (D) 80.7

Lời giải chi tiết

35% of 220 = $0.35 \times 220 = 77$. Increasing 77 by 10%: $77 \times 1.1 = 84.7$. (A).

Bài tập luyện tập

Share \$560 in the ratio 4 : 5 : 7.

Lời giải chi tiết

Total parts = $4 + 5 + 7 = 16$. One part = $560 \div 16 = \$35$. Amounts: $4 \times 35 = \$140$, $5 \times 35 = \$175$, $7 \times 35 = \$245$. Check: $140 + 175 + 245 = 560$.

Bài tập luyện tập

Which is better value: 900 g for \$5.40, or 1.5 kg for \$8.70?

- (A) 900 g for \$5.40 (C) They are equal value
(B) 1.5 kg for \$8.70 (D) Cannot be determined

Lời giải chi tiết

900 g option: $5.40 \div 0.9 = \$6.00$ per kg. 1.5 kg option: $8.70 \div 1.5 = \$5.80$ per kg. Since $\$5.80 < \6.00 , the 1.5 kg pack is better value. (B).

Bài tập luyện tập

A journey of 210 km takes 3 hours 30 minutes. Find the average speed. A metal cube of side 4 cm has mass 340 g; find its density to 3 significant figures.

Lời giải chi tiết

Speed: 3 h 30 min = 3.5 h; speed = $210 \div 3.5 = 60$ km/h. Density: volume = $4^3 = 64$ cm³; density = $340 \div 64 = 5.3125 \approx 5.31$ g/cm³.

Bài tập luyện tập

(Extended) y is directly proportional to x^3 . When $x = 2$, $y = 40$. Find y when $x = 5$.

- (A) 625 (C) 100
(B) 200 (D) 1000

Lời giải chi tiết

$y = kx^3 \Rightarrow 40 = k(8) \Rightarrow k = 5$. When $x = 5$: $y = 5(125) = 625$. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) y is inversely proportional to $\sqrt{x}$. When $x = 16$, $y = 10$. Find y when $x = 25$.

Lời giải chi tiết

$y = \frac{k}{\sqrt{x}} \Rightarrow k = y\sqrt{x} = 10 \times 4 = 40$. When $x = 25$: $\sqrt{25} = 5$, so $y = 40 \div 5 = 8$.

Bài tập luyện tập

Find the simple interest on \$1800 at 3.5% per year for 5 years.

- (A) \$315 (C) \$350
(B) \$300 (D) \$270

Lời giải chi tiết

$I = \frac{1800 \times 3.5 \times 5}{100} = \frac{31\,500}{100} = \315 . (A).

Bài tập luyện tập

\$4500 is invested at 4% per year compound interest. Find the value after 3 years and the total interest earned.

Lời giải chi tiết

$4500 \times 1.04^3 = 4500 \times 1.124864 = \5061.89 (2 d.p.). Interest earned = $5061.89 - 4500 = \$561.89$.

Bài tập luyện tập

(Extended) A sum of \$2500 grows to \$2809 after 2 years of compound interest. Find the annual rate.

- (A) 6% (C) 8%
(B) 5% (D) 12%

Lời giải chi tiết

$(1 + \frac{r}{100})^2 = \frac{2809}{2500} = 1.1236$. Since $1.06^2 = 1.1236$, we get $1 + \frac{r}{100} = 1.06$, so $r = 6\%$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A laptop bought for \$900 depreciates by 15% per year. Find its value after 3 years, to the nearest dollar.

Lời giải chi tiết

$900 \times 0.85^3 = 900 \times 0.614125 = 552.7125 \approx \553 (nearest dollar).

Bài tập luyện tập

(Extended) A radioactive sample of mass 200 g decreases by 12% each year. Find its mass after 5 years, to 1 decimal place.

(A) 105.5 g

(C) 95.4 g

(B) 110.2 g

(D) 120.6 g

Lời giải chi tiết

200×0.88^5 . Step by step: $0.88^2 = 0.7744$, $0.88^3 = 0.681472$, $0.88^4 = 0.59969536$, $0.88^5 = 0.5277319168$. So $200 \times 0.5277319168 = 105.546... \approx 105.5$ g. **(A)**.

Bài tập luyện tập

A trader buys goods for 15,000,000 VND and sells them for 18,300,000 VND. Find the profit percentage, and express the profit in USD if 1 USD = 25,000 VND.

Lời giải chi tiết

Profit = $18,300,000 - 15,000,000 = 3,300,000$ VND. Profit% = $\frac{3\,300\,000}{15\,000\,000} \times 100 = 22\%$. In USD: $3\,300\,000 \div 25\,000 = \132 .

Bài tập luyện tập

(Extended) Simplify $\sqrt{98} - \sqrt{32}$.

(A) $3\sqrt{2}$

(C) $\sqrt{66}$

(B) $11\sqrt{2}$

(D) $3\sqrt{8}$

Lời giải chi tiết

$\sqrt{98} = \sqrt{49 \times 2} = 7\sqrt{2}$. $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = 4\sqrt{2}$. Difference: $7\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) Expand and simplify $(3 - \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$.

Lời giải chi tiết

$$(3 - \sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 9 + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 2(\sqrt{2} \times \sqrt{2}) = 9 + 6\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 4 = 5 + 3\sqrt{2}.$$

Bài tập luyện tập

(Extended) Rationalise $\frac{10}{\sqrt{5}}$, giving your answer in simplest surd form.

(A) $2\sqrt{5}$

(C) $5\sqrt{5}$

(B) $10\sqrt{5}$

(D) $\sqrt{5}$

Lời giải chi tiết

$$\frac{10}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(Extended) Rationalise $\frac{3}{\sqrt{10} - 3}$.

Lời giải chi tiết

$$\text{Multiply by the conjugate } \sqrt{10} + 3: \frac{3(\sqrt{10} + 3)}{(\sqrt{10} - 3)(\sqrt{10} + 3)} = \frac{3\sqrt{10} + 9}{10 - 9} = \frac{3\sqrt{10} + 9}{1} = 9 + 3\sqrt{10}.$$

Bài tập luyện tập

(Extended) A length is given as 6.5 cm, correct to 1 decimal place. Find its upper bound.

(A) 6.55 cm

(C) 6.5 cm

(B) 6.45 cm

(D) 6.6 cm

Lời giải chi tiết

Rounded to the nearest 0.1, the half-unit error is 0.05, so the upper bound is $6.5 + 0.05 = 6.55$ cm. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) $p = 24.6$ and $q = 5.3$, both correct to 1 decimal place. Find the upper bound of $p \div q$ and the lower bound of $p - q$.

Lời giải chi tiết

Bounds: $24.55 \leq p < 24.65$; $5.25 \leq q < 5.35$. Upper bound of $p \div q$ (largest numerator, smallest denominator): $24.65 \div 5.25 \approx 4.695$. Lower bound of $p - q$ (smallest p , largest q): $24.55 - 5.35 = 19.20$.

Bài tập luyện tập

A bus departs at 21:48 and arrives at 23:15 the same night. Find the journey time.

(A) 1 h 27 min

(C) 1 h 37 min

(B) 1 h 17 min

(D) 2 h 03 min

Lời giải chi tiết

From 21:48 to 22:48 is exactly 1 hour; from 22:48 to 23:15 is a further 27 minutes. Total: 1 h 27 min. (A).

Algebra and graphs

Mục tiêu Unit: Khai triển và phân tích nhân tử biểu thức đại số (kể cả ngoặc ba và phân thức đại số – Extended); giải phương trình bậc nhất, đổi chủ đề công thức (kể cả trường hợp ẩn xuất hiện hai lần hoặc dưới căn – Extended); hệ phương trình bậc nhất–bậc nhất và bậc nhất–bậc hai (Extended); phương trình bậc hai bằng phân tích nhân tử, công thức nghiệm, hoàn thành bình phương (Extended) và phương trình "ẩn giấu" (Extended); bất phương trình bậc nhất và bậc hai (Extended); các định luật số mũ trong đại số; dãy số bậc nhất, bậc hai (Extended) và dãy khác; ký hiệu hàm số $f(x)$ (Extended); vẽ và đọc đồ thị hàm bậc nhất, bậc hai, bậc ba, nghịch đảo, mũ (Extended); và nhập môn đạo hàm (Extended) để tìm độ dốc, tiếp tuyến, điểm cực trị và ứng dụng vào chuyển động.

2.1 Algebraic manipulation

2.1.1 Expanding brackets

To **expand** an expression, every term inside one bracket is multiplied by every term inside the other. For a single bracket, multiply the term outside by each term inside: $a(b + c) = ab + ac$. For two brackets, each of the two terms in the first bracket multiplies each of the two terms in the second, giving four products in total (often remembered by the acronym FOIL: First, Outer, Inner, Last).

Expanding double and triple brackets

Double brackets: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Triple brackets (Extended): expand any two of the three brackets first, then multiply the resulting trinomial (or more) by the remaining bracket, collecting like terms at the end.

Ví dụ mẫu • Worked example

Expand and simplify: (a) $(2x - 3)(x + 5)$; (b) (Extended) $(2x - 1)(x + 3)(x - 2)$.

(a) $(2x - 3)(x + 5) = 2x^2 + 10x - 3x - 15 = 2x^2 + 7x - 15$.

(b) First expand two brackets: $(2x - 1)(x + 3) = 2x^2 + 6x - x - 3 = 2x^2 + 5x - 3$.

Now multiply by the third bracket:

$$(2x^2 + 5x - 3)(x - 2) = 2x^3 - 4x^2 + 5x^2 - 10x - 3x + 6 = 2x^3 + x^2 - 13x + 6.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi khai triển ngoặc đôi, mỗi số hạng trong ngoặc thứ nhất nhân với **từng** số hạng trong ngoặc thứ hai (bốn tích tất cả). Với ngoặc ba (Extended), hãy khai triển **hai** ngoặc bất kỳ trước để được một đa thức, sau đó nhân đa thức đó với ngoặc còn lại rồi mới thu gọn (cộng các số hạng đồng dạng). Luôn viết đầy đủ từng bước nhân để tránh bỏ sót số hạng.

2.1.2 Collecting like terms and factorising

Like terms have exactly the same combination of variables (and powers); only their coefficients are added or subtracted, e.g. $5x^2y - 2x^2y = 3x^2y$, but $5x^2y$ and $5xy^2$ are *not* like terms and cannot be

combined.

Factorising reverses expansion: an expression is rewritten as a product of factors. Four standard techniques appear repeatedly in IGCSE algebra:

Factorising techniques

- **Common factor:** take out the highest common factor (HCF) of every term, e.g. $6x^2y - 9xy^2 = 3xy(2x - 3y)$.
- **Grouping (4 terms):** split into two pairs, factorise each pair, then factor out the common bracket, e.g. $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = x^2(x - 2) - 9(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 9)$.
- **Difference of two squares:** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.
- **Quadratic trinomials** $x^2 + bx + c$: find two numbers that multiply to c and add to b . For $ax^2 + bx + c$ with $a \neq 1$: find two numbers multiplying to ac and adding to b , split the middle term, then group.

Ví dụ mẫu · Worked example

Factorise completely: $x^3 - 2x^2 - 9x + 18$.

Group in pairs: $x^2(x - 2) - 9(x - 2) = (x - 2)(x^2 - 9)$.

The second bracket is a difference of two squares: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$.

$$x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = (x - 2)(x - 3)(x + 3).$$

Check by expanding $(x - 2)(x^2 - 9) = x^3 - 9x - 2x^2 + 18 = x^3 - 2x^2 - 9x + 18$. ✓

Ví dụ mẫu · Worked example

Factorise: (a) $x^2 - 5x - 14$; (b) $10x^2 - 13x - 3$.

(a) Need two numbers multiplying to -14 and adding to -5 : these are -7 and 2 .

$$x^2 - 5x - 14 = (x - 7)(x + 2).$$

Check: $-7 \times 2 = -14$, $-7 + 2 = -5$. ✓

(b) Here $a = 10$, $b = -13$, $c = -3$, so $ac = -30$. Need two numbers multiplying to -30 and adding to -13 : these are -15 and 2 .

$$10x^2 - 13x - 3 = 10x^2 - 15x + 2x - 3 = 5x(2x - 3) + 1(2x - 3) = (2x - 3)(5x + 1).$$

Check: $(2x - 3)(5x + 1) = 10x^2 + 2x - 15x - 3 = 10x^2 - 13x - 3$. ✓

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bốn kỹ thuật phân tích nhân tử cần thuộc lòng: (1) **nhân tử chung** – luôn thử bước này đầu tiên; (2) **nhóm 4 số hạng** – ghép thành 2 cặp, mỗi cặp có nhân tử chung, rồi lấy ngoặc chung; (3) **hiệu hai bình phương** $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – chỉ áp dụng khi thấy *hiệu*, không áp dụng cho tổng $a^2 + b^2$; (4) **tam thức bậc hai** – với $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 1$), tìm hai số có tích = ac và tổng = b để tách số hạng giữa rồi nhóm lại. Luôn kiểm tra lại bằng cách nhân ngược ra để chắc chắn không sai dấu.

(!) Lỗi thường gặp: Tổng hai bình phương $a^2 + b^2$ **không** phân tích được thành nhân tử (trong tập số thực) – công thức $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ chỉ áp dụng cho *hiệu*. Ngoài ra, khi lấy nhân tử chung có dấu âm, ví dụ $-3x^2 - 6x = -3x(x + 2)$, hãy nhân ngược lại để kiểm tra dấu: $-3x(x + 2) = -3x^2 - 6x$ ✓ – rất dễ nhầm dấu số hạng trong ngoặc khi nhân tử chung mang dấu âm.

2.2 Algebraic fractions (Extended)

2.2.1 Simplifying algebraic fractions

An algebraic fraction is simplified by factorising the numerator and denominator completely, then cancelling any factor common to both. A factor can only be cancelled if it is a factor of the *entire* numerator and the *entire* denominator – never cancel individual terms.

Ví dụ mẫu · Worked example

Simplify $\frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6}$.

Factorise numerator and denominator: $x^2 - 9 = (x - 3)(x + 3)$; $x^2 + x - 6 = (x + 3)(x - 2)$.

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + x - 6} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{(x + 3)(x - 2)} = \frac{x - 3}{x - 2} \quad (x \neq -3, 2).$$

2.2.2 Adding, subtracting, multiplying, and dividing

To add or subtract algebraic fractions with different denominators, find a common denominator (usually the product of the two denominators, unless they share a factor), rewrite each fraction over it, then combine the numerators. To multiply, factorise everything first and cancel common factors before multiplying out; to divide, multiply by the reciprocal of the second fraction.

Ví dụ mẫu · Worked example

(a) Simplify $\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-1}$. (b) Simplify $\frac{x^2 - 4}{x+3} \div \frac{x-2}{2x+6}$.

(a) Common denominator $(x+2)(x-1)$:

$$\frac{3}{x+2} + \frac{2}{x-1} = \frac{3(x-1) + 2(x+2)}{(x+2)(x-1)} = \frac{3x-3+2x+4}{(x+2)(x-1)} = \frac{5x+1}{(x+2)(x-1)}.$$

(b) Multiply by the reciprocal, then factorise and cancel:

$$\frac{x^2 - 4}{x+3} \div \frac{x-2}{2x+6} = \frac{(x-2)(x+2)}{x+3} \times \frac{2(x+3)}{x-2} = 2(x+2) \quad (x \neq -3, 2).$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với phân thức đại số, luôn **phân tích nhân tử tử số và mẫu số trước**, rồi mới rút gọn nhân tử chung – tuyệt đối không được rút gọn từng số hạng riêng lẻ (ví dụ $\frac{x+3}{x} \neq 3$). Khi cộng/trừ với mẫu số khác nhau, quy đồng mẫu số chung rồi mới cộng tử số. Khi chia, đổi thành phép nhân với phân thức nghịch đảo, rồi mới phân tích nhân tử và rút gọn – làm theo đúng thứ tự này giúp tránh nhầm lẫn.

2.3 Linear equations and changing the subject of a formula

2.3.1 Solving linear equations

A linear equation is solved by expanding brackets, collecting all terms containing the unknown on one side and all constants on the other, then dividing by the coefficient of the unknown.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $3(2x - 1) = 5(x + 2) - 1$.

Expand both sides: $6x - 3 = 5x + 10 - 1 = 5x + 9$.

Collect x -terms on the left: $6x - 5x = 9 + 3 \Rightarrow x = 12$.

2.3.2 Changing the subject of a formula

To **change the subject** of a formula, treat the required letter like the unknown in an equation: undo the operations applied to it, in reverse order, performing the same operation to both sides.

Ví dụ mẫu · Worked example

The area of a trapezium is $A = \frac{1}{2}(a + b)h$. Make h the subject.

Multiply both sides by 2: $2A = (a + b)h$. Divide by $(a + b)$:

$$h = \frac{2A}{a + b}.$$

Harder subject of formula (Extended): if the required letter appears on *both* sides, first expand any brackets, then move every term containing that letter to one side and every other term to the other side, factorise out the letter, and divide. If the letter is under a square root, isolate the root first, then square both sides; if the letter is squared, isolate the square first, then square-root both sides (remembering $\pm$ where appropriate).

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Make x the subject of $y = \frac{3x - 2}{x + 4}$.

Multiply both sides by $(x + 4)$: $y(x + 4) = 3x - 2 \Rightarrow yx + 4y = 3x - 2$.

Collect x -terms on one side: $yx - 3x = -2 - 4y \Rightarrow x(y - 3) = -2 - 4y$.

$$x = \frac{-2 - 4y}{y - 3} = \frac{4y + 2}{3 - y}.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) The period of a pendulum is $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Make l the subject.

Divide by 2π : $\frac{T}{2\pi} = \sqrt{\frac{l}{g}}$. Square both sides: $\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{l}{g}$.

$$l = g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 = \frac{gT^2}{4\pi^2}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đối chủ đề công thức giống hệ giải phương trình – chỉ khác là các chữ cái khác được coi như hằng số. Khi ẩn cần tìm xuất hiện **hai lần** (Extended), hãy khai triển ngoặc trước, chuyển tất cả số hạng chứa ẩn đó về một phía, số hạng còn lại về phía kia, rồi đặt ẩn làm nhân tử chung để rút ra. Khi ẩn nằm dưới dấu căn, cô lập căn thức trước rồi bình phương hai vế; khi ẩn bị bình phương, cô lập bình phương trước rồi khai căn hai vế (nhớ dấu $\pm$ nếu đề không giới hạn dấu).

2.4 Simultaneous equations

2.4.1 Linear-linear simultaneous equations

Two standard methods solve a pair of linear equations: **elimination** (multiply one or both equations so that the coefficients of one variable are equal in size, then add or subtract to eliminate it) and **substitution** (rearrange one equation to make one variable the subject, then substitute into the other).

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve simultaneously by elimination: $3x + 2y = 18$ and $5x - 2y = 14$.

The y -coefficients are already $+2$ and -2 , so add the equations directly:

$$(3x + 2y) + (5x - 2y) = 18 + 14 \Rightarrow 8x = 32 \Rightarrow x = 4.$$

Substitute into the first equation: $3(4) + 2y = 18 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = 3$.

Check in the second equation: $5(4) - 2(3) = 20 - 6 = 14$. $\checkmark$

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve simultaneously by substitution: $y = 2x - 1$ and $3x + y = 14$.

Substitute the first equation into the second: $3x + (2x - 1) = 14 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$.

Then $y = 2(3) - 1 = 5$. Check: $3(3) + 5 = 14$. $\checkmark$

2.4.2 Linear-quadratic simultaneous equations (Extended)

When one equation is linear and the other is quadratic, substitute the linear equation into the quadratic one to obtain a single quadratic equation in one variable, solve it (usually by factorising), and substitute each solution back to find the matching value of the other variable.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Solve simultaneously: $y = 2x + 1$ and $y = x^2 + x - 5$.

Set the right-hand sides equal: $2x + 1 = x^2 + x - 5 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 2) = 0$.

So $x = 3$ or $x = -2$. Substituting into $y = 2x + 1$: $y = 7$ or $y = -3$.

$$(x, y) = (3, 7) \text{ or } (-2, -3).$$

Check in $y = x^2 + x - 5$: $x = 3 \Rightarrow 9 + 3 - 5 = 7$ $\checkmark$; $x = -2 \Rightarrow 4 - 2 - 5 = -3$ $\checkmark$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hệ phương trình bậc nhất–bậc nhất, chọn phương pháp **cộng/trừ (elimination)** khi hệ số của một ẩn dễ cân bằng, hoặc **thế (substitution)** khi một phương trình đã có sẵn dạng $y = \dots$ hoặc để rút một ẩn. Với hệ bậc nhất–bậc hai (Extended), luôn thế phương trình bậc nhất vào phương trình bậc hai (không làm ngược lại) để được một phương trình bậc hai duy nhất theo một ẩn; sau khi tìm được cả hai nghiệm, thay ngược vào phương trình **bậc nhất** (đơn giản hơn) để tìm giá trị tương ứng của ẩn còn lại, rồi kiểm tra lại bằng phương trình bậc hai.

2.5 Quadratic equations

2.5.1 Solving by factorising and the quadratic formula

Every quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$ can be solved by factorising (when the factors are "nice") or by the quadratic formula, which always works.

Quadratic formula: for $ax^2 + bx + c = 0$ with $a \neq 0$,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

The quantity $b^2 - 4ac$ is the **discriminant**: two real solutions if positive, one repeated solution if zero, no real solutions if negative.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve (a) $2x^2 - x - 6 = 0$ by factorising; (b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$ using the quadratic formula.

(a) Here $ac = -12$, and we need two numbers multiplying to -12 and adding to -1 : these are 3 and -4 .

$$2x^2 + 3x - 4x - 6 = x(2x + 3) - 2(2x + 3) = (2x + 3)(x - 2) = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2} \text{ or } x = 2.$$

(b) $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$. Discriminant $= (-7)^2 - 4(2)(3) = 49 - 24 = 25$, and $\sqrt{25} = 5$.

$$x = \frac{7 \pm 5}{4} \Rightarrow x = 3 \text{ or } x = \frac{1}{2}.$$

(!) **Lỗi thường gặp:** Trong công thức nghiệm, $-b$ nghĩa là phải **đổi dấu** b trước khi thay số, và **toàn bộ tử số** (kể cả $\pm\sqrt{\dots}$) được chia cho $2a$ – không phải chỉ riêng phần căn. Luôn đặt b và c âm trong ngoặc khi thay vào công thức, ví dụ với $b = -7$: viết $-(-7) = 7$, không phải -7 .

2.5.2 Completing the square (Extended)

Any quadratic $x^2 + bx + c$ can be rewritten as $(x + \frac{b}{2})^2 - (\frac{b}{2})^2 + c$, which gives an alternative method for solving quadratic equations and for finding the vertex of a parabola directly.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Solve $x^2 + 6x + 2 = 0$ by completing the square.

Half of 6 is 3, so write $x^2 + 6x = (x + 3)^2 - 9$:

$$(x + 3)^2 - 9 + 2 = 0 \Rightarrow (x + 3)^2 = 7 \Rightarrow x + 3 = \pm\sqrt{7} \Rightarrow x = -3 \pm \sqrt{7}.$$

As decimals ($\sqrt{7} \approx 2.646$): $x \approx -0.354$ or $x \approx -5.646$.

(!) Lỗi thường gặp: Khi khai căn hai vế của $(x+3)^2 = 7$, phải viết $x+3 = \pm\sqrt{7}$ chứ không chỉ $x+3 = \sqrt{7}$ – quên dấu $\pm$ sẽ làm mất một nửa số nghiệm. Quy tắc chung: bất cứ khi nào khai căn bậc hai để giải phương trình (không phải chỉ để tính giá trị số), luôn phải xét cả hai dấu.

2.5.3 Quadratic equations in disguise (Extended)

Some equations are not quadratic in x but become quadratic after a substitution – most commonly $u = x^2$ when only even powers of x appear.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Solve $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

Let $u = x^2$: the equation becomes $u^2 - 5u + 4 = 0 \Rightarrow (u-1)(u-4) = 0 \Rightarrow u = 1$ or $u = 4$.
Since $u = x^2$: $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$; $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$.

$$x = 1, -1, 2, -2.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Với phương trình "ẩn giấu" như $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ (Extended), chỉ có lũy thừa chẵn của x nên đặt $u = x^2$ để đưa về phương trình bậc hai quen thuộc theo u . Sau khi tìm được u , đừng quên bước cuối: giải lại $x^2 = u$ cho **từng** giá trị u – mỗi giá trị u dương cho **hai** nghiệm $x = \pm\sqrt{u}$ (nếu $u < 0$ thì không có nghiệm thực).

2.6 Inequalities

2.6.1 Linear inequalities

Linear inequalities are solved exactly like linear equations, with one crucial rule: multiplying or dividing both sides by a **negative** number reverses the direction of the inequality sign.

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve $-5 \leq 3x - 2 < 10$ and list the integer solutions.

Split into two inequalities and solve each:

$$-5 \leq 3x - 2 \Rightarrow -3 \leq 3x \Rightarrow -1 \leq x; \quad 3x - 2 < 10 \Rightarrow 3x < 12 \Rightarrow x < 4.$$

Combining: $-1 \leq x < 4$. Integer solutions: $-1, 0, 1, 2, 3$.



Number line for $-1 \leq x < 4$: a filled circle at $x = -1$ (included, $\geq$) and an open circle at $x = 4$ (excluded, $<$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Giải bất phương trình bậc nhất giống hệt phương trình bậc nhất, chỉ có một điểm khác biệt quan trọng: khi **nhân hoặc chia cả hai vế cho một số âm**, phải **đổi chiều** dấu bất đẳng thức. Trên trục số, vòng tròn **đặc (tô đen)** nghĩa là giá trị đó được bao gồm (dùng cho $\leq, \geq$), vòng tròn **rỗng** nghĩa là giá trị đó bị loại trừ (dùng cho $<, >$).

2.6.2 Quadratic inequalities (Extended)

To solve a quadratic inequality, first solve the corresponding quadratic equation (by factorising) to find the critical values, then use the shape of the parabola (or a sign diagram) to decide which region satisfies the inequality.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Solve $x^2 - x - 6 \leq 0$.

Factorise: $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$, so the critical values are $x = -2$ and $x = 3$.

Since the coefficient of x^2 is positive, the graph is an upward parabola which is *below or on* the x -axis **between** its two roots.

$$-2 \leq x \leq 3.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bất phương trình bậc hai (Extended), luôn phân tích nhân tử trước để tìm các giá trị tới hạn (ng nghiệm của phương trình tương ứng). Vì hệ số của x^2 dương nên parabol có dạng chữ U (hướng lên): phần đồ thị nằm **dưới** trục x là khoảng **giữa** hai nghiệm, còn phần nằm **trên** trục x là hai khoảng **bên ngoài** hai nghiệm. Vẽ nhanh một phác thảo parabol sẽ giúp xác định đúng miền nghiệm mà không cần nhớ máy móc.

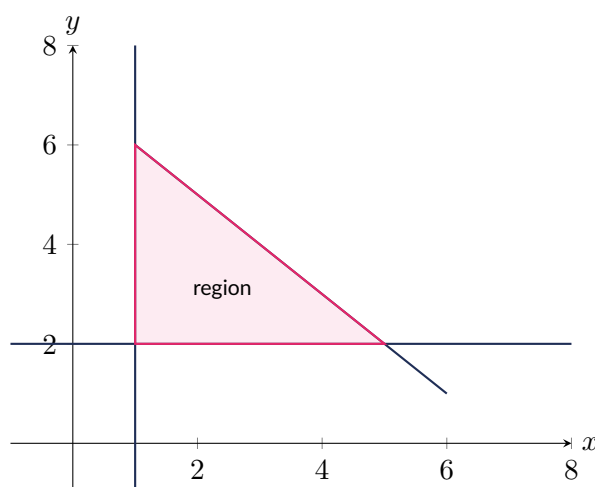
2.6.3 Shading regions defined by linear inequalities (Extended)

A system of linear inequalities in x and y defines a region of the coordinate plane. Each inequality is first treated as an equation to draw its boundary line (solid for $\leq, \geq$; dashed for $<, >$), then a test point decides which side of the line to shade; the required region satisfies **all** inequalities simultaneously.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Shade the region satisfying $x \geq 1$, $y \geq 2$, and $x + y \leq 7$.

The three boundary lines are $x = 1$ (vertical), $y = 2$ (horizontal), and $x + y = 7$ (a line through $(1, 6)$ and $(5, 2)$). Testing a point inside, e.g. $(2, 3)$: $2 \geq 1$ ✓, $3 \geq 2$ ✓, $2 + 3 = 5 \leq 7$ ✓ - so this point lies in the required region, which forms the triangle with vertices $(1, 2)$, $(1, 6)$, and $(5, 2)$.



The shaded triangle satisfies all three inequalities $x \geq 1$, $y \geq 2$, $x + y \leq 7$ simultaneously; its vertices are $(1, 2)$, $(1, 6)$, $(5, 2)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hệ bất phương trình hai ẩn (Extended), mỗi bất phương trình tương ứng với **một đường biên** (đường thẳng): vẽ đường biên nét liền nếu dấu là $\leq$ hoặc $\geq$ (biên được bao gồm), nét đứt nếu dấu là $<$ hoặc $>$ (biên không được bao gồm). Chọn một điểm thử (thường là gốc tọa độ nếu đường không đi qua gốc) để xác định miền cần tô; miền đáp số là phần thỏa mãn **đồng thời** tất cả các bất phương trình.

2.7 Indices in algebra

2.7.1 Laws of indices applied to algebraic terms

The laws of indices used with numbers apply identically to algebraic terms.

Laws of indices: $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $a^m \div a^n = a^{m-n}$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $a^0 = 1$; $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$; $a^{1/n} = \sqrt[n]{a}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Simplify $\frac{(3x^2y^3)^2 \times 2xy^4}{6x^3y^2}$.

First, $(3x^2y^3)^2 = 9x^4y^6$. Multiply by $2xy^4$: $9x^4y^6 \times 2xy^4 = 18x^5y^{10}$.

Divide by $6x^3y^2$:

$$\frac{18x^5y^{10}}{6x^3y^2} = 3x^{5-3}y^{10-2} = 3x^2y^8.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Solve, by matching bases: (a) $2^{3x-1} = 32$; (b) $9^x = 27^{x-1}$.

(a) Write $32 = 2^5$, so $2^{3x-1} = 2^5$. Equal bases mean the exponents are equal: $3x - 1 = 5 \Rightarrow x = 2$.

(b) Write both sides with base 3: $9 = 3^2$ and $27 = 3^3$, so $3^{2x} = 3^{3(x-1)} = 3^{3x-3}$.

$$2x = 3x - 3 \Rightarrow x = 3.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Các định luật số mũ áp dụng y hệt cho biểu thức đại số như với số thông thường: cộng số mũ khi **nhân** cùng cơ số, trừ số mũ khi **chia** cùng cơ số, nhân số mũ khi lấy **lũy thừa của lũy thừa**. Để giải phương trình mũ bằng cách "so khớp cơ số", hãy viết mọi số về **cùng một cơ số nguyên tố** (ví dụ $9 = 3^2$, $27 = 3^3$, $32 = 2^5$) rồi cho hai số mũ bằng nhau.

2.8 Sequences

2.8.1 Linear (arithmetic) sequences

In a **linear sequence**, consecutive terms differ by a constant amount d (the common difference).

For a linear sequence with common difference d and first term a_1 : n th term = $dn + (a_1 - d)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the n th term of 5, 9, 13, 17, ...

Common difference $d = 4$. First term $a_1 = 5$, so $a_1 - d = 1$.

$$n\text{th term} = 4n + 1.$$

Check $n = 4$: $4(4) + 1 = 17$. ✓

2.8.2 Quadratic sequences (Extended)

In a **quadratic sequence**, the first differences are not constant, but the *second* differences are. If the n th term is $an^2 + bn + c$, the second difference always equals $2a$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Find the n th term of 3, 8, 15, 24, 35, ...

First differences: 5, 7, 9, 11. Second difference = 2, so $2a = 2 \Rightarrow a = 1$.

Using term 1 = 3 and term 2 = 8 with n th term = $n^2 + bn + c$:

$$1 + b + c = 3; \quad 4 + 2b + c = 8.$$

Subtracting: $3 + b = 5 \Rightarrow b = 2$, then $c = 3 - 1 - 2 = 0$.

$$n\text{th term} = n^2 + 2n.$$

Check $n = 5$: $25 + 10 = 35$. ✓

2.8.3 Geometric and other patterns

In a **geometric sequence**, consecutive terms share a constant ratio r : n th term = $a_1 r^{n-1}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find the n th term of 5, 15, 45, 135, ...

Each term is 3 times the previous term, so $r = 3$ and $a_1 = 5$.

$$n\text{th term} = 5 \times 3^{n-1}.$$

Check $n = 4$: $5 \times 3^3 = 5 \times 27 = 135$. ✓

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Dãy bậc nhất (arithmetic): hiệu giữa hai số hạng liên tiếp không đổi (d); công thức tổng quát $dn + (\text{số hạng đầu} - d)$. **Dãy bậc hai (Extended)**: hiệu bậc một không đổi, nhưng **hiệu bậc hai** (hiệu của hiệu) không đổi và bằng $2a$ – tìm a trước, rồi dùng hai số hạng đầu để lập hệ phương trình tìm b, c . **Dãy nhân (geometric)**: tỉ số giữa hai số hạng liên tiếp không đổi (r); công thức $a_1 r^{n-1}$. Luôn thử lại công thức với một số hạng đã biết để chắc chắn không sai dấu hay sai số.

2.9 Function notation (Extended)

2.9.1 Evaluating, composite, and inverse functions

Function notation $f(x)$ names the output of a rule applied to input x . A **composite function** $fg(x)$ (read "f of g of x") means: apply g first, then apply f to the result. An **inverse function** $f^{-1}(x)$ "undoes" f : it is found by writing $y = f(x)$, swapping x and y (or equivalently solving for x in terms of y), and relabelling.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Given $f(x) = 3x + 2$ and $g(x) = x^2 - 1$, find (a) $f(4)$; (b) $fg(x)$; (c) $gf(x)$.

(a) $f(4) = 3(4) + 2 = 14$.

(b) $fg(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) + 2 = 3x^2 - 3 + 2 = 3x^2 - 1$.

(c) $gf(x) = g(f(x)) = g(3x + 2) = (3x + 2)^2 - 1 = 9x^2 + 12x + 4 - 1 = 9x^2 + 12x + 3$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Given $f(x) = 2x - 3$, find $f^{-1}(x)$ and verify that $f(f^{-1}(x)) = x$.

Write $y = 2x - 3$ and solve for x : $y + 3 = 2x \Rightarrow x = \frac{y + 3}{2}$. Relabelling,

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{2}.$$

Verify: $f(f^{-1}(x)) = 2\left(\frac{x + 3}{2}\right) - 3 = (x + 3) - 3 = x$. ✓

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

$fg(x)$ nghĩa là thực hiện g trước, sau đó lấy kết quả đó làm đầu vào cho f – thứ tự đọc ngược với thứ tự tính toán, rất dễ nhầm. Để tìm hàm ngược $f^{-1}(x)$: đặt $y = f(x)$, giải phương trình để đưa x về một vế theo y , rồi đổi tên y thành x trong biểu thức cuối cùng. Luôn kiểm tra lại bằng $f(f^{-1}(x)) = x$ hoặc $f^{-1}(f(x)) = x$.

2.10 Graphs of functions

2.10.1 Quadratic and cubic graphs

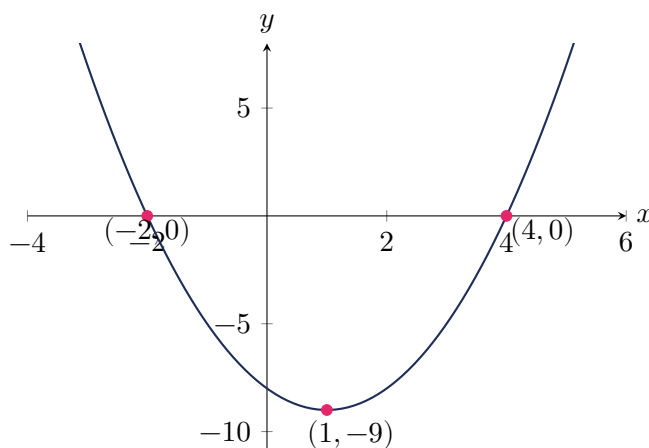
The graph of a quadratic function $y = ax^2 + bx + c$ is a **parabola**. Its roots (where the graph crosses the x -axis) are the solutions of $ax^2 + bx + c = 0$; its **axis of symmetry** passes through the vertex (turning point), and since the two roots are symmetric about this axis, $x_{\text{vertex}} = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Sketch $y = x^2 - 2x - 8$, showing the roots and the vertex.

Factorise: $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$, so the roots are $x = 4$ and $x = -2$.

Axis of symmetry: $x = \frac{4 + (-2)}{2} = 1$. At $x = 1$: $y = 1 - 2 - 8 = -9$, so the vertex is $(1, -9)$.



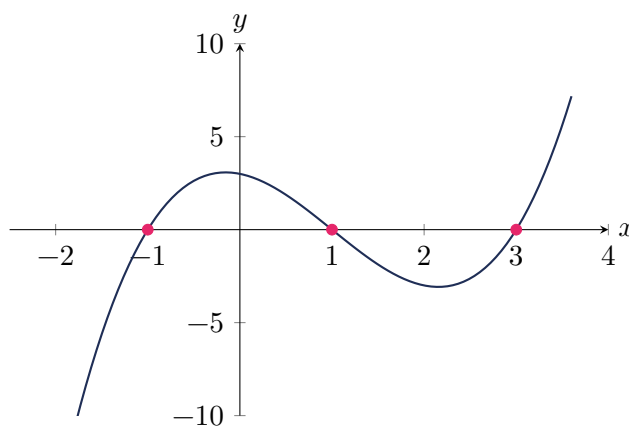
$$y = x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2): \text{roots } x = -2, 4; \text{vertex (minimum) at } (1, -9).$$

A **cubic** graph $y = ax^3 + \dots$ can cross the x -axis up to three times and has a characteristic "S" shape (or its mirror image if $a < 0$).

Ví dụ mẫu · Worked example

Sketch $y = (x + 1)(x - 1)(x - 3)$, showing where it crosses the x -axis.

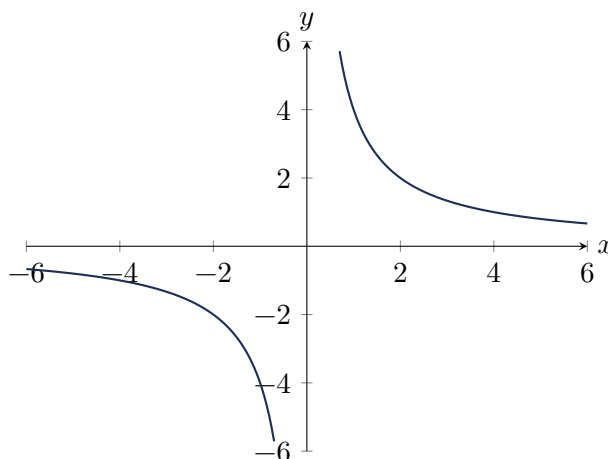
The graph crosses the x -axis at $x = -1, 1, 3$ (the roots). Since the coefficient of x^3 (found by expanding) is positive, the curve rises from bottom-left to top-right, dipping down and up between the roots.



$$y = (x + 1)(x - 1)(x - 3): \text{roots at } x = -1, 1, 3, \text{ the three points where the cubic crosses the } x\text{-axis.}$$

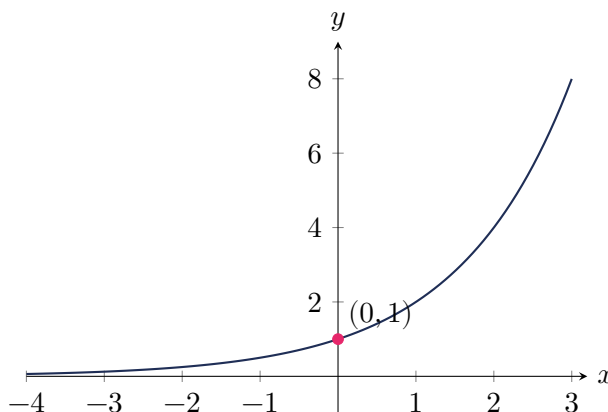
2.10.2 Reciprocal and exponential graphs

The **reciprocal** graph $y = \frac{a}{x}$ (with $a > 0$) has two separate branches, one in the region $x > 0, y > 0$ and one in $x < 0, y < 0$; it never touches either axis, since $x = 0$ is undefined and $y = 0$ has no solution – the axes are **asymptotes**.



$y = \frac{4}{x}$: two branches, with both axes as asymptotes; the graph never crosses either axis.

An **exponential** graph (Extended) $y = k^x$ (with $k > 1$) passes through $(0, 1)$ (since $k^0 = 1$ for any k), increases ever more steeply as x grows, approaches (but never reaches) $y = 0$ as $x \rightarrow -\infty$, and is always positive.



(Extended) $y = 2^x$: passes through $(0, 1)$, always positive, with $y = 0$ as a horizontal asymptote as $x \rightarrow -\infty$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nghiệm của $f(x) = 0$ chính là giao điểm của đồ thị với trục x ; trục đối xứng của parabol đi qua đỉnh và bằng trung bình cộng hai nghiệm. Đồ thị bậc ba có thể cắt trục x tối đa 3 lần. Đồ thị $y = \frac{a}{x}$ (nghịch đảo) không bao giờ cắt trục nào – cả hai trục là **tiệm cận**. Đồ thị $y = k^x$ (mũ, Extended, $k > 1$) luôn dương, luôn đi qua điểm $(0, 1)$, và có trục x ($y = 0$) là tiệm cận ngang khi $x \rightarrow -\infty$.

2.10.3 Solving equations graphically

The solutions of an equation $f(x) = g(x)$ correspond exactly to the x -coordinates where the graphs of $y = f(x)$ and $y = g(x)$ intersect; reading these intersection points off a graph is an alternative to solving algebraically (and a useful check).

Ví dụ mẫu · Worked example

Use algebra to find the points where $y = x^2 - 2x - 8$ meets the line $y = 3x - 2$ (equivalent to reading their intersection points from a graph).

Set the expressions equal: $x^2 - 2x - 8 = 3x - 2 \Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 6)(x + 1) = 0$.

So $x = 6$ or $x = -1$. Substituting into $y = 3x - 2$: $y = 16$ or $y = -5$.

Intersection points: $(6, 16)$ and $(-1, -5)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Giải phương trình $f(x) = g(x)$ bằng đồ thị chính là tìm **giao điểm** của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$ - hoành độ giao điểm chính là nghiệm. Đây thực chất là một hệ phương trình (thường bậc nhất-bậc hai) được giải bằng phương pháp thế, sau đó đối chiếu lại với đồ thị để kiểm tra tính hợp lý của nghiệm (ví dụ vị trí giao điểm có khớp với hình vẽ hay không).

2.11 Introduction to differentiation (Extended)

2.11.1 The power rule and gradients

The **derivative** $\frac{dy}{dx}$ of $y = f(x)$ gives the gradient of the curve at any point x . For powers of x , the **power rule** applies term by term:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}(kx^n) = knx^{n-1}, \quad \frac{d}{dx}(\text{constant}) = 0.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Differentiate $y = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 2$, then find the gradient of the curve $y = x^3 - 4x + 1$ at $x = 2$ and the equation of the tangent there.

Differentiate term by term:

$$\frac{dy}{dx} = 20x^3 - 6x + 7.$$

Gradient and tangent for $y = x^3 - 4x + 1$: here $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4$. At $x = 2$: gradient $= 3(4) - 4 = 8$.

The point on the curve: $y(2) = 8 - 8 + 1 = 1$, so the point is $(2, 1)$.

Equation of the tangent (gradient 8 through $(2, 1)$): $y - 1 = 8(x - 2) \Rightarrow y = 8x - 15$.

2.11.2 Turning points and the second derivative

At a **turning point**, the gradient is momentarily zero: $\frac{dy}{dx} = 0$. The **second derivative** $\frac{d^2y}{dx^2}$ (the derivative of $\frac{dy}{dx}$) classifies the turning point: positive $\Rightarrow$ minimum; negative $\Rightarrow$ maximum.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Find and classify the turning points of $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$.

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x - 3)(x + 1)$. Setting this to zero: $x = 3$ or $x = -1$.

$y(3) = 27 - 27 - 27 + 2 = -25$; $y(-1) = -1 - 3 + 9 + 2 = 7$.

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x - 6$: at $x = 3$, this is $12 > 0$ (**minimum** at $(3, -25)$); at $x = -1$, this is $-12 < 0$ (**maximum** at $(-1, 7)$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đạo hàm $\frac{dy}{dx}$ cho biết **độ dốc (hệ số góc)** của đồ thị tại từng điểm; tại **điểm cực trị**, độ dốc bằng

0. Để phân loại điểm cực trị, tính **đạo hàm bậc hai** $\frac{d^2y}{dx^2}$ rồi thay giá trị x của điểm đó vào: nếu kết quả **dương** thì đó là điểm **cực tiểu** (đáy), nếu **âm** thì là điểm **cực đại** (đỉnh). Luôn tính lại giá trị y tương ứng bằng phương trình gốc, không phải bằng đạo hàm.

2.11.3 Kinematics: displacement, velocity, and acceleration

For a particle moving in a straight line with displacement $s(t)$, **velocity** is the rate of change of displacement, and **acceleration** is the rate of change of velocity:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}.$$

The particle is momentarily at rest when $v = 0$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) A particle moves so that its displacement is $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ metres, t in seconds. Find its velocity and acceleration as functions of t , the velocity when $t = 1$, and the time(s) at which the acceleration is zero.

$$v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12, \quad a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18.$$

At $t = 1$: $v = 6 - 18 + 12 = 0$ m/s (the particle is momentarily at rest).

Acceleration zero: $12t - 18 = 0 \Rightarrow t = 1.5$ s.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong bài toán chuyển động, đạo hàm bậc một của quãng đường theo thời gian là **vận tốc**, đạo hàm bậc hai là **gia tốc**. "Đứng yên tức thời" ($v = 0$) chỉ là một thời điểm cụ thể, không nhất thiết là khoảng thời gian dừng lại lâu – hãy đọc kỹ đơn vị và làm tròn theo yêu cầu đề bài (thường 3 chữ số có nghĩa nếu không phải số nguyên).

2.12 Problem bank

Bài tập luyện tập

Expand and simplify $(3x - 2)(2x + 5)$.

(A) $6x^2 + 11x - 10$

(C) $6x^2 + 19x - 10$

(B) $6x^2 - 11x - 10$

(D) $6x^2 - 19x - 10$

Lời giải chi tiết

$$(3x - 2)(2x + 5) = 6x^2 + 15x - 4x - 10 = 6x^2 + 11x - 10. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tậpFactorise completely: $8x^3y - 12x^2y^2$.

(A) $4xy(2x^2 - 3y)$

(C) $4x^2y(2x + 3y)$

(B) $4x^2y(2x - 3y)$

(D) $4xy^2(2x - 3)$

Lời giải chi tiếtThe HCF of $8x^3y$ and $12x^2y^2$ is $4x^2y$. Dividing each term: $8x^3y \div 4x^2y = 2x$; $12x^2y^2 \div 4x^2y = 3y$.

$$8x^3y - 12x^2y^2 = 4x^2y(2x - 3y).$$

(B).

Bài tập luyện tậpFactorise completely: $x^3 + 4x^2 - 9x - 36$.**Lời giải chi tiết**Group in pairs: $x^2(x + 4) - 9(x + 4) = (x + 4)(x^2 - 9)$. The second bracket is a difference of two squares:

$$x^3 + 4x^2 - 9x - 36 = (x + 4)(x - 3)(x + 3).$$

Check: $(x + 4)(x^2 - 9) = x^3 - 9x + 4x^2 - 36 = x^3 + 4x^2 - 9x - 36$. $\checkmark$ **Answer:** $(x + 4)(x - 3)(x + 3)$.**Bài tập luyện tập**Factorise $49x^2 - 81$.

(A) $(7x - 9)^2$

(C) $(7x - 9)(7x + 9)$

(B) $(49x - 81)(x + 1)$

(D) $(7x - 81)(7x + 1)$

Lời giải chi tiếtThis is a difference of two squares, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ with $a = 7x$, $b = 9$:

$$49x^2 - 81 = (7x - 9)(7x + 9).$$

(C).

Bài tập luyện tậpFactorise $4x^2 + 4x - 15$.

(A) $(2x - 5)(2x + 3)$

(C) $(2x + 15)(2x - 1)$

(B) $(4x + 5)(x - 3)$

(D) $(2x + 5)(2x - 3)$

Lời giải chi tiết

Here $a = 4$, $b = 4$, $c = -15$, so $ac = -60$; we need two numbers multiplying to -60 and adding to 4 : these are 10 and -6 .

$$4x^2 + 10x - 6x - 15 = 2x(2x + 5) - 3(2x + 5) = (2x + 5)(2x - 3).$$

(D).

Bài tập luyện tập

(Extended) Simplify $\frac{x^2 - 16}{x^2 - 2x - 8}$.

Lời giải chi tiết

Factorise both: $x^2 - 16 = (x - 4)(x + 4)$; $x^2 - 2x - 8 = (x - 4)(x + 2)$.

$$\frac{(x - 4)(x + 4)}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{x + 4}{x + 2} \quad (x \neq 4, -2).$$

Answer: $\frac{x + 4}{x + 2}$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Simplify $\frac{2}{x - 3} - \frac{1}{x + 1}$ as a single fraction.

Lời giải chi tiết

Common denominator $(x - 3)(x + 1)$:

$$\frac{2(x + 1) - 1(x - 3)}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{2x + 2 - x + 3}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{x + 5}{(x - 3)(x + 1)}.$$

Answer: $\frac{x + 5}{(x - 3)(x + 1)}$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Simplify $\frac{x^2 - 9}{4x} \div \frac{x + 3}{8x^2}$.

(A) $2x(x - 3)$

(C) $\frac{x - 3}{2x}$

(B) $2x(x + 3)$

(D) $2x^2 - 6$

Lời giải chi tiết

Multiply by the reciprocal: $\frac{x^2 - 9}{4x} \times \frac{8x^2}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{4x} \times \frac{8x^2}{x + 3} = \frac{8x^2(x - 3)}{4x} = 2x(x - 3)$.
(A).

Bài tập luyện tập

Solve $7(x - 2) - 3 = 2(2x + 1) + 5$.

(A) $x = 6$

(C) $x = \frac{20}{3}$

(B) $x = 8$

(D) $x = -8$

Lời giải chi tiết

Expand: $7x - 14 - 3 = 7x - 17$; $4x + 2 + 5 = 4x + 7$. So $7x - 17 = 4x + 7 \Rightarrow 3x = 24 \Rightarrow x = 8$.
(B).

Bài tập luyện tập

Make r the subject of $C = 2\pi r$.

(A) $r = 2\pi C$

(C) $r = \frac{C}{2\pi}$

(B) $r = \frac{2\pi}{C}$

(D) $r = C - 2\pi$

Lời giải chi tiết

Divide both sides by 2π : $r = \frac{C}{2\pi}$. (C).

Bài tập luyện tập

(Extended) Make x the subject of $y = \frac{3x - 2}{x + 4}$.

Lời giải chi tiết

Multiply by $(x + 4)$: $y(x + 4) = 3x - 2 \Rightarrow yx + 4y = 3x - 2$. Collect x -terms:

$$yx - 3x = -2 - 4y \Rightarrow x(y - 3) = -(4y + 2) \Rightarrow x = \frac{4y + 2}{3 - y}.$$

Answer: $x = \frac{4y + 2}{3 - y}$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Make u the subject of $v^2 = u^2 + 2as$ (taking the positive root).

Lời giải chi tiết

Rearrange: $u^2 = v^2 - 2as$. Taking the positive square root:

$$u = \sqrt{v^2 - 2as}.$$

Answer: $u = \sqrt{v^2 - 2as}$.

Bài tập luyện tập

Solve simultaneously: $4x + 3y = 25$ and $2x - 3y = -1$.

(A) $x = 3, y = 4$

(C) $x = 4, y = -3$

(B) $x = 5, y = \frac{5}{3}$

(D) $x = 4, y = 3$

Lời giải chi tiết

Add the two equations (the y -terms cancel): $6x = 24 \Rightarrow x = 4$. Substitute into the first equation: $16 + 3y = 25 \Rightarrow y = 3$. Check in the second: $8 - 9 = -1$. ✓ (D).

Bài tập luyện tập

Solve simultaneously: $y = 3x - 7$ and $2x + y = 13$.

Lời giải chi tiết

Substitute: $2x + (3x - 7) = 13 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$. Then $y = 3(4) - 7 = 5$. Check: $2(4) + 5 = 13$. ✓ **Answer:** $x = 4, y = 5$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Solve simultaneously: $y = x - 1$ and $y = x^2 - 3x - 1$.

Lời giải chi tiết

Set equal: $x - 1 = x^2 - 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x(x - 4) = 0 \Rightarrow x = 0$ or $x = 4$.
Then $y = x - 1$: $y = -1$ or $y = 3$. **Answer:** $(0, -1)$ and $(4, 3)$.

Bài tập luyện tập

Solve $6x^2 - x - 2 = 0$.

(A) $x = \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}$

(C) $x = 2, -\frac{1}{3}$

(B) $x = -\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$

(D) $x = \frac{1}{3}, -2$

Lời giải chi tiết

Here $ac = -12$; two numbers multiplying to -12 and adding to -1 are -4 and 3 .

$$6x^2 - 4x + 3x - 2 = 2x(3x - 2) + 1(3x - 2) = (3x - 2)(2x + 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3} \text{ or } x = -\frac{1}{2}.$$

(A).

Bài tập luyện tập

Solve $5x^2 - 3x - 1 = 0$ using the quadratic formula, giving answers to 3 significant figures.

Lời giải chi tiết

$a = 5, b = -3, c = -1$. Discriminant $= 9 + 20 = 29$, $\sqrt{29} \approx 5.385$.

$$x = \frac{3 \pm 5.385}{10} \Rightarrow x \approx 0.839 \text{ or } x \approx -0.239.$$

Answer: $x \approx 0.839$ or $x \approx -0.239$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Solve $x^2 - 4x - 1 = 0$ by completing the square, giving exact answers.

(A) $x = 2 \pm \sqrt{3}$

(C) $x = 4 \pm \sqrt{5}$

(B) $x = 2 \pm \sqrt{5}$

(D) $x = -2 \pm \sqrt{5}$

Lời giải chi tiết

Half of -4 is -2 : $x^2 - 4x = (x - 2)^2 - 4$. So $(x - 2)^2 - 4 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 2)^2 = 5 \Rightarrow x - 2 = \pm\sqrt{5} \Rightarrow x = 2 \pm \sqrt{5}$. **(B).**

Bài tập luyện tập

(Extended) Solve $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$.

Lời giải chi tiết

Let $u = x^2$: $u^2 - 13u + 36 = 0 \Rightarrow (u - 4)(u - 9) = 0 \Rightarrow u = 4$ or $u = 9$.

So $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$; $x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$. **Answer:** $x = 2, -2, 3, -3$.

Bài tập luyện tập

Solve $-5 \leq 3x - 2 < 10$ and list the integer solutions.

Lời giải chi tiết

$-5 \leq 3x - 2 \Rightarrow -3 \leq 3x \Rightarrow -1 \leq x$. $3x - 2 < 10 \Rightarrow 3x < 12 \Rightarrow x < 4$.

Combined: $-1 \leq x < 4$. **Integer solutions:** $-1, 0, 1, 2, 3$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Solve $x^2 + 2x - 8 > 0$.

(A) $-4 < x < 2$

(C) $x < -4$ or $x > 2$

(B) $x > -4$ and $x < 2$

(D) $x < 2$ only

Lời giải chi tiết

Factorise: $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$, critical values $x = -4, 2$. The upward parabola is *above* the x -axis **outside** its roots.

$$x < -4 \text{ or } x > 2.$$

(C).

Bài tập luyện tập

(Extended) Which point lies in the region satisfying $y \leq x$, $y > 1$, and $x < 4$?

- (A) (2, 4) (C) (5, 1)
(B) (0, 0) (D) (2, 2)

Lời giải chi tiết

Test each point against all three inequalities:

(2, 4): $y \leq x \Rightarrow 4 \leq 2$ false.

(0, 0): $y > 1 \Rightarrow 0 > 1$ false.

(2, 2): $y \leq x \Rightarrow 2 \leq 2$ true; $y > 1 \Rightarrow 2 > 1$ true; $x < 4 \Rightarrow 2 < 4$ true – all satisfied.

(5, 1): $x < 4$ false and $y > 1$ false.

(D).

Bài tập luyện tập

Simplify $\frac{(2x^3y^2)^3}{4x^4y}$.

- (A) $2x^5y^5$ (C) $8x^5y^5$
(B) $2x^7y^7$ (D) $2x^{12}y^6$

Lời giải chi tiết

$(2x^3y^2)^3 = 8x^9y^6$. Dividing by $4x^4y$:

$$\frac{8x^9y^6}{4x^4y} = 2x^{9-4}y^{6-1} = 2x^5y^5.$$

(A).

Bài tập luyện tập

Solve $8^x = 2^{x+6}$.

- (A) $x = 2$ (C) $x = 6$
(B) $x = 3$ (D) $x = 4$

Lời giải chi tiết

Write $8 = 2^3$: $2^{3x} = 2^{x+6} \Rightarrow 3x = x + 6 \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$. (B).

Bài tập luyện tập

Find the n th term of 6, 11, 16, 21, ...

- (A) $5n - 1$ (C) $5n + 1$
(B) $n + 5$ (D) $6n$

Lời giải chi tiết

Common difference $d = 5$; first term 6, so $a_1 - d = 1$.

$$n\text{th term} = 5n + 1.$$

Check $n = 4$: $5(4) + 1 = 21$. ✓ **(C)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the n th term of 1, 6, 13, 22, 33, ...

Lời giải chi tiết

First differences: 5, 7, 9, 11; second difference $= 2 \Rightarrow a = 1$. Using n th term $= n^2 + bn + c$:
term 1: $1 + b + c = 1$; term 2: $4 + 2b + c = 6$. Subtracting: $3 + b = 5 \Rightarrow b = 2$, then
 $c = 1 - 1 - 2 = -2$.

$$n\text{th term} = n^2 + 2n - 2.$$

Check $n = 5$: $25 + 10 - 2 = 33$. ✓ **Answer: $n^2 + 2n - 2$.**

Bài tập luyện tập

Find the n th term of the geometric sequence 5, 15, 45, 135, ...

(A) 5×3^n

(C) $15n - 10$

(B) $3 \times 5^{n-1}$

(D) $5 \times 3^{n-1}$

Lời giải chi tiết

Common ratio $r = 3$, first term $a_1 = 5$.

$$n\text{th term} = 5 \times 3^{n-1}.$$

Check $n = 3$: $5 \times 3^2 = 5 \times 9 = 45$. ✓ **(D)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) Given $f(x) = 3x + 2$ and $g(x) = x^2 - 1$, find (a) $f(g(2))$; (b) $gf(x)$; (c) $f^{-1}(x)$.

Lời giải chi tiết

(a) $g(2) = 4 - 1 = 3$; then $f(3) = 3(3) + 2 = 11$.

(b) $gf(x) = g(3x + 2) = (3x + 2)^2 - 1 = 9x^2 + 12x + 4 - 1 = 9x^2 + 12x + 3$.

(c) $y = 3x + 2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$.

Answers: (a) 11; (b) $9x^2 + 12x + 3$; (c) $\frac{x-2}{3}$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Given $f(x) = 2x - 5$, find $f^{-1}(3)$.

(A) 4

(C) 11

(B) 1

(D) -1

Lời giải chi tiết

$f^{-1}(3)$ is the value of x for which $f(x) = 3$: $2x - 5 = 3 \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$. (A).

Bài tập luyện tập

For $y = x^2 - 6x + 5$, state the roots and the equation of the axis of symmetry.

Lời giải chi tiết

Factorise: $x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x - 5)$, so the roots are $x = 1$ and $x = 5$.

Axis of symmetry: $x = \frac{1+5}{2} = 3$. **Answer: roots** $x = 1, 5$; **axis of symmetry** $x = 3$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Differentiate $y = 3x^4 - 2x^3 + 5x - 7$.

(A) $12x^3 - 6x^2 + 5x$

(C) $4x^3 - 2x^2 + 5$

(B) $12x^3 - 6x^2 + 5$

(D) $12x^4 - 6x^3 + 5x$

Lời giải chi tiết

Differentiate term by term using the power rule:

$$\frac{dy}{dx} = 12x^3 - 6x^2 + 5.$$

(B).

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the gradient of $y = x^3 - 5x + 2$ at $x = -1$, and the equation of the tangent at that point.

Lời giải chi tiết

$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 5$. At $x = -1$: gradient = $3(1) - 5 = -2$.

$y(-1) = -1 + 5 + 2 = 6$, so the point is $(-1, 6)$. Tangent: $y - 6 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x + 4$.

Answer: gradient $= -2$; **tangent** $y = -2x + 4$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Find and classify the turning points of $y = x^3 - 12x + 3$.

(A) Max (2, -13), min (-2, 19)

(C) Min (2, -13), max (-2, 19)

(B) Min (2, -13), min (-2, 19)

(D) Max (2, -13), max (-2, 19)

Lời giải chi tiết

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2) = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ or } x = -2.$$

$$y(2) = 8 - 24 + 3 = -13; \quad y(-2) = -8 + 24 + 3 = 19.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x: \text{ at } x = 2, \text{ this is } 12 > 0 \text{ (minimum); at } x = -2, \text{ this is } -12 < 0 \text{ (maximum). (C).}$$

Bài tập luyện tập

(Extended) A particle moves so that $s = 2t^3 - 9t^2 + 12t$ (metres, t in seconds). Find (a) the velocity and acceleration as functions of t ; (b) the velocity at $t = 1$; (c) the time when the acceleration is zero.

Lời giải chi tiết

$$(a) \quad v = \frac{ds}{dt} = 6t^2 - 18t + 12; \quad a = \frac{dv}{dt} = 12t - 18.$$

$$(b) \quad \text{At } t = 1: v = 6 - 18 + 12 = 0 \text{ m/s.}$$

$$(c) \quad 12t - 18 = 0 \Rightarrow t = 1.5 \text{ s.}$$

Answers: (a) $v = 6t^2 - 18t + 12$, $a = 12t - 18$; (b) $v = 0$ m/s; (c) $t = 1.5$ s.

Coordinate geometry

Mục tiêu Unit: Đọc và vẽ toạ độ điểm; công thức hệ số góc (gradient), trung điểm (midpoint) và khoảng cách (distance) giữa hai điểm; phương trình đường thẳng $y = mx + c$ – xác định từ đồ thị, từ hai điểm, hoặc từ một điểm và hệ số góc; điều kiện song song và (Extended) vuông góc; tìm giao điểm hai đường thẳng bằng phương pháp giải hệ phương trình; (Extended) đường trung trực của một đoạn thẳng và các ứng dụng hình học (điểm cách đều hai điểm, tâm đường tròn ngoại tiếp); và (Extended) các ứng dụng mở rộng: diện tích hình giới hạn bởi các đường thẳng và trục toạ độ, giao điểm giữa đường thẳng và đồ thị hàm bậc hai.

3.1 Coordinates and the gradient of a line

3.1.1 Plotting points and reading coordinates

Every point in a plane is located by an ordered pair (x, y) : the x -coordinate tells us how far to move horizontally from the origin $O(0, 0)$, and the y -coordinate tells us how far to move vertically. The two perpendicular reference lines are the x -axis (horizontal) and the y -axis (vertical), together called the **Cartesian axes**. Reading a graph accurately – picking out the exact coordinates of a labelled point, or of a point where a line crosses an axis – is the single most common source of small errors in coordinate-geometry questions, so it is worth checking each coordinate against the grid lines carefully before using it in a formula.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Mỗi điểm trên mặt phẳng toạ độ được xác định bởi một cặp số (x, y) : hoành độ x (bao xa theo chiều ngang tính từ gốc O) và tung độ y (bao xa theo chiều dọc). Khi đọc toạ độ từ một hình vẽ có sẵn (ví dụ đề thi cho một đồ thị), hãy luôn đối chiếu từng điểm với các vạch chia trên lưới ô vuông trước khi đưa vào công thức – đọc sai một đơn vị nhỏ trên trục là lỗi rất phổ biến và làm sai toàn bộ bài toán phía sau.

3.1.2 The gradient formula

The **gradient** (also called the *slope*) of a line measures its steepness: how much y changes for every unit increase in x . For two points $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$ on a line:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{change in } y}{\text{change in } x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

It does not matter which point is labelled 1 and which is labelled 2, provided the *same order* is used in both the numerator and the denominator.

Ví dụ mẫu • Gradient from two given points

Find the gradient of the line joining $A(2, -3)$ and $B(6, 5)$.

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - (-3)}{6 - 2} = \frac{8}{4} = 2.$$

The line rises 2 units for every 1 unit moved to the right.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức hệ số góc $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ chỉ đơn giản là "tỉ số giữa lượng thay đổi theo chiều dọc và lượng thay đổi theo chiều ngang" khi đi từ điểm này sang điểm kia. Không quan trọng điểm nào được gọi là điểm 1, điểm nào là điểm 2 – miễn là thứ tự trừ ở tử số và mẫu số phải **giống nhau** (nếu lấy $y_2 - y_1$ ở trên thì bắt buộc phải lấy $x_2 - x_1$ ở dưới, không được đảo ngược một bên).

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi phổ biến nhất khi tính hệ số góc là **đảo thứ tự trừ không đồng bộ** – ví dụ lấy $y_2 - y_1$ ở tử số nhưng lại lấy $x_1 - x_2$ ở mẫu số, khiến kết quả bị sai dấu. Một cách kiểm tra nhanh: nếu đường thẳng "đi lên" từ trái sang phải thì m phải dương; nếu "đi xuống" thì m phải âm. Hãy luôn đối chiếu dấu của kết quả với hình dạng thực tế của đường thẳng trước khi kết luận.

3.1.3 Interpreting the sign of the gradient

The sign and size of m describe exactly how a line behaves as x increases:

Reading the gradient

- $m > 0$: the line slopes **upward** from left to right (y increases as x increases).
- $m < 0$: the line slopes **downward** from left to right (y decreases as x increases).
- $m = 0$: the line is **horizontal** (y is constant, e.g. $y = 3$); there is no change in y at all.
- m **undefined**: the line is **vertical** (e.g. $x = 5$); here $x_2 - x_1 = 0$, so the gradient formula involves division by zero and the gradient simply does not exist.

Ví dụ mẫu · Gradient from a graph, and special cases

(a) A line passes through $(0, 4)$ and $(3, -2)$, as read off a graph. Find its gradient and describe the line.

(b) State the gradient of the horizontal line $y = 3$ and of the vertical line $x = 5$.

(a) $m = \frac{-2 - 4}{3 - 0} = \frac{-6}{3} = -2$. Since $m < 0$, the line slopes downward from left to right – for every 1 unit moved right, y falls by 2 units.

(b) On $y = 3$, every point has the same y -value no matter what x is, so $\Delta y = 0$ and $m = 0$ (horizontal). On $x = 5$, every point has the same x -value, so $\Delta x = 0$ and the gradient is **undefined** (vertical).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Dấu của hệ số góc cho biết đường thẳng đi lên hay đi xuống: $m > 0$ đi lên, $m < 0$ đi xuống, $m = 0$ là đường **nằm ngang** (song song trục x , dạng $y = k$), và m **không xác định** là đường **thẳng đứng** (song song trục y , dạng $x = k$) – vì lúc đó mẫu số $\Delta x = 0$, phép chia không thực hiện được. Hai trường hợp đặc biệt này (ngang và đứng) rất hay bị nhầm lẫn với nhau, cần phân

biệt rõ: đường ngang có $m = 0$ (một số xác định), còn đường đứng thì m hoàn toàn không tồn tại.

3.2 Midpoint and distance between two points

3.2.1 The midpoint formula

The **midpoint** of a line segment is the point exactly halfway between its two endpoints – simply the average of the x -coordinates and the average of the y -coordinates.

For $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$:

$$\text{Midpoint of } AB = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right).$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trung điểm của một đoạn thẳng chỉ là **trung bình cộng** của hai hoành độ và trung bình cộng của hai tung độ – không có gì phức tạp hơn. Đây là công thức dễ nhớ nhất trong cả chương, nhưng lại thường bị nhầm với công thức khoảng cách khi làm bài nhanh, nên cần đọc kỹ đề: đề hỏi "trung điểm" (một *điểm*, có tọa độ (x, y)) khác hoàn toàn với đề hỏi "khoảng cách" hay "độ dài" (một số duy nhất).

3.2.2 The distance formula, derived from Pythagoras

To find the length of the segment AB , draw the right-angled triangle formed by the horizontal step $\Delta x = x_2 - x_1$ and the vertical step $\Delta y = y_2 - y_1$; the segment AB itself is the hypotenuse. Applying Pythagoras' theorem to this triangle gives the **distance formula**:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Ví dụ mẫu · Gradient, midpoint, and distance together

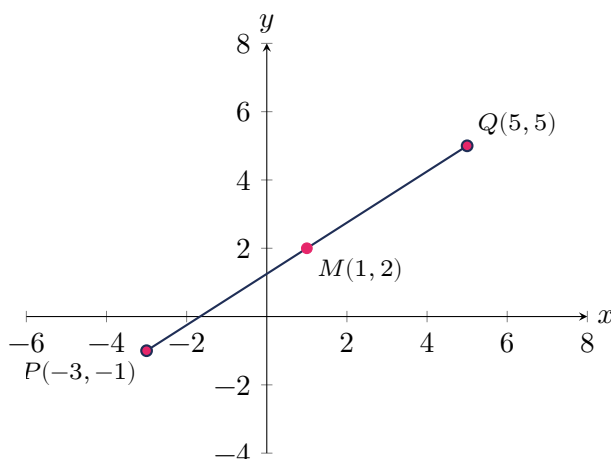
For $P(-3, -1)$ and $Q(5, 5)$, find the gradient of PQ , the midpoint of PQ , and the length of PQ .

Gradient: $m = \frac{5 - (-1)}{5 - (-3)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$

Midpoint: $\left(\frac{-3 + 5}{2}, \frac{-1 + 5}{2} \right) = (1, 2).$

Distance: $\Delta x = 5 - (-3) = 8, \Delta y = 5 - (-1) = 6$, so

$$PQ = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10.$$



Segment PQ with midpoint M ; gradient = $\frac{3}{4}$, length $PQ = 10$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức khoảng cách chính là **định lý Pythagoras** áp dụng cho tam giác vuông tạo bởi hai cạnh góc vuông Δx và Δy , với đoạn thẳng AB đóng vai trò cạnh huyền. Vì vậy khi tính khoảng cách, luôn nhớ: bình phương hai cạnh góc vuông, cộng lại, rồi lấy căn bậc hai – tuyệt đối không được quên bước lấy căn bậc hai ở cuối (một lỗi khá phổ biến là dừng lại ở $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ và nhầm đó là đáp số).

Ví dụ mẫu · Using the distance formula to identify a right angle

Triangle ABC has vertices $A(1, 1)$, $B(5, 4)$, $C(1, 4)$. Show that ABC is right-angled, and state where the right angle is.

$$AB = \sqrt{(5-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

$$AC = \sqrt{(1-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{0+9} = 3, \quad BC = \sqrt{(5-1)^2 + (4-4)^2} = \sqrt{16+0} = 4.$$

Since $AC^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = AB^2$, the converse of Pythagoras' theorem confirms triangle ABC is right-angled, with the right angle at C (the vertex between the two shorter sides AC and BC).

(!) Lỗi thường gặp: Đừng nhầm công thức trung điểm với công thức khoảng cách – đây là lỗi rất hay gặp khi làm bài dưới áp lực thời gian. Trung điểm cho ra một điểm (một cặp tọa độ (x, y)), thu được bằng phép cộng rồi chia đôi; khoảng cách cho ra một số (độ dài, thu được bằng phép trừ, bình phương, cộng, rồi khai căn). Trước khi viết công thức, hãy đọc lại đề: "tìm trung điểm của..." khác hẳn "tìm khoảng cách/độ dài của..."

3.3 The equation of a straight line

3.3.1 Gradient-intercept form

Every (non-vertical) straight line can be written in **gradient-intercept form**:

$$y = mx + c$$

where m is the gradient and c is the y -intercept (the value of y where the line crosses the y -axis, i.e. at $x = 0$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong phương trình $y = mx + c$: m là hệ số góc (độ dốc), c là tung độ gốc – giá trị của y tại vị trí đường thẳng cắt trục y (khi $x = 0$). Đây là "form" quan trọng nhất của cả chương vì hầu hết các bài toán về đường thẳng đều quy về việc tìm ra m và c .

3.3.2 Finding the equation from a graph, or from two points

If a graph shows two clearly labelled points (or a y -intercept and one other point), first calculate m using the gradient formula, then substitute one point into $y = mx + c$ to solve for c .

Ví dụ mẫu · Equation of a line through two points

Find the equation of the line through $(2, 1)$ and $(6, 9)$.

Gradient: $m = \frac{9-1}{6-2} = \frac{8}{4} = 2$.

Substitute $(2, 1)$ into $y = 2x + c$: $1 = 2(2) + c \Rightarrow 1 = 4 + c \Rightarrow c = -3$.

Equation: $y = 2x - 3$. *Check with the other point:* $2(6) - 3 = 12 - 3 = 9$. ✓

Ví dụ mẫu · Equation of a line from its axis intercepts

A line crosses the x -axis at $(4, 0)$ and the y -axis at $(0, 6)$. Find its equation in the form $y = mx + c$, and hence in the form $ax + by = k$ with integer coefficients.

$$m = \frac{6-0}{0-4} = \frac{6}{-4} = -\frac{3}{2}, \quad c = 6 \text{ (read directly, since } (0, 6) \text{ is the } y\text{-intercept).}$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 6.$$

Multiplying every term by 2 to clear the fraction: $2y = -3x + 12$, so $3x + 2y = 12$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi đề cho hai điểm (hoặc hai giao điểm với trục tọa độ): bước 1 luôn là tính m bằng công thức hệ số góc; bước 2 là thay tọa độ của **một** điểm bất kỳ (không cần cả hai) vào $y = mx + c$ để tìm c ; bước 3 (nếu cần) là thử lại bằng điểm còn lại để chắc chắn không tính sai. Nếu đề cho sẵn giao điểm với trục y dạng $(0, c)$ thì có thể đọc thẳng ra c mà không cần thay số.

3.3.3 Finding the equation from a point and a gradient

If we already know the gradient m and one point (x_1, y_1) on the line, we can substitute directly:

$$y - y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y = mx + c \text{ after expanding and simplifying.}$$

Ví dụ mẫu · Equation from a point and a gradient

Find the equation of the line through $(1, 4)$ and $(5, -8)$.

$$m = \frac{-8-4}{5-1} = \frac{-12}{4} = -3.$$

Using $(1, 4)$: $y - 4 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 3 + 4 = -3x + 7$.

3.3.4 Rearranging $ax + by = c$ into gradient-intercept form

Many exam questions give a line's equation in the general form $ax + by = c$. To read off the gradient and intercept, rearrange to make y the subject.

Ví dụ mẫu · Rearranging to gradient-intercept form

Rearrange $3x + 4y = 24$ into the form $y = mx + c$, and state the gradient and y -intercept.

$$3x + 4y = 24 \Rightarrow 4y = -3x + 24 \Rightarrow y = -\frac{3}{4}x + 6.$$

Gradient $m = -\frac{3}{4}$; y -intercept $c = 6$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi phương trình cho ở dạng $ax + by = c$, luôn phải **chuyển vế và chia** để đưa về dạng $y = mx + c$ trước khi đọc hệ số góc – tuyệt đối không được vội kết luận hệ số góc là $-\frac{a}{b}$ mà không tự tay biến đổi ít nhất một lần, vì rất dễ nhầm dấu khi chuyển vế các số hạng chứa x .

3.4 Parallel and perpendicular lines

3.4.1 Parallel lines

Two lines are **parallel** if and only if they have the same gradient ($m_1 = m_2$) and different y -intercepts (otherwise they would be the same line).

Ví dụ mẫu · Equation of a line parallel to a given line

Find the equation of the line parallel to $y = 3x - 2$ that passes through $(4, -1)$.

A parallel line has the same gradient, $m = 3$. Using $(4, -1)$:

$$y - (-1) = 3(x - 4) \Rightarrow y + 1 = 3x - 12 \Rightarrow y = 3x - 13.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai đường thẳng **song song** khi và chỉ khi chúng có **cùng hệ số góc** m (và khác tung độ gốc c , nếu không chúng sẽ trùng nhau chứ không phải song song). Đây là điều kiện đơn giản nhất trong cả chương – chỉ cần "sao chép" hệ số góc của đường đã cho.

3.4.2 Perpendicular lines (Extended)

Two lines are **perpendicular** (meet at a right angle) if and only if the product of their gradients is -1 :

$$m_1 \times m_2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

In words: to find a perpendicular gradient, take the **reciprocal** of the original gradient and **change its sign**.

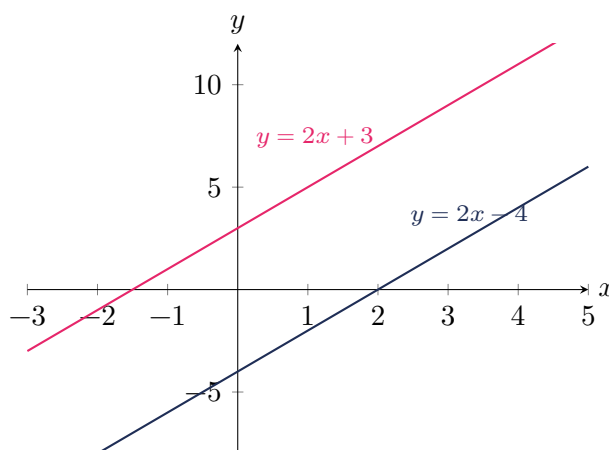
Ví dụ mẫu · Equation of a perpendicular line (Extended)

Find the equation of the line through $(4, 7)$ that is perpendicular to $y = \frac{2}{5}x + 1$.

The given gradient is $\frac{2}{5}$, so the perpendicular gradient is $-\frac{5}{2}$ (flip the fraction, then change the sign).

$$y - 7 = -\frac{5}{2}(x - 4) \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 10 + 7 = -\frac{5}{2}x + 17.$$

Check: at $x = 4$, $y = -10 + 17 = 7$. ✓



Two parallel lines, both with gradient 2: they never meet, and the perpendicular distance between them is constant along their whole length.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai đường thẳng **vuông góc** khi tích hai hệ số góc bằng -1 : $m_1 \times m_2 = -1$. Cách nhớ thao tác nhanh: lấy **ngịch đảo** của phân số rồi **đổi dấu** (nếu $m_1 = \frac{2}{5}$ thì $m_2 = -\frac{5}{2}$; nếu $m_1 = 3$ (tức $\frac{3}{1}$) thì $m_2 = -\frac{1}{3}$). Kỹ thuật này xuất hiện liên tục trong các bài về đường trung trực ở phần sau.

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi rất phổ biến khi tìm hệ số góc vuông góc là chỉ **đổi dấu** mà **quên nghịch đảo**, hoặc chỉ **ngịch đảo** mà **quên đổi dấu**. Cả hai thao tác đều bắt buộc phải làm cùng lúc: **ngịch đảo phân số và đổi dấu**. Một cách kiểm tra nhanh: nhân thử $m_1 \times m_2$ - nếu kết quả không phải là -1 thì chắc chắn đã làm sai một trong hai bước.

3.5 The point of intersection of two lines

Two straight lines (that are not parallel) cross at exactly one point. To find it, solve the two equations **simultaneously**: the coordinates that satisfy both equations at once are precisely the coordinates of the point where the two lines meet.

Ví dụ mẫu · Finding the point of intersection

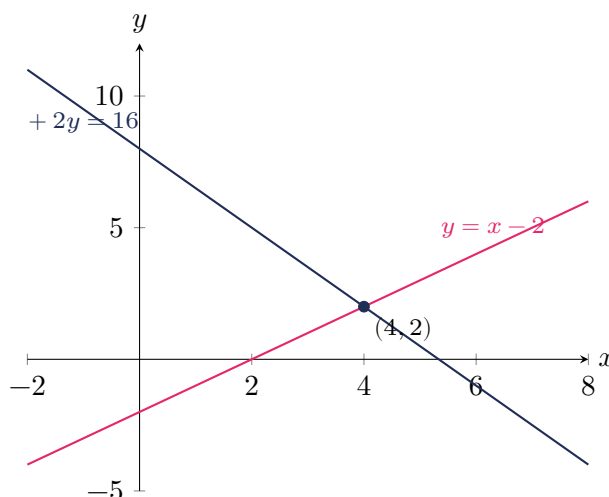
Find the point of intersection of $3x + 2y = 16$ and $y = x - 2$.

Substitute $y = x - 2$ into the first equation:

$$3x + 2(x - 2) = 16 \Rightarrow 3x + 2x - 4 = 16 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4.$$

Then $y = 4 - 2 = 2$. The lines meet at $(4, 2)$.

Check in the first equation: $3(4) + 2(2) = 12 + 4 = 16$. ✓



The two lines $3x + 2y = 16$ and $y = x - 2$ cross at the single point $(4, 2)$ – the only (x, y) pair that satisfies both equations at once.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Giao điểm của hai đường thẳng chính là điểm **duy nhất** mà tọa độ (x, y) của nó thỏa mãn cả hai phương trình cùng lúc. Về mặt đại số, đây đơn giản là bài toán **giải hệ phương trình bậc nhất hai ẩn** quen thuộc: dùng phương pháp thế (nếu một phương trình đã có y hoặc x được cô lập sẵn) hoặc phương pháp cộng đại số. Luôn thử lại kết quả vào phương trình còn lại để chắc chắn không tính nhầm.

3.6 The perpendicular bisector of a line segment (Extended)

3.6.1 Method: midpoint + perpendicular gradient

The **perpendicular bisector** of a segment AB is the line that (i) passes through the midpoint of AB , and (ii) is perpendicular to AB . Every point on this line is **equidistant** from A and B – this is the key geometric property that makes the perpendicular bisector so useful.

To find the equation of the perpendicular bisector of $A(x_1, y_1)$ and $B(x_2, y_2)$:

1. Find the midpoint M of AB .
2. Find the gradient m of AB , then the perpendicular gradient $-\frac{1}{m}$.
3. Substitute M and the perpendicular gradient into $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Ví dụ mẫu · Equation of a perpendicular bisector (Extended)

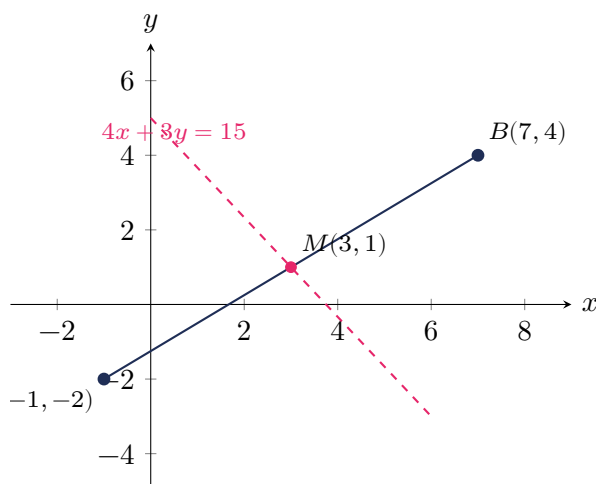
Find the equation of the perpendicular bisector of $A(-1, -2)$ and $B(7, 4)$.

Midpoint: $M = \left(\frac{-1 + 7}{2}, \frac{-2 + 4}{2} \right) = (3, 1)$.

Gradient of AB : $m = \frac{4 - (-2)}{7 - (-1)} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, so the perpendicular gradient is $-\frac{4}{3}$.

Equation: $y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 3) \Rightarrow 3y - 3 = -4x + 12 \Rightarrow 4x + 3y = 15$.

Check at the midpoint $(3, 1)$: $4(3) + 3(1) = 12 + 3 = 15$. ✓



The perpendicular bisector (dashed) of AB passes through midpoint M at a right angle to AB ; every point on it is equidistant from A and B .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đường trung trực của một đoạn thẳng AB là đường thẳng vừa **đi qua trung điểm** của AB , vừa **vuông góc** với AB . Tính chất quan trọng nhất (và là lý do đề thi hay khai thác) là: **mọi điểm nằm trên đường trung trực đều cách đều hai điểm A và B** . Quy trình luôn gồm 3 bước cố định: tìm trung điểm, tìm hệ số góc vuông góc, rồi thay vào phương trình đường thẳng qua một điểm với hệ số góc cho trước.

3.6.2 Geometric applications: equidistant points and circumcentres (Extended)

Because every point on the perpendicular bisector of AB is equidistant from A and B , we can use it to locate a specific point satisfying an equidistance condition – for example, a point that also lies on a given line or axis.

Ví dụ mẫu · Finding a point equidistant from two given points (Extended)

Using the perpendicular bisector $4x + 3y = 15$ found above for $A(-1, -2)$ and $B(7, 4)$, find the point on the x -axis that is equidistant from A and B .

On the x -axis, $y = 0$. Substitute into $4x + 3y = 15$:

$$4x + 3(0) = 15 \Rightarrow x = \frac{15}{4} = 3.75.$$

The required point is $(3.75, 0)$.

Check: distance to $A(-1, -2)$: $\sqrt{(4.75)^2 + (2)^2} = \sqrt{22.5625 + 4} = \sqrt{26.5625}$. Distance to $B(7, 4)$: $\sqrt{(3.25)^2 + (4)^2} = \sqrt{10.5625 + 16} = \sqrt{26.5625}$. Equal, as expected. $\checkmark$

A closely related application locates the **circumcentre** of a triangle: the unique point equidistant from all three vertices, found where any two perpendicular bisectors of the triangle's sides intersect.

Ví dụ mẫu · Circumcentre of a triangle (Extended)

Triangle ABC has vertices $A(1, 1)$, $B(7, 1)$, $C(4, 7)$. Find the point equidistant from all three vertices, and the common distance (the circumradius).

Perpendicular bisector of AB : midpoint $(4, 1)$; since AB is horizontal, its perpendicular bisector is the vertical line $x = 4$.

Perpendicular bisector of AC: midpoint $(2.5, 4)$; gradient of AC is $\frac{7-1}{4-1} = 2$, so the perpendicular gradient is $-\frac{1}{2}$.

$$y - 4 = -\frac{1}{2}(x - 2.5).$$

Substituting $x = 4$: $y - 4 = -\frac{1}{2}(1.5) = -0.75 \Rightarrow y = 3.25$.

So the circumcentre is $(4, 3.25)$. *Check the three distances:*

$$\text{to } A : \sqrt{3^2 + 2.25^2} = \sqrt{9 + 5.0625} = \sqrt{14.0625}; \quad \text{to } B : \sqrt{3^2 + 2.25^2} = \sqrt{14.0625};$$

$$\text{to } C : \sqrt{0^2 + 3.75^2} = \sqrt{14.0625}.$$

All three distances are equal, confirming $(4, 3.25)$ is the circumcentre; the circumradius is $\sqrt{14.0625} = 3.75$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Vì mọi điểm trên đường trung trực của AB đều cách đều A và B , ta có thể dùng nó để tìm một điểm thoả điều kiện cách đều, kể cả khi điểm đó còn phải nằm trên một đường/trục khác (chỉ cần thay điều kiện đó – ví dụ $y = 0$ – vào phương trình đường trung trực). Ứng dụng kinh điển nhất là tìm **tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác (circumcentre)**: đó chính là giao điểm của bất kỳ **hai** đường trung trực nào trong ba cạnh của tam giác – vì tâm này phải cách đều cả ba đỉnh, nên nó bắt buộc phải nằm trên cả ba đường trung trực cùng lúc, và chỉ cần tìm giao điểm của hai trong số đó là đủ.

3.7 Further applications (Extended)

3.7.1 Area enclosed by lines and the axes

When a straight line crosses both axes, it encloses a right-angled triangle with the origin. Since the two legs of this triangle lie along the axes, its area is simply half the product of the two intercepts.

Ví dụ mẫu · Area enclosed by a line and the axes (Extended)

Find the area enclosed between the line $3x + 4y = 24$ and the coordinate axes.

x -intercept (put $y = 0$): $3x = 24 \Rightarrow x = 8$, so $(8, 0)$.

y -intercept (put $x = 0$): $4y = 24 \Rightarrow y = 6$, so $(0, 6)$.

The enclosed region is a right-angled triangle with legs 8 and 6 along the axes:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 24 \text{ square units.}$$

For a region enclosed by more than one line (a quadrilateral, say), the same idea extends: split the shape into triangles whose areas can each be found from known coordinates, or use the **shoelace method**, which sums coordinate cross-products around the vertices in order.

For a polygon with vertices $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ listed in order around the shape:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} |(x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_ny_1) - (y_1x_2 + y_2x_3 + \dots + y_nx_1)|.$$

Ví dụ mẫu · Area of a quadrilateral by splitting into triangles (Extended)

Find the area of the quadrilateral with vertices $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(8, 5)$, $(2, 5)$, taken in order.

Method: split into two triangles along the diagonal from $(0, 0)$ to $(8, 5)$.

Triangle 1: $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(8, 5)$:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} |0(0 - 5) + 6(5 - 0) + 8(0 - 0)| = \frac{1}{2} |0 + 30 + 0| = 15.$$

Triangle 2: $(0, 0)$, $(8, 5)$, $(2, 5)$:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} |0(5 - 5) + 8(5 - 0) + 2(0 - 5)| = \frac{1}{2} |0 + 40 - 10| = 15.$$

Total area = $15 + 15 = 30$ square units.

Check with the shoelace formula directly on all four vertices $(0, 0)$, $(6, 0)$, $(8, 5)$, $(2, 5)$:

$$\text{Sum}_1 = (0)(0) + (6)(5) + (8)(5) + (2)(0) = 0 + 30 + 40 + 0 = 70,$$

$$\text{Sum}_2 = (0)(6) + (0)(8) + (5)(2) + (5)(0) = 0 + 0 + 10 + 0 = 10,$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} |70 - 10| = \frac{1}{2} (60) = 30. \quad \checkmark$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với một tam giác có một cạnh nằm trên trục tọa độ, diện tích tam giác chỉ đơn giản là $\frac{1}{2} \times \text{đáy} \times \text{chiều cao}$, với đáy và chiều cao chính là hai giao điểm trục. Với một tứ giác (hoặc đa giác) bất kỳ, có hai cách tương đương: (1) **chia thành các tam giác** rồi cộng diện tích từng tam giác lại (dùng công thức diện tích tam giác theo tọa độ đỉnh), hoặc (2) dùng trực tiếp **công thức "dây giày" (shoelace)** cho cả đa giác cùng lúc – cả hai cách luôn cho cùng một kết quả, nên có thể dùng cách còn lại để kiểm tra chéo.

3.7.2 Where a line meets a curve

A straight line can also intersect a curve, such as the quadratic graphs studied in the previous unit. The method is the same as for two straight lines: set the two expressions for y equal to each other and solve.

Ví dụ mẫu · A line meeting a parabola (Extended)

Recall the parabola $y = x^2 - 2x - 3$ from the graphs unit, with roots at $x = -1, 3$ and vertex $(1, -4)$. Find the coordinates of the points where the line $y = x - 3$ meets this parabola.

Set the two expressions for y equal:

$$x - 3 = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow 0 = x^2 - 3x \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = 3.$$

At $x = 0$: $y = 0 - 3 = -3$. At $x = 3$: $y = 3 - 3 = 0$.

The line meets the parabola at $(0, -3)$ and $(3, 0)$. (Note that $(3, 0)$ is also one of the parabola's roots – a useful cross-check, since the line and the curve must agree there.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tìm giao điểm giữa một đường thẳng và một đường cong (ví dụ parabol) dùng **đúng nguyên tắc** như tìm giao điểm hai đường thẳng: cho hai biểu thức của y bằng nhau rồi giải phương

trình thu được – chỉ khác là phương trình lúc này thường là phương trình **bậc hai** (do đường cong là parabol), nên có thể cho ra 0, 1, hoặc 2 giao điểm tùy vào việc phương trình bậc hai đó có nghiệm hay không. Luôn thử lại tọa độ tìm được vào *cả hai* phương trình gốc (đường thẳng và đường cong) để chắc chắn không tính sai.

3.8 Problem bank

Bài tập luyện tập

Find the gradient of the line through (3, 2) and (9, 20).

- (A) 3 (C) -3
(B) $\frac{1}{3}$ (D) 6

Lời giải chi tiết

$$m = \frac{20 - 2}{9 - 3} = \frac{18}{6} = 3. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find the gradient of the line through (-4, 6) and (2, -3).

- (A) $-\frac{3}{2}$ (C) $-\frac{2}{3}$
(B) $\frac{3}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

Lời giải chi tiết

$$m = \frac{-3 - 6}{2 - (-4)} = \frac{-9}{6} = -\frac{3}{2}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

What is the gradient of the line through (5, 2) and (5, 9)?

- (A) 0 (C) 7
(B) undefined (D) $\frac{1}{7}$

Lời giải chi tiết

Both points share $x = 5$, so $\Delta x = 0$ and the gradient formula involves division by zero: the gradient is **undefined** (this is a vertical line). (B).

Bài tập luyện tập

For $A(2, -5)$ and $B(10, 11)$, find: (a) the gradient of AB ; (b) the midpoint of AB ; (c) the length of AB , giving your answer in surd form.

Lời giải chi tiết

$$(a) m = \frac{11 - (-5)}{10 - 2} = \frac{16}{8} = 2.$$

$$(b) \text{Midpoint} = \left(\frac{2 + 10}{2}, \frac{-5 + 11}{2} \right) = (6, 3).$$

$$(c) AB = \sqrt{(10 - 2)^2 + (11 - (-5))^2} = \sqrt{8^2 + 16^2} = \sqrt{64 + 256} = \sqrt{320} = 8\sqrt{5}.$$

Bài tập luyện tập

Find the midpoint of $(-6, -3)$ and $(2, 9)$.

(A) $(-2, 3)$

(C) $(-4, 6)$

(B) $(2, -3)$

(D) $(4, -6)$

Lời giải chi tiết

$$\text{Midpoint} = \left(\frac{-6 + 2}{2}, \frac{-3 + 9}{2} \right) = (-2, 3). \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Triangle ABC has vertices $A(2, 3)$, $B(6, 3)$, $C(6, 7)$. Show that ABC is right-angled, stating where the right angle lies, and find its area.

Lời giải chi tiết

AB is horizontal (both points have $y = 3$), with length $|6 - 2| = 4$. BC is vertical (both points have $x = 6$), with length $|7 - 3| = 4$. Since AB is horizontal and BC is vertical, they meet at a right angle at B . **Area** $= \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$ square units. (Check: $AC = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}$, and $AB^2 + BC^2 = 16 + 16 = 32 = (4\sqrt{2})^2$. $\checkmark$)

Bài tập luyện tập

State the equation, in the form $y = mx + c$, of the line with gradient -3 that crosses the y -axis at $(0, 4)$.

(A) $y = -3x + 4$

(C) $y = -3x - 4$

(B) $y = 4x - 3$

(D) $y = 3x + 4$

Lời giải chi tiết

Directly substituting $m = -3$, $c = 4$ into $y = mx + c$ gives $y = -3x + 4$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Find the equation of the line through $(1, 4)$ and $(5, -8)$, in the form $y = mx + c$.

Lời giải chi tiết

$m = \frac{-8-4}{5-1} = \frac{-12}{4} = -3$. Using $(1, 4)$: $y - 4 = -3(x - 1) \Rightarrow y = -3x + 3 + 4 = -3x + 7$.
Check at $(5, -8)$: $-15 + 7 = -8$. $\checkmark$

Bài tập luyện tập

Rearrange $5x + 2y = 20$ into gradient-intercept form.

(A) $y = -\frac{5}{2}x + 10$

(C) $y = -\frac{2}{5}x + 10$

(B) $y = \frac{5}{2}x + 10$

(D) $y = -\frac{5}{2}x - 10$

Lời giải chi tiết

$2y = -5x + 20 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 10$. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the equation of the line parallel to $4x - 2y = 10$ that passes through $(3, 5)$.

Lời giải chi tiết

Rearranging: $-2y = -4x + 10 \Rightarrow y = 2x - 5$, so the gradient is 2. A parallel line has the same gradient. Using $(3, 5)$: $y - 5 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 6 + 5 = 2x - 1$. Check: at $x = 3$, $2(3) - 1 = 5$. $\checkmark$

Bài tập luyện tập

(Extended) A line has gradient $-\frac{4}{7}$. What is the gradient of a line perpendicular to it?

(A) $\frac{7}{4}$

(C) $\frac{4}{7}$

(B) $-\frac{7}{4}$

(D) $-\frac{4}{7}$

Lời giải chi tiết

Flip the fraction and change the sign: $-\frac{4}{7} \rightarrow \frac{7}{4}$. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the equation of the line through $(-2, 5)$ perpendicular to $y = \frac{1}{3}x + 2$.

Lời giải chi tiết

The perpendicular gradient is -3 (flip $\frac{1}{3}$ to 3, then negate). Using $(-2, 5)$:

$$y - 5 = -3(x + 2) \Rightarrow y = -3x - 6 + 5 = -3x - 1.$$

Check: at $x = -2$, $-3(-2) - 1 = 6 - 1 = 5$. $\checkmark$

Bài tập luyện tập

Find the point of intersection of $y = 4x - 7$ and $y = -x + 8$.

(A) (3, 5)

(C) (-3, 5)

(B) (5, 3)

(D) (3, -5)

Lời giải chi tiết

$4x - 7 = -x + 8 \Rightarrow 5x = 15 \Rightarrow x = 3$, and $y = 4(3) - 7 = 5$. Intersection (3, 5). **(A)**.

Bài tập luyện tập

Solve simultaneously to find where the lines $3x + 2y = 16$ and $x - y = 2$ intersect.

Lời giải chi tiết

From the second equation, $y = x - 2$. Substitute: $3x + 2(x - 2) = 16 \Rightarrow 3x + 2x - 4 = 16 \Rightarrow 5x = 20 \Rightarrow x = 4$, so $y = 2$. Intersection: **(4, 2)**. Check: $3(4) + 2(2) = 12 + 4 = 16$. $\checkmark$

Bài tập luyện tập

(Extended) Line l_1 has equation $y = 2x - 3$. Line l_2 is perpendicular to l_1 and passes through (2, 11). Find the equation of l_2 , and the coordinates of the point where l_1 and l_2 intersect.

Lời giải chi tiết

Perpendicular gradient of l_2 : $-\frac{1}{2}$. Using (2, 11): $y - 11 = -\frac{1}{2}(x - 2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 1 + 11 = -\frac{1}{2}x + 12$.

Intersection with l_1 : $2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 12 \Rightarrow 2.5x = 15 \Rightarrow x = 6$, so $y = 2(6) - 3 = 9$. Intersection: **(6, 9)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the equation of the perpendicular bisector of $C(-3, 5)$ and $D(5, -1)$. Does the point (1, 5) lie on this perpendicular bisector?

Lời giải chi tiết

Midpoint = $\left(\frac{-3+5}{2}, \frac{5+(-1)}{2}\right) = (1, 2)$. Gradient of $CD = \frac{-1-5}{5-(-3)} = \frac{-6}{8} = -\frac{3}{4}$, so the perpendicular gradient is $\frac{4}{3}$.

$$y - 2 = \frac{4}{3}(x - 1) \Rightarrow 3y - 6 = 4x - 4 \Rightarrow 4x - 3y = -2.$$

Testing (1, 5): $4(1) - 3(5) = 4 - 15 = -11 \neq -2$, so (1, 5) does **not** lie on the perpendicular bisector (only the midpoint (1, 2) does: $4(1) - 3(2) = 4 - 6 = -2$. $\checkmark$).

Bài tập luyện tập

(Extended) Which of the following points is equidistant from $A(0, 0)$ and $B(6, 8)$?

(A) $(7, 1)$

(C) $(8, 6)$

(B) $(1, 7)$

(D) $(6, 1)$

Lời giải chi tiết

The perpendicular bisector of AB : midpoint $(3, 4)$, gradient of $AB = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$, so perpendicular gradient $= -\frac{3}{4}$.

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 3) \Rightarrow 4y - 16 = -3x + 9 \Rightarrow 3x + 4y = 25.$$

Testing $(7, 1)$: $3(7) + 4(1) = 21 + 4 = 25$. ✓ (The other three points do not satisfy $3x + 4y = 25$.)
(A).

Bài tập luyện tập

(Extended) Triangle ABC has a right angle at A , with $A(0, 0)$, $B(8, 0)$, $C(0, 6)$. Find the circumcentre using perpendicular bisectors, and confirm it equals the midpoint of the hypotenuse BC . State the circumradius.

Lời giải chi tiết

Perpendicular bisector of AB (horizontal, midpoint $(4, 0)$): the vertical line $x = 4$.

Perpendicular bisector of AC (vertical, midpoint $(0, 3)$): the horizontal line $y = 3$.

Intersection: $(4, 3)$.

Midpoint of BC : $\left(\frac{8+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (4, 3)$ – the same point, confirming the well-known circle theorem that the midpoint of the hypotenuse of a right-angled triangle is its circumcentre.

Circumradius $= \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$. (Check: $BC = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$, half of which is 5.) ✓

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the area enclosed by the line $2x + 5y = 20$ and the coordinate axes.

(A) 20

(C) 14

(B) 40

(D) 10

Lời giải chi tiết

x -intercept: $y = 0 \Rightarrow x = 10$. y -intercept: $x = 0 \Rightarrow y = 4$. Area $= \frac{1}{2} \times 10 \times 4 = 20$. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the area of the quadrilateral with vertices $(0, 0)$, $(5, 0)$, $(7, 4)$, $(2, 6)$, taken in order.

Lời giải chi tiết

Using the shoelace formula:

$$\text{Sum}_1 = (0)(0) + (5)(4) + (7)(6) + (2)(0) = 0 + 20 + 42 + 0 = 62,$$

$$\text{Sum}_2 = (0)(5) + (0)(7) + (4)(2) + (6)(0) = 0 + 0 + 8 + 0 = 8,$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}|62 - 8| = \frac{1}{2}(54) = \mathbf{27 \text{ square units.}}$$

(Check by splitting into triangles $(0,0)(5,0)(7,4)$, area 10, and $(0,0)(7,4)(2,6)$, area 17; total $10 + 17 = 27$. $\checkmark$)

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the coordinates of the points where the line $y = 2x - 6$ meets the curve $y = x^2 - 4x - 6$.

Lời giải chi tiết

$$2x - 6 = x^2 - 4x - 6 \Rightarrow 0 = x^2 - 6x \Rightarrow x(x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ or } x = 6.$$

At $x = 0$: $y = -6$. At $x = 6$: $y = 2(6) - 6 = 6$. Points of intersection: $(0, -6)$ and $(6, 6)$.
(Check on the curve at $x = 6$: $36 - 24 - 6 = 6$. $\checkmark$)

Bài tập luyện tập

Find the gradient of the line through $(2, 7)$ and $(2, -3)$, and describe the line.

- (A) undefined – vertical line (C) 5
(B) 0 – horizontal line (D) -5

Lời giải chi tiết

Both points share $x = 2$, so the gradient is undefined and the line is vertical (equation $x = 2$).
(A).

Bài tập luyện tập

Find the gradient of the line $6x - 3y = 9$.

- (A) 2 (C) $\frac{1}{2}$
(B) -2 (D) 3

Lời giải chi tiết

$$-3y = -6x + 9 \Rightarrow y = 2x - 3. \text{ Gradient} = 2. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Triangle ABC has vertices $A(1, 2)$, $B(9, 2)$, $C(9, 8)$. (a) Show ABC is right-angled. (b) Find the length of the hypotenuse AC . (c) Find the midpoint of AC , and the equation of the median

from B to this midpoint.

Lời giải chi tiết

(a) AB is horizontal, length $|9 - 1| = 8$; BC is vertical, length $|8 - 2| = 6$; they meet at a right angle at B .

(b) $AC = \sqrt{(9 - 1)^2 + (8 - 2)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{100} = 10$.

(c) Midpoint of $AC = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{2+8}{2}\right) = (5, 5)$. Gradient of the median $B(9, 2)$ to $(5, 5)$:
 $\frac{5 - 2}{5 - 9} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$.

$$y - 2 = -\frac{3}{4}(x - 9) \Rightarrow 4y - 8 = -3x + 27 \Rightarrow 3x + 4y = 35.$$

Check at $(5, 5)$: $15 + 20 = 35$. Check at $(9, 2)$: $27 + 8 = 35$. ✓

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the equation of the perpendicular bisector of the segment joining $(2, -1)$ and $(2, 7)$.

(A) $y = 3$

(C) $y = 2$

(B) $x = 3$

(D) $x = 2$

Lời giải chi tiết

The segment is vertical ($x = 2$ throughout), with midpoint $\left(2, \frac{-1+7}{2}\right) = (2, 3)$. A line perpendicular to a vertical segment is horizontal, so the perpendicular bisector is $y = 3$. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) Line L has equation $3x + 4y = 24$. (a) State the gradient of L and the coordinates of its two axis intercepts. (b) Find the equation of the line through the origin perpendicular to L . (c) Find the point where this perpendicular line meets L , and hence find the shortest (perpendicular) distance from the origin to L .

Lời giải chi tiết

(a) Rearranged: $y = -\frac{3}{4}x + 6$, so gradient $= -\frac{3}{4}$. x -intercept: $y = 0 \Rightarrow x = 8$, i.e. $(8, 0)$. y -intercept: $(0, 6)$.

(b) Perpendicular gradient $= \frac{4}{3}$. Through the origin: $y = \frac{4}{3}x$.

(c) Setting equal: $\frac{4}{3}x = -\frac{3}{4}x + 6$. Multiplying by 12: $16x = -9x + 72 \Rightarrow 25x = 72 \Rightarrow x = \frac{72}{25} = 2.88$, so $y = \frac{4}{3}(2.88) = 3.84$. Meeting point: $\left(\frac{72}{25}, \frac{96}{25}\right)$.

Distance from the origin to this point:

$$\sqrt{\left(\frac{72}{25}\right)^2 + \left(\frac{96}{25}\right)^2} = \frac{1}{25}\sqrt{72^2 + 96^2} = \frac{1}{25}\sqrt{5184 + 9216} = \frac{1}{25}\sqrt{14400} = \frac{120}{25} = 4.8.$$

This is the shortest distance from the origin to line L , since the perpendicular from the origin gives the minimum possible distance to any point on L .

Bài tập luyện tập

Find the gradient of the line through $(-3, 5)$ and $(1, -7)$.

(A) -3

(C) $-\frac{1}{3}$

(B) 3

(D) $\frac{1}{3}$

Lời giải chi tiết

$$m = \frac{-7 - 5}{1 - (-3)} = \frac{-12}{4} = -3. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Find the midpoint of $(-1, -2)$ and $(7, 4)$, and the distance between them.

(A) $(3, 1)$, distance = 10

(C) $(4, 3)$, distance = 10

(B) $(3, 1)$, distance = 8

(D) $(3, 1)$, distance = 6

Lời giải chi tiết

$$\text{Midpoint} = \left(\frac{-1 + 7}{2}, \frac{-2 + 4}{2} \right) = (3, 1). \quad \text{Distance} = \sqrt{(7 - (-1))^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

A line has gradient -2 and passes through $(0, 5)$. Find its x -intercept.

(A) 2.5

(C) 5

(B) -2.5

(D) 10

Lời giải chi tiết

Equation: $y = -2x + 5$. At the x -intercept, $y = 0$: $0 = -2x + 5 \Rightarrow x = 2.5$. (A).

Bài tập luyện tập

Determine whether the lines $y = 3x - 1$ and $6x - 2y = 8$ are parallel, perpendicular, or neither.

(A) Parallel (not identical)

(C) The same line

(B) Perpendicular

(D) Neither

Lời giải chi tiết

Rearrange the second line: $-2y = -6x + 8 \Rightarrow y = 3x - 4$. Both lines have gradient 3 but different y -intercepts $(-1$ and $-4)$, so they are **parallel** and distinct. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the equation of the line perpendicular to $y = \frac{2}{5}x - 3$, passing through $(4, -1)$.

(A) $y = -\frac{5}{2}x + 9$

(C) $y = -\frac{2}{5}x + \frac{3}{5}$

(B) $y = \frac{5}{2}x - 11$

(D) $y = -\frac{5}{2}x - 1$

Lời giải chi tiết

Perpendicular gradient $= -\frac{5}{2}$ (flip $\frac{2}{5}$ and change sign). Through $(4, -1)$:

$$y - (-1) = -\frac{5}{2}(x - 4) \Rightarrow y + 1 = -\frac{5}{2}x + 10 \Rightarrow y = -\frac{5}{2}x + 9.$$

Check at $(4, -1)$: $-\frac{5}{2}(4) + 9 = -10 + 9 = -1$. ✓ (A).

Bài tập luyện tập

Triangle OBC has $O(0, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 8)$. (a) Confirm the triangle is right-angled at O . (b) Find the length of the hypotenuse BC . (c) Find the midpoint M of BC and the distance OM . (d) State what theorem OM illustrates.

Lời giải chi tiết

(a) OB lies along the x -axis and OC lies along the y -axis, so they meet at 90° at O .

(b) $BC = \sqrt{(6-0)^2 + (0-8)^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

(c) $M = \left(\frac{6+0}{2}, \frac{0+8}{2}\right) = (3, 4)$. $OM = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

(d) Since $OM = 5 = \frac{1}{2}(10) = \frac{1}{2}BC$, the midpoint of the hypotenuse is equidistant from all three vertices – this is the coordinate-geometry version of the *angle in a semicircle* circle theorem: O, B, C all lie on a circle of radius 5 centred at M , with BC as diameter.

Bài tập luyện tập

(Extended) $A(1, 2)$ and $B(5, 10)$. Find the point P on segment AB such that $AP : PB = 1 : 3$.

(A) $(2, 4)$

(C) $(3, 6)$

(B) $(4, 8)$

(D) $(1.5, 3)$

Lời giải chi tiết

Since $AP : PB = 1 : 3$, point P is $\frac{1}{4}$ of the way from A to B : $P = A + \frac{1}{4}(B - A) = (1, 2) + \frac{1}{4}(4, 8) = (1, 2) + (1, 2) = (2, 4)$.

Check: $AP = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$; $PB = \sqrt{3^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, so $AP : PB = \sqrt{5} : 3\sqrt{5} = 1 : 3$. ✓ (A).

Bài tập luyện tập

Find the value of k such that the line through $(2, k)$ and $(5, 7)$ has gradient 2.

- (A) $k = 1$
(B) $k = 13$

- (C) $k = -1$
(D) $k = 3.5$

Lời giải chi tiết

$$\frac{7-k}{5-2} = 2 \Rightarrow 7-k = 6 \Rightarrow k = 1. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

(Extended) Show that the points $(1, 1)$, $(3, 5)$, and $(5, 9)$ are collinear.

Lời giải chi tiết

Gradient of the segment from $(1, 1)$ to $(3, 5)$: $m = \frac{5-1}{3-1} = \frac{4}{2} = 2$. Equation of this line: $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$.

Testing the third point $(5, 9)$: $2(5) - 1 = 10 - 1 = 9$, which matches its y -coordinate exactly. Since all three points satisfy the same linear equation $y = 2x - 1$, they are **collinear** (lie on a common straight line).

Bài tập luyện tập

(Extended) Find the equation of the line parallel to $5x + 2y = 10$ that passes through $(-2, 7)$.

- (A) $5x + 2y = 4$
(B) $5x + 2y = 24$

- (C) $2x + 5y = 31$
(D) $5x - 2y = -24$

Lời giải chi tiết

Rearranged, $5x + 2y = 10$ has gradient $-\frac{5}{2}$. A parallel line has the same left-hand side $5x + 2y$; substitute $(-2, 7)$ to find the new constant: $5(-2) + 2(7) = -10 + 14 = 4$. Equation: $5x + 2y = 4$. (A).

Geometry

Mục tiêu Unit: Tính chất góc (đường thẳng, đa giác, đường thẳng song song); tính chất tam giác và tứ giác cùng tính đối xứng (2D và khối 3D); bốn phép chứng minh bằng nhau SSS, SAS, ASA, RHS và tam giác đồng dạng cùng tỉ lệ diện tích/thể tích (Extended); toàn bộ định lý đường tròn – circle theorems (Extended); và các phép dựng hình cùng quỹ tích (constructions and loci).

4.1 Angle Facts and Parallel Lines

4.1.1 Angles on a line, at a point, and in a triangle

Three basic angle facts underlie almost every angle-chasing problem in this unit.

Angles on a straight line sum to 180° . **Angles at a point** (all the way around) sum to 360° .
Angles in a triangle sum to 180° .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ba sự thật cơ bản nhất của hình học phẳng: các góc nằm trên một **đường thẳng** cộng lại bằng 180° ; các góc quanh một **điểm** (quay đủ một vòng) cộng lại bằng 360° ; ba góc trong một **tam giác** cộng lại bằng 180° . Hầu như mọi bài toán "tìm góc x " đều bắt đầu từ một trong ba sự thật này.

4.1.2 The exterior angle of a triangle

Extend one side of a triangle beyond a vertex; the angle formed outside the triangle, between the extension and the adjacent side, is called an **exterior angle**.

Exterior angle theorem

The exterior angle of a triangle equals the sum of the two *interior opposite* angles (the two angles not adjacent to it).

Why: at the vertex where the exterior angle sits, the interior angle and the exterior angle lie on a straight line, so they sum to 180° . But the three interior angles of the triangle also sum to 180° . Subtracting the shared interior angle from both totals shows the exterior angle must equal the sum of the other two interior angles.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý góc ngoài của tam giác: góc ngoài tại một đỉnh bằng tổng hai góc trong không kề với nó. Lý do: góc ngoài và góc trong kề nó cộng lại 180° (góc trên đường thẳng); mà tổng ba góc trong tam giác cũng là 180° – trừ đi góc trong chung, phần còn lại của hai vế phải bằng nhau, suy ra góc ngoài = tổng hai góc trong còn lại. Đây là cách tính nhanh, không cần tìm góc trong tại đỉnh đó trước.

Ví dụ mẫu · Worked example

In triangle PQR , $\angle P = 48^\circ$ and $\angle Q = 81^\circ$. Find the exterior angle at R , and hence $\angle R$.

Exterior angle at $R = \angle P + \angle Q = 48^\circ + 81^\circ = 129^\circ$.

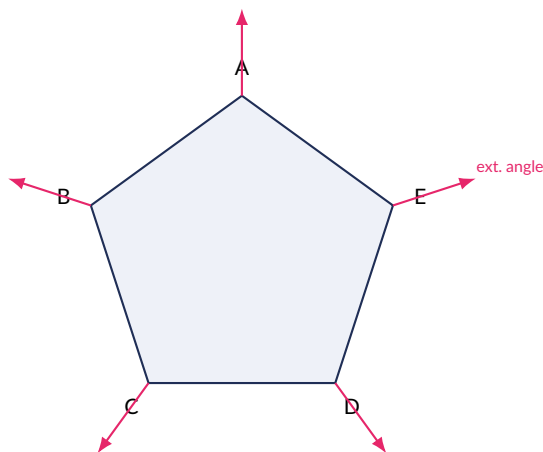
$\angle R = 180^\circ - 129^\circ = 51^\circ$ (angles on a line at R).

Check: $48^\circ + 81^\circ + 51^\circ = 180^\circ$. $\checkmark$

4.1.3 Angle sum of a polygon

Any n -sided polygon can be split into $(n - 2)$ triangles by drawing diagonals from one vertex, which gives the interior angle sum directly.

For an n -sided polygon: **sum of interior angles** $= (n - 2) \times 180^\circ$. **Sum of exterior angles** $= 360^\circ$ *always*, regardless of n (one full turn walked around the perimeter). For a *regular* n -gon, each interior angle $= \frac{(n - 2) \times 180^\circ}{n}$ and each exterior angle $= \frac{360^\circ}{n}$; the two are always supplementary.



Walking around any polygon, the five exterior angles (pink arrows, one turn at each vertex) always add up to one full turn, 360° – true for any convex polygon, regular or not.

Ví dụ mẫu · Worked example

An irregular pentagon $ABCDE$ has $\angle A = 100^\circ$, $\angle B = 110^\circ$, $\angle C = 95^\circ$, $\angle D = 130^\circ$. Find $\angle E$.

Interior angle sum of a pentagon ($n = 5$): $(5 - 2) \times 180^\circ = 540^\circ$.

$\angle E = 540^\circ - (100^\circ + 110^\circ + 95^\circ + 130^\circ) = 540^\circ - 435^\circ = 105^\circ$.

Ví dụ mẫu · Worked example

Find each interior and exterior angle of a regular 12-sided polygon (dodecagon).

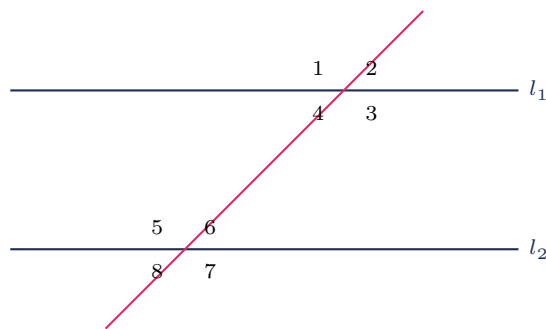
Interior angle sum: $(12 - 2) \times 180^\circ = 1800^\circ$. Each interior angle: $\frac{1800^\circ}{12} = 150^\circ$.

Each exterior angle: $\frac{360^\circ}{12} = 30^\circ$. Check: $150^\circ + 30^\circ = 180^\circ$. $\checkmark$

(!) **Lỗi thường gặp:** Nhiều bạn nghĩ rằng tổng các góc ngoài của đa giác cũng phụ thuộc vào số cạnh n giống công thức góc trong. **Sai:** tổng góc ngoài của *bất kỳ* đa giác lõm nào – dù có 3, 12 hay 100 cạnh – luôn luôn là 360° , vì đó chính là một vòng quay trọn vẹn khi ta đi hết chu vi đa giác. Chỉ có tổng góc **trong**, $(n - 2) \times 180^\circ$, mới thay đổi theo n .

4.1.4 Parallel lines cut by a transversal

When a transversal line crosses two parallel lines, it creates eight angles with three named relationships.



$l_1 \parallel l_2$, cut by a transversal. Corresponding: 1&5, 2&6, 3&7, 4&8 (equal). Alternate (interior): 3&5, 4&6 (equal). Co-interior/allied: 3&6, 4&5 (sum to 180°).

Angle relationships with parallel lines

- **Corresponding angles** ("F" shape) are **equal**.
- **Alternate angles** ("Z" shape), on opposite sides of the transversal between the two lines, are **equal**.
- **Co-interior / allied angles** ("C" shape), on the same side of the transversal between the two lines, **sum to 180°** .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ba loại góc với đường thẳng song song, nhớ theo hình chữ cái: **đồng vị (corresponding)** – hình chữ **F** – bằng nhau; **so le trong (alternate)** – hình chữ **Z** – bằng nhau; **trong cùng phía (co-interior/allied)** – hình chữ **C** – bù nhau (180°). Luôn vẽ nhanh hình chữ tương ứng lên góc đang xét để xác định đúng loại trước khi kết luận bằng nhau hay bù nhau.

(!) **Lỗi thường gặp:** Lỗi rất phổ biến: nhầm **so le trong (alternate, bằng nhau)** với **trong cùng phía (co-interior, bù nhau 180°)**. Cách phân biệt chắc chắn nhất: vẽ hình chữ **Z** (so le) hay hình chữ **C** (cùng phía) đi qua đúng hai góc đang xét – hai góc so le luôn nằm về **hai phía khác nhau** của đường cắt (transversal), còn hai góc cùng phía luôn nằm về **cùng một phía**. Đừng chỉ dựa vào việc "cả hai góc đều nằm giữa hai đường song song" để suy luận, vì cả so le lẫn cùng phía đều là góc trong (interior) – điểm khác biệt duy nhất là chúng có cùng phía của đường cắt hay không.

Ví dụ mẫu · Worked example

$XY \parallel ZW$. Point X' lies between the two parallel lines, with $X'Y$ meeting XY at Y and $X'Z$ meeting ZW at Z , so that the path $Y \rightarrow X' \rightarrow Z$ zig-zags between the lines. Given $\angle X'YQ = 140^\circ$ (angle between $X'Y$ and the parallel line at Y , measured on the side of Q) and

$\angle X'ZS = 155^\circ$ (angle between $X'Z$ and the parallel line at Z , measured on the side of S), find $\angle YX'Z$.

Construction: draw a line m through X' parallel to both given lines. This splits $\angle YX'Z$ into two parts, one on each side of m .

Since $m \parallel$ the line through Y , and $X'Y$ is a transversal, the co-interior angles on the Q -side sum to 180° : part 1 = $180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$.

Since $m \parallel$ the line through Z , and $X'Z$ is a transversal, the co-interior angles on the S -side sum to 180° : part 2 = $180^\circ - 155^\circ = 25^\circ$.

$\angle YX'Z = 40^\circ + 25^\circ = 65^\circ$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Kỹ thuật kinh điển cho bài toán "đường zig-zag giữa hai đường song song": **kẻ thêm một đường thẳng phụ** đi qua điểm gấp khúc, song song với cả hai đường đã cho. Đường phụ này chia góc cần tìm thành hai phần, mỗi phần tính được nhờ tính chất góc trong cùng phía (bù 180°) với từng góc đã cho. Đây là kỹ thuật dùng để chứng minh cả định lý "tổng ba góc trong tam giác = 180° ".

4.2 Triangles, Quadrilaterals, and Symmetry

4.2.1 Triangles: isosceles, equilateral, scalene

Triangle classification by sides

- **Scalene:** all three sides different lengths, all three angles different.
- **Isosceles:** exactly two sides equal; the two angles opposite those sides (the **base angles**) are equal.
- **Equilateral:** all three sides equal; all three angles equal 60° .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tam giác **cân (isosceles)** có hai cạnh bằng nhau, kéo theo hai góc đối diện hai cạnh đó (gọi là **góc đáy**) cũng bằng nhau. Tam giác **đều (equilateral)** là trường hợp đặc biệt: cả ba cạnh bằng nhau nên cả ba góc đều bằng 60° . Tam giác **thường (scalene)** không có cặp cạnh hay góc nào bằng nhau.

Ví dụ mẫu · Worked example

Triangle ABC has $AB = AC$ (isosceles) and $\angle B = 72^\circ$. Find $\angle A$.

Base angles are equal: $\angle C = \angle B = 72^\circ$.

$\angle A = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$.

4.2.2 Quadrilaterals: sides, angles, and diagonals

Quadrilateral	Sides / angles	Diagonals
Parallelogram	opposite sides parallel & equal; opposite angles equal; consecutive angles sum to 180°	bisect each other
Rectangle	parallelogram + all angles 90°	bisect each other, equal in length
Rhombus	parallelogram + all four sides equal	bisect each other at right angles ; bisect the vertex angles
Square	rectangle + rhombus (all sides equal, all angles 90°)	equal, bisect each other at right angles, bisect vertex angles
Trapezium	exactly one pair of parallel sides	no special general property
Kite	two pairs of adjacent equal sides	diagonals meet at right angles; the axis of symmetry bisects the other diagonal and bisects the two angles it passes through

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bảng tổng hợp tính chất tứ giác cần thuộc lòng để nhận diện đúng hình trong đề bài. Lưu ý phân biệt: **hình bình hành (parallelogram)** chỉ cần hai cặp cạnh đối song song; **hình chữ nhật (rectangle)** thêm điều kiện góc vuông; **hình thoi (rhombus)** thêm điều kiện bốn cạnh bằng nhau (nhưng góc không nhất thiết vuông); **hình vuông (square)** là giao của cả hai. **Hình thang (trapezium)** chỉ cần đúng một cặp cạnh song song. **Hình diều (kite)** có hai cặp cạnh *kề nhau* bằng nhau (khác với hình bình hành là cạnh *đối*).

Ví dụ mẫu · Worked example

Kite $PQRS$ has $PQ = PS$ and $RQ = RS$, with $\angle QPS = 64^\circ$ and $\angle QRS = 40^\circ$. Since the kite is symmetric about diagonal PR , $\angle PQR = \angle PSR$. Find $\angle PQR$.

Angle sum of quadrilateral $PQRS$: $64^\circ + 40^\circ + \angle PQR + \angle PSR = 360^\circ$.

Since $\angle PQR = \angle PSR$: $104^\circ + 2\angle PQR = 360^\circ \Rightarrow 2\angle PQR = 256^\circ \Rightarrow \angle PQR = 128^\circ$.

Check: $64^\circ + 40^\circ + 128^\circ + 128^\circ = 360^\circ$. ✓

(!) Lỗi thường gặp: Đừng mặc định rằng hình thoi (rhombus) luôn có góc vuông, hay hình chữ nhật luôn có bốn cạnh bằng nhau – đó là nhầm lẫn giữa **hình thoi** và **hình vuông**, hoặc giữa **hình chữ nhật** và **hình vuông**. Chỉ có hình vuông mới đồng thời thoả cả hai điều kiện (bốn cạnh bằng nhau và bốn góc vuông). Khi đọc đề, luôn kiểm tra chính xác quadrilateral được cho là loại nào trước khi áp dụng tính chất đường chéo.

4.2.3 Symmetry: 2D shapes and 3D solids

Line symmetry and rotational symmetry

A shape has **line symmetry** if a mirror line divides it into two mirror-image halves. A shape has **rotational symmetry of order k** if rotating it by $\frac{360^\circ}{k}$ about its centre maps it exactly onto itself,

for the largest such $k \geq 1$ (every shape trivially has order 1). For 3D solids, the equivalent of a mirror line is a **plane of symmetry**: a flat plane that divides the solid into two mirror-image halves.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đối xứng trục (line symmetry): có một đường thẳng chia hình thành hai nửa đối xứng gương.

Đối xứng quay bậc k (rotational symmetry of order k): quay hình quanh tâm một góc $\frac{360^\circ}{k}$ thì hình trùng khít lên chính nó – k càng lớn thì hình càng "đối xứng nhiều". Với khối 3 chiều, khái niệm tương ứng với đường đối xứng là **mặt phẳng đối xứng (plane of symmetry)**.

Ví dụ mẫu · Worked example

State the number of lines of symmetry and the order of rotational symmetry of: (a) a regular hexagon; (b) a (non-square) rectangle; (c) a general parallelogram (no right angles, unequal sides). Also state the number of planes of symmetry of (d) a cuboid with three different edge lengths, and (e) a cube.

- (a) Regular hexagon: 6 lines of symmetry, rotational order 6.
- (b) Rectangle: 2 lines of symmetry (through the midpoints of opposite sides), rotational order 2 (180° only – a 90° turn does not map a non-square rectangle onto itself).
- (c) General parallelogram: 0 lines of symmetry, but rotational order 2 (a 180° rotation about the centre always maps a parallelogram onto itself).
- (d) Cuboid (all edges different): 3 planes of symmetry (each parallel to one pair of opposite faces, through the centre).
- (e) Cube: 9 planes of symmetry (3 face-parallel + 6 through pairs of opposite edges).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

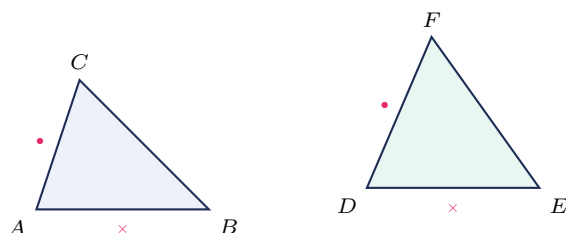
Lưu ý phần (c): hình bình hành *thường* (không phải hình chữ nhật hay hình thoi) **không** có đường đối xứng trục nào, nhưng vẫn có đối xứng quay bậc 2 – đây là ví dụ kinh điển cho thấy hai loại đối xứng (trục và quay) độc lập với nhau, một hình có thể có loại này mà không có loại kia. Với khối 3 chiều, hình hộp chữ nhật (ba cạnh khác nhau) có đúng 3 mặt phẳng đối xứng, còn khối lập phương có tới 9 mặt phẳng đối xứng do tính đối xứng cao hơn hẳn.

4.3 Congruence and Similarity

4.3.1 Congruence tests

Two triangles are **congruent** if they are exactly the same size and shape (one can be moved, rotated, or reflected onto the other). Four minimal conditions guarantee congruence:

SSS (side, side, side): three pairs of sides equal. **SAS** (side, angle, side): two pairs of sides equal, and the *included* angle between them equal. **ASA** (angle, side, angle): two pairs of angles equal, and the *included* side between them equal (also valid as AAS, where the equal side is not between the two angles). **RHS** (right angle, hypotenuse, side): both triangles right-angled, with equal hypotenuses and one further pair of equal sides.



Matching marks ($\times$, $\bullet$) show equal corresponding sides. With the included angle at A and D also equal, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ by SAS.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bốn phép chứng minh bằng nhau (congruence tests) của tam giác: **SSS** (ba cạnh tương ứng bằng nhau), **SAS** (hai cạnh và góc *xen giữa* hai cạnh đó bằng nhau), **ASA** (hai góc và cạnh *xen giữa* hai góc đó bằng nhau – hoặc **AAS** nếu cạnh bằng nhau không nằm giữa hai góc), và **RHS** (chỉ áp dụng cho tam giác vuông: cạnh huyền và một cạnh góc vuông tương ứng bằng nhau). Chỉ cần đúng một trong bốn điều kiện này là đủ để kết luận hai tam giác bằng nhau hoàn toàn – không cần kiểm tra tất cả sáu yếu tố (ba cạnh, ba góc).

Ví dụ mẫu · Worked example

D is the midpoint of BC in triangle ABC , with $AB = AC$ (isosceles). Prove that $AD \perp BC$.

Given: $AB = AC$ (isosceles); $BD = DC$ (D is the midpoint of BC); $AD = AD$ (common side).
By **SSS**, $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

Since the triangles are congruent, corresponding angles are equal: $\angle ADB = \angle ADC$.

But $\angle ADB + \angle ADC = 180^\circ$ (angles on the straight line BC).

So $2\angle ADB = 180^\circ \Rightarrow \angle ADB = 90^\circ$. Hence $AD \perp BC$.

(This proves the median to the base of an isosceles triangle is also its altitude and its angle bisector from the apex.)

4.3.2 Similarity

Two shapes are **similar** if their corresponding angles are equal and their corresponding sides are all in the same ratio (the **scale factor** k). Congruent shapes are a special case of similar shapes with $k = 1$.

(!) Lỗi thường gặp: Đừng nhầm **đồng dạng** (similar) với **bằng nhau** (congruent). Hai tam giác **bằng nhau** có cả góc và cạnh tương ứng bằng nhau hết nhau (cùng kích thước). Hai tam giác **đồng dạng** chỉ cần góc tương ứng bằng nhau và cạnh tương ứng **tỉ lệ** (cùng hình dạng nhưng có thể khác kích thước, hệ số tỉ lệ $k \neq 1$). Nói cách khác: *mọi hình bằng nhau đều đồng dạng* (với $k = 1$), nhưng *không phải mọi hình đồng dạng đều bằng nhau*.

Ví dụ mẫu · Worked example

In triangle PQR , points S and T lie on PQ and PR respectively, with $ST \parallel QR$. Given $PS = 4$, $SQ = 6$, $PT = x$, $TR = 9$, find x .

Since $ST \parallel QR$, $\triangle PST \sim \triangle PQR$, and corresponding sides are proportional: $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR}$ (basic proportionality).

$$\frac{4}{6} = \frac{x}{9} \Rightarrow x = \frac{4 \times 9}{6} = 6.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

Triangle $ABC \sim$ triangle ADE , with D on AB and E on AC (so $DE \parallel BC$). Given $AD = 6$, $AB = 10$, $AC = 15$, $BC = 20$, find AE and DE .

$$\text{Scale factor } k = \frac{AD}{AB} = \frac{6}{10} = 0.6.$$

$$AE = k \times AC = 0.6 \times 15 = 9. \quad DE = k \times BC = 0.6 \times 20 = 12.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tam giác đồng dạng: khi biết một cặp cạnh tương ứng (và tỉ lệ k của chúng), mọi cặp cạnh tương ứng khác đều nhân với cùng hệ số k đó. Dấu hiệu thường gặp nhất để nhận ra hai tam giác đồng dạng là có một đường thẳng **song song** với một cạnh của tam giác lớn, cắt hai cạnh còn lại – khi đó tam giác nhỏ và tam giác lớn luôn đồng dạng (góc tương ứng bằng nhau do đồng vị/so le với đường song song).

4.3.3 Extended: area and volume scale factors

For similar shapes/solids with linear scale factor k : **area scale factor** = k^2 ; **volume scale factor** = k^3 (solids only). These follow because area involves a product of two lengths, and volume a product of three.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

(Extended) Khi hệ số tỉ lệ độ dài giữa hai hình đồng dạng là k , thì tỉ lệ **diện tích** là k^2 (vì diện tích là tích của hai độ dài) và tỉ lệ **thể tích** là k^3 (vì thể tích là tích của ba độ dài). Đây là lỗi tính điểm rất phổ biến nếu học sinh dùng nhầm k thay vì k^2 hoặc k^3 khi tính diện tích/thể tích.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Two similar triangles have corresponding sides in ratio 4 : 7. The smaller triangle has area 32 cm^2 . Find the area of the larger triangle.

$$\text{Area scale factor} = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}.$$

$$\text{Larger area} = 32 \times \frac{49}{16} = 98 \text{ cm}^2.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Two similar solids have volumes 27 cm^3 and 125 cm^3 . The smaller solid has surface area 54 cm^2 . Find the surface area of the larger solid.

Volume ratio $27 : 125 = 3^3 : 5^3$, so the length ratio is 3 : 5, i.e. $k = \frac{5}{3}$ (larger:smaller).

$$\text{Area scale factor} = k^2 = \frac{25}{9}.$$

$$\text{Larger surface area} = 54 \times \frac{25}{9} = 150 \text{ cm}^2.$$

(!) **Lỗi thường gặp:** Khi đề bài cho tỉ lệ **thể tích**, đừng vội lấy căn bậc hai – phải lấy **căn bậc ba** trước để ra tỉ lệ độ dài k , rồi mới **bình phương** k nếu cần tỉ lệ diện tích. Thứ tự đúng luôn là: tỉ lệ thể tích → khai căn bậc ba → tỉ lệ độ dài k → bình phương (diện tích) hoặc lập phương (thể tích).

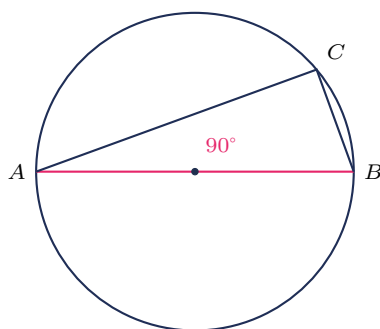
tích) tùy yêu cầu.

4.4 Circle Theorems (Extended)

All circle theorems in this section refer to points lying on the circumference of a circle, and are Extended-syllabus content.

4.4.1 Angle in a semicircle

If AB is a diameter of a circle and C is any other point on the circumference, then $\angle ACB = 90^\circ$ (the angle in a semicircle is always a right angle).



AB is a diameter; $\angle ACB = 90^\circ$ for any point C on the circle.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nếu một cạnh của góc nội tiếp là **đường kính**, góc đó luôn là góc vuông (90°) – bất kể điểm C nằm ở đâu trên đường tròn. Đây thực chất là trường hợp đặc biệt của định lý "góc ở tâm gấp đôi góc ở đường tròn": góc ở tâm chắn cung AB (khi AB là đường kính) chính là góc bẹt 180° , nên góc ở đường tròn bằng $\frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ$.

Ví dụ mẫu · Worked example

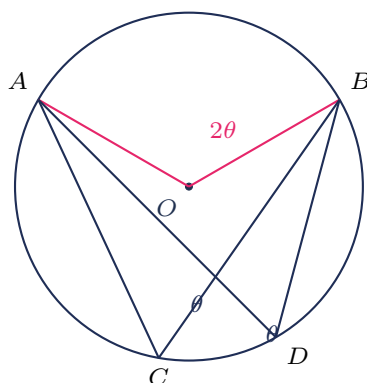
(Extended) AB is a diameter of a circle, and C is a point on the circumference with $\angle BAC = 27^\circ$. Find $\angle ACB$ and $\angle ABC$.

$\angle ACB = 90^\circ$ (angle in a semicircle).

$\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$.

4.4.2 Angle at the centre; angles in the same segment

Angle at the centre = $2 \times$ **angle at the circumference**, standing on the same arc. **Angles in the same segment** (subtending the same arc from the same side) are **equal**.



Angle at the centre $\angle AOB = 2\theta$; angles at the circumference $\angle ACB = \angle ADB = \theta$, both standing on the same arc AB and both on the major arc.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai định lý quan trọng nhất của đường tròn: **góc ở tâm gấp đôi góc ở đường tròn** (khi cùng chắn một cung), và **các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau**. Luôn xác định trước: góc đang xét nằm ở tâm O hay nằm trên đường tròn, và hai (hay nhiều) góc có thực sự cùng nhìn về một cung/dây hay không.

(!) Lỗi thường gặp: Đừng nhầm hai định lý trên với nhau. "**Góc ở tâm** = $2 \times$ **góc ở đường tròn**" so sánh một góc ở **tâm** O với một góc trên **đường tròn** – hệ số nhân là 2. "**Các góc cùng chắn một cung thì bằng nhau**" so sánh hai góc **đều nằm trên đường tròn** (không có góc nào ở tâm) – hai góc này **bằng nhau**, không nhân đôi. Trước khi làm bài, hãy tự hỏi: "có đỉnh O (tâm) xuất hiện trong góc tôi đang so sánh không?" để chọn đúng định lý.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) A, B are points on a circle centre O , with $\angle AOB = 100^\circ$. Points C, D lie on the major arc AB . Find $\angle ACB$, $\angle ADB$, and the base angles of triangle OAB .

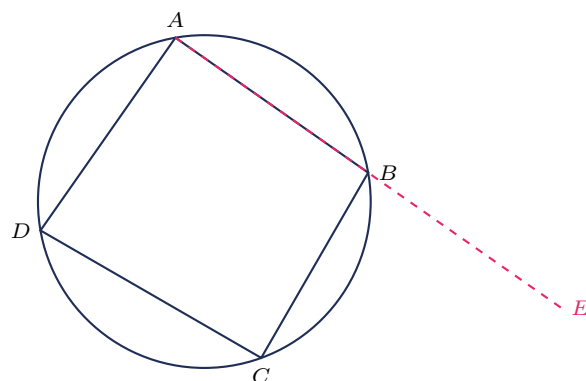
$\angle ACB = \angle ADB = \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$ (angle at circumference = half angle at centre; same segment $\Rightarrow$ equal).

Triangle OAB is isosceles ($OA = OB$, both radii): base angles $\angle OAB = \angle OBA = \frac{180^\circ - 100^\circ}{2} = 40^\circ$.

4.4.3 Cyclic quadrilaterals

A **cyclic quadrilateral** has all four vertices on a circle.

Opposite angles of a cyclic quadrilateral sum to 180° . Consequently, if one side is extended, the **exterior angle** formed equals the **interior opposite angle** of the quadrilateral.



Cyclic quadrilateral $ABCD$: $\angle A + \angle C = 180^\circ$, $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$. Extending side AB to E : exterior angle $\angle CBE = \angle ADC$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong **tứ giác nội tiếp (cyclic quadrilateral)** – tứ giác có cả bốn đỉnh nằm trên một đường tròn – hai góc **đối nhau** luôn bù nhau (180°). Hệ quả trực tiếp: nếu kéo dài một cạnh ra ngoài, **góc ngoài** tạo thành luôn bằng **góc trong đối diện** với cạnh đó – vì góc ngoài và góc trong kề nó cũng bù nhau (180°), nên cả hai đều "bù" với cùng một góc, suy ra chúng bằng nhau.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) $ABCD$ is a cyclic quadrilateral with $\angle BAD = 95^\circ$ and $\angle ADC = 100^\circ$. Side AB is extended beyond B to a point E . Find $\angle BCD$, $\angle ABC$, and the exterior angle $\angle CBE$.

$\angle BCD = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 95^\circ = 85^\circ$ (opposite angles).

$\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$ (opposite angles).

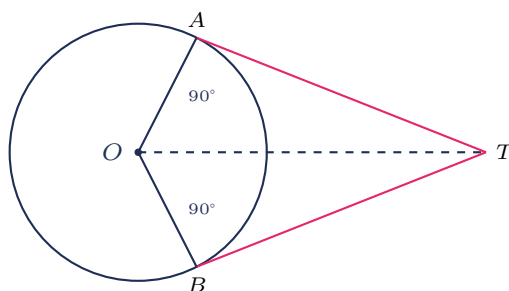
$\angle CBE = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$ (angles on a line at B) $= \angle ADC$, confirming the exterior-angle rule.

Check: $95^\circ + 80^\circ + 85^\circ + 100^\circ = 360^\circ$. $\checkmark$

4.4.4 Tangents to a circle

A **tangent** touches a circle at exactly one point (the point of contact).

A tangent is **perpendicular to the radius** at the point of contact. **Two tangents drawn from the same external point to a circle are equal in length**, and the line joining the external point to the centre bisects the angle between the two tangents.



TA and TB are tangents from external point T : $TA = TB$, $\angle OAT = \angle OBT = 90^\circ$, and OT bisects $\angle ATB$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai tính chất tiếp tuyến quan trọng: (1) **tiếp tuyến vuông góc với bán kính tại tiếp điểm**; (2) **hai tiếp tuyến kẻ từ cùng một điểm ngoài đường tròn thì bằng nhau về độ dài, và đường nối điểm đó với tâm O chia đôi góc giữa hai tiếp tuyến (đồng thời là trục đối xứng của cả hình).** Hai tính chất này thường được dùng cùng nhau để tạo ra một tứ giác có hai góc vuông (như tứ giác $OATB$), giúp tính góc còn lại bằng tổng góc tứ giác 360° .

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) TA and TB are tangents from external point T to a circle centre O , touching at A and B . Given $OT = 13$ cm and $OA = 5$ cm (radius), find the length of tangent TA .

$\angle OAT = 90^\circ$ (tangent $\perp$ radius), so triangle OAT is right-angled at A .

By Pythagoras: $TA = \sqrt{OT^2 - OA^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) Using the same configuration, if $\angle ATB = 64^\circ$, find $\angle AOB$ and the base angles of triangle ATB .

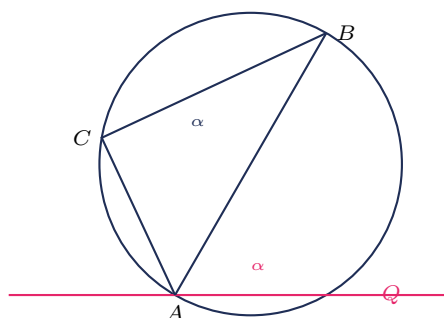
In quadrilateral $OATB$: $\angle OAT = \angle OBT = 90^\circ$ (tangent $\perp$ radius). Angle sum of quadrilateral = 360° :

$$\angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 64^\circ = 116^\circ.$$

Since $TA = TB$ (tangents from the same point), triangle ATB is isosceles: $\angle TAB = \angle TBA = \frac{180^\circ - 64^\circ}{2} = 58^\circ$.

4.4.5 Alternate segment theorem

Alternate segment theorem: the angle between a tangent and a chord drawn from the point of contact equals the angle in the **alternate segment** (the angle subtended by that chord in the other segment of the circle).



Tangent line touches the circle at A . $\angle BAQ = \alpha$ (tangent-chord angle) = $\angle ACB = \alpha$ (angle in the alternate segment).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung (alternate segment theorem): góc giữa tiếp tuyến và một dây cung kẻ từ tiếp điểm bằng góc nội tiếp chắn dây đó ở **phía đối diện** (miền/segment còn lại của đường tròn). Từ khoá "alternate" (phía đối diện) nhắc ta rằng góc so sánh phải nằm ở phần cung **bên kia** của dây, không phải bên cùng phía với góc tiếp tuyến.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended) A tangent touches a circle at A . Chord AB is drawn, and C is a point on the major arc (alternate segment). Given the tangent-chord angle $\angle QAB = 71^\circ$ (where Q is on the tangent), find $\angle ACB$.

By the alternate segment theorem, $\angle ACB = \angle QAB = 71^\circ$.

Ví dụ mẫu · Worked example

(Extended, combining three theorems) A tangent touches a circle at A , centre O . Chord AB is drawn with $\angle QAB = 50^\circ$ (tangent-chord angle, Q on the tangent). Point C lies on the major arc. Find (a) $\angle ACB$ using the alternate segment theorem; (b) $\angle OAB$; (c) $\angle AOB$; (d) verify (a) using the centre/circumference theorem instead.

(a) By the alternate segment theorem: $\angle ACB = \angle QAB = 50^\circ$.

(b) Tangent $\perp$ radius: $\angle OAQ = 90^\circ$. Since $\angle OAB = \angle OAQ - \angle QAB$: $\angle OAB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

(c) Triangle OAB is isosceles ($OA = OB$): $\angle OBA = \angle OAB = 40^\circ$, so $\angle AOB = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.

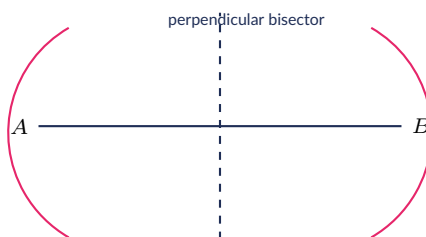
(d) Angle at circumference $= \frac{1}{2} \times$ angle at centre $= \frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$ – matching part (a) exactly, confirming both theorems are consistent.

4.5 Constructions and Loci

4.5.1 Standard ruler-and-compass constructions

Four core constructions

- **Perpendicular bisector of a segment AB :** with the compass set to more than half AB , draw arcs centred at A and at B (same radius) so they intersect above and below the line; join the two intersection points.
- **Angle bisector of $\angle ABC$:** draw an arc centred at B crossing both arms; from each crossing point draw equal-radius arcs that intersect inside the angle; join B to that intersection point.
- **Perpendicular from a point P to a line l (not on l):** draw an arc centred at P crossing l at two points; from those two points draw equal-radius arcs intersecting on the far side of l ; join P to that intersection.
- **Perpendicular at a point P on a line l :** draw an arc centred at P crossing l on both sides of P ; from those two crossing points draw equal, larger-radius arcs intersecting above l ; join P to that intersection.



Constructing the perpendicular bisector of AB : two equal-radius arcs from A and B cross above and below the line; the line through the crossings is the perpendicular bisector.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

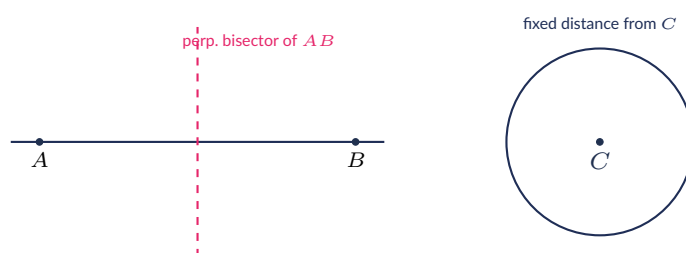
Bốn phép dựng hình cơ bản bằng compa và thước kẻ (không dùng thước đo góc): **trung trực của một đoạn thẳng**, **phân giác của một góc**, **đường vuông góc từ một điểm ngoài đến một đường thẳng**, và **đường vuông góc tại một điểm nằm trên đường thẳng**. Nguyên tắc chung của cả bốn phép dựng: dùng các cung tròn **bán kính bằng nhau** để tạo ra hai điểm cách đều, sau đó nối các điểm cách đều đó lại để có đường thẳng cần dựng.

4.5.2 Loci

A **locus** (plural **loci**) is the set of all points satisfying a given condition.

Four standard loci:

- Points a **fixed distance r from a point A** : a **circle**, centre A , radius r .
- Points **equidistant from two fixed points A and B** : the **perpendicular bisector** of AB .
- Points **equidistant from two lines** (that meet): the **angle bisector** of the angle between them.
- Points a **fixed distance from a straight line**: **two lines parallel** to it, one on each side, at that distance (a “racetrack” shape of parallel lines joined by semicircular arcs, if the boundary is a line segment rather than an infinite line).



Left: locus of points equidistant from A and B is the perpendicular bisector of AB . Right: locus of points a fixed distance from point C is a circle centred at C .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bốn quỹ tích (loci) chuẩn cần thuộc lòng: (1) cách đều một **điểm** → **đường tròn**; (2) cách đều **hai điểm** → **trung trực** của đoạn nối hai điểm; (3) cách đều **hai đường thẳng** cắt nhau → **phân giác** của góc giữa chúng; (4) cách một **đường thẳng** một khoảng cố định → **hai đường thẳng song song**, mỗi bên một đường, cách đường đã cho đúng khoảng đó (nếu đường ban đầu chỉ là một đoạn thẳng thì hai đầu phải nối bằng cung tròn, tạo hình giống đường đua/racetrack).

Ví dụ mẫu · Worked example

A goat is tied by a rope inside a square field $ABCD$ of side 80 m. The rope allows it to graze only in the region that is (i) within 50 m of corner A , and (ii) nearer to side AB than to side CD . Describe the shaded grazing region.

Condition (i): points within 50 m of A lie inside a circle, centre A , radius 50 m (only the part of this circle that lies inside the square is relevant).

Condition (ii): the locus of points equidistant from lines AB and DC is the line through the midpoints of AD and BC – the midline of the square, parallel to AB and DC , at 40 m from each. “Nearer to AB ” means the region on the AB -side of this midline.

Combined region: the shaded grazing region is the part of the quarter-circle (centre A , radius

50 m, inside the square) that also lies on the AB -side of the midline – i.e., the intersection of the two loci, bounded by an arc of the circle and by the midline segment where the arc crosses it (since the radius 50 m exceeds the 40 m half-width, part of the quarter-circle nearest D is cut off by the midline).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán "vùng tô đậm thoả hai điều kiện quỹ tích", luôn xử lý **từng điều kiện một**: vẽ quỹ tích thứ nhất (thường là cung tròn hoặc đường thẳng), sau đó vẽ quỹ tích thứ hai (trung trực hoặc phân giác), rồi xác định **phần giao nhau** của hai miền (không phải hợp của hai miền) chính là vùng cần tô. Luôn đọc kỹ đề để biết là tô miền "gần hơn/xạ hơn" bên nào của mỗi đường quỹ tích.

4.6 Problem Bank

Bài tập luyện tập

On a straight line, two adjacent angles are $(3x + 30)^\circ$ and $(2x + 60)^\circ$. Find x .

(A) 18

(C) 24

(B) 20

(D) 15

Lời giải chi tiết

Angles on a line sum to 180° : $3x + 30 + 2x + 60 = 180 \Rightarrow 5x + 90 = 180 \Rightarrow 5x = 90 \Rightarrow x = 18$.
Check: $3(18) + 30 = 84$, $2(18) + 60 = 96$, sum = 180. ✓ (A).

Bài tập luyện tập

Three angles around a point are 130° , 95° , and y° . Find y .

(A) 125° (C) 145° (B) 135° (D) 115°

Lời giải chi tiết

Angles at a point sum to 360° : $y = 360 - 130 - 95 = 135$. (B).

Bài tập luyện tập

In a triangle, one interior angle is 63° . The exterior angle at a second vertex is 115° . Find the third interior angle.

Lời giải chi tiết

The exterior angle at a vertex equals the sum of the two interior opposite angles: $115^\circ = 63^\circ + y \Rightarrow y = 52^\circ$. Check via angle sum: the interior angle at the exterior-angle vertex is $180 - 115 = 65^\circ$, and $63^\circ + 52^\circ + 65^\circ = 180^\circ$. ✓ **Third angle** = 52° .

Bài tập luyện tập

Find the sum of the interior angles of a regular 15-sided polygon.

(A) 2340°

(C) 2160°

(B) 2400°

(D) 2520°

Lời giải chi tiết

$$(n - 2) \times 180^\circ = (15 - 2) \times 180^\circ = 13 \times 180^\circ = 2340^\circ. \text{ (A)}$$

Bài tập luyện tập

Each exterior angle of a regular polygon is 24° . Find the number of sides n , each interior angle, and the sum of the interior angles.

Lời giải chi tiết

$$n = \frac{360^\circ}{24^\circ} = 15. \text{ Each interior angle} = 180^\circ - 24^\circ = 156^\circ. \text{ Sum of interior angles} = (15 - 2) \times 180^\circ = 2340^\circ. \text{ Check: } 156^\circ \times 15 = 2340^\circ. \checkmark$$

Bài tập luyện tập

$PQ \parallel RS$. Two alternate angles are $(2x + 15)^\circ$ and $(3x - 25)^\circ$. Find x and the size of each angle.

(A) $x = 40$, angle $= 95^\circ$

(C) $x = 45$, angle $= 105^\circ$

(B) $x = 35$, angle $= 85^\circ$

(D) $x = 30$, angle $= 75^\circ$

Lời giải chi tiết

$$\text{Alternate angles are equal: } 2x + 15 = 3x - 25 \Rightarrow x = 40. \text{ Angle} = 2(40) + 15 = 95^\circ \text{ (check: } 3(40) - 25 = 95^\circ). \checkmark \text{ (A)}$$

Bài tập luyện tập

Two co-interior (allied) angles between a pair of parallel lines are $(4x + 5)^\circ$ and $(2x + 55)^\circ$. Find x and the two angles.

Lời giải chi tiết

$$\text{Co-interior angles sum to } 180^\circ: 4x + 5 + 2x + 55 = 180 \Rightarrow 6x + 60 = 180 \Rightarrow 6x = 120 \Rightarrow x = 20. \text{ Angles: } 4(20) + 5 = 85^\circ \text{ and } 2(20) + 55 = 95^\circ. \text{ Check: } 85^\circ + 95^\circ = 180^\circ. \checkmark$$

Bài tập luyện tập

Triangle ABC is isosceles with $AB = AC$. Given $\angle B = 72^\circ$, find $\angle A$.

- (A) 36° (C) 54°
(B) 72° (D) 48°

Lời giải chi tiết

Base angles equal: $\angle C = \angle B = 72^\circ$. $\angle A = 180^\circ - 72^\circ - 72^\circ = 36^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

Kite $PQRS$ has $PQ = PS$, $RQ = RS$, $\angle QPS = 64^\circ$, $\angle QRS = 40^\circ$. Find $\angle PQR$ (equal to $\angle PSR$ by the kite's symmetry).

Lời giải chi tiết

Quadrilateral angle sum: $64^\circ + 40^\circ + 2\angle PQR = 360^\circ \Rightarrow 2\angle PQR = 256^\circ \Rightarrow \angle PQR = 128^\circ$.
Check: $64 + 40 + 128 + 128 = 360$. $\checkmark \angle PQR = 128^\circ$.

Bài tập luyện tập

Parallelogram $ABCD$ has consecutive angles $\angle A = (3x + 20)^\circ$ and $\angle B = (2x + 40)^\circ$. Find x and each angle.

- (A) $x = 24$; $92^\circ, 88^\circ$ (C) $x = 28$; $104^\circ, 76^\circ$
(B) $x = 20$; $80^\circ, 80^\circ$ (D) $x = 22$; $86^\circ, 84^\circ$

Lời giải chi tiết

Consecutive angles of a parallelogram are supplementary: $3x + 20 + 2x + 40 = 180 \Rightarrow 5x + 60 = 180 \Rightarrow x = 24$. $\angle A = 3(24) + 20 = 92^\circ$, $\angle B = 2(24) + 40 = 88^\circ$. Check: $92 + 88 = 180$. $\checkmark$ (A).

Bài tập luyện tập

Trapezium $ABCD$ has $AB \parallel DC$ and $\angle A = 110^\circ$. Find $\angle D$ (on the same leg AD).

- (A) 70° (C) 90°
(B) 110° (D) 80°

Lời giải chi tiết

AD is a transversal of the parallel sides AB and DC , so $\angle A$ and $\angle D$ are co-interior: $\angle D = 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

In rhombus $ABCD$, diagonal AC makes an angle of 35° with side AB . Find the full vertex angle $\angle DAB$, and the angle between the two diagonals.

Lời giải chi tiết

In a rhombus, each diagonal bisects the vertex angles it passes through, so $\angle DAB = 2 \times 35^\circ = 70^\circ$. The diagonals of a rhombus always cross **at right angles**, so the angle between them is 90° .

Bài tập luyện tập

Triangles ABC and DEF have $AB = DE$, $BC = EF$, and $\angle B = \angle E$. Which congruence test proves $\triangle ABC \cong \triangle DEF$?

- (A) SSS (C) ASA
(B) SAS (D) RHS

Lời giải chi tiết

Two pairs of sides equal, with the included angle (angle B/E , between those two sides) also equal $\Rightarrow$ **SAS. (B)**.

Bài tập luyện tập

$ABCD$ is a parallelogram with diagonals AC and BD meeting at X . Prove that X is the midpoint of both diagonals.

Lời giải chi tiết

Since $AB \parallel DC$: $\angle BAX = \angle DCX$ (alternate angles) and $\angle ABX = \angle CDX$ (alternate angles). Also $AB = CD$ (opposite sides of a parallelogram). By **ASA**, $\triangle ABX \cong \triangle CDX$. Corresponding sides of congruent triangles are equal: $AX = CX$ and $BX = DX$. Hence X is the midpoint of both AC and BD .

Bài tập luyện tập

Triangle $ABC \sim$ triangle XYZ . Given $AB = 8$, $BC = 12$, $XY = 6$, find YZ .

- (A) 9 (C) 10
(B) 8 (D) 7.5

Lời giải chi tiết

Scale factor $= \frac{XY}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$. $YZ = \frac{3}{4} \times BC = \frac{3}{4} \times 12 = 9$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

In triangle PQR , S is on PQ and T is on PR with $ST \parallel QR$. Given $PS = 4$, $SQ = 6$, $TR = 9$, find PT .

Lời giải chi tiết

Since $ST \parallel QR$: $\frac{PS}{SQ} = \frac{PT}{TR} \Rightarrow \frac{4}{6} = \frac{PT}{9} \Rightarrow PT = \frac{4 \times 9}{6} = 6$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Two similar triangles have corresponding sides in ratio 2 : 3. The larger triangle has area 90 cm^2 . Find the area of the smaller triangle.

(A) 40 cm^2

(C) 60 cm^2

(B) 45 cm^2

(D) 50 cm^2

Lời giải chi tiết

Area ratio (larger:smaller) = $3^2 : 2^2 = 9 : 4$. Smaller area = $90 \times \frac{4}{9} = 40 \text{ cm}^2$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) Two similar solids have heights 8 cm and 12 cm. The smaller solid has volume 64 cm^3 . Find the volume of the larger solid.

Lời giải chi tiết

Length ratio $8 : 12 = 2 : 3$. Volume ratio = $2^3 : 3^3 = 8 : 27$. Larger volume = $64 \times \frac{27}{8} = 216 \text{ cm}^3$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Two similar cylinders have surface areas 50 cm^2 and 200 cm^2 . The smaller cylinder has volume 30 cm^3 . Find the volume of the larger cylinder.

(A) 240 cm^3

(C) 180 cm^3

(B) 120 cm^3

(D) 60 cm^3

Lời giải chi tiết

Area ratio $50 : 200 = 1 : 4 = 1^2 : 2^2$, so length ratio = $1 : 2$. Volume ratio = $1^3 : 2^3 = 1 : 8$. Larger volume = $30 \times 8 = 240 \text{ cm}^3$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) AB is a diameter of a circle, and C is on the circumference with $\angle BAC = 27^\circ$. Find $\angle ACB$ and $\angle ABC$.

Lời giải chi tiết

$\angle ACB = 90^\circ$ (angle in a semicircle). $\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - 27^\circ = 63^\circ$.

Bài tập luyện tập

(Extended) A, B lie on a circle centre O . C lies on the *minor* arc AB , so the reflex angle $AOB = 250^\circ$. Find $\angle ACB$.

(A) 125°

(C) 115°

(B) 110°

(D) 130°

Lời giải chi tiết

C on the minor arc looks across at the *major* arc, so $\angle ACB = \frac{1}{2} \times (\text{reflex } \angle AOB) = \frac{1}{2} \times 250^\circ = 125^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) A, B, C, D lie on a circle, with C, D on the same arc relative to chord AB . Given $\angle ACB = 55^\circ$ and, in triangle ABD , $\angle ABD = 95^\circ$, find $\angle ADB$ and $\angle BAD$.

Lời giải chi tiết

$\angle ADB = \angle ACB = 55^\circ$ (angles in the same segment, both subtending arc AB).
In triangle ABD : $\angle BAD = 180^\circ - 95^\circ - 55^\circ = 30^\circ$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Cyclic quadrilateral $ABCD$ has $\angle A = (3x - 5)^\circ$ and $\angle C = (x + 45)^\circ$. Find x .

(A) 35

(C) 30

(B) 40

(D) 45

Lời giải chi tiết

Opposite angles sum to 180° : $3x - 5 + x + 45 = 180 \Rightarrow 4x + 40 = 180 \Rightarrow 4x = 140 \Rightarrow x = 35$.
Check: $\angle A = 100^\circ$, $\angle C = 80^\circ$, sum = 180° . ✓ (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) Cyclic quadrilateral $ABCD$ has $\angle ADC = 115^\circ$. Side AB is extended to E beyond B . Find $\angle ABC$ and the exterior angle $\angle CBE$.

Lời giải chi tiết

$\angle ABC = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - 115^\circ = 65^\circ$ (opposite angles of a cyclic quadrilateral).
 $\angle CBE = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 65^\circ = 115^\circ$ (angles on a line), which equals $\angle ADC$, confirming the exterior-angle rule.

Bài tập luyện tập

(Extended) TA is a tangent to a circle centre O , touching at A . Given $OT = 13$ cm and radius $OA = 5$ cm, find the length TA .

(A) 12 cm

(C) 8 cm

(B) 14 cm

(D) 18 cm

Lời giải chi tiết

$\angle OAT = 90^\circ$ (tangent $\perp$ radius). By Pythagoras: $TA = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) TA and TB are tangents from external point T to a circle centre O , with $\angle ATB = 64^\circ$. Find $\angle AOB$ and the base angles of triangle ATB .

Lời giải chi tiết

In quadrilateral $OATB$: $\angle OAT = \angle OBT = 90^\circ$. Angle sum = 360° : $\angle AOB = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 64^\circ = 116^\circ$.

Since $TA = TB$, triangle ATB is isosceles: base angles = $\frac{180^\circ - 64^\circ}{2} = 58^\circ$ each.

Bài tập luyện tập

(Extended) A tangent touches a circle at A . Chord AB is drawn, and C lies on the major arc. Given the tangent-chord angle $\angle QAB = 71^\circ$, find $\angle ACB$.

- (A) 71° (C) 35.5°
(B) 109° (D) 142°

Lời giải chi tiết

By the alternate segment theorem, $\angle ACB = \angle QAB = 71^\circ$. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) A tangent touches a circle at A , centre O . Chord AB has tangent-chord angle $\angle QAB = 50^\circ$. Find $\angle OAB$, $\angle AOB$, and hence verify the alternate segment theorem using the centre/circumference theorem.

Lời giải chi tiết

$\angle OAQ = 90^\circ$ (tangent $\perp$ radius), so $\angle OAB = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

Triangle OAB isosceles ($OA = OB$): $\angle OBA = 40^\circ$, so $\angle AOB = 180^\circ - 40^\circ - 40^\circ = 100^\circ$.

Angle at circumference = $\frac{1}{2} \times 100^\circ = 50^\circ$, matching $\angle QAB = 50^\circ$ from the alternate segment theorem. $\checkmark$

Bài tập luyện tập

Which locus describes all points equidistant from two fixed points A and B ?

- (A) a circle centred at A (C) the perpendicular bisector of AB
(B) a circle centred at the midpoint of AB (D) the angle bisector at A

Lời giải chi tiết

Points equidistant from two fixed points always lie on the **perpendicular bisector** of the segment joining them. (C).

Bài tập luyện tập

What is the locus of points exactly 4 cm from a given straight (infinite) line?

- (A) a single line parallel to it, 4 cm away (C) a circle of radius 4 cm
(B) two lines, one on each side, each 4 cm from the line (D) a curved arc

Lời giải chi tiết

Points 4 cm from an infinite straight line form **two parallel lines**, one on each side, each at perpendicular distance 4 cm. **(B)**.

Bài tập luyện tập

A point P moves inside triangle ABC such that P is equidistant from sides AB and AC , and also equidistant from vertices B and C . Describe the two loci involved and identify P .

Lời giải chi tiết

Equidistant from AB and AC (two lines meeting at A) $\Rightarrow$ locus is the **angle bisector from A** .
Equidistant from B and C (two points) $\Rightarrow$ locus is the **perpendicular bisector of BC** .
 P must satisfy both conditions simultaneously, so P is the single point where the angle bisector from A meets the perpendicular bisector of BC (this point also lies on the circumcircle of ABC , at the midpoint of arc BC not containing A).

Mensuration

Mục tiêu Unit: Chu vi và diện tích các hình phẳng cơ bản cùng hình ghép (compound shapes); độ dài cung và diện tích hình quạt, hình viên phân (Extended); thể tích và diện tích toàn phần của lăng trụ, hình trụ, hình nón, hình cầu, hình chóp (phần lớn Extended) và các khối ghép; đổi đơn vị độ dài – diện tích – thể tích và làm tròn số hợp lý hoặc để kết quả theo π .

5.1 Perimeter and Area of 2D Shapes

5.1.1 Rectangles, triangles, parallelograms, and trapezia

Mensuration is the branch of mathematics concerned with measuring lengths, areas, and volumes – from the tiling of a bathroom floor to the capacity of a water tank or the amount of paint needed to cover a wall. Every polygon area formula in this course reduces, ultimately, to counting unit squares – but four shapes are used so often that their formulas must be automatic.

Standard area formulas

- **Rectangle:** $A = lw$ (length $\times$ width); perimeter $P = 2(l + w)$.
- **Triangle:** $A = \frac{1}{2}bh$, where h is the perpendicular height to base b (not a slanted side).
- **Parallelogram:** $A = bh$, where h is the perpendicular distance between the two parallel sides of length b .
- **Trapezium:** $A = \frac{1}{2}(a+b)h$, where a and b are the two parallel sides and h is the perpendicular distance between them.

The triangle and parallelogram formulas are really the same idea: a parallelogram is two congruent triangles joined along a diagonal, so $A_{\text{triangle}} = \frac{1}{2}A_{\text{parallelogram}} = \frac{1}{2}bh$. A trapezium, in turn, can be split into a rectangle and one or two triangles, or thought of as the “average of the two parallel sides” ($\frac{a+b}{2}$) multiplied by the height – this is exactly why the formula has a $\frac{1}{2}$ in it.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Diện tích tam giác $A = \frac{1}{2}bh$ và hình bình hành $A = bh$ thực chất liên quan trực tiếp: một hình bình hành luôn có thể chia thành 2 tam giác bằng nhau bởi một đường chéo, nên diện tích tam giác đúng bằng một nửa diện tích hình bình hành có cùng đáy và chiều cao. Với hình thang, công thức $A = \frac{1}{2}(a+b)h$ có thể hiểu là “lấy trung bình cộng hai đáy rồi nhân với chiều cao” – đây là lý do vì sao luôn có hệ số $\frac{1}{2}$. Lưu ý: chiều cao h trong mọi công thức trên luôn là khoảng cách **vuông góc**, không phải cạnh xiên.

Ví dụ mẫu • Trapezium area

A trapezium has parallel sides 13 cm and 19 cm, and a perpendicular height of 7 cm. Find its area.

$$A = \frac{1}{2}(a + b)h = \frac{1}{2}(13 + 19)(7) = \frac{1}{2}(32)(7) = 112 \text{ cm}^2.$$

5.1.2 Circles: circumference and area

Circle formulas

For a circle of radius r (diameter $d = 2r$):

$$\text{Circumference } C = 2\pi r = \pi d, \quad \text{Area } A = \pi r^2.$$

Unless a question specifies a value for π (commonly 3.14 or $\frac{22}{7}$), leave answers **in terms of** π where possible, or use the full calculator value of π and round only the final answer – never round π itself partway through a calculation.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với các bài toán về đường tròn, luôn phân biệt rõ **bán kính** r và **đường kính** $d = 2r$ – đây là lỗi sai phổ biến nhất (nhầm d thành r khi thay vào công thức). Khi đề không cho giá trị cụ thể của π , nên giữ kết quả dưới dạng π (ví dụ 18π cm) trước, chỉ đổi ra số thập phân ở bước cuối cùng bằng giá trị π đầy đủ trên máy tính, tránh làm tròn π quá sớm gây sai số tích lũy.

Ví dụ mẫu · Circumference and area from a diameter

A circular table top has diameter 18 cm. Find its circumference and area, in terms of π and correct to 2 decimal places.

Radius $r = 18 \div 2 = 9$ cm.

$$C = 2\pi r = 2\pi(9) = 18\pi \approx 56.55 \text{ cm}, \quad A = \pi r^2 = \pi(9)^2 = 81\pi \approx 254.47 \text{ cm}^2.$$

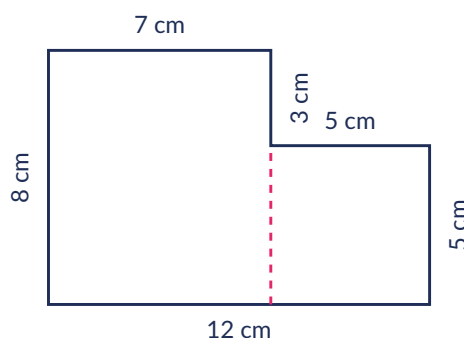
5.1.3 Compound and composite shapes

Many exam figures are not one of the four basic shapes above, but a **compound (composite) shape** built from them. There are two standard strategies, and either always works:

Two strategies for compound shapes

- **Splitting into parts:** draw one or more extra lines to divide the compound shape into rectangles, triangles, trapezia, or circle-parts, find each part's area separately, then add them.
- **Subtracting a cut-out region:** treat the shape as a larger, simple shape with a smaller region removed (a notch, a hole, a corner cut off) – find the large area, find the removed area, then subtract.

Both methods must give the *same* final answer; using one as a check on the other is good practice under exam conditions.



An L-shaped compound figure: a 12×8 rectangle with a 5×3 rectangular notch removed from the top-right corner (dashed line shows the split into two rectangles).

Ví dụ mẫu · L-shaped compound figure

Find the area and the perimeter of the L-shaped figure above: an overall $12 \text{ cm} \times 8 \text{ cm}$ rectangle with a $5 \text{ cm} \times 3 \text{ cm}$ rectangular notch cut from the top-right corner.

Area – subtraction method: full rectangle minus the notch:

$$A = (12 \times 8) - (5 \times 3) = 96 - 15 = 81 \text{ cm}^2.$$

Area – splitting method (check): a lower rectangle $12 \times 5 = 60$ plus an upper-left rectangle $7 \times 3 = 21$ gives $60 + 21 = 81 \text{ cm}^2$ – the two methods agree.

Perimeter: walking around the boundary: $12 + 5 + 5 + 3 + 7 + 8 = 40 \text{ cm}$. Notice this equals the perimeter of the original (uncut) rectangle, $2(12 + 8) = 40 \text{ cm}$ – cutting a rectangular notch out of a corner removes some boundary length but adds back exactly the same amount, so the perimeter is unchanged here. (This is *not* true in general for every compound shape – always trace the actual boundary rather than assuming it.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với hình ghép, luôn chọn một trong hai cách: (1) **chia nhỏ** thành các hình cơ bản rồi cộng diện tích, hoặc (2) **lấy hình lớn trừ phần bị khuyết**. Ví dụ hình chữ L ở trên: trừ đi phần khuyết 5×3 khỏi hình chữ nhật lớn 12×8 cho 81 cm^2 , khớp với cách chia thành 2 hình chữ nhật nhỏ. Về **chu vi**, phải đi vòng quanh biên thực tế của hình – không được lấy chu vi hình lớn rồi cộng/trừ tùy tiện; trong ví dụ này chu vi hình chữ L tình cờ bằng chu vi hình chữ nhật gốc, nhưng điều đó không luôn đúng với mọi hình ghép khác.

Ví dụ mẫu · Compound shape with a circular arc

A window is shaped like a 14 cm wide, 20 cm tall rectangle, topped by a semicircle of diameter 14 cm (so the semicircle replaces the top edge of the rectangle). Find the total area and the total perimeter of the window shape.

Semicircle radius $r = 14 \div 2 = 7 \text{ cm}$.

$$\text{Area} = (14)(20) + \frac{1}{2}\pi(7)^2 = 280 + 24.5\pi \approx 356.97 \text{ cm}^2.$$

$\boxed{\text{rectangle}}$ $\boxed{\text{semicircle}}$
 rectangle semicircle

$$\text{Perimeter} = 20 + 20 + 14 + \pi(7) = 54 + 7\pi \approx 75.99 \text{ cm}.$$

$\boxed{\text{two sides}}$ $\boxed{\text{bottom}}$ $\boxed{\text{semicircular arc}}$
 two sides bottom semicircular arc

Note that the perimeter does *not* include the straight top edge of the rectangle, since that edge has been replaced by the curved arc.

5.2 Arc Length and Sector Area (Extended)

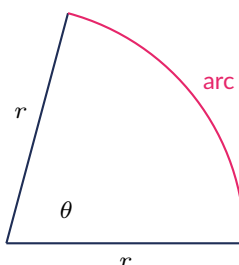
5.2.1 Arc length and sector area

A **sector** is the region enclosed by two radii and the arc between them — like a slice of pizza. Since a full circle corresponds to an angle of 360° , a sector of angle θ (in degrees) is simply the fraction $\frac{\theta}{360}$ of the whole circle.

Arc length and sector area (Extended)

For a circle of radius r and a sector with angle θ° at the centre:

$$\text{Arc length} = \frac{\theta}{360} \times 2\pi r, \quad \text{Sector area} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2.$$



A sector of radius r and angle θ , bounded by two radii and an arc.

Ví dụ mẫu · Arc length and sector area

A sector has radius 15 cm and angle 50° . Find its arc length and area, in terms of π and correct to 2 decimal places.

$$\text{Arc length} = \frac{50}{360} \times 2\pi(15) = \frac{50}{360} \times 30\pi = 5\pi \approx 15.71 \text{ cm.}$$

$$\text{Sector area} = \frac{50}{360} \times \pi(15)^2 = \frac{50}{360} \times 225\pi = 45\pi \approx 141.37 \text{ cm}^2.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ý tưởng cốt lõi của hình quạt (sector): nó luôn là “một phần $\frac{\theta}{360}$ ” của cả đường tròn – áp dụng như nhau cho cả độ dài cung (một phần của chu vi $2\pi r$) lẫn diện tích (một phần của diện tích πr^2). Nên tính và giữ kết quả theo π trước, rồi mới đổi sang số thập phân ở bước cuối để tránh sai số làm tròn tích lũy qua nhiều bước.

5.2.2 Perimeter of a sector

Unlike the arc length alone, the **perimeter** of a sector-shaped region includes the two straight radii as well as the curved arc.

$$\text{Perimeter of a sector} = 2r + \text{arc length} = 2r + \frac{\theta}{360} \times 2\pi r.$$

Ví dụ mẫu · Perimeter of a sector

A sector has radius 10 cm and angle 60° . Find its perimeter correct to 2 decimal places.

$$\text{Arc length} = \frac{60}{360} \times 2\pi(10) = \frac{10\pi}{3} \approx 10.47 \text{ cm.}$$

$$\text{Perimeter} = 2(10) + \frac{10\pi}{3} = 20 + 10.47 = 30.47 \text{ cm.}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đừng nhầm “độ dài cung” (arc length) với “chu vi hình quạt” (perimeter of the sector). Chu vi hình quạt luôn phải cộng thêm **hai bán kính** ($2r$) vào độ dài cung, vì đường biên của hình quạt gồm cả hai đoạn thẳng (bán kính) lẫn phần cong (cung tròn).

5.2.3 Segment area (Extended)

A **segment** is the region between a chord and the arc it cuts off – different from a sector, which is bounded by two radii. A segment can be found by taking the sector formed by the same angle and *subtracting* the triangle formed by the two radii and the chord.

Segment area (Extended)

For a circle of radius r and angle θ° at the centre, the triangle formed by the two radii and the chord has area $\frac{1}{2}r^2 \sin \theta$ (using the angle in degrees directly in the sine function). Therefore:

$$\text{Segment area} = \text{Sector area} - \text{Triangle area} = \frac{\theta}{360} \times \pi r^2 - \frac{1}{2}r^2 \sin \theta.$$

(!) Lỗi thường gặp: “Segment” và “sector” là hai hình **khác nhau** tuy tên gọi na ná: **sector** (hình quạt) được giới hạn bởi *hai bán kính* và một cung; **segment** (hình viên phân) được giới hạn bởi *một dây cung* và một cung – nó nhỏ hơn sector cùng góc θ đúng bằng phần diện tích tam giác. Lỗi thường gặp nhất: tính đúng diện tích sector rồi quên trừ đi tam giác khi đề hỏi diện tích segment.

Ví dụ mẫu · Segment area

A circle has radius 8 cm. A chord subtends an angle of 90° at the centre. Find the area of the segment cut off by this chord, correct to 2 decimal places.

$$\text{Sector area} = \frac{90}{360} \times \pi(8)^2 = \frac{1}{4} \times 64\pi = 16\pi \approx 50.27 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Triangle area} = \frac{1}{2}(8)^2 \sin 90^\circ = \frac{1}{2}(64)(1) = 32 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Segment area} = 50.27 - 32 = 18.27 \text{ cm}^2.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Muốn tính diện tích viên phân (segment): **bước 1** tính diện tích hình quạt cùng góc θ ; **bước 2** tính diện tích tam giác tạo bởi hai bán kính và dây cung bằng công thức $\frac{1}{2}r^2 \sin \theta$ (dùng trực tiếp góc θ theo đơn vị độ trong hàm sin); **bước 3** lấy hiệu của hai giá trị trên. Khi $\theta = 90^\circ$, $\sin \theta = 1$ nên công thức tam giác đơn giản thành $\frac{1}{2}r^2$ – đúng bằng diện tích một tam giác vuông cân với hai cạnh góc vuông là bán kính.

5.2.4 Working backwards: finding a missing radius or angle (Extended)

Exam questions often reverse the process: give the arc length, sector area, or segment area, and ask for the radius or the angle.

Ví dụ mẫu · Reverse problem — finding the angle

A sector of radius 10 cm has an area of 40π cm². Find the angle of the sector.

$$40\pi = \frac{\theta}{360} \times \pi(10)^2 = \frac{\theta}{360} \times 100\pi \implies \theta = \frac{40 \times 360}{100} = 144^\circ.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán ngược (cho diện tích hoặc độ dài cung, tìm góc hoặc bán kính), chiến lược luôn giống nhau: viết lại đúng công thức gốc, thay các giá trị đã biết vào, rồi giải phương trình cho ẩn số còn lại bằng các phép biến đổi đại số cơ bản (nhân chéo, chia hai vế). Luôn giữ π dưới dạng ký hiệu càng lâu càng tốt để nó tự triệt tiêu ở hai vế phương trình, giúp phép tính gọn và chính xác hơn.

5.3 Volume and Surface Area of Prisms and Cylinders

5.3.1 Prisms

Moving from flat shapes to solids, the same two questions recur for every 3D object: how much space does it occupy (**volume**), and how much material would it take to wrap or paint its outside (**surface area**)? A **prism** is a solid with a constant cross-section along its entire length: whatever the shape of one end (triangle, rectangle, trapezium, hexagon, ...), every parallel slice through the solid has that same shape and area. Girders, chocolate bars, and skirting boards are everyday examples of prisms.

Volume of a prism

$$V = (\text{area of cross-section}) \times (\text{length}).$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Chìa khoá của mọi bài toán lăng trụ (prism) là nhận diện đúng **mặt cắt ngang (cross-section)** – hình dạng không đổi dọc theo chiều dài khối. Một khi đã tính được diện tích của mặt cắt đó (có thể là tam giác, hình thang, lục giác, ...), thể tích chỉ đơn giản là diện tích ấy nhân với chiều dài của lăng trụ – không có công thức nào phức tạp hơn thế.

Ví dụ mẫu · Triangular prism volume

A triangular prism has a cross-section that is a triangle with base 8 cm and height 5 cm. The prism is 12 cm long. Find its volume.

$$\text{Cross-section area} = \frac{1}{2}(8)(5) = 20 \text{ cm}^2.$$

$$V = 20 \times 12 = 240 \text{ cm}^3.$$

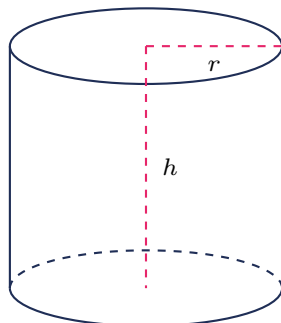
5.3.2 Cylinders

A cylinder is simply a prism whose cross-section is a circle.

Cylinder formulas

For a cylinder of base radius r and height h :

$$V = \pi r^2 h, \quad \text{Curved surface area (CSA)} = 2\pi r h, \quad \text{Total surface area (TSA)} = 2\pi r h + 2\pi r^2.$$



A cylinder of radius r and height h : two circular ends joined by a curved lateral surface.

Ví dụ mẫu · Cylinder volume and surface area

A cylinder has radius 5 cm and height 12 cm. Find its volume, curved surface area, and total surface area, in terms of π and correct to 2 decimal places.

$$V = \pi(5)^2(12) = 300\pi \approx 942.48 \text{ cm}^3.$$

$$\text{CSA} = 2\pi(5)(12) = 120\pi \approx 376.99 \text{ cm}^2.$$

$$\text{TSA} = 120\pi + 2\pi(5)^2 = 120\pi + 50\pi = 170\pi \approx 534.07 \text{ cm}^2.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Thể tích hình trụ đơn giản chỉ là “diện tích đáy tròn nhân chiều cao” ($\pi r^2 \times h$) – đúng như công thức lăng trụ tổng quát. Diện tích **mặt bên/mặt xung quanh (curved surface area)** chỉ tính phần cong bao quanh ($2\pi r h$); diện tích **toàn phần (total surface area)** phải cộng thêm **hai** mặt đáy tròn ($2\pi r^2$). Luôn đọc kỹ đề: hỏi “curved/lateral surface” hay “total surface” sẽ cho hai đáp số khác nhau.

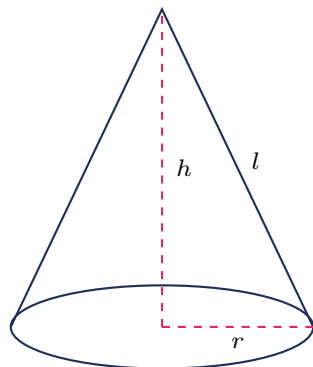
(!) Lỗi thường gặp: Diện tích toàn phần (total surface area) của hình trụ hoặc hình nón luôn phải gồm **cả mặt đáy**, không chỉ mặt bên – đây là lỗi bị trừ điểm nhiều nhất trong dạng bài này. Với hình trụ: $\text{TSA} = \text{mặt bên} + 2 \text{ đáy tròn} = 2\pi r h + 2\pi r^2$. Với hình nón: $\text{TSA} = \text{mặt bên} + 1 \text{ đáy tròn} = \pi r l + \pi r^2$ (chỉ **một** đáy, vì đỉnh nón không có mặt phẳng). Với khối ghép (ví dụ hình trụ gắn thêm bán cầu), còn phải cẩn thận **không cộng** phần mặt tiếp giáp giữa hai khối, vì đó là mặt bên trong, không lộ ra ngoài.

5.4 Cones, Spheres, and Pyramids (Extended)**5.4.1 Cones (Extended)**

Cones, spheres, and pyramids are solids that taper to a point rather than running with a constant cross-section, which is exactly why each of their volume formulas carries the same telltale factor of $\frac{1}{3}$. A cone has a circular base and tapers to a single apex. Besides the radius r and perpendicular height h , cone problems introduce a third length, the **slant height** l – the distance from the apex to a point on the base circle, measured along the curved surface.

Cone formulas (Extended)

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, Curved surface area $= \pi r l$, Total surface area $= \pi r l + \pi r^2$,
 where the slant height satisfies $l^2 = r^2 + h^2$ (Pythagoras' theorem applied to the right triangle formed by r , h , and l).



Cone with radius r , perpendicular height h , and slant height l , where $l^2 = r^2 + h^2$.

Ví dụ mẫu · Reverse problem – cone height from volume

A cone has base radius 5 cm. Its volume is $100\pi \text{ cm}^3$. Find its perpendicular height.

$$100\pi = \frac{1}{3}\pi(5)^2 h = \frac{25\pi}{3} h \implies h = \frac{100 \times 3}{25} = 12 \text{ cm}.$$

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Với hình nón, luôn phân biệt rõ **ba** độ dài: bán kính r , chiều cao vuông góc h (từ đỉnh xuống tâm đáy), và đường sinh l (từ đỉnh đến một điểm trên đường tròn đáy, đo dọc theo mặt bên) – ba đại lượng này liên hệ với nhau qua định lý Pythagore $l^2 = r^2 + h^2$ vì chúng tạo thành một tam giác vuông. Thể tích chỉ dùng r và h (không dùng l); diện tích mặt bên chỉ dùng r và l (không dùng h) – nhầm lẫn giữa h và l là lỗi rất phổ biến.

5.4.2 Spheres (Extended)

Sphere formulas (Extended)

For a sphere of radius r :

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad \text{Surface area} = 4\pi r^2.$$

Ví dụ mẫu · Sphere volume and surface area

A sphere has radius 6 cm. Find its volume and surface area, in terms of π and correct to 2 decimal places.

$$V = \frac{4}{3}\pi(6)^3 = \frac{4}{3}\pi(216) = 288\pi \approx 904.78 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Surface area} = 4\pi(6)^2 = 144\pi \approx 452.39 \text{ cm}^2.$$

Ví dụ mẫu · Reverse problem — sphere radius from volume

A sphere has volume $972\pi \text{ cm}^3$. Find its radius.

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = 972\pi \implies r^3 = \frac{972 \times 3}{4} = 729 \implies r = \sqrt[3]{729} = 9 \text{ cm}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức hình cầu là hai công thức cần thuộc lòng chính xác: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ (thể tích) và diện tích bề mặt $= 4\pi r^2$ – chú ý số mũ 3 cho thể tích và 2 cho diện tích, đúng với quy tắc chung (thể tích luôn theo bậc 3, diện tích luôn theo bậc 2 của độ dài). Với bài toán ngược (cho V tìm r), phải khai căn bậc ba ở bước cuối; với bài cho diện tích tìm r , phải khai căn bậc hai.

5.4.3 Pyramids (Extended)

Volume of a pyramid (Extended)

$$V = \frac{1}{3} \times (\text{base area}) \times h,$$

where h is the perpendicular height from the apex to the plane of the base (not a slant edge), and the base may be any polygon — square, rectangular, triangular, etc.

Ví dụ mẫu · Pyramid volume

A pyramid has a square base of side 6 cm and a perpendicular height of 10 cm. Find its volume.

$$\text{Base area} = 6^2 = 36 \text{ cm}^2, \quad V = \frac{1}{3}(36)(10) = 120 \text{ cm}^3.$$

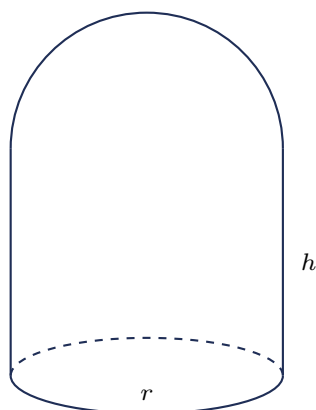
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức thể tích hình chóp $V = \frac{1}{3} \times (\text{diện tích đáy}) \times h$ áp dụng cho **mọi** hình chóp, bất kể đáy là hình vuông, hình chữ nhật, hay tam giác – điểm mấu chốt luôn là tính đúng diện tích đáy trước, sau đó nhân với chiều cao **vuông góc** (không phải cạnh bên/cạnh xiên của hình chóp) rồi chia cho 3. Hệ số $\frac{1}{3}$ này giống với hình nón vì hình nón chính là “hình chóp có đáy tròn”.

5.4.4 Compound solids (Extended)

Just as 2D shapes can be combined, so can solids: a capsule may be a cylinder with a hemisphere on each end; an “ice-cream” shape may be a cone topped by a hemisphere; a silo may be a cylinder topped by a cone. The rule is the same as for compound 2D shapes — find the volume (or surface area) of each separate solid and add, but for surface area, **omit any internal face** where the two solids are joined (it is not exposed to the outside).



A compound solid: a cylinder of radius r and height h topped by a hemisphere of the same radius r .

Ví dụ mẫu · Compound solid — cylinder with a hemisphere

A solid consists of a cylinder of radius 4 cm and height 9 cm, with a hemisphere of radius 4 cm attached on top (in place of the top circular face). Find the total volume and the total surface area, in terms of π and correct to 2 decimal places.

Volume:

$$V_{\text{cylinder}} = \pi(4)^2(9) = 144\pi, \quad V_{\text{hemisphere}} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}\pi(4)^3 = \frac{128\pi}{3}.$$

$$V_{\text{total}} = 144\pi + \frac{128\pi}{3} = \frac{432\pi + 128\pi}{3} = \frac{560\pi}{3} \approx 586.43 \text{ cm}^3.$$

Surface area (the flat top of the cylinder and the flat face of the hemisphere are joined together, so neither is exposed — only the curved cylinder wall, the curved hemisphere dome, and the single circular *bottom* of the cylinder are on the outside):

$$\text{TSA} = \underbrace{2\pi(4)(9)}_{\text{curved cylinder}} + \underbrace{2\pi(4)^2}_{\text{curved hemisphere}} + \underbrace{\pi(4)^2}_{\text{bottom circle}} = 72\pi + 32\pi + 16\pi = 120\pi \approx 376.99 \text{ cm}^2.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Với khối ghép (compound solid), tính **thể tích** rất đơn giản: chỉ cần cộng thể tích của từng khối thành phần. Nhưng tính **diện tích bề mặt** thì phải cẩn thận hơn nhiều: mặt tiếp giáp giữa hai khối (ví dụ mặt tròn phía trên hình trụ, nơi gắn bán cầu) **không được tính** vì nó nằm bên trong khối ghép, không lộ ra bên ngoài. Cách làm an toàn nhất: liệt kê từng mặt *thực sự nhìn thấy* được từ bên ngoài khối trước khi cộng diện tích.

5.5 Units and Accuracy

5.5.1 Converting length units

Length conversions

- 1 cm = 10 mm
- 1 m = 100 cm
- 1 km = 1000 m

To convert to a *smaller* unit, multiply by the conversion factor; to convert to a *larger* unit, divide.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đổi đơn vị độ dài chỉ cần nhớ ba mốc: $1\text{ cm} = 10\text{ mm}$, $1\text{ m} = 100\text{ cm}$, $1\text{ km} = 1000\text{ m}$. Quy tắc chung: đổi sang đơn vị **nhỏ hơn** thì **nhân**, đổi sang đơn vị **lớn hơn** thì **chia** – cùng với hệ số tương ứng. Đây là nền tảng để hiểu vì sao đổi đơn vị diện tích và thể tích ở phần sau lại cần **bình phương** hoặc **lập phương** hệ số này.

5.5.2 Converting area and volume units

Because area has units of $(\text{length})^2$ and volume has units of $(\text{length})^3$, the linear conversion factor above must be **squared** for area and **cubed** for volume – this is the single most common source of unit-conversion errors in mensuration.

Area and volume conversions

Since $1\text{ m} = 100\text{ cm}$:

$$1\text{ m}^2 = (100)^2\text{ cm}^2 = 10\,000\text{ cm}^2, \quad 1\text{ m}^3 = (100)^3\text{ cm}^3 = 1\,000\,000\text{ cm}^3.$$

Similarly, since $1\text{ cm} = 10\text{ mm}$: $1\text{ cm}^2 = 100\text{ mm}^2$ and $1\text{ cm}^3 = 1000\text{ mm}^3$.

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi cực kỳ phổ biến: nghĩ rằng $1\text{ m}^2 = 100\text{ cm}^2$ (chỉ đúng cho độ dài, sai cho diện tích) hoặc $1\text{ m}^3 = 1000\text{ cm}^3$ (chỉ đúng cho thể tích khi hệ số là 10, không phải 100). Vì $1\text{ m} = 100\text{ cm}$, nên diện tích phải nhân hệ số này **hai lần** ($100^2 = 10\,000$) và thể tích phải nhân **ba lần** ($100^3 = 1\,000\,000$). Quy tắc an toàn: luôn viết lại đẳng thức độ dài trước ($1\text{ m} = 100\text{ cm}$), rồi tự bình phương/lập phương cả hai vế để suy ra hệ số đúng cho diện tích/thể tích.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Sai lầm lớn nhất khi đổi đơn vị diện tích/thể tích là chỉ nhân hệ số độ dài một lần thay vì bình phương (diện tích) hoặc lập phương (thể tích). Cách nhớ chắc chắn nhất: viết đẳng thức độ dài $1\text{ m} = 100\text{ cm}$, sau đó bình phương cả hai vế để ra $1\text{ m}^2 = 100^2\text{ cm}^2 = 10\,000\text{ cm}^2$, hoặc lập phương để ra $1\text{ m}^3 = 100^3\text{ cm}^3 = 1\,000\,000\text{ cm}^3$. Áp dụng tương tự cho cặp cm/mm với hệ số 10.

Ví dụ mẫu · Converting an area

A rectangular classroom floor measures 450 cm by 300 cm. Find its area in m^2 .

Area in cm^2 : $450 \times 300 = 135\,000\text{ cm}^2$. Dividing by 10 000 (since $1\text{ m}^2 = 10\,000\text{ cm}^2$):

$$135\,000 \div 10\,000 = 13.5\text{ m}^2.$$

Check directly in metres: $4.5\text{ m} \times 3\text{ m} = 13.5\text{ m}^2$ – the two methods agree.

Ví dụ mẫu · Converting a volume

A storage tank measures 250 cm by 120 cm by 80 cm. Find its volume in m^3 .

Volume in cm^3 : $250 \times 120 \times 80 = 2\,400\,000\text{ cm}^3$. Dividing by 1 000 000:

$$2\,400\,000 \div 1\,000\,000 = 2.4\text{ m}^3.$$

Check directly in metres: $2.5\text{ m} \times 1.2\text{ m} \times 0.8\text{ m} = 2.4\text{ m}^3$ – the two methods agree.

5.5.3 Rounding and exact answers

Unless told otherwise, keep at least one extra significant figure through intermediate working and round only the *final* answer to the accuracy the question requests (commonly 3 significant figures, or a stated number of decimal places). When a question asks for an answer “in terms of π ”, leave π as a symbol rather than converting to a decimal.

Never round an intermediate value (such as a slant height, or π itself) before the last step of a calculation – early rounding is a common cause of an answer being marked wrong even when the method is entirely correct.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nguyên tắc làm tròn an toàn: chỉ làm tròn ở **bước cuối cùng**, giữ nguyên các giá trị trung gian (kể cả π , căn bậc hai, căn bậc ba) càng chính xác càng tốt trong suốt quá trình tính. Nếu đề yêu cầu “để theo π ” (in terms of π), tuyệt đối không đổi π thành số thập phân. Làm tròn sớm ở bước trung gian là nguyên nhân phổ biến khiến đáp số cuối cùng bị sai dù cách làm hoàn toàn đúng.

5.6 Formula Summary

Before moving to the problem bank, it is worth collecting every formula from this chapter in one place. Use the two tables below as a quick reference while practising – but the goal is to reach the point where none of them need to be looked up.

2D shape	Perimeter / circumference	Area
Rectangle	$P = 2(l + w)$	$A = lw$
Triangle	(sum of three sides)	$A = \frac{1}{2}bh$
Parallelogram	(sum of four sides)	$A = bh$
Trapezium	(sum of four sides)	$A = \frac{1}{2}(a + b)h$
Circle	$C = 2\pi r = \pi d$	$A = \pi r^2$
Sector (Ex-tended)	$2r + \frac{\theta}{360} \times 2\pi r$	$\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$
Segment (Ex-tended)	(chord + arc)	sector area $-\frac{1}{2}r^2 \sin \theta$

3D solid	Volume	Surface area
Prism	(cross-section area) $\times$ length	(sum of all faces)
Cylinder	$V = \pi r^2 h$	CSA = $2\pi rh$; TSA = $2\pi rh + 2\pi r^2$
Cone (Extended)	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$	CSA = πrl ; TSA = $\pi rl + \pi r^2$ ($l^2 = r^2 + h^2$)
Sphere (Ex-tended)	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$4\pi r^2$
Pyramid (Ex-tended)	$V = \frac{1}{3} \times (\text{base area}) \times h$	(sum of base + triangular faces)

For any compound shape or solid: split into simple parts and add, or take a simple whole and subtract a cut-out region – and never count an internal, hidden face when finding a compound solid's surface area.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai bảng trên tổng hợp lại toàn bộ công thức đã học trong chương: bảng đầu cho các hình phẳng (chu vi/diện tích), bảng sau cho các khối 3 chiều (thể tích/diện tích bề mặt). Quan sát

kỹ sẽ thấy các quy luật lặp lại: hình quạt luôn là “một phần $\theta/360$ ” của cả đường tròn; khối chóp/nón luôn có hệ số $\frac{1}{3}$ vì chúng thu nhỏ dần về một đỉnh; diện tích toàn phần luôn là tổng của mặt bên (curved/lateral) cộng với (các) mặt đáy. Trước khi làm phần bài tập tổng hợp phía sau, hãy tự viết lại toàn bộ bảng này mà không nhìn sách để kiểm tra mức độ ghi nhớ.

5.7 Problem Bank

Câu 1

A shape consists of a rectangle 14 cm by 9 cm with a right-angled triangle of base 9 cm and height 8 cm attached along one 9 cm side (like the outline of a simple house). Find the total area of the shape.

(A) 144 cm^2

(C) 150 cm^2

(B) 162 cm^2

(D) 180 cm^2

Lời giải chi tiết

Rectangle area = $14 \times 9 = 126 \text{ cm}^2$. Triangle area = $\frac{1}{2}(9)(8) = 36 \text{ cm}^2$. Total = $126 + 36 = 162 \text{ cm}^2$. (B).

Câu 2

A compound figure is formed from a 20 cm by 13 cm rectangle with a 5 cm by 3 cm rectangular notch removed from one corner. (a) Find the area of the figure. (b) Find its perimeter.

Lời giải chi tiết

(a) Area = $(20 \times 13) - (5 \times 3) = 260 - 15 = 245 \text{ cm}^2$.

(b) Tracing the boundary of the notched shape gives side lengths 20, 10, 5, 3, 15, 13 (going around), summing to $20 + 10 + 5 + 3 + 15 + 13 = 66 \text{ cm}$. This equals the perimeter of the original uncut rectangle, $2(20 + 13) = 66 \text{ cm}$, since the notch is cut from a corner.

Area = 245 cm^2 ; perimeter = 66 cm .

Câu 3

Find the area of a trapezium with parallel sides 12 cm and 20 cm, and a perpendicular height of 9 cm.

(A) 70 cm^2

(C) 144 cm^2

(B) 60 cm^2

(D) 176 cm^2

Lời giải chi tiết

$A = \frac{1}{2}(12 + 20)(9) = \frac{1}{2}(32)(9) = 144 \text{ cm}^2$. (C).

Câu 4

A circular flower bed has diameter 24 m. It is surrounded by a path of uniform width 1 m. Find the area of the path alone, in terms of π .

Lời giải chi tiết

Inner radius (bed) = $24 \div 2 = 12$ m. Outer radius (bed + path) = $12 + 1 = 13$ m.

$$\text{Path area} = \pi(13)^2 - \pi(12)^2 = \pi(169 - 144) = 25\pi \approx 78.54 \text{ m}^2.$$

$$\text{Path area} = 25\pi \approx 78.54 \text{ m}^2.$$

Câu 5

A quarter circle of radius 10 cm is cut away from one corner of a 10 cm square (the radius equals the side of the square, so the arc joins the two adjacent corners of the square). (a) Find the remaining area, in terms of π . (b) Find the perimeter of the remaining shape, in terms of π .

Lời giải chi tiết

(a) Square area = $10^2 = 100 \text{ cm}^2$. Quarter-circle area = $\frac{1}{4}\pi(10)^2 = 25\pi$. Remaining area = $100 - 25\pi \approx 100 - 78.54 = 21.46 \text{ cm}^2$.

(b) Since the radius equals the side length, the arc runs directly between the two corners adjacent to the cut corner, replacing *both* sides that met at that corner. Remaining perimeter = two untouched sides + the arc = $10 + 10 + \frac{1}{4}(2\pi \times 10) = 20 + 5\pi \approx 20 + 15.71 = 35.71 \text{ cm}$.

Area $\approx 21.46 \text{ cm}^2$; perimeter $\approx 35.71 \text{ cm}$.

Câu 6

A parallelogram has base 14 cm and perpendicular height 6.5 cm. Find its area.

(A) 84 cm^2

(C) 91 cm^2

(B) 98 cm^2

(D) 77 cm^2

Lời giải chi tiết

$$A = bh = 14 \times 6.5 = 91 \text{ cm}^2. \text{ (C).}$$

Câu 7

(Extended) A sector has radius 21 cm and angle 60° . Find its arc length, in terms of π .

(A) $3.5\pi \text{ cm}$

(C) $14\pi \text{ cm}$

(B) $7\pi \text{ cm}$

(D) $21\pi \text{ cm}$

Lời giải chi tiết

$$\text{Arc length} = \frac{60}{360} \times 2\pi(21) = \frac{1}{6} \times 42\pi = 7\pi \text{ cm. (B).}$$

Câu 8

(Extended) A sector has radius 18 cm and angle 50° . Find (a) its arc length, and (b) its area, both in terms of π .

Lời giải chi tiết

$$(a) \text{ Arc length} = \frac{50}{360} \times 2\pi(18) = \frac{50}{360} \times 36\pi = 5\pi \approx 15.71 \text{ cm.}$$

$$(b) \text{ Area} = \frac{50}{360} \times \pi(18)^2 = \frac{50}{360} \times 324\pi = 45\pi \approx 141.37 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Arc length} = 5\pi \approx 15.71 \text{ cm; area} = 45\pi \approx 141.37 \text{ cm}^2.$$

Câu 9

(Extended) Find the perimeter of a sector of radius 14 cm and angle 90° , correct to 2 decimal places.

(A) 35.0 cm

(C) 50.0 cm

(B) 43.96 cm

(D) 77.0 cm

Lời giải chi tiết

$$\text{Arc length} = \frac{90}{360} \times 2\pi(14) = \frac{1}{4} \times 28\pi = 7\pi \approx 21.99 \text{ cm. Perimeter} = 2(14) + 7\pi = 28 + 21.99 = 49.99 \approx 50.0 \text{ cm. (C).}$$

Câu 10

(Extended) A sector has radius 10 cm and angle 120° . Find (a) the sector area, (b) the area of the triangle formed by the two radii and the chord, and (c) the area of the segment cut off by the chord. Give all answers correct to 2 decimal places.

Lời giải chi tiết

$$(a) \text{ Sector area} = \frac{120}{360} \times \pi(10)^2 = \frac{1}{3} \times 100\pi \approx 104.72 \text{ cm}^2.$$

$$(b) \text{ Triangle area} = \frac{1}{2}(10)^2 \sin 120^\circ = 50 \times 0.8660 \approx 43.30 \text{ cm}^2.$$

$$(c) \text{ Segment area} = 104.72 - 43.30 = 61.42 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Sector} \approx 104.72 \text{ cm}^2; \text{triangle} \approx 43.30 \text{ cm}^2; \text{segment} \approx 61.42 \text{ cm}^2.$$

Câu 11

(Extended) A sector of radius 10 cm has an area of $25\pi \text{ cm}^2$. Find the angle of the sector.

(A) 5°

(C) 90°

(B) 8°

(D) 20°

Lời giải chi tiết

$$25\pi = \frac{\theta}{360} \times \pi(10)^2 = \frac{\theta}{360} \times 100\pi \Rightarrow \theta = \frac{25 \times 360}{100} = 90^\circ. \text{ (C).}$$

Câu 12

(Extended) A sector has radius 15 cm and an arc length of 10π cm. Find (a) the angle of the sector, and (b) the area of the sector, in terms of π .

Lời giải chi tiết

$$(a) 10\pi = \frac{\theta}{360} \times 2\pi(15) = \frac{\theta}{360} \times 30\pi \Rightarrow \frac{\theta}{360} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3} \Rightarrow \theta = 120^\circ.$$

$$(b) \text{Area} = \frac{1}{3} \times \pi(15)^2 = \frac{1}{3} \times 225\pi = 75\pi \approx 235.62 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Angle} = 120^\circ; \text{area} = 75\pi \approx 235.62 \text{ cm}^2.$$

Câu 13

(Extended) A pendulum of length 40 cm swings through an angle of 45° . Find the length of the arc traced by the tip of the pendulum, in terms of π .

(A) 5π cm

(C) 10π cm

(B) 8π cm

(D) 20π cm

Lời giải chi tiết

$$\text{Arc length} = \frac{45}{360} \times 2\pi(40) = \frac{1}{8} \times 80\pi = 10\pi \text{ cm} \approx 31.42 \text{ cm. (C).}$$

Câu 14

A triangular prism has a cross-section that is a triangle of base 8 cm and height 5 cm, and the prism is 12 cm long. Find its volume.

(A) 120 cm^3

(C) 240 cm^3

(B) 200 cm^3

(D) 480 cm^3

Lời giải chi tiết

$$\text{Cross-section area} = \frac{1}{2}(8)(5) = 20 \text{ cm}^2. V = 20 \times 12 = 240 \text{ cm}^3. \text{ (C).}$$

Câu 15

A cylinder has radius 6 cm and height 15 cm. Find (a) its volume, and (b) its total surface area, both in terms of π .

Lời giải chi tiết

$$(a) V = \pi(6)^2(15) = 540\pi \approx 1696.46 \text{ cm}^3.$$

$$(b) \text{TSA} = 2\pi(6)(15) + 2\pi(6)^2 = 180\pi + 72\pi = 252\pi \approx 791.68 \text{ cm}^2.$$

$$\text{Volume} = 540\pi \approx 1696.46 \text{ cm}^3; \text{total surface area} = 252\pi \approx 791.68 \text{ cm}^2.$$

Câu 16

A cylindrical tank has volume 942 cm^3 and height 12 cm (use $\pi \approx 3.14$). Find its radius.

- (A) 4 cm (C) 6 cm
(B) 5 cm (D) 7 cm

Lời giải chi tiết

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow 942 = 3.14 \times r^2 \times 12 = 37.68r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{942}{37.68} = 25 \Rightarrow r = 5 \text{ cm. (B).}$$

Câu 17

A hexagonal prism has a regular-hexagon cross-section made of 6 equilateral triangles, each of side 4 cm (area of each triangle = $\frac{\sqrt{3}}{4}(4)^2 = 4\sqrt{3} \text{ cm}^2$). The prism is 10 cm long. Find its volume, correct to 1 decimal place.

Lời giải chi tiết

$$\text{Hexagon area} = 6 \times 4\sqrt{3} = 24\sqrt{3} \approx 41.57 \text{ cm}^2. \text{ Volume} = 24\sqrt{3} \times 10 = 240\sqrt{3} \approx 415.7 \text{ cm}^3. \\ \text{Volume} \approx 415.7 \text{ cm}^3.$$

Câu 18

Find the curved surface area of a cylinder of radius 7 cm and height 20 cm, in terms of π .

- (A) $140\pi \text{ cm}^2$ (C) $490\pi \text{ cm}^2$
(B) $280\pi \text{ cm}^2$ (D) $980\pi \text{ cm}^2$

Lời giải chi tiết

$$\text{CSA} = 2\pi(7)(20) = 280\pi \text{ cm}^2 \approx 879.65 \text{ cm}^2. \text{ (B).}$$

Câu 19

(Extended) A cone has base radius 9 cm and slant height 15 cm. Find (a) its perpendicular height, and (b) its volume, in terms of π .

Lời giải chi tiết

$$(a) l^2 = r^2 + h^2 \Rightarrow 15^2 = 9^2 + h^2 \Rightarrow 225 = 81 + h^2 \Rightarrow h^2 = 144 \Rightarrow h = 12 \text{ cm.}$$

$$(b) V = \frac{1}{3}\pi(9)^2(12) = \frac{1}{3} \times 972\pi = 324\pi \approx 1017.88 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Height} = 12 \text{ cm; volume} = 324\pi \approx 1017.88 \text{ cm}^3.$$

Câu 20

(Extended) Find the curved surface area of a cone with radius 6 cm and slant height 10 cm, in terms of π .

(A) $30\pi \text{ cm}^2$

(B) $36\pi \text{ cm}^2$

(C) $60\pi \text{ cm}^2$

(D) $120\pi \text{ cm}^2$

Lời giải chi tiết

$$CSA = \pi r l = \pi(6)(10) = 60\pi \text{ cm}^2 \approx 188.50 \text{ cm}^2. \text{ (C).}$$

Câu 21

(Extended) A cone has height 24 cm and volume $200\pi \text{ cm}^3$. Find its radius.

Lời giải chi tiết

$$200\pi = \frac{1}{3}\pi r^2(24) = 8\pi r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{200}{8} = 25 \Rightarrow r = 5 \text{ cm. Radius} = 5 \text{ cm.}$$

Câu 22

(Extended) Find the volume of a sphere of radius 3 cm, in terms of π .

(A) $36\pi \text{ cm}^3$

(B) $12\pi \text{ cm}^3$

(C) $27\pi \text{ cm}^3$

(D) $108\pi \text{ cm}^3$

Lời giải chi tiết

$$V = \frac{4}{3}\pi(3)^3 = \frac{4}{3}\pi(27) = 36\pi \text{ cm}^3 \approx 113.10 \text{ cm}^3. \text{ (A).}$$

Câu 23

(Extended) A sphere has surface area $324\pi \text{ cm}^2$. Find (a) its radius, and (b) its volume, in terms of π .

Lời giải chi tiết

$$(a) 4\pi r^2 = 324\pi \Rightarrow r^2 = 81 \Rightarrow r = 9 \text{ cm.}$$

$$(b) V = \frac{4}{3}\pi(9)^3 = \frac{4}{3}\pi(729) = 972\pi \approx 3053.63 \text{ cm}^3.$$

$$\text{Radius} = 9 \text{ cm; volume} = 972\pi \approx 3053.63 \text{ cm}^3.$$

Câu 24

(Extended) A pyramid has a square base of side 8 cm and perpendicular height 15 cm. Find its volume.

(A) 160 cm^3

(B) 320 cm^3

(C) 640 cm^3

(D) 960 cm^3

Lời giải chi tiết

$$\text{Base area} = 8^2 = 64 \text{ cm}^2. V = \frac{1}{3}(64)(15) = \frac{1}{3}(960) = 320 \text{ cm}^3. \text{ (B).}$$

Câu 25

(Extended) A solid consists of a cone of radius 6 cm and height 8 cm, joined base-to-base with a hemisphere of radius 6 cm (like an ice-cream cone). Find (a) the total volume, and (b) the total surface area, both in terms of π .

Lời giải chi tiết

Slant height of the cone: $l^2 = r^2 + h^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 \Rightarrow l = 10$ cm.

(a) Cone volume = $\frac{1}{3}\pi(6)^2(8) = 96\pi$. Hemisphere volume = $\frac{2}{3}\pi(6)^3 = \frac{2}{3}\pi(216) = 144\pi$. Total volume = $96\pi + 144\pi = 240\pi \approx 753.98 \text{ cm}^3$.

(b) Cone curved surface = $\pi rl = \pi(6)(10) = 60\pi$. Hemisphere curved surface = $2\pi r^2 = 2\pi(36) = 72\pi$. The flat circular face where the two solids meet is internal and not counted. Total surface area = $60\pi + 72\pi = 132\pi \approx 414.69 \text{ cm}^2$.

Volume = $240\pi \approx 753.98 \text{ cm}^3$; **surface area** = $132\pi \approx 414.69 \text{ cm}^2$.

Câu 26

(Extended) A solid cylinder of radius 3 cm and height 20 cm is topped by a solid hemisphere of radius 3 cm. Find the total volume, in terms of π .

(A) $180\pi \text{ cm}^3$

(C) $198\pi \text{ cm}^3$

(B) $189\pi \text{ cm}^3$

(D) $216\pi \text{ cm}^3$

Lời giải chi tiết

Cylinder volume = $\pi(3)^2(20) = 180\pi$. Hemisphere volume = $\frac{2}{3}\pi(3)^3 = \frac{2}{3}\pi(27) = 18\pi$. Total = $180\pi + 18\pi = 198\pi \text{ cm}^3 \approx 622.04 \text{ cm}^3$. **(C)**.

Câu 27

(Extended) A metal sphere of radius 6 cm is melted down and recast, without any loss of material, into a solid cone with the same base radius, 6 cm. Find the height of the cone.

Lời giải chi tiết

Sphere volume = $\frac{4}{3}\pi(6)^3 = \frac{4}{3}\pi(216) = 288\pi \text{ cm}^3$. Setting this equal to the cone's volume with $r = 6$:

$$\frac{1}{3}\pi(6)^2h = 288\pi \Rightarrow 12\pi h = 288\pi \Rightarrow h = 24 \text{ cm}.$$

Height of the cone = 24 cm.

Câu 28

Convert 3.2 m^2 into cm^2 .

(A) 3.2 cm^2

(C) $32\,000 \text{ cm}^2$

(B) 3200 cm^2

(D) $320\,000 \text{ cm}^2$

Lời giải chi tiết

Since $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$: $3.2 \times 10\,000 = 32\,000 \text{ cm}^2$. **(C)**.

Câu 29

Convert $4\,500\,000\text{ cm}^3$ into m^3 .

(A) 450 m^3

(C) 45 m^3

(B) 4.5 m^3

(D) 0.45 m^3

Lời giải chi tiết

Since $1\text{ m}^3 = 1\,000\,000\text{ cm}^3$: $4\,500\,000 \div 1\,000\,000 = 4.5\text{ m}^3$. **(B)**.

Câu 30

A rectangular storage block has dimensions $2.5\text{ m} \times 1.4\text{ m} \times 0.8\text{ m}$. (a) Find its volume in m^3 .
(b) Convert this volume into cm^3 .

Lời giải chi tiết

(a) $V = 2.5 \times 1.4 \times 0.8 = 2.8\text{ m}^3$.

(b) Since $1\text{ m}^3 = 1\,000\,000\text{ cm}^3$: $2.8 \times 1\,000\,000 = 2\,800\,000\text{ cm}^3$.

Volume $= 2.8\text{ m}^3 = 2\,800\,000\text{ cm}^3$.

Câu 31

A cylindrical metal rod has radius 3.5 mm and length 2 cm . Find its volume in mm^3 , correct to 3 significant figures, and then state the volume in cm^3 to the same accuracy.

Lời giải chi tiết

Length $= 2\text{ cm} = 20\text{ mm}$.

$$V = \pi r^2 h = \pi(3.5)^2(20) = \pi(12.25)(20) = 245\pi \approx 769.69\text{ mm}^3 \approx 770\text{ mm}^3 \text{ (3 s.f.)}.$$

Since $1\text{ cm}^3 = 1000\text{ mm}^3$: $769.69 \div 1000 \approx 0.770\text{ cm}^3$ (3 s.f.). **Volume** $\approx 770\text{ mm}^3 \approx 0.770\text{ cm}^3$.

Câu 32

To convert an area given in cm^2 into m^2 , which operation should be used?

(A) Divide by 100

(C) Divide by 10 000

(B) Divide by 1000

(D) Multiply by 10 000

Lời giải chi tiết

Since $1\text{ m} = 100\text{ cm}$, squaring both sides gives $1\text{ m}^2 = 100^2\text{ cm}^2 = 10\,000\text{ cm}^2$; converting from cm^2 (smaller unit) to m^2 (larger unit) therefore requires **dividing by** 10 000. **(C)**.

Trigonometry

Mục tiêu Unit: Định lý Pythagoras và tỉ số lượng giác trong tam giác vuông (SOHCAHTOA) – tìm cạnh và góc còn thiếu, kể cả trong hình ghép; góc nâng/góc hạ và phương vị ba chữ số (bearings), gồm phương vị ngược và bài toán kết hợp với định lý sin/cos; định lý sin và định lý cos (Extended) – khi nào dùng loại nào, trường hợp hai nghiệm (ambiguous case) của định lý sin, và công thức diện tích $\frac{1}{2}ab \sin C$; lượng giác không gian ba chiều (Extended) trong hình hộp và hình chóp; và đồ thị các hàm lượng giác $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$ (Extended) cùng cách giải phương trình lượng giác trong một khoảng cho trước.

6.1 Pythagoras' Theorem and Right-Angled Trigonometry

6.1.1 Pythagoras' theorem

For any right-angled triangle, the square of the **hypotenuse** (the longest side, opposite the right angle) equals the sum of the squares of the other two sides.

Pythagoras' theorem: for a right-angled triangle with legs a , b and hypotenuse c ,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

This works in *either* direction: given two sides, find the third; given all three sides, you can check whether a triangle is right-angled at all (if $c^2 = a^2 + b^2$ for the longest side c , the triangle is right-angled).

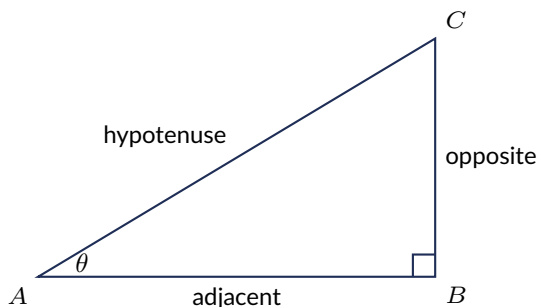
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Định lý Pythagoras chỉ áp dụng cho **tam giác vuông**: bình phương cạnh huyền (cạnh dài nhất, đối diện góc vuông) bằng tổng bình phương hai cạnh góc vuông. Có thể dùng công thức theo hai chiều: biết hai cạnh để tìm cạnh còn lại ($c = \sqrt{a^2 + b^2}$ hoặc $a = \sqrt{c^2 - b^2}$), hoặc biết cả ba cạnh để kiểm tra xem tam giác có vuông hay không.

6.1.2 SOHCAHTOA: trigonometric ratios in a right triangle

Once a triangle has a right angle, the three trigonometric ratios relate a chosen angle θ (not the right angle) to the three side lengths, always named **relative to θ** : the **opposite** side (across from θ), the **adjacent** side (next to θ , not the hypotenuse), and the **hypotenuse**.



Right angle at B . Relative to θ (at A): BC is opposite, AB is adjacent, AC is the hypotenuse.

SOHCAHTOA:

$$\sin \theta = \frac{\text{opposite}}{\text{hypotenuse}}, \quad \cos \theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypotenuse}}, \quad \tan \theta = \frac{\text{opposite}}{\text{adjacent}}.$$

To **find a missing side**: identify which two sides (from opp/adj/hyp) are involved, pick the matching ratio, and rearrange. To **find a missing angle**: form the ratio of the two *known* sides and apply the inverse function ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, or $\tan^{-1}$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

SOHCAHTOA là cách nhớ ba tỉ số lượng giác: **Sin** = Opposite/Hypotenuse, **Cos** = Adjacent/Hypotenuse, **Tan** = Opposite/Adjacent. Bước đầu tiên luôn là xác định góc θ đang xét, sau đó gọi tên đúng ba cạnh (đối/kề/huyền) *theo góc đó* – cùng một cạnh có thể là "đối" với góc này nhưng là "kề" với góc kia trong cùng một tam giác. Khi tìm cạnh: chọn tỉ số có chứa cạnh đã biết và cạnh cần tìm. Khi tìm góc: lập tỉ số hai cạnh đã biết rồi dùng hàm ngược ($\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$) trên máy tính.

Ví dụ mẫu 1 • Pythagoras

A 6.5 m ladder leans against a vertical wall, with its foot 2.5 m from the base of the wall. Find the height the ladder reaches up the wall.

The ladder is the hypotenuse. Height = $\sqrt{6.5^2 - 2.5^2} = \sqrt{42.25 - 6.25} = \sqrt{36} = \mathbf{6 \text{ m}}$.

Ví dụ mẫu 2 • Finding a missing angle

A right-angled triangle has an opposite side of 8 cm and an adjacent side of 15 cm (hypotenuse 17 cm, since $8^2 + 15^2 = 64 + 225 = 289 = 17^2$). Find the angle θ opposite the side of length 8 cm.

The two known sides relative to θ are opposite (8) and adjacent (15), so use tan:

$$\tan \theta = \frac{8}{15} = 0.5333 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0.5333) \approx \mathbf{28.1^\circ}.$$

Ví dụ mẫu 3 • Finding missing sides from an angle and the hypotenuse

A right-angled triangle has hypotenuse 20 cm and one angle of 35° . Find the two legs.

Opposite = $20 \sin 35^\circ = 20(0.5736) \approx \mathbf{11.47 \text{ cm}}$.

Adjacent = $20 \cos 35^\circ = 20(0.8192) \approx \mathbf{16.38 \text{ cm}}$.

Check: $11.47^2 + 16.38^2 \approx 131.6 + 268.3 = 399.9 \approx 20^2 = 400.$ ✓

(!) Lỗi thường gặp: Luôn giữ **giá trị chính xác chưa làm tròn** trong các bước tính trung gian (dùng nút ANS trên máy tính hoặc giữ nhiều chữ số thập phân); chỉ làm tròn ở bước trả lời cuối cùng theo yêu cầu đề bài (thường 3 chữ số có nghĩa hoặc 1 chữ số thập phân). Làm tròn quá sớm – ví dụ làm tròn một góc trung gian trước khi dùng nó để tính cạnh tiếp theo – sẽ gây sai số tích lũy và dẫn đến đáp số cuối cùng sai lệch, dù cách làm đúng.

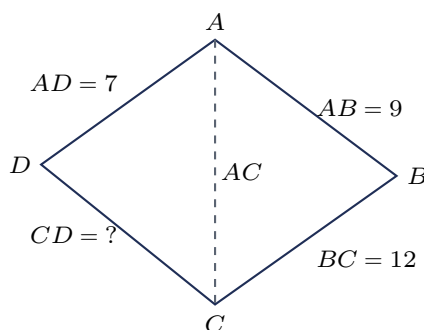
6.1.3 Compound figures: identifying the right triangle first

Many exam questions embed a right-angled triangle inside a larger, non-right-angled figure – a quadrilateral, a kite, or an irregular shape made of two right triangles sharing a common side. The

essential first step is **not** to apply a formula immediately, but to **redraw or mark** which right-angled triangle you actually need, and to notice any length that is shared between two triangles (very often a diagonal).

Strategy for compound figures

1. Locate every right angle marked in the diagram.
2. Look for a diagonal or line segment that is a side of two different right-angled triangles – this shared length is usually the key to linking the two triangles.
3. Solve the first right-angled triangle completely (often via Pythagoras) to find the shared length.
4. Use that shared length as a known side in the second right-angled triangle to finish the problem.



Quadrilateral $ABCD$ (diagram not to scale): right angles at B and D . The dashed diagonal AC is shared by right triangles ABC and ACD .

Ví dụ mẫu 4 · Compound figure

In quadrilateral $ABCD$, $\angle ABC = 90^\circ$ and $\angle ADC = 90^\circ$, with $AB = 12$ cm, $BC = 5$ cm, and $AD = 8$ cm. Find the length CD .

Step 1 (triangle ABC , right angle at B): the diagonal AC is the hypotenuse.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm.}$$

Step 2 (triangle ACD , right angle at D): now $AC = 13$ cm is the hypotenuse of this second triangle, and $AD = 8$ cm is a leg.

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{13^2 - 8^2} = \sqrt{169 - 64} = \sqrt{105} \approx \mathbf{10.25 \text{ cm.}}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong hình ghép, đừng vội áp dụng công thức ngay – hãy tìm **góc vuông** và **đường chéo chung** giữa hai tam giác vuông. Trong ví dụ trên, đường chéo AC vừa là cạnh huyền của tam giác ABC (tính được bằng Pythagoras: $AC = 13$), vừa là cạnh huyền của tam giác ACD (dùng để tìm CD). Kỹ năng cốt lõi là "chia nhỏ" hình phức tạp thành các tam giác vuông quen thuộc và giải tuần tự từng tam giác một.

6.2 Angles of Elevation and Depression, and Bearings

6.2.1 Angle of elevation and angle of depression

The **angle of elevation** is the angle measured *upward* from the horizontal to a point above the observer. The **angle of depression** is the angle measured *downward* from the horizontal to a point below the observer. When one observer looks up at another who looks down (e.g., from the top of a cliff to a boat), the angle of elevation from the lower point and the angle of depression from the higher point are **equal**, because the horizontal lines at each point are parallel and the line of sight is a transversal (alternate angles).

Angle of elevation (looking up) = angle of depression (looking down), for the *same* line of sight between two points, because the two horizontal reference lines are parallel.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Góc nâng (angle of elevation): đo từ đường nằm ngang lên trên tới vật ở cao hơn. **Góc hạ (angle of depression):** đo từ đường nằm ngang xuống dưới tới vật ở thấp hơn. Vì hai đường nằm ngang tại hai điểm quan sát luôn song song, góc nâng nhìn từ điểm thấp và góc hạ nhìn từ điểm cao (trên cùng một đường ngắm) luôn **bằng nhau** (góc so le trong).

Ví dụ mẫu 5 • Angle of elevation

From a point on level ground 50 m from the base of a tower, the angle of elevation to the top of the tower is 34° . Find the height of the tower.

$$h = 50 \tan 34^\circ = 50(0.6745) \approx \mathbf{33.7 \text{ m.}}$$

Ví dụ mẫu 6 • Angle of depression

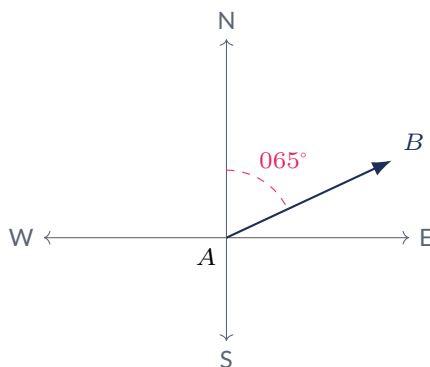
From a helicopter hovering 55 m above the ground, the angle of depression to a parked car is 12° . Find the horizontal distance from a point directly below the helicopter to the car.

By alternate angles, the angle of elevation from the car to the helicopter is also 12° .

$$d = \frac{55}{\tan 12^\circ} = \frac{55}{0.2126} \approx \mathbf{258.7 \text{ m.}}$$

6.2.2 Three-figure bearings

A **bearing** gives a direction as an angle measured **clockwise from north**, always written using **three digits** (e.g., **065°**, not 65°), so that all bearings from 000° to 360° have the same number of digits and cannot be misread.



The bearing of B from A is 065° : the clockwise angle from north to the line AB .

Back bearing (reverse bearing): the bearing of A from B is obtained from the bearing of B from A by adding 180° if the original bearing is less than 180° , or subtracting 180° if it is 180° or more (so the result always stays within 000° – 360°).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Phương vị (bearing) luôn là góc đo theo chiều kim đồng hồ tính từ hướng Bắc, viết bằng đúng 3 chữ số (ví dụ 065° chứ không viết 65°). **Phương vị ngược (back bearing):** nếu phương vị của B từ A nhỏ hơn 180° thì cộng thêm 180° để được phương vị của A từ B ; nếu từ 180° trở lên thì trừ đi 180° . Mẹo nhớ: hai hướng ngược nhau luôn lệch nhau đúng 180° .

(!) Lỗi thường gặp: Hai lỗi thường gặp với bearings: (1) quên viết đủ 3 chữ số – phương vị 8° phải viết là 008° ; (2) nhầm **bearing** (đo theo chiều kim đồng hồ từ hướng Bắc) với góc thông thường trong lượng giác toạ độ (đo ngược chiều kim đồng hồ từ trục hoành/hướng Đông). Khi chuyển bearing sang thành phần Bắc–Nam/Đông–Tây, hãy vẽ hình và xác định rõ góc đó nằm ở góc phần tư nào so với hướng Bắc, thay vì áp dụng công thức một cách máy móc.

Ví dụ mẫu 7 · Bearings and displacement components

A ship sails 80 km from port P on a bearing of 070° to reach port Q . Find how far east and how far north Q is from P .

The bearing 070° is measured clockwise from north, so the eastward component uses $\sin$ and the northward component uses $\cos$ (relative to north):

$$\text{East} = 80 \sin 70^\circ = 80(0.9397) \approx \mathbf{75.2 \text{ km}}, \quad \text{North} = 80 \cos 70^\circ = 80(0.3420) \approx \mathbf{27.4 \text{ km}}.$$

Ví dụ mẫu 8 · Bearings combined with the cosine rule (Extended)

A ship sails 50 km from port P on a bearing of 050° to reach point Q , then sails 65 km from Q on a bearing of 130° to reach point R . Find (a) the distance PR , and (b) the bearing of R from P .

(a) Finding the interior angle at Q . The bearing of P from Q (the back bearing) is $050^\circ + 180^\circ = 230^\circ$. The bearing of R from Q is 130° . So the angle PQR between QP and QR is

$$\angle PQR = 230^\circ - 130^\circ = 100^\circ.$$

Now apply the cosine rule in triangle PQR :

$$PR^2 = PQ^2 + QR^2 - 2(PQ)(QR) \cos(\angle PQR) = 50^2 + 65^2 - 2(50)(65) \cos 100^\circ.$$

$$PR^2 = 2500 + 4225 - 6500(-0.1736) = 6725 + 1128.7 = 7853.7 \Rightarrow PR \approx \mathbf{88.6 \text{ km}}.$$

(b) Bearing of R from P . Use the sine rule to find $\angle QPR$:

$$\frac{\sin(\angle QPR)}{QR} = \frac{\sin(\angle PQR)}{PR} \Rightarrow \sin(\angle QPR) = \frac{65 \sin 100^\circ}{88.6} = \frac{64.0}{88.6} \approx 0.7224 \Rightarrow \angle QPR \approx 46.3^\circ.$$

Since R lies on the clockwise (eastward) side of the line PQ as seen from P , the bearing of R from P is the bearing of Q from P plus this angle:

$$\text{Bearing of } R \text{ from } P = 050^\circ + 46.3^\circ \approx \mathbf{096^\circ}.$$

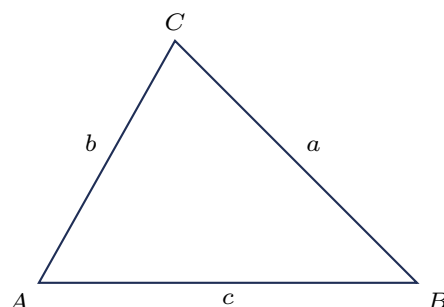
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán bearing kết hợp định lý cos: bước quan trọng nhất là tìm **góc trong của tam giác** tại đỉnh có hai đoạn đường gặp nhau, bằng cách lấy **phương vị ngược** của đoạn trước trừ đi phương vị của đoạn sau (hoặc ngược lại, tùy hình vẽ) để ra góc xen giữa hai cạnh đã biết – từ đó dùng định lý cos như bình thường. Sau khi tính được cạnh còn lại, dùng định lý sin để tìm góc tại điểm xuất phát, rồi **cộng hoặc trừ** góc đó vào phương vị ban đầu (dựa vào hình vẽ để biết cộng hay trừ) để ra phương vị cuối cùng.

6.3 The Sine Rule and Cosine Rule (Extended)

For a general triangle (not necessarily right-angled), label each side with the lowercase letter of the angle it is *opposite*: side a opposite angle A , side b opposite B , side c opposite C .



Side a is opposite angle A , side b opposite B , side c opposite C .

Sine rule:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

Cosine rule:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\text{and cyclic versions for } b^2, c^2).$$

$$\text{Rearranged to find an angle: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Area of any triangle:

$$\text{Area} = \frac{1}{2}ab \sin C$$

(using two sides and the angle *between* them).

Which rule do I use?

- Two sides + the included angle (SAS), or all three sides (SSS): use the cosine rule.
- Two angles + any side, or two sides + a non-included angle: use the sine rule.
- Two sides + the included angle: the area formula $\frac{1}{2}ab \sin C$ applies directly – no need to find the height.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc chọn công thức: biết **2 cạnh + góc xen giữa (SAS)** hoặc **3 cạnh (SSS)** → dùng **định lý cos**. Biết **2 góc + 1 cạnh bất kỳ**, hoặc **2 cạnh + 1 góc không xen giữa** → dùng **định lý sin**. Diện tích tam giác khi biết 2 cạnh và góc xen giữa: $\frac{1}{2}ab \sin C$ – không cần tính đường cao.

Ví dụ mẫu 9 • Cosine rule, SAS

Triangle with $a = 7$ cm, $b = 9$ cm, included angle $C = 52^\circ$. Find c and the area.

$$c^2 = 7^2 + 9^2 - 2(7)(9) \cos 52^\circ = 130 - 126(0.6157) = 130 - 77.6 = 52.4 \Rightarrow c \approx \mathbf{7.24 \text{ cm.}}$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(7)(9) \sin 52^\circ = 31.5(0.7880) \approx \mathbf{24.8 \text{ cm}^2}.$$

Ví dụ mẫu 10 • Sine rule

Triangle ABC with $A = 40^\circ$, $a = 10$ cm, $B = 65^\circ$. Find side b .

$$\frac{b}{\sin 65^\circ} = \frac{10}{\sin 40^\circ} \Rightarrow b = \frac{10 \times 0.9063}{0.6428} \approx \mathbf{14.10 \text{ cm.}}$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Hai ví dụ trên minh họa rõ sự khác biệt: Ví dụ mẫu 9 cho **2 cạnh + góc xen giữa** (a , b , và góc C nằm giữa chúng) nên dùng **định lý cos** để tìm cạnh còn lại, sau đó dùng luôn công thức diện tích $\frac{1}{2}ab \sin C$ mà không cần tìm đường cao. Ví dụ mẫu 10 cho **2 góc + 1 cạnh** nên dùng **định lý sin** – lưu ý luôn tìm góc thứ ba bằng 180° trừ tổng hai góc đã biết trước khi lập tỉ lệ.

6.3.1 The ambiguous case of the sine rule (Extended)

When you are given **two sides and a non-included angle** (an angle that is *not* between the two given sides), the sine rule can produce **two** different valid triangles. This happens because $\sin \theta = \sin(180^\circ - \theta)$ – once you find $\sin B$, both B and $180^\circ - B$ are mathematically possible, and you must check whether each is geometrically valid (i.e., whether the three angles of the resulting triangle still sum to 180°).

Ambiguous case: given angle A and sides a (opposite A) and b , if $b \sin A < a < b$, **two** triangles exist. Find $\sin B = \frac{b \sin A}{a}$, then compute **both** $B_1 = \sin^{-1}(\dots)$ and $B_2 = 180^\circ - B_1$; keep any solution for which $A + B < 180^\circ$.

Ví dụ mẫu 11 • Ambiguous case of the sine rule (Extended)

In triangle ABC , $A = 35^\circ$, $a = 6$ cm, $b = 9$ cm. Find all possible values of angle B , and solve each resulting triangle for angle C and side c .

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{9 \sin 35^\circ}{6} = \frac{9(0.5736)}{6} = \frac{5.162}{6} \approx 0.8604.$$

$$B_1 = \sin^{-1}(0.8604) \approx 59.4^\circ \quad \text{or} \quad B_2 = 180^\circ - 59.4^\circ = 120.6^\circ.$$

Check validity: $A + B_1 = 35^\circ + 59.4^\circ = 94.4^\circ < 180^\circ$ ✓; $A + B_2 = 35^\circ + 120.6^\circ = 155.6^\circ < 180^\circ$

✓ – **both** triangles are valid.

Triangle 1 ($B = 59.4^\circ$): $C_1 = 180^\circ - 35^\circ - 59.4^\circ = 85.6^\circ$.

$$c_1 = \frac{a \sin C_1}{\sin A} = \frac{6 \sin 85.6^\circ}{\sin 35^\circ} = \frac{6(0.9970)}{0.5736} \approx \mathbf{10.43 \text{ cm.}}$$

Triangle 2 ($B = 120.6^\circ$): $C_2 = 180^\circ - 35^\circ - 120.6^\circ = 24.4^\circ$.

$$c_2 = \frac{a \sin C_2}{\sin A} = \frac{6 \sin 24.4^\circ}{\sin 35^\circ} = \frac{6(0.4131)}{0.5736} \approx \mathbf{4.32 \text{ cm}}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trường hợp **hai nghiệm (ambiguous case)** xảy ra khi đề cho **2 cạnh + 1 góc không xen giữa**: sau khi tính $\sin B$, luôn có **hai** giá trị góc thỏa mãn (B_1 nhọn và $B_2 = 180^\circ - B_1$ tù), vì $\sin$ của một góc nhọn và góc tù bù nó luôn bằng nhau. Phải kiểm tra **cả hai** bằng cách cộng với góc A đã cho: nếu tổng vẫn nhỏ hơn 180° thì nghiệm đó hợp lệ (tam giác tồn tại được). Đừng chỉ lấy nghiệm góc nhọn duy nhất từ máy tính rồi bỏ qua nghiệm còn lại.

Ví dụ mẫu 12 • Area formula

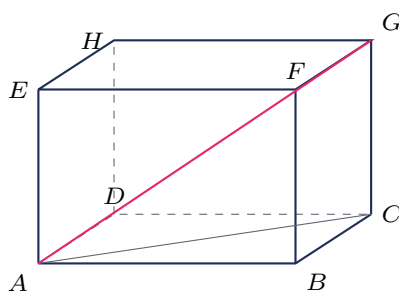
Triangle with sides $p = 15 \text{ cm}$, $q = 20 \text{ cm}$ and included angle $R = 110^\circ$. Find its area.

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(15)(20) \sin 110^\circ = 150(0.9397) \approx \mathbf{141.0 \text{ cm}^2}.$$

(!) Lỗi thường gặp: Chọn sai công thức là lỗi phổ biến nhất trong phần này. Hãy tự hỏi: đề bài cho **góc xen giữa hai cạnh đã biết** không? Nếu có (SAS) hoặc biết **cả 3 cạnh** (SSS) → **định lý cos**. Nếu góc đã biết **không nằm giữa** hai cạnh đã biết, hoặc đề cho **2 góc**, → **định lý sin**. Dùng nhầm định lý sin khi đề cho SAS sẽ không thể giải được vì không có cặp góc-cạnh đối diện nào đủ dữ kiện.

6.4 3D Trigonometry (Extended)

Right-angled trigonometry extends naturally into three dimensions, but the key skill is **identifying the correct right-angled triangle** hidden inside a solid – usually by first finding a diagonal of a flat face, then using that diagonal as one leg of a second right-angled triangle that includes a vertical edge.



Cuboid $ABCD-EFGH$. The base diagonal AC (thin grey) is the shared side linking right triangle ABC (in the base) to right triangle ACG (containing the space diagonal AG , in pink).

Strategy for 3D trigonometry

1. Find the diagonal of the relevant flat face (e.g., the base) using Pythagoras – this is a 2D calculation.
2. That face diagonal, together with a vertical edge, forms a *new* right-angled triangle standing

vertically inside the solid.

3. Apply Pythagoras or SOHCAHTOA in this new triangle to find the space diagonal or the required angle.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Bí quyết của lượng giác không gian: luôn tách hình 3D thành hai bước tam giác vuông 2D liên tiếp. Bước 1: tìm đường chéo của một mặt phẳng (thường là mặt đáy) bằng Pythagoras. Bước 2: đường chéo đó trở thành một cạnh của tam giác vuông mới, đứng thẳng trong không gian, kết hợp với một cạnh thẳng đứng của hình – từ tam giác mới này ta tìm được đường chéo không gian hoặc góc cần tìm.

Ví dụ mẫu 13 · Space diagonal of a cuboid (Extended)

A cuboid $ABCD-EFGH$ has base edges $AB = 12$ cm and $BC = 5$ cm, and vertical edges of length 8 cm. Find (a) the length of the base diagonal AC , (b) the length of the space diagonal AG , and (c) the angle between AG and the base plane.

(a) In right triangle ABC (right angle at B):

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = \mathbf{13 \text{ cm.}}$$

(b) In right triangle ACG (right angle at C , since CG is vertical and AC lies in the base):

$$AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{13^2 + 8^2} = \sqrt{169 + 64} = \sqrt{233} \approx \mathbf{15.26 \text{ cm.}}$$

(c) The angle between AG and the base plane is the angle $\angle GAC$ between the diagonal and its projection AC onto the base:

$$\tan(\angle GAC) = \frac{CG}{AC} = \frac{8}{13} = 0.6154 \Rightarrow \angle GAC \approx \mathbf{31.6^\circ}.$$

Ví dụ mẫu 14 · Angle between a line and a plane in a pyramid (Extended)

A pyramid $VABCD$ has a square base $ABCD$ of side 10 cm, and apex V directly above the centre O of the base, with height $VO = 12$ cm. Find the angle between the slant edge VA and the base plane.

The foot of the perpendicular from V onto the base is O , so the required angle is $\angle VAO$. First find OA (half of the base diagonal):

$$AC = \sqrt{10^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \approx 14.142 \text{ cm} \Rightarrow OA = 7.071 \text{ cm.}$$

In right triangle VOA (right angle at O):

$$\tan(\angle VAO) = \frac{VO}{OA} = \frac{12}{7.071} \approx 1.6971 \Rightarrow \angle VAO \approx \mathbf{59.5^\circ}.$$

(As a by-product, $VA = \sqrt{12^2 + 7.071^2} = \sqrt{194.0} \approx 13.93 \text{ cm.}$)

6.4.1 The angle between two planes

The **angle between two planes** that meet along a line (an edge) is measured by drawing, in **each** plane, a line perpendicular to that shared edge at the **same** point, and finding the angle between

those two lines. For a pyramid, the angle between a triangular face and the base is found using the **apothem** (the perpendicular distance from the centre of the base to the midpoint of a base edge) together with the vertical height.

Ví dụ mẫu 15 · Angle between two planes (Extended)

Using the same pyramid as above (square base of side 10 cm, centre O , height $VO = 12$ cm), find the angle between a triangular face VBC and the base.

Let M be the midpoint of BC . Then OM is the apothem, perpendicular to BC , with $OM = 5$ cm (half the base side). VM is also perpendicular to BC (since $VO \perp$ base and VOM lies in the vertical plane through M), so the required angle is $\angle VMO$.

$$VM = \sqrt{VO^2 + OM^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13 \text{ cm.}$$

$$\tan(\angle VMO) = \frac{VO}{OM} = \frac{12}{5} = 2.4 \Rightarrow \angle VMO \approx 67.4^\circ.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

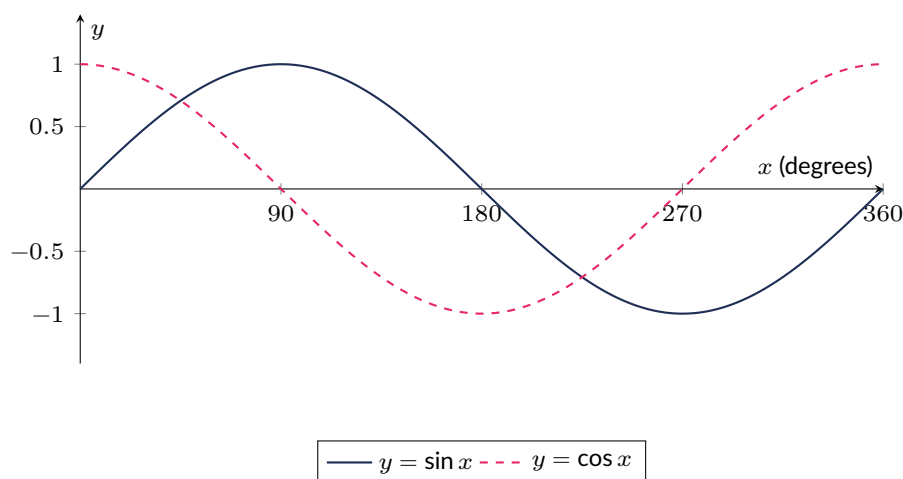
VN

Góc giữa hai mặt phẳng được đo bằng cách dựng, **trong mỗi mặt phẳng**, một đường thẳng vuông góc với **giao tuyến chung** tại **cùng một điểm**, rồi tìm góc giữa hai đường đó. Với hình chóp, góc giữa một mặt bên và mặt đáy thường dùng **trung đoạn** (apothem – khoảng cách từ tâm đáy đến trung điểm một cạnh đáy) kết hợp với chiều cao hình chóp để tạo ra một tam giác vuông mới, hoàn toàn giống chiến lược "tách hình 3D thành hai bước" đã học ở trên.

6.5 Graphs of Trigonometric Functions (Extended)

6.5.1 Shape, period, and amplitude

The graphs of $y = \sin x$, $y = \cos x$, and $y = \tan x$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$ (and beyond) are periodic: they repeat the same pattern indefinitely.



Graphs of $y = \sin x$ and $y = \cos x$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$: both have period 360° and amplitude 1; the cosine graph is the sine graph shifted 90° to the left.

- $y = \sin x$: period 360° , amplitude 1, range $-1 \leq y \leq 1$. Key points: $(0^\circ, 0)$, $(90^\circ, 1)$, $(180^\circ, 0)$, $(270^\circ, -1)$, $(360^\circ, 0)$.
- $y = \cos x$: period 360° , amplitude 1, range $-1 \leq y \leq 1$. Key points: $(0^\circ, 1)$, $(90^\circ, 0)$, $(180^\circ, -1)$, $(270^\circ, 0)$, $(360^\circ, 1)$.
- $y = \tan x$: period 180° , **no** amplitude (unbounded range), with **vertical asymptotes** at $x = 90^\circ$ and $x = 270^\circ$ (where $\cos x = 0$). Key points: $(0^\circ, 0)$, $(45^\circ, 1)$, $(135^\circ, -1)$, $(180^\circ, 0)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Đồ thị $y = \sin x$ và $y = \cos x$ có **chu kỳ** 360° và **biên độ** 1 (giá trị dao động từ -1 đến 1); đồ thị $\cos$ chính là đồ thị $\sin$ dịch sang trái 90° . Đồ thị $y = \tan x$ có **chu kỳ ngắn hơn, chỉ** 180° , không có biên độ (giá trị có thể lớn vô hạn), và có **đường tiệm cận đứng** tại $x = 90^\circ$ và $x = 270^\circ$ – những nơi $\cos x = 0$ khiến $\tan x = \sin x / \cos x$ không xác định. Ghi nhớ các điểm mốc (giá trị $0, 1, -1$) để vẽ nhanh và chính xác.

6.5.2 Solving trigonometric equations within a given range

Because $\sin$, $\cos$, and $\tan$ are periodic, a simple equation like $\sin x = 0.5$ has **more than one** solution within a stated range such as $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$. The calculator's inverse function only ever returns **one** solution (the “principal value”); the second solution must be found using the symmetry of the graph.

For $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$, if the calculator gives a principal value $\alpha = \sin^{-1}(k)$, $\cos^{-1}(k)$, or $\tan^{-1}(k)$:

- $\sin x = k$ ($k > 0$): solutions $x = \alpha$ and $x = 180^\circ - \alpha$. ($k < 0$: solutions $x = 180^\circ + |\alpha|$ and $x = 360^\circ - |\alpha|$.)
- $\cos x = k$ ($k > 0$): solutions $x = \alpha$ and $x = 360^\circ - \alpha$. ($k < 0$: solutions $x = 180^\circ - |\alpha|$ and $x = 180^\circ + |\alpha|$.)
- $\tan x = k$ ($k > 0$): solutions $x = \alpha$ and $x = 180^\circ + \alpha$. ($k < 0$: solutions $x = 180^\circ - |\alpha|$ and $x = 360^\circ - |\alpha|$.)

Ví dụ mẫu 16 • Solving $\sin x = k$ in a range (Extended)

Solve $\sin x = 0.5$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Principal value: $x = \sin^{-1}(0.5) = 30^\circ$. Since $\sin$ is positive in both the first and second quadrants, the second solution is $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$.

$$x = 30^\circ \text{ or } x = 150^\circ.$$

Ví dụ mẫu 17 • Solving $\cos x = k$ in a range, negative k (Extended)

Solve $\cos x = -0.3$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Reference angle: $\cos^{-1}(0.3) \approx 72.5^\circ$. Since $\cos x$ is negative in the second and third quadrants:

$$x = 180^\circ - 72.5^\circ = 107.5^\circ \quad \text{or} \quad x = 180^\circ + 72.5^\circ = 252.5^\circ.$$

Ví dụ mẫu 18 • Solving $\tan x = k$ in a range (Extended)

Solve $\tan x = 1.5$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Principal value: $x = \tan^{-1}(1.5) \approx 56.3^\circ$. Since $\tan$ is positive in the first and third quadrants,

the second solution is $180^\circ + 56.3^\circ$.

$$x = 56.3^\circ \quad \text{or} \quad x = 236.3^\circ.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Cách xử lý chung cho cả ba ví dụ trên: (1) dùng máy tính lấy **giá trị chính** α (principal value) từ hàm ngược; (2) xác định **dấu** của k và các góc phần tư (quadrant) mà tại đó hàm lượng giác mang dấu đó (sin dương ở góc phần tư 1, 2; cos dương ở 1, 4; tan dương ở 1, 3); (3) dùng công thức góc liên quan ($180^\circ - \alpha$, $180^\circ + \alpha$, hoặc $360^\circ - \alpha$ tùy góc phần tư) để tìm nghiệm thứ hai. Luôn kiểm tra lại cả hai nghiệm có nằm trong khoảng đề bài cho hay không.

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi nghiêm trọng và rất phổ biến: chỉ ghi **một** nghiệm từ máy tính (giá trị chính – principal value) rồi dừng lại, quên mất nghiệm thứ hai trong khoảng cho trước. Với $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$, phương trình $\sin x = k$ hoặc $\cos x = k$ ($0 < |k| < 1$) **luôn có đúng 2 nghiệm** (trừ khi $k = \pm 1$, chỉ có 1 nghiệm), còn $\tan x = k$ cũng luôn có đúng 2 nghiệm cách nhau 180° . Hãy luôn tự hỏi "còn nghiệm nào khác trong khoảng này nữa không?" trước khi kết luận.

6.6 Problem Bank

Bài 1

A right-angled triangle has legs 9 cm and 12 cm. Find the length of the hypotenuse.

(A) 15 cm

(C) 10.5 cm

(B) 21 cm

(D) 225 cm

Lời giải – Bài 1

Hypotenuse = $\sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ cm. **(A).**

Bài 2

A right-angled triangle has hypotenuse 13 cm and one leg 5 cm. (a) Find the other leg. (b) Find the angle opposite the side of length 12. (c) Find the angle opposite the side of length 5.

Lời giải – Bài 2

(a) Other leg = $\sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12$ cm.

(b) The angle opposite 12 has adjacent side 5 and opposite side 12: $\tan \theta = \frac{12}{5} = 2.4 \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(2.4) \approx 67.4^\circ$.

(c) The angle opposite 5: $\sin \phi = \frac{5}{13} = 0.3846 \Rightarrow \phi \approx 22.6^\circ$. (Check: $67.4^\circ + 22.6^\circ = 90^\circ$ ✓)

Bài 3

Quadrilateral $ABCD$ has $\angle ABC = 90^\circ$ and $\angle ADC = 90^\circ$, with $AB = 9$ cm, $BC = 12$ cm, $AD = 7$ cm. Find CD .

Lời giải – Bài 3

Diagonal $AC = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = 15$ cm. Then $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{15^2 - 7^2} = \sqrt{225 - 49} = \sqrt{176} \approx \mathbf{13.27}$ cm.

Bài 4

The angle of elevation to the top of a building, measured from a point 80 m from its base, is 27° . Find the height of the building.

(A) 40.8 m

(C) 80.0 m

(B) 36.3 m

(D) 43.2 m

Lời giải – Bài 4

$h = 80 \tan 27^\circ = 80(0.5095) \approx 40.8$ m. (A).

Bài 5

From a helicopter at a height of 500 m, the angle of depression to a landmark is 22° . Find (a) the horizontal distance from the point directly below the helicopter to the landmark, and (b) the straight-line (slant) distance from the helicopter to the landmark.

Lời giải – Bài 5

(a) $d = \frac{500}{\tan 22^\circ} = \frac{500}{0.4040} \approx \mathbf{1238}$ m.

(b) Slant distance $= \frac{500}{\sin 22^\circ} = \frac{500}{0.3746} \approx \mathbf{1335}$ m.

Bài 6

The bearing of town Y from town X is 118° . Find the bearing of X from Y.

(A) 298°

(C) 242°

(B) 062°

(D) 118°

Lời giải – Bài 6

Since $118^\circ < 180^\circ$, add 180° : bearing of X from Y $= 118^\circ + 180^\circ = 298^\circ$. (A).

Bài 7

A hiker walks 4 km from a starting point on a bearing of 032° , then 6 km on a bearing of 302° . Find (a) the distance back to the starting point, and (b) the bearing the hiker must walk to return directly to the start.

Lời giải – Bài 7

Working in components (East, North) from the start: leg 1 $= (4 \sin 32^\circ, 4 \cos 32^\circ) = (2.12, 3.39)$.

Leg 2 $= (6 \sin 302^\circ, 6 \cos 302^\circ) = (-5.09, 3.18)$ (since $\sin 302^\circ = -\sin 58^\circ$, $\cos 302^\circ = \cos 58^\circ$).

Total displacement from start: $(2.12 - 5.09, 3.39 + 3.18) = (-2.97, 6.57)$.

(a) Distance $= \sqrt{2.97^2 + 6.57^2} = \sqrt{8.82 + 43.19} = \sqrt{52.0} \approx \mathbf{7.21}$ km.

(b) The vector back to start is $(2.97, -6.57)$ (east-positive, north-negative), so the bearing lies between 090° and 180° : bearing $= 180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{2.97}{6.57}\right) = 180^\circ - 24.3^\circ \approx \mathbf{155.7^\circ}$.

Bài 8

From a port, ship 1 sails 34 km on a bearing of 210° , and (at the same time) ship 2 sails 50 km on a bearing of 130° . Find the distance between the two ships.

(A) 55.4 km

(C) 48.1 km

(B) 60.2 km

(D) 62.7 km

Lời giải – Bài 8

Angle between the bearings at the port $= 210^\circ - 130^\circ = 80^\circ$. By the cosine rule:

$$d^2 = 34^2 + 50^2 - 2(34)(50) \cos 80^\circ = 1156 + 2500 - 3400(0.1736) = 3656 - 590.4 = 3065.6.$$

$$d = \sqrt{3065.6} \approx 55.4 \text{ km. (A).}$$

Bài 9

(Extended) Given all three sides of a triangle (SSS), which rule should be applied first to find an angle?

(A) The cosine rule

(C) Pythagoras' theorem

(B) The sine rule

(D) The area formula $\frac{1}{2}ab \sin C$

Lời giải – Bài 9

With SSS there is no known angle to pair with the sine rule; the cosine rule (rearranged as $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$) is the only formula that uses three sides alone. (A).

Bài 10

(Extended) Triangle with sides $a = 8$ cm, $b = 10$ cm, $c = 13$ cm. Find the largest angle.

Lời giải – Bài 10

The largest angle is opposite the largest side, $c = 13$:

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{64 + 100 - 169}{2(8)(10)} = \frac{-5}{160} = -0.03125 \Rightarrow C \approx \mathbf{91.8^\circ}.$$

Bài 11

(Extended) Triangle ABC has $A = 72^\circ$, $C = 41^\circ$, and $c = 15$ cm (opposite C). Find (a) side a , and (b) side b .

Lời giải – Bài 11

$$B = 180^\circ - 72^\circ - 41^\circ = 67^\circ.$$

$$(a) a = \frac{c \sin A}{\sin C} = \frac{15 \sin 72^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{15(0.9511)}{0.6561} \approx \mathbf{21.75 \text{ cm.}}$$

$$(b) b = \frac{c \sin B}{\sin C} = \frac{15 \sin 67^\circ}{\sin 41^\circ} = \frac{15(0.9205)}{0.6561} \approx \mathbf{21.05 \text{ cm.}}$$

Bài 12

(Extended) Find the area of a triangle with sides 9 cm and 13 cm and included angle 65° .

(A) 53.0 cm^2

(C) 46.8 cm^2

(B) 58.5 cm^2

(D) 76.1 cm^2

Lời giải - Bài 12

$$\text{Area} = \frac{1}{2}(9)(13) \sin 65^\circ = 58.5(0.9063) \approx 53.0 \text{ cm}^2. \text{ (A).}$$

Bài 13

(Extended) In triangle ABC , $A = 28^\circ$, $a = 6 \text{ cm}$, $b = 11 \text{ cm}$. Find all possible values of angle B , and the corresponding values of C and side c .

Lời giải - Bài 13

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{11 \sin 28^\circ}{6} = \frac{11(0.4695)}{6} = \frac{5.164}{6} \approx 0.8607.$$

$B_1 = \sin^{-1}(0.8607) \approx 59.4^\circ$ or $B_2 = 180^\circ - 59.4^\circ = 120.6^\circ$. Both satisfy $A + B < 180^\circ$, so **two triangles exist**.

$$\text{Triangle 1: } B = 59.4^\circ, C = 180^\circ - 28^\circ - 59.4^\circ = 92.6^\circ, c = \frac{6 \sin 92.6^\circ}{\sin 28^\circ} = \frac{6(0.9990)}{0.4695} \approx \mathbf{12.77 \text{ cm.}}$$

$$\text{Triangle 2: } B = 120.6^\circ, C = 180^\circ - 28^\circ - 120.6^\circ = 31.4^\circ, c = \frac{6 \sin 31.4^\circ}{\sin 28^\circ} = \frac{6(0.5210)}{0.4695} \approx \mathbf{6.66 \text{ cm.}}$$

Bài 14

(Extended) A cuboid $ABCD-EFGH$ has base edges $AB = 9 \text{ cm}$, $BC = 12 \text{ cm}$, and vertical edges 8 cm (with F above B , G above C). Find (a) the base diagonal AC , (b) the space diagonal AG , and (c) the angle between AG and the base.

Lời giải - Bài 14

$$(a) AC = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{81 + 144} = \sqrt{225} = \mathbf{15 \text{ cm.}}$$

$$(b) CG = 8 \text{ cm (vertical edge). } AG = \sqrt{AC^2 + CG^2} = \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = \mathbf{17 \text{ cm.}}$$

$$(c) \tan(\angle GAC) = \frac{CG}{AC} = \frac{8}{15} = 0.5333 \Rightarrow \angle GAC \approx \mathbf{28.1^\circ}.$$

Bài 15

(Extended) A square-based pyramid has base side 8 cm and vertical height 15 cm (apex above the centre). Find the angle between a slant edge and the base.

(A) 69.3°

(C) 45.0°

(B) 61.7°

(D) 75.8°

Lời giải – Bài 15

Base diagonal = $8\sqrt{2} \approx 11.314$ cm, so half-diagonal = 5.657 cm. $\tan \theta = \frac{15}{5.657} \approx 2.6517 \Rightarrow \theta \approx 69.3^\circ$. **(A)**.

Bài 16

(Extended) Using the pyramid in Bài 15 (base side 8 cm, height 15 cm), find the angle between a triangular face and the base.

Lời giải – Bài 16

Apothem (centre to midpoint of a base edge) = 4 cm (half the base side). Slant height $VM = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{225 + 16} = \sqrt{241} \approx 15.52$ cm. The angle between the face and the base is

$$\tan \theta = \frac{15}{4} = 3.75 \Rightarrow \theta \approx 75.1^\circ.$$

Bài 17

(Extended) What is the period of $y = \tan x^\circ$?

- | | |
|------------------------|------------------------|
| (A) 90° | (C) 270° |
| (B) 180° | (D) 360° |

Lời giải – Bài 17

The tangent graph repeats every 180° , unlike sine and cosine which repeat every 360° . **(B)**.

Bài 18

(Extended) What is the amplitude of $y = 3 \cos x^\circ$?

- | | |
|--------------|----------------------|
| (A) 1 | (C) 0 |
| (B) 3 | (D) Undefined |

Lời giải – Bài 18

The amplitude is the coefficient multiplying the trigonometric function: amplitude = 3. **(B)**.

Bài 19

(Extended) Solve $\cos x = 0.65$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Lời giải – Bài 19

Principal value: $\cos^{-1}(0.65) \approx 49.5^\circ$. Since $\cos x > 0$ in quadrants 1 and 4:

$$x \approx 49.5^\circ \quad \text{or} \quad x = 360^\circ - 49.5^\circ \approx 310.5^\circ.$$

Bài 20

(Extended) Solve $\sin x = -0.42$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Lời giải – Bài 20

Reference angle: $\sin^{-1}(0.42) \approx 24.8^\circ$. Since $\sin x < 0$ in quadrants 3 and 4:

$$x = 180^\circ + 24.8^\circ \approx \mathbf{204.8^\circ} \quad \text{or} \quad x = 360^\circ - 24.8^\circ \approx \mathbf{335.2^\circ}.$$

Bài 21

(Extended) Solve $\tan x = -2.1$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Lời giải – Bài 21

Reference angle: $\tan^{-1}(2.1) \approx 64.5^\circ$. Since $\tan x < 0$ in quadrants 2 and 4:

$$x = 180^\circ - 64.5^\circ \approx \mathbf{115.5^\circ} \quad \text{or} \quad x = 360^\circ - 64.5^\circ \approx \mathbf{295.5^\circ}.$$

Bài 22

(Extended) How many solutions does the equation $\sin x = 0.3$ have for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$?

- (A) 0 (C) 2
(B) 1 (D) 4

Lời giải – Bài 22

Since $0 < 0.3 < 1$, the horizontal line $y = 0.3$ crosses the sine graph exactly twice in one full period (once in quadrant 1, once in quadrant 2). **(C)**.

Bài 23

From point P , the foot of a tower is on a bearing of 065° at a horizontal distance of 120 m, and the angle of elevation to the top of the tower is 20° . (a) Find the height of the tower. (b) Point Q is 200 m from P on a bearing of 130° . Find the horizontal (ground) distance from Q to the foot of the tower.

Lời giải – Bài 23

(a) Height = $120 \tan 20^\circ = 120(0.3640) \approx \mathbf{43.7 \text{ m}}$.

(b) Angle between the two bearings from P : $130^\circ - 65^\circ = 65^\circ$. By the cosine rule, with the two known sides 120 m and 200 m and included angle 65° :

$$d^2 = 200^2 + 120^2 - 2(200)(120) \cos 65^\circ = 40000 + 14400 - 48000(0.4226) = 54400 - 20286 \approx 34114.$$

$$d = \sqrt{34114} \approx \mathbf{184.7 \text{ m}}.$$

Bài 24

A plane flies on a bearing of 275° from airport A to airport B . What bearing must it fly to return directly from B to A ?

- (A) 095° (C) 275°
(B) 185° (D) 005°

Lời giải – Bài 24

Since $275^\circ \geq 180^\circ$, subtract 180° : $275^\circ - 180^\circ = 095^\circ$. **(A)**.

Bài 25

Two points C and D lie on level ground, in line with the base of a tower, with D being 30 m closer to the tower than C . The angle of elevation of the top of the tower is 25° from C and 40° from D . Find the height of the tower.

Lời giải – Bài 25

Let the height be h , and let the horizontal distances be $FC = h \cot 25^\circ$ and $FD = h \cot 40^\circ$ (F = foot of tower). Since $FC - FD = 30$:

$$h(\cot 25^\circ - \cot 40^\circ) = 30 \Rightarrow h(2.1445 - 1.1918) = 30 \Rightarrow h(0.9528) = 30.$$

$$h = \frac{30}{0.9528} \approx \mathbf{31.5 \text{ m.}}$$

Bài 26

(Extended) In triangle PQR , $p = 6$ cm, $q = 9$ cm, $r = 11$ cm. Find angle Q (opposite side q).

(A) 54.8°

(C) 41.2°

(B) 66.3°

(D) 59.0°

Lời giải – Bài 26

$$\cos Q = \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2pr} = \frac{36 + 121 - 81}{2(6)(11)} = \frac{76}{132} \approx 0.5758 \Rightarrow Q \approx 54.8^\circ.$$

(A).

Bài 27

(Extended) A triangular garden has two sides of length 18 m and 24 m with an included angle of 55° . Find (a) the area of the garden, (b) the length of the third side, and (c) the total cost of fencing all three sides at \$12 per metre.

Lời giải – Bài 27

(a) Area = $\frac{1}{2}(18)(24) \sin 55^\circ = 216(0.8192) \approx \mathbf{176.9 \text{ m}^2}$.

(b) Third side² = $18^2 + 24^2 - 2(18)(24) \cos 55^\circ = 324 + 576 - 864(0.5736) = 900 - 495.6 = 404.4$.
Third side = $\sqrt{404.4} \approx \mathbf{20.11 \text{ m}}$.

(c) Perimeter = $18 + 24 + 20.11 = 62.11$ m. Cost = $62.11 \times 12 \approx \mathbf{\$745.32}$.

Bài 28

A ship sails 15 km on a bearing of 200° . How far south has it travelled?

(A) 14.1 km

(C) 15.0 km

(B) 5.13 km

(D) 7.05 km

Lời giải – Bài 28

Bearing 200° is 20° past south (towards west). Southward distance $= 15 \cos 20^\circ = 15(0.9397) \approx 14.1$ km. **(A)**.

Bài 29

(Extended) Two hikers start at the same point O . Hiker A walks 5.2 km on a bearing of 048° ; hiker B walks 7.8 km on a bearing of 156° . Find (a) the distance between the two hikers, and (b) the bearing of hiker B from hiker A .

Lời giải – Bài 29

(a) Angle $AOB = 156^\circ - 48^\circ = 108^\circ$. By the cosine rule:

$$AB^2 = 5.2^2 + 7.8^2 - 2(5.2)(7.8) \cos 108^\circ = 27.04 + 60.84 - 81.12(-0.3090) = 87.88 + 25.07 = 112.95.$$

$$AB = \sqrt{112.95} \approx \mathbf{10.63 \text{ km}}.$$

(b) By the sine rule, $\sin(\angle OAB) = \frac{OB \sin(\angle AOB)}{AB} = \frac{7.8 \sin 108^\circ}{10.63} = \frac{7.42}{10.63} \approx 0.6980 \Rightarrow \angle OAB \approx 44.3^\circ$. The bearing of O from A is $48^\circ + 180^\circ = 228^\circ$; since B lies on the anticlockwise side of line AO as seen from A , the bearing of B from A is $228^\circ - 44.3^\circ \approx \mathbf{183.7^\circ}$.

Bài 30

(Extended) For the curve $y = 4 \cos x^\circ$: (a) state the period, (b) state the amplitude, (c) solve $4 \cos x = 2$ for $0^\circ \leq x \leq 360^\circ$.

Lời giải – Bài 30

(a) Period $= 360^\circ$.

(b) Amplitude $= 4$.

(c) $4 \cos x = 2 \Rightarrow \cos x = 0.5$. Principal value $= \cos^{-1}(0.5) = 60^\circ$; since $\cos x > 0$ in quadrants 1 and 4:

$$x = \mathbf{60^\circ} \quad \text{or} \quad x = 360^\circ - 60^\circ = \mathbf{300^\circ}.$$

Transformations and vectors

Mục tiêu Unit: Bốn phép biến hình cơ bản: đối xứng (reflection), quay (rotation), tịnh tiến (translation), phóng to (enlargement — kể cả tỉ số phân số và tỉ số âm là nội dung Extended); phối hợp hai phép biến hình và mô tả phép biến hình tương đương duy nhất (Extended); vectơ cột: độ dài, cộng/trừ, nhân vô hướng, vectơ song song; vectơ vị trí, chia đoạn thẳng theo tỉ số cho trước, và các bài chứng minh hình học bằng vectơ (Extended).

7.1 Reflection

7.1.1 Reflecting in horizontal and vertical mirror lines

A **reflection** maps every point of a shape to an image point on the opposite side of a fixed line, the **mirror line**, such that the mirror line is the perpendicular bisector of the segment joining every object point to its image. Reflection leaves lengths, angles, and area unchanged, but it reverses orientation: a shape and its reflected image are congruent but one is the “mirror image” of the other (a clockwise-labelled triangle becomes anticlockwise-labelled, and vice versa).

For mirror lines parallel to the axes, the coordinate rules are direct:

Reflection in the y -axis ($x = 0$): $(x, y) \rightarrow (-x, y)$.

Reflection in the x -axis ($y = 0$): $(x, y) \rightarrow (x, -y)$.

Reflection in the line $x = k$: $(x, y) \rightarrow (2k - x, y)$.

Reflection in the line $y = k$: $(x, y) \rightarrow (x, 2k - y)$.

Each rule follows the same idea: the coordinate perpendicular to the mirror line is unchanged, and the coordinate parallel to the direction being reflected is “flipped” about k , i.e. replaced by $2k$ minus itself (since k is exactly halfway between a point and its image).

Ví dụ mẫu 1 • Reflection in a vertical line

Triangle $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(1, 5)$ is reflected in the line $x = 3$. Find the coordinates of the image.

Rule: $x' = 2(3) - x = 6 - x$, $y' = y$.

$$A(1, 2) \rightarrow A'(5, 2), \quad B(4, 2) \rightarrow B'(2, 2), \quad C(1, 5) \rightarrow C'(5, 5).$$

Check: the midpoint of AA' is $(\frac{1+5}{2}, 2) = (3, 2)$, which indeed lies on $x = 3$. $\checkmark$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với đối xứng qua đường thẳng đứng $x = k$, hoành độ được “lật” quanh k theo công thức $x' = 2k - x$ (tung độ y giữ nguyên vì đường thẳng đứng không làm thay đổi độ cao của điểm). Cách kiểm tra nhanh: trung điểm của đoạn nối điểm gốc và điểm ảnh phải luôn nằm trên chính trục đối xứng — đây là cách tự kiểm tra kết quả rất hiệu quả khi làm bài.

7.1.2 Reflecting in the diagonal lines $y = x$ and $y = -x$

Two further mirror lines appear frequently on the coordinate grid: the diagonals $y = x$ and $y = -x$.

Reflection in $y = x$: $(x, y) \rightarrow (y, x)$ – the coordinates simply swap places.

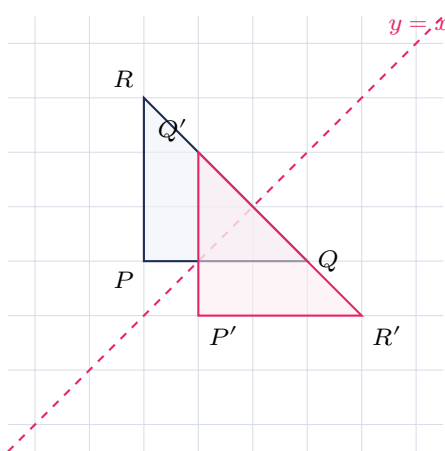
Reflection in $y = -x$: $(x, y) \rightarrow (-y, -x)$ – the coordinates swap places *and* both change sign.

Ví dụ mẫu 2 • Reflection in $y = x$

Triangle $P(1, 2)$, $Q(4, 2)$, $R(1, 5)$ is reflected in the line $y = x$. Find the image.

Rule: swap the coordinates, $(x, y) \rightarrow (y, x)$.

$$P(1, 2) \rightarrow P'(2, 1), \quad Q(4, 2) \rightarrow Q'(2, 4), \quad R(1, 5) \rightarrow R'(5, 1).$$



Reflection of $\triangle PQR$ in the mirror line $y = x$: each coordinate pair simply swaps.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với đường chéo $y = x$, phép đối xứng chỉ đơn giản là **hoán đổi hoành độ và tung độ**: $(x, y) \rightarrow (y, x)$. Với đường chéo $y = -x$, ta hoán đổi và đổi dấu cả hai tọa độ: $(x, y) \rightarrow (-y, -x)$. Học sinh nên nhớ hai quy tắc này bằng cách thử với một điểm đơn giản, ví dụ $(1, 0)$: qua $y = x$ cho $(0, 1)$; qua $y = -x$ cho $(0, -1)$ – vẽ nhanh trên giấy kẻ ô để kiểm tra trực giác.

7.1.3 Describing a reflection fully

On an examination, describing a single transformation is only awarded full marks when every required piece of information is stated. For a reflection, this means naming the transformation *and* giving the equation of the mirror line.

Ví dụ mẫu 3 • Describing a reflection fully

Triangle $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(1, 3)$ maps onto $A'(1, 5)$, $B'(4, 5)$, $C'(1, 3)$. Describe fully the single transformation that maps ABC onto $A'B'C'$.

Each x -coordinate is unchanged ($1 \rightarrow 1$, $4 \rightarrow 4$, $1 \rightarrow 1$), so the mirror line must be horizontal, of the form $y = k$. Using A : $y' = 2k - y \Rightarrow 5 = 2k - 1 \Rightarrow k = 3$. Check with B : $2(3) - 1 = 5$ ✓

Check with C : $2(3) - 3 = 3$ ✓ – indeed C is unchanged because C already lies on the mirror line.

Answer: reflection in the line $y = 3$.

(!) Lỗi thường gặp: Một lỗi rất phổ biến khi **mô tả phép biến hình** là chỉ nêu tên phép biến hình mà quên các thông số bắt buộc đi kèm – dù học sinh vẽ đúng hình. Bảng ghi nhớ: **đối xứng (reflection)** cần phương trình **đầy đủ** của trục đối xứng (không chỉ nói "trục dọc" mà phải là " $x = 3$ "); **quay (rotation)** cần **cả ba** yếu tố tâm quay, góc quay, và chiều quay; **tịnh tiến (translation)** cần vectơ tịnh tiến dạng cột; **phóng to (enlargement)** cần cả tâm và tỉ số. Thiếu một thông số bất kỳ, dù kết quả hình vẽ đúng, vẫn bị trừ điểm.

7.2 Rotation

7.2.1 Rotation about the origin

A **rotation** turns every point of a shape through a fixed angle, in a fixed direction (clockwise or anticlockwise), about a fixed **centre of rotation**. Like reflection, rotation preserves lengths and angles (it is congruent), but unlike reflection it preserves orientation – a clockwise-labelled shape stays clockwise-labelled.

About the origin O :

90° **clockwise**: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$.

90° **anticlockwise**: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$.

180° (either direction): $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$.

Ví dụ mẫu 4 • Rotation about the origin

Triangle $A(2, 1)$, $B(5, 1)$, $C(2, 4)$ is rotated 90° clockwise about the origin. Find the image.

Rule: $(x, y) \rightarrow (y, -x)$.

$$A(2, 1) \rightarrow A'(1, -2), \quad B(5, 1) \rightarrow B'(1, -5), \quad C(2, 4) \rightarrow C'(4, -2).$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Quy tắc quay quanh gốc tọa độ dễ nhớ nhất bằng cách hình dung kim đồng hồ: quay 90° **thuận chiều kim đồng hồ (clockwise)** biến (x, y) thành $(y, -x)$; quay 90° **ngược chiều kim đồng hồ (anticlockwise)** biến (x, y) thành $(-y, x)$ – hai quy tắc là **đảo ngược** của nhau; còn quay 180° theo chiều nào cũng cho cùng kết quả $(-x, -y)$ vì nó đưa điểm sang đúng phía đối diện qua tâm.

7.2.2 Rotation about a general centre (a, b)

When the centre of rotation is not the origin, the simplest reliable method is a three-step process: translate the centre to the origin, apply the origin-rotation rule, then translate back.

Rotating about centre (a, b)

Step 1: Translate by $\begin{pmatrix} -a \\ -b \end{pmatrix}$ so the centre becomes the origin: $(x, y) \rightarrow (x - a, y - b)$.

Step 2: Apply the origin rotation rule to $(x - a, y - b)$.

Step 3: Translate back by $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (add a to the new x -coordinate, b to the new y -coordinate).

Ví dụ mẫu 5 • Rotation about a general centre

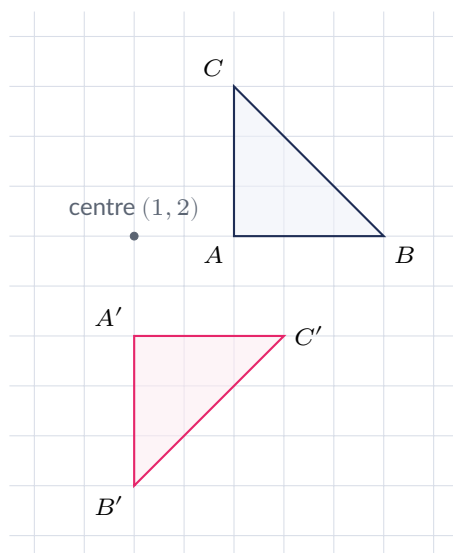
Triangle $A(3, 2)$, $B(6, 2)$, $C(3, 5)$ is rotated 90° clockwise about centre $(1, 2)$. Find the image.

Step 1 (subtract centre $(1, 2)$): $A \rightarrow (2, 0)$, $B \rightarrow (5, 0)$, $C \rightarrow (2, 3)$.

Step 2 (apply $(x, y) \rightarrow (y, -x)$): $(2, 0) \rightarrow (0, -2)$, $(5, 0) \rightarrow (0, -5)$, $(2, 3) \rightarrow (3, -2)$.

Step 3 (add centre $(1, 2)$ back):

$$A' = (1+0, 2-2) = (1, 0), \quad B' = (1+0, 2-5) = (1, -3), \quad C' = (1+3, 2-2) = (4, 0).$$



Rotation of $\triangle ABC$ through 90° clockwise about centre $(1, 2)$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi tâm quay không phải gốc tọa độ, cách làm an toàn nhất là "dời tâm về gốc – quay – dời tâm trở lại": trừ tọa độ tâm, áp dụng quy tắc quay quanh gốc, rồi cộng tọa độ tâm trở lại. Phương pháp 3 bước này tránh được sai sót khi cố nhớ công thức tổng quát, và luôn cho kết quả chính xác với bất kỳ tâm quay nào.

7.2.3 Describing a rotation fully

To describe a rotation completely, three pieces of information are required: the **centre**, the **angle**, and the **direction** (clockwise or anticlockwise) – omitting any one loses marks even with a correct diagram.

Ví dụ mẫu 6 • Describing a rotation fully

$A(3, 2)$ maps to $A'(1, 0)$ and $C(3, 5)$ maps to $C'(4, 0)$ under a single rotation. Find the centre, angle, and direction.

Finding the centre: the centre lies on the perpendicular bisector of AA' and also on the perpendicular bisector of CC' .

Midpoint of AA' is $(2, 1)$; gradient of AA' is $\frac{0-2}{1-3} = 1$, so the perpendicular bisector has gradient -1 and passes through $(2, 1)$: $y = -x + 3$.

Midpoint of CC' is $(3.5, 2.5)$; gradient of CC' is $\frac{0-5}{4-3} = -5$, so the perpendicular bisector has gradient $\frac{1}{5}$: $y - 2.5 = \frac{1}{5}(x - 3.5)$.

Solving simultaneously: substituting $y = -x + 3$ gives $-x + 0.5 = \frac{1}{5}(x - 3.5)$, so $-5x + 2.5 =$

$x - 3.5$, i.e. $6 = 6x$, so $x = 1$, $y = 2$. The centre is $(1, 2)$.

Finding the angle and direction: the vector from the centre to A is $(3 - 1, 2 - 2) = (2, 0)$; the vector from the centre to A' is $(1 - 1, 0 - 2) = (0, -2)$. Since $(2, 0) \rightarrow (0, -2)$ matches the rule $(x, y) \rightarrow (y, -x)$, this is a rotation of 90° **clockwise**.

Answer: rotation of 90° clockwise about $(1, 2)$ – exactly the transformation used in Example 5, confirming the method.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Để tìm tâm quay khi biết một cặp điểm gốc-ảnh, ta dùng tính chất: tâm quay cách đều điểm gốc và điểm ảnh (vì phép quay bảo toàn khoảng cách đến tâm), nên tâm luôn nằm trên **đường trung trực** của đoạn nối điểm với ảnh của nó. Giao của hai đường trung trực (từ hai cặp điểm khác nhau) chính là tâm quay. Sau khi tìm được tâm, kiểm tra góc quay bằng cách so sánh vectơ từ tâm đến một điểm gốc với vectơ từ tâm đến ảnh của nó.

7.3 Translation

7.3.1 Translating by a column vector

A **translation** slides every point of a shape by the same fixed displacement, described by a **column vector** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: the top number is the horizontal shift (positive = right, negative = left) and the bottom number is the vertical shift (positive = up, negative = down). Translation preserves both lengths, angles, and orientation – the image is simply the object shape moved to a new position.

Translating by $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ maps $(x, y) \rightarrow (x + p, y + q)$: add p to every x -coordinate and q to every y -coordinate.

Ví dụ mẫu 7 • Translation by a column vector

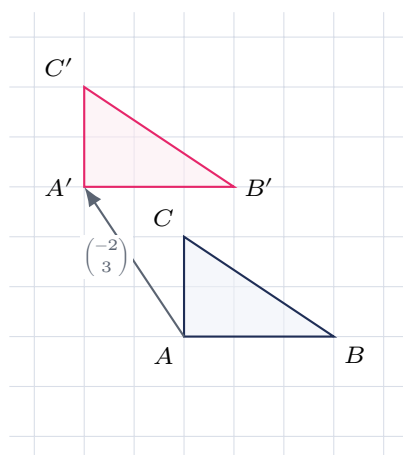
Triangle $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(1, 3)$ is translated by the vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Find the image, then state the vector that describes the translation mapping the point $(2, -3)$ onto the point $(-1, 4)$.

Translating ABC : add -2 to each x -coordinate and 3 to each y -coordinate.

$$A(1, 1) \rightarrow A'(-1, 4), \quad B(4, 1) \rightarrow B'(2, 4), \quad C(1, 3) \rightarrow C'(-1, 6).$$

Describing a translation fully (second part): the vector is simply image minus object,

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 4 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}.$$



Translation of $\triangle ABC$ by the column vector $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; every vertex moves by the same displacement.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Mô tả đầy đủ một phép tịnh tiến chỉ cần **một** thông số duy nhất: vectơ tịnh tiến dạng cột $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ – khác với quay hay đối xứng cần nhiều thông số hơn. Để tìm vectơ tịnh tiến khi biết một điểm và ảnh của nó, chỉ cần lấy **toạ độ ảnh trừ toạ độ gốc** (theo đúng thứ tự): $\vec{v} = \text{ảnh} - \text{gốc}$.

7.4 Enlargement

7.4.1 Positive scale factor: enlarging and shrinking

An **enlargement** with centre O and scale factor k maps a point P to the image P' such that $\vec{OP}' = k\vec{OP}$: every point moves along the line joining it to the centre, at k times its original distance from the centre. When $k > 1$ the image is larger than the object (an enlargement in the everyday sense); when $0 < k < 1$ the image is smaller (a reduction, though it is still called an “enlargement” by scale factor k in Cambridge terminology).

For enlargement centre $C = (a, b)$, scale factor k : every point P maps to

$$P' = C + k(P - C), \quad \text{i.e.} \quad (x, y) \rightarrow (a + k(x - a), b + k(y - b)).$$

When the centre is the origin, this simplifies to $(x, y) \rightarrow (kx, ky)$.

Ví dụ mẫu 8 • Enlargement, scale factor > 1 , centre the origin

Triangle $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(1, 2)$ is enlarged by scale factor 2, centre the origin. Find the image. Since the centre is the origin, simply multiply each coordinate by 2:

$$A(1, 1) \rightarrow A'(2, 2), \quad B(3, 1) \rightarrow B'(6, 2), \quad C(1, 2) \rightarrow C'(2, 4).$$

Ví dụ mẫu 9 • Enlargement, fractional scale factor, general centre

Triangle $A(6, 6)$, $B(10, 6)$, $C(6, 10)$ is enlarged by scale factor $\frac{1}{2}$, centre $(2, 2)$. Find the image. Using $P' = C + k(P - C)$ with $C = (2, 2)$, $k = \frac{1}{2}$:

$$A' = (2, 2) + \frac{1}{2}(4, 4) = (2, 2) + (2, 2) = (4, 4),$$

$$B' = (2, 2) + \frac{1}{2}(8, 4) = (2, 2) + (4, 2) = (6, 4), \quad C' = (2, 2) + \frac{1}{2}(4, 8) = (2, 2) + (2, 4) = (4, 6).$$

Since $0 < k < 1$, the image triangle is smaller than the object and lies between the object and the centre.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức chung cho phóng to tâm (a, b) , tỉ số k : $P' = (a, b) + k[P - (a, b)]$ – nghĩa là "lấy vector từ tâm đến điểm gốc, nhân với k , rồi cộng lại vào tâm". Khi $k > 1$, ảnh lớn hơn và xa tâm hơn vật gốc; khi $0 < k < 1$, ảnh nhỏ hơn và nằm giữa tâm và vật gốc – đây là điểm học sinh hay quên: tỉ số phân số vẫn gọi là "enlargement" dù hình bị thu nhỏ.

7.4.2 Negative scale factor (Extended)

When the scale factor k is negative, the same rule $P' = C + k(P - C)$ still applies, but because $k < 0$ the vector from the centre to the image point is now in the *opposite* direction to the vector from the centre to the object point. The image therefore appears on the opposite side of the centre from the object, and it is inverted (rotated through 180° relative to the object) as well as scaled by a factor of $|k|$.

Ví dụ mẫu 10 · Enlargement with a negative scale factor (Extended)

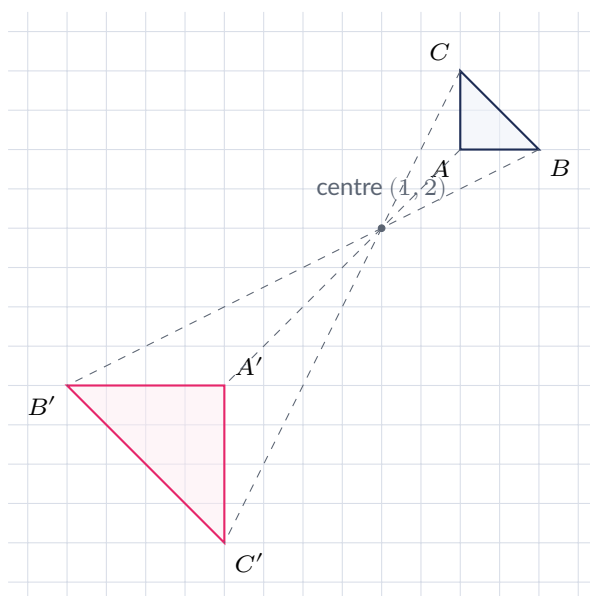
Triangle $A(3, 4)$, $B(5, 4)$, $C(3, 6)$ is enlarged by scale factor -2 , centre $(1, 2)$. Find the image.

Using $P' = C + k(P - C)$ with $C = (1, 2)$, $k = -2$:

$$A' = (1, 2) + (-2)(2, 2) = (1, 2) + (-4, -4) = (-3, -2),$$

$$B' = (1, 2) + (-2)(4, 2) = (1, 2) + (-8, -4) = (-7, -2), \quad C' = (1, 2) + (-2)(2, 4) = (1, 2) + (-4, -8) = (-3, -6)$$

Check: the distance from centre to A is $\sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$; the distance from centre to A' is $\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 2\sqrt{8}$, exactly twice as far, and A' lies in the opposite direction from the centre compared with A (vector $(2, 2)$ versus $(-4, -4)$, a negative multiple). ✓



Enlargement of $\triangle ABC$ with scale factor -2 , centre $(1, 2)$: each vertex, its image, and the centre are collinear, with the image on the opposite side of the centre, twice as far away, and inverted.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với tỉ số phóng to âm, công thức $P' = C + k(P - C)$ vẫn dùng được y hệt như tỉ số dương – chỉ cần thay đúng giá trị k (âm) vào và tính toán cẩn thận với dấu. Kết quả hình học: ảnh nằm ở **phía đối diện** của tâm so với vật gốc (không phải cùng phía như tỉ số dương), và hình bị "lộn ngược" (quay 180°) so với vật gốc, đồng thời được phóng to theo $|k|$ lần. Ba điểm – vật, tâm, ảnh – luôn thẳng hàng trong mọi trường hợp k dương hay âm.

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi sai dấu rất hay gặp với tỉ số phóng to âm: học sinh thường tính đúng độ lớn $|k| \cdot (P - C)$ nhưng quên áp dụng dấu âm, nên vẽ nhầm ảnh về *cùng phía* với vật gốc thay vì *phía đối diện*. Cách kiểm tra nhanh: nếu $k < 0$, vật và ảnh phải nằm ở hai phía khác nhau của tâm – nếu vẽ ra thấy vật và ảnh cùng phía, chắc chắn có sai sót ở bước tính toán.

7.4.3 Describing an enlargement fully

Describing an enlargement completely requires exactly two pieces of information: the **centre** of enlargement and the **scale factor** (with its sign, if negative or fractional).

Ví dụ mẫu 11 • Enlargement scale factor -1 and its equivalent rotation

An enlargement has centre the origin and scale factor -1 . Show that this has exactly the same effect on every point as a single rotation, and identify that rotation.

With centre the origin and $k = -1$, the rule is $(x, y) \rightarrow (-1)(x, y) = (-x, -y)$. This is identical to the rule for a rotation of 180° about the origin, $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$. So an enlargement of scale factor -1 (about any centre) always has the same effect as a 180° rotation about that same centre.

7.5 Combined transformations (Extended)

7.5.1 Applying two transformations in sequence

When a shape undergoes two transformations one after another, the final image can always be found by applying the first transformation, then applying the second transformation to the resulting image. Often – though not always – the overall effect of the two combined transformations can be described as a single equivalent transformation.

Ví dụ mẫu 12 • Combining a reflection and a rotation (Extended)

Triangle $A(1, 2)$, $B(4, 2)$, $C(1, 5)$ is first reflected in the x -axis, and the image is then rotated 90° clockwise about the origin. Find the coordinates of the final image, and describe the single transformation that has the same overall effect.

Step 1 (reflect in the x -axis, $(x, y) \rightarrow (x, -y)$):

$$A(1, 2) \rightarrow (1, -2), \quad B(4, 2) \rightarrow (4, -2), \quad C(1, 5) \rightarrow (1, -5).$$

Step 2 (rotate 90° clockwise about O , $(x, y) \rightarrow (y, -x)$):

$$(1, -2) \rightarrow A''(-2, -1), \quad (4, -2) \rightarrow B''(-2, -4), \quad (1, -5) \rightarrow C''(-5, -1).$$

Finding the single equivalent transformation: composing the two rules directly, $(x, y) \rightarrow (x, -y) \rightarrow (-y, -x)$, so overall $(x, y) \rightarrow (-y, -x)$. This is exactly the rule for reflection in the line $y = -x$. Checking directly on the original points: $A(1, 2) \rightarrow (-2, -1)$ ✓, matching A'' found above.

Answer: the combined effect is a single **reflection in the line $y = -x$** .

Ví dụ mẫu 13 · Combining two rotations (Extended)

Describe, as a single transformation, the combined effect of a rotation of 180° about the origin followed by a reflection in the x -axis.

Composing the rules: $(x, y) \xrightarrow{180^\circ} (-x, -y) \xrightarrow{\text{reflect } x\text{-axis}} (-x, y)$. So the overall rule is $(x, y) \rightarrow (-x, y)$, which is exactly reflection in the y -axis.

Check with a test point $(3, 4)$: rotating 180° gives $(-3, -4)$; reflecting in the x -axis gives $(-3, 4)$ – and the direct rule $(x, y) \rightarrow (-x, y)$ applied to $(3, 4)$ gives $(-3, 4)$ too. ✓

Answer: reflection in the y -axis ($x = 0$).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi phối hợp hai phép biến hình, luôn thực hiện **đúng thứ tự**: áp dụng phép thứ nhất lên hình gốc để được ảnh trung gian, rồi áp dụng phép thứ hai lên ảnh trung gian đó – đổi thứ tự thường cho kết quả khác. Để tìm phép biến hình tương đương duy nhất, cách nhanh nhất là kết hợp trực tiếp hai quy tắc tọa độ thành một quy tắc duy nhất, rồi nhận diện quy tắc đó khớp với loại phép biến hình nào (đối xứng, quay, tịnh tiến, hay phóng to) đã học ở các mục trước.

7.6 Vectors

7.6.1 Column vectors and magnitude

A **column vector** $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ represents a displacement: x units in the horizontal direction and y units in the vertical direction. Its **magnitude** (length) is found using Pythagoras' theorem:

$$\left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ví dụ mẫu 14 · Magnitude of a vector

Find the magnitude of $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$.

$$|\vec{p}| = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{25 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Độ lớn (magnitude) của một vectơ cột chính là áp dụng định lý Pythagoras cho hai thành phần của nó – về bản chất đây chính là công thức tính khoảng cách. Nên nhớ một số "bộ ba Pythagoras" quen thuộc $(3, 4, 5; 5, 12, 13; 8, 15, 17)$ để tính nhanh mà không cần bấm máy.

7.6.2 Addition, subtraction, and scalar multiplication

Vectors add and subtract component-by-component, and multiplying a vector by a scalar (an ordinary number) multiplies every component by that scalar.

Ví dụ mẫu 15 • Combining vectors

$\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Find (a) $2\vec{a} - \vec{b}$, and (b) its magnitude.

(a) $2\vec{a} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$, so

$$2\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 - (-2) \\ 6 - 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(b) $|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$.

7.6.3 Parallel vectors

Two vectors are **parallel** exactly when one is a scalar multiple of the other, i.e. $\vec{u} = m\vec{v}$ for some scalar m . Equivalently, their components are in the same ratio: for $\vec{u} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ and $\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$ (with $r, s \neq 0$), the vectors are parallel exactly when $\frac{p}{r} = \frac{q}{s}$.

Ví dụ mẫu 16 • Finding an unknown for parallel vectors

$\vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ 6 \end{pmatrix}$ is parallel to $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$. Find k .

Parallel vectors have proportional components: $\frac{k}{4} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, so $k = 4 \times \frac{3}{4} = 3$.

Check: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ and $\frac{3}{4}\vec{v} = \frac{3}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓ – so $\vec{u} = \frac{3}{4}\vec{v}$, confirming they are parallel (and point in the same direction, since the scalar $\frac{3}{4}$ is positive).

VN GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

Hai vectơ **song song** khi và chỉ khi vectơ này là **bội số vô hướng (scalar multiple)** của vectơ kia – nói cách khác, tỉ lệ giữa các thành phần tương ứng phải bằng nhau. Nếu hệ số tỉ lệ dương, hai vectơ *cùng hướng*; nếu âm, hai vectơ *ngược hướng* (nhưng vẫn song song về phương). Đây là công cụ chủ đạo để chứng minh song song trong các bài hình học vectơ ở phần sau.

(!) **Lỗi thường gặp:** Đừng nhầm lẫn chiều của vectơ nối hai điểm: $\vec{AB}$ và $\vec{BA}$ có **cùng độ lớn nhưng ngược hướng** – $\vec{BA} = -\vec{AB}$. Cụ thể, $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ (toạ độ điểm cuối trừ toạ độ điểm đầu), không phải ngược lại. Ví dụ $A(2, 3)$, $B(7, 1)$: $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 7-2 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$, còn $\vec{BA} = \begin{pmatrix} 2-7 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix} = -\vec{AB}$. Nhầm chiều vectơ là nguyên nhân phổ biến nhất dẫn đến sai dấu trong các bài chứng minh vectơ ở phần tiếp theo.

7.7 Position vectors and vector geometry (Extended)

7.7.1 Position vectors and the midpoint

If O is a fixed origin, the **position vector** of a point A is $\vec{OA} = \vec{a}$ – it records A 's location relative to O . For any two points A and B with position vectors $\vec{a}$ and $\vec{b}$, the vector *from* A *to* B is $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ (image minus object, end point minus start point).

The midpoint M of AB has position vector

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$

Ví dụ mẫu 17 · Position vector of a midpoint (Extended)

O is the origin, $A(3, 8)$ and $B(9, 2)$, so $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ and $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$. Find the position vector of M , the midpoint of AB , and state the coordinates of M .

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3+9 \\ 8+2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

So $M = (6, 5)$ – matching the ordinary average of coordinates, $(\frac{3+9}{2}, \frac{8+2}{2}) = (6, 5)$. ✓

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Công thức trung điểm $\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ thực chất chính là "lấy trung bình cộng tọa độ", chỉ viết dưới dạng vectơ. Đây là trường hợp đặc biệt (tỉ lệ 1 : 1) của bài toán tổng quát hơn: chia một đoạn thẳng theo một tỉ lệ cho trước, trình bày ở phần sau.

7.7.2 Dividing a line segment in a given ratio

More generally, if P lies on segment AB such that $AP : PB = m : n$, then P is located a fraction $\frac{m}{m+n}$ of the way from A to B , so

$$\vec{OP} = \vec{a} + \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a}) = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}.$$

Ví dụ mẫu 18 · Dividing AB in the ratio 2 : 1 (Extended)

$A(1, 2)$ and $B(10, 8)$. Point P lies on AB such that $AP : PB = 2 : 1$. Find the position vector of P and its coordinates.

Here $m = 2$, $n = 1$, so P is $\frac{2}{3}$ of the way from A to B :

$$\vec{OP} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

So $P = (7, 6)$.

Check using the section-formula form: $\vec{OP} = \frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n} = \frac{1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20 \\ 16 \end{pmatrix}}{3} = \frac{\begin{pmatrix} 21 \\ 18 \end{pmatrix}}{3} = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \end{pmatrix}$ ✓

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bài toán "chia đoạn thẳng theo tỉ lệ $m : n$ ", điểm P nằm cách A một khoảng bằng $\frac{m}{m+n}$ chiều dài toàn bộ đoạn AB (tính từ A hướng về B). Công thức $\vec{OP} = \vec{a} + \frac{m}{m+n}(\vec{b} - \vec{a})$ là công cụ chính; luôn kiểm tra lại bằng công thức tỉ lệ dạng $\frac{n\vec{a} + m\vec{b}}{m+n}$ để chắc chắn không nhầm lẫn giữa m và n .

7.7.3 Vector proofs: parallelism and collinearity

Vector methods give short, rigorous proofs of geometric facts. The two key ideas, both already introduced, are combined here:

The two-line vector-proof strategy

To prove two segments are parallel: express each segment as a vector in terms of the given position vectors (e.g. $\vec{a}, \vec{b}$), and show one is a scalar multiple of the other.

To prove three points are collinear: express the vector between two pairs of the points (sharing a common point) and show one is a (positive) scalar multiple of the other — since they share a point and point along the same line, the three points must lie on a single straight line.

Ví dụ mẫu 19 • Vector proof — a parallelogram midpoint result (Extended)

$OABC$ is a parallelogram with $\vec{OA} = \vec{a}$ and $\vec{OC} = \vec{c}$ (so $\vec{OB} = \vec{a} + \vec{c}$, since $AB \parallel OC$ and $AB = OC$ in a parallelogram). M is the midpoint of AB and N is the midpoint of CB . Show that MN is parallel to AC , and express MN in terms of AC .

Position vectors of M and N : since $AB = OC = \vec{c}$,

$$\vec{OM} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

Since $CB = OA = \vec{a}$ (opposite sides of the parallelogram),

$$\vec{ON} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}.$$

Vector MN :

$$\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = (\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a}) - (\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}) = \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{a}).$$

Vector AC : $\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \vec{c} - \vec{a}$.

So $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AC}$: since $\vec{MN}$ is a (positive) scalar multiple of $\vec{AC}$, the segments are parallel, and MN is exactly half the length of AC .

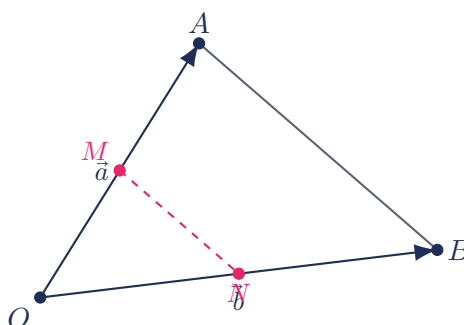
Ví dụ mẫu 20 • Vector proof — the midpoint theorem in a triangle (Extended)

In triangle OAB , M is the midpoint of OA and N is the midpoint of OB , with $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$. Show that MN is parallel to AB and find MN in terms of AB .

$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{a}$, $\vec{ON} = \frac{1}{2}\vec{b}$, so

$$\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{b} - \vec{a}).$$

Also $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{b} - \vec{a}$. Hence $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$: same direction (so parallel) and half the length — this is the classical **midpoint theorem**, proved entirely with vectors.



M, N are the midpoints of OA, OB . Vector methods give $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$, proving $MN \parallel AB$ with $MN = \frac{1}{2}AB$ – the midpoint theorem via position vectors.

Ví dụ mẫu 21 · Proving three points are collinear (Extended)

Points A, B, C have position vectors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix} 11 \\ 21 \end{pmatrix}$. Show that A, B, C are collinear, and find the ratio $AB : BC$.

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 5-2 \\ 9-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 11-5 \\ 21-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Since $\vec{BC} = 2\vec{AB}$ (a positive scalar multiple), $\vec{AB}$ and $\vec{BC}$ point in the same direction and share the common point B . Hence A, B, C lie on a single straight line, i.e. they are **collinear**, with $AB : BC = 1 : 2$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Chiến lược chứng minh vector luôn theo hai bước: (1) biểu diễn **mọi** đoạn thẳng liên quan theo đúng hai vector gốc đã cho (thường là $\vec{a}, \vec{b}$ hoặc $\vec{a}, \vec{c}$); (2) so sánh hệ số để kết luận. Nếu một vector bằng **bội số vô hướng** của vector kia $\Rightarrow$ hai đoạn **song song**; nếu hai vector nối các điểm có **chung một điểm** lại là bội số vô hướng của nhau (đặc biệt là bội số dương) $\Rightarrow$ ba điểm đó **thẳng hàng**. Luôn trình bày rõ từng bước biến đổi vector, không rút gọn tắt, để giám khảo thấy rõ lập luận.

7.8 Problem Bank

Bài tập luyện tập

Point $P(4, -7)$ is reflected in the x -axis. Find the coordinates of the image.

(A) $(4, 7)$ (C) $(-4, -7)$ (B) $(-4, 7)$ (D) $(4, -7)$

Lời giải chi tiết

Reflection in the x -axis: $(x, y) \rightarrow (x, -y)$. $P' = (4, 7)$. (A).

Bài tập luyện tập

Point $(5, 2)$ is reflected in the line $y = 3$. Find the image.

(A) (5, 4)

(C) (5, -4)

(B) (5, 8)

(D) (1, 2)

Lời giải chi tiết

Rule: $y' = 2(3) - 2 = 4$; x unchanged. Image = (5, 4). **(A)**.

Bài tập luyện tập

Point (3, -5) is reflected in the line $y = -x$. Find the image.

(A) (5, -3)

(C) (3, -5)

(B) (-5, 3)

(D) (-3, 5)

Lời giải chi tiết

Rule: $(x, y) \rightarrow (-y, -x)$. Here $-y = 5$, $-x = -3$, so image = (5, -3). **(A)**.

Bài tập luyện tập

Triangle $A(1, 1)$, $B(4, 1)$, $C(1, 3)$ maps onto $A'(1, -1)$, $B'(4, -1)$, $C'(1, -3)$. Describe fully the single transformation that maps ABC onto $A'B'C'$.

Lời giải chi tiết

Each x -coordinate is unchanged while each y -coordinate changes sign: $(x, y) \rightarrow (x, -y)$. **Reflection in the x -axis (the line $y = 0$).**

Bài tập luyện tập

Point $P(-3, 6)$ is rotated 180° about the origin. Find the image.

(A) (3, -6)

(C) (6, -3)

(B) (-3, -6)

(D) (3, 6)

Lời giải chi tiết

Rule for 180° : $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$. $P' = (3, -6)$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

Point $P(2, -5)$ is rotated 90° anticlockwise about the origin. Find the image.

(A) (5, 2)

(C) (-5, 2)

(B) (-5, -2)

(D) (5, -2)

Lời giải chi tiết

Rule: $(x, y) \rightarrow (-y, x)$. Here $-y = 5$, $x = 2$, so image = (5, 2). **(A)**.

Bài tập luyện tập

Triangle $A(2, 3)$, $B(5, 3)$, $C(2, 6)$ is rotated 90° anticlockwise about centre $(2, 1)$. Find the co-ordinates of A' , B' , C' .

Lời giải chi tiết

Subtract the centre: $A \rightarrow (0, 2)$, $B \rightarrow (3, 2)$, $C \rightarrow (0, 5)$. Apply $(x, y) \rightarrow (-y, x)$: $(0, 2) \rightarrow (-2, 0)$, $(3, 2) \rightarrow (-2, 3)$, $(0, 5) \rightarrow (-5, 0)$. Add the centre $(2, 1)$ back:

$$A' = (2 - 2, 1 + 0) = (0, 1), \quad B' = (2 - 2, 1 + 3) = (0, 4), \quad C' = (2 - 5, 1 + 0) = (-3, 1).$$

$$A'(0, 1), B'(0, 4), C'(-3, 1).$$

Bài tập luyện tập

Under a rotation about the origin, $A(0, 3)$ maps to $A'(3, 0)$ and $B(0, 5)$ maps to $B'(5, 0)$. State the angle and direction of the rotation.

(A) 90° clockwise

(C) 180°

(B) 90° anticlockwise

(D) 270° clockwise

Lời giải chi tiết

Testing the rule $(x, y) \rightarrow (y, -x)$ (i.e. 90° clockwise): $(0, 3) \rightarrow (3, 0)$ ✓ and $(0, 5) \rightarrow (5, 0)$ ✓
(A).

Bài tập luyện tập

Triangle $A(-2, 3)$, $B(1, 3)$, $C(-2, 5)$ is translated by the column vector $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$. Find the co-ordinates of the image.

Lời giải chi tiết

Add 5 to each x -coordinate and subtract 4 from each y -coordinate:

$$A' = (-2 + 5, 3 - 4) = (3, -1), \quad B' = (1 + 5, 3 - 4) = (6, -1), \quad C' = (-2 + 5, 5 - 4) = (3, 1).$$

Bài tập luyện tập

Point $(2, -3)$ maps to $(-1, 4)$ under a translation. Find the column vector of the translation.

(A) $\begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} -3 \\ -7 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$

Lời giải chi tiết

$$\text{Vector} = \text{image} - \text{object} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 4 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Point $(2, -1)$ is enlarged by scale factor 3, centre the origin. Find the image.

(A) $(6, -3)$

(C) $(6, 3)$

(B) $(-6, 3)$

(D) $(2, -3)$

Lời giải chi tiết

Since the centre is the origin, multiply each coordinate by 3: image = $(6, -3)$. (A).

Bài tập luyện tập

Triangle $A(5, 4)$, $B(9, 4)$, $C(5, 8)$ is enlarged by scale factor $\frac{1}{2}$, centre $(1, 0)$. Find the coordinates of the image.

Lời giải chi tiết

Using $P' = (1, 0) + \frac{1}{2}[P - (1, 0)]$:

$$A' = (1, 0) + \frac{1}{2}(4, 4) = (3, 2), \quad B' = (1, 0) + \frac{1}{2}(8, 4) = (5, 2), \quad C' = (1, 0) + \frac{1}{2}(4, 8) = (3, 4).$$

$$A'(3, 2), B'(5, 2), C'(3, 4).$$

Bài tập luyện tập

An enlargement has centre the origin and scale factor -1 . This has exactly the same effect on every point as which single transformation?

(A) Rotation 180° about the origin

(C) Reflection in the y -axis

(B) Reflection in the x -axis

(D) Translation by $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Lời giải chi tiết

Scale factor -1 about O : $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$, identical to the rule for a 180° rotation about O . (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) Triangle $A(4, 5)$, $B(7, 5)$, $C(4, 9)$ is enlarged by scale factor -3 , centre $(2, 3)$. Find the coordinates of the image.

Lời giải chi tiết

Using $P' = (2, 3) + (-3)[P - (2, 3)]$:

$$A' = (2, 3) + (-3)(2, 2) = (2, 3) + (-6, -6) = (-4, -3),$$

$$B' = (2, 3) + (-3)(5, 2) = (2, 3) + (-15, -6) = (-13, -3),$$

$$C' = (2, 3) + (-3)(2, 6) = (2, 3) + (-6, -18) = (-4, -15).$$

$$A'(-4, -3), B'(-13, -3), C'(-4, -15).$$

Bài tập luyện tập

(Extended) A triangle is first reflected in the x -axis, then translated by $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Find the image of the point $(5, -1)$ under the combined transformation.

(A) $(7, 4)$ (C) $(3, -4)$ (B) $(7, -2)$ (D) $(-7, 4)$

Lời giải chi tiết

Reflect in the x -axis: $(5, -1) \rightarrow (5, 1)$. Translate by $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$: $(5 + 2, 1 + 3) = (7, 4)$. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) Describe, as a single transformation, the combined effect of a 180° rotation about the origin followed by a reflection in the line $y = x$, applied to a general point (x, y) .

Lời giải chi tiết

Composing the rules: $(x, y) \xrightarrow{180^\circ} (-x, -y) \xrightarrow{\text{reflect } y=x} (-y, -x)$. The overall rule $(x, y) \rightarrow (-y, -x)$ is exactly reflection in the line $y = -x$.

Check with $(2, 5)$: rotate 180° : $(-2, -5)$; reflect in $y = x$: $(-5, -2)$; direct rule $(x, y) \rightarrow (-y, -x)$ on $(2, 5)$: $(-5, -2)$. $\checkmark$

Answer: reflection in the line $y = -x$.

Bài tập luyện tập

Find the magnitude of the vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix}$.

(A) 17

(C) $\sqrt{23}$

(B) 23

(D) 15

Lời giải chi tiết

$|\vec{v}| = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$. (A).

Bài tập luyện tập

$\vec{a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Find (a) $\vec{a} + \vec{b}$, (b) $3\vec{a} - 2\vec{b}$, (c) $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Lời giải chi tiết

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 + 5 \\ 4 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(b) $3\vec{a} = \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \end{pmatrix}$, $2\vec{b} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix}$, so $3\vec{a} - 2\vec{b} = \begin{pmatrix} -9 - 10 \\ 12 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 16 \end{pmatrix}$.

(c) $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} -3-5 \\ 4-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$, so $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$.

Bài tập luyện tập

Which of the following vectors is parallel to $\vec{a} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$?

(A) $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 9 \\ -6 \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$

Lời giải chi tiết

$\vec{a}$ has ratio $\frac{-9}{6} = -1.5$. Only $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ has matching ratio $\frac{-6}{4} = -1.5$; indeed $\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\vec{a}$. (A).

Bài tập luyện tập

(Extended) $\vec{u} = \begin{pmatrix} k \\ -8 \end{pmatrix}$ and $\vec{v} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \end{pmatrix}$ are parallel. Find k , and state whether $\vec{u}$ and $\vec{v}$ point in the same or opposite directions.

Lời giải chi tiết

Proportional components: $\frac{k}{-6} = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$, so $k = -6 \times (-\frac{1}{2}) = 3$.

Check: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$; is $\vec{v} = -2\vec{u}$? $-2 \times 3 = -6$ ✓, $-2 \times (-8) = 16$ ✓. Since the scalar is -2 (negative), $\vec{u}$ and $\vec{v}$ point in opposite directions ($k = 3$).

Bài tập luyện tập

(Extended) O is the origin, $\vec{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\vec{OB} = \begin{pmatrix} 14 \\ 4 \end{pmatrix}$. M is the midpoint of AB . Find the position vector of M and state its coordinates.

Lời giải chi tiết

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2+14 \\ 10+4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 16 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

$M = (8, 7)$.

Bài tập luyện tập

(Extended) $A(3, 1)$ and $B(15, 13)$. Find the coordinates of the point P that divides AB such that $AP : PB = 1 : 2$.

Lời giải chi tiết

P is $\frac{1}{3}$ of the way from A to B :

$$\vec{OP} = \vec{a} + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{a}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

$$P = (7, 5).$$

Bài tập luyện tập

(Extended) O is the origin, $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OC} = \vec{c}$. X lies on AC such that $AX : XC = 2 : 1$. Find $\vec{OX}$ in terms of $\vec{a}$ and $\vec{c}$, giving your answer in its simplest form.

Lời giải chi tiết

X is $\frac{2}{3}$ of the way from A to C :

$$\vec{OX} = \vec{a} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{a}) = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c} - \frac{2}{3}\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{c}.$$

$$\vec{OX} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{c}).$$

Bài tập luyện tập

(Extended) Points A, B, C have position vectors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 14 \\ 7 \end{pmatrix}$. Show that A, B, C are collinear, and find the ratio $AB : BC$.

Lời giải chi tiết

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \vec{c} - \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\vec{AB}.$$

Since $\vec{BC}$ is a positive scalar multiple of $\vec{AB}$ and the two vectors share the point B , points A, B, C lie on a straight line: **collinear**, with $AB : BC = 1 : 2$.

Bài tập luyện tập

(Extended) In triangle OAB , $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$. C is the point on OA with $OC : CA = 1 : 3$, and D is the point on OB with $OD : DB = 1 : 3$. Show that CD is parallel to AB , and express CD in terms of AB .

Lời giải chi tiết

Since $OC : CA = 1 : 3$, C is $\frac{1}{4}$ of the way from O to A : $\vec{OC} = \frac{1}{4}\vec{a}$. Similarly $\vec{OD} = \frac{1}{4}\vec{b}$.

$$\vec{CD} = \vec{OD} - \vec{OC} = \frac{1}{4}\vec{b} - \frac{1}{4}\vec{a} = \frac{1}{4}(\vec{b} - \vec{a}).$$

Since $\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, we get $\vec{CD} = \frac{1}{4}\vec{AB}$: a positive scalar multiple, so $CD \parallel AB$, with $CD = \frac{1}{4}AB$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Triangle $A(1, 2)$, $B(1, 6)$, $C(4, 2)$ is (a) reflected in the line $y = x$ to give image $A'B'C'$; (b) the image $A'B'C'$ is then enlarged by scale factor 2, centre the origin, to give $A''B''C''$. Find the coordinates of A'' , B'' , C'' .

Lời giải chi tiết

Step (a), reflect in $y = x$, $(x, y) \rightarrow (y, x)$:

$$A(1, 2) \rightarrow A'(2, 1), \quad B(1, 6) \rightarrow B'(6, 1), \quad C(4, 2) \rightarrow C'(2, 4).$$

Step (b), enlarge by scale factor 2 about the origin, multiply each coordinate by 2:

$$A'(2, 1) \rightarrow A''(4, 2), \quad B'(6, 1) \rightarrow B''(12, 2), \quad C'(2, 4) \rightarrow C''(4, 8).$$

$$A''(4, 2), B''(12, 2), C''(4, 8).$$

Probability

Mục tiêu Unit: Xác suất cơ bản (không gian mẫu, công thức xác suất, thang xác suất, biến cố đối), tần suất tương đối và tần suất kỳ vọng; biến cố kết hợp (liệt kê không gian mẫu một cách hệ thống, bảng/lưới khả năng, biến cố xung khắc, biến cố độc lập, quy tắc cộng tổng quát); sơ đồ Venn và ký hiệu tập hợp cho xác suất kể cả sơ đồ Venn 3 tập hợp (Extended); sơ đồ cây có hoàn lại và không hoàn lại (không hoàn lại là Extended); xác suất có điều kiện từ bảng hai chiều và từ sơ đồ cây (Extended).

8.1 Basic Probability

8.1.1 Sample space and the probability formula

An **experiment** (tossing a coin, rolling a die, drawing a card) has a set of all possible results called the **sample space**. An **event** is any subset of the sample space – one or more of those results that we are interested in. If every outcome in the sample space is equally likely, the probability of an event is calculated by counting.

$$P(\text{event}) = \frac{\text{number of favourable outcomes}}{\text{total number of outcomes in the sample space}}, \quad 0 \leq P(\text{event}) \leq 1.$$

A probability of 0 means the event is **impossible**; a probability of 1 means the event is **certain**. Every other probability is a fraction, decimal, or percentage strictly between these two extremes.

Ví dụ mẫu • Worked example

A fair coin is tossed and, independently, a fair six-sided die is rolled. Write down the sample space, and find P (the coin shows a head and the die shows a number greater than 4).

The sample space has $2 \times 6 = 12$ equally likely outcomes:

$$\{H1, H2, H3, H4, H5, H6, T1, T2, T3, T4, T5, T6\}.$$

“Head and a number greater than 4” means the number is 5 or 6, giving outcomes $H5$ and $H6$ – that is 2 favourable outcomes out of 12.

$$P = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Không gian mẫu (sample space) là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử; **biến cố (event)** là một tập con của không gian mẫu mà ta quan tâm. Khi mọi kết quả có khả năng xảy ra như nhau, xác suất của một biến cố được tính bằng số kết quả thuận lợi chia cho tổng số kết quả có thể. Khi kết hợp hai phép thử độc lập (ví dụ tung đồng xu và gieo xúc xắc), tổng số kết quả trong không gian mẫu bằng **tích** số kết quả của từng phép thử ($2 \times 6 = 12$ ở ví dụ trên) – đây là kỹ thuật đếm cơ bản cần nắm vững trước khi học các quy tắc kết hợp biến cố ở phần sau.

8.1.2 The probability scale and the complement rule

Every probability lies on the **probability scale** from 0 (impossible) to 1 (certain); a probability of 0.5 describes an event that is exactly as likely to happen as not. For any event A , the event “ A does not happen” is called the **complement** of A , written A' (or “not A ”). Since A and A' together cover the entire sample space with no overlap, their probabilities always add to 1.

$$P(A') = 1 - P(A), \quad \text{equivalently} \quad P(A) + P(A') = 1.$$

Ví dụ mẫu · Worked example

The probability that it rains tomorrow is 0.28. Find the probability that it does not rain tomorrow.

$$P(\text{no rain}) = 1 - P(\text{rain}) = 1 - 0.28 = 0.72.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Thang xác suất chạy từ 0 (không thể xảy ra) đến 1 (chắc chắn xảy ra); 0.5 nghĩa là khả năng xảy ra và không xảy ra là như nhau. **Biến cố đối (complement)** của A , ký hiệu A' , là biến cố “ A không xảy ra”. Vì A và A' luôn lấp đầy toàn bộ không gian mẫu mà không chồng lấn nhau, nên $P(A) + P(A') = 1$ luôn đúng – đây là công cụ rất hữu ích để tính xác suất của các biến cố phức tạp bằng cách tính phần bù đơn giản hơn (ví dụ “ít nhất một” thường được tính qua phần bù “không có cái nào”).

8.1.3 Relative frequency and expected frequency

When outcomes are not equally likely, or when the underlying probability is unknown, we estimate probability experimentally. The **relative frequency** (also called **experimental probability**) of an event is the proportion of trials in which it occurred; as the number of trials grows very large, relative frequency tends to settle close to the true probability. Once we have an estimate of $P(\text{event})$, we can predict how many times the event should occur in a further n trials – the **expected frequency**.

$$\text{Relative frequency} = \frac{\text{number of times the event occurs}}{\text{number of trials}}, \quad \text{Expected frequency} = n \times P(\text{event}).$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A drawing pin is tossed 400 times and lands “point up” on 244 occasions. (a) Estimate $P(\text{point up})$. (b) If the pin is tossed a further 150 times, find the expected number of times it lands point up.

(a) Relative frequency = $\frac{244}{400} = 0.61$.

(b) Expected frequency = $150 \times 0.61 = 91.5$. (An expected frequency is an average prediction and need not be a whole number.)

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Tần suất tương đối (relative frequency) = $\frac{\text{số lần biến cố xảy ra}}{\text{tổng số lần thử}}$, dùng để *ước lượng* xác suất thật khi không thể tính bằng lý thuyết (ví dụ vật thể không cân đối như đồng xu bị lệch, hoặc chưa biết tỉ lệ lỗi của một dây chuyền sản xuất). Từ xác suất ước lượng này, **tần suất kỳ vọng**

(expected frequency) = $n \times P$ cho biết trung bình ta mong đợi biến cố xảy ra bao nhiêu lần trong n lần thử tiếp theo – lưu ý kết quả này có thể không phải số nguyên vì nó là một giá trị trung bình dự đoán, không phải một kết quả chắc chắn.

8.2 Combined Events

8.2.1 Listing outcomes systematically

When an experiment combines two stages (e.g., two dice, two spinners), it helps to list every outcome in an organised **possibility diagram** (sample space grid), rather than trying to count outcomes by guesswork. This guarantees no outcome is missed or double-counted.

		Die 2					
		1	2	3	4	5	6
Die 1	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Possibility diagram for the sum of two fair six-sided dice: 36 equally likely outcomes, each cell showing the total (Die 1 result + Die 2 result).

Ví dụ mẫu · Worked example

Using the possibility diagram above, find $P(\text{the sum of the two dice is a prime number})$.

The possible sums range from 2 to 12; the prime sums are 2, 3, 5, 7, 11. Counting cells for each:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & + & 2 & + & 4 & + & 6 & + & 2 \\ \{z\} & & \{z\} & & \{z\} & & \{z\} & & \{z\} \\ \text{sum}=2 & & \text{sum}=3 & & \text{sum}=5 & & \text{sum}=7 & & \text{sum}=11 \end{array} = 15 \text{ outcomes out of } 36.$$

$$P(\text{prime sum}) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN Khi một phép thử gồm hai giai đoạn (ví dụ hai xúc xắc), **bảng/lưới khả năng (possibility diagram)** giúp liệt kê đầy đủ và có hệ thống tất cả 36 kết quả (ở đây là 6×6), tránh bỏ sót hoặc đếm trùng. Sau khi có bảng, việc tính xác suất chỉ còn là đếm số ô thoả điều kiện rồi chia cho tổng số ô – kỹ năng nền tảng để giải các bài toán biến cố kết hợp phức tạp hơn ở phần sau.

8.2.2 Mutually exclusive events

Two events are **mutually exclusive** if they cannot both happen on the same trial – there is no overlap between them (e.g., a single card cannot be both a King and a Queen).

If A and B are mutually exclusive: $P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A card is drawn at random from a standard 52-card deck. Find P (the card is a King or a Queen).

There are 4 Kings and 4 Queens, and no card can be both, so the events are mutually exclusive.

$$P(\text{King or Queen}) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Biến cố xung khắc (mutually exclusive) là hai biến cố không thể cùng xảy ra trong một lần thử (không có phần chung). Khi đó xác suất của “ A hoặc B ” chỉ đơn giản là **cộng** hai xác suất lại: $P(A \text{ hoặc } B) = P(A) + P(B)$. Ví dụ rút một lá bài không thể vừa là Q vừa là K cùng lúc, nên hai biến cố này xung khắc.

8.2.3 Independent events

Two events are **independent** if the outcome of one has no effect whatsoever on the probability of the other (e.g., the result of a coin toss does not affect the result of a die roll).

If A and B are independent: $P(A \text{ and } B) = P(A) \times P(B)$.

Ví dụ mẫu · Worked example

A fair coin is tossed and a fair six-sided die is rolled. Find P (the coin shows a head and the die shows a 6).

The coin and die results are independent.

$$P(H \text{ and } 6) = P(H) \times P(6) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Biến cố độc lập (independent) là hai biến cố mà kết quả của biến cố này hoàn toàn không ảnh hưởng đến xác suất của biến cố kia. Khi đó xác suất “ A và B ” được tính bằng cách **nhân** hai xác suất: $P(A \text{ và } B) = P(A) \times P(B)$. Đây là phép “nhân theo chiều ngang” của một sơ đồ cây (tree diagram) mà ta sẽ gặp lại ở Mục 4.

(!) Lỗi thường gặp: Xung khắc (mutually exclusive) và độc lập (independent) là hai khái niệm hoàn toàn khác nhau, đừng nhầm lẫn. Xung khắc nói về việc hai biến cố có thể xảy ra cùng lúc hay không (nếu xung khắc thì $P(A \text{ và } B) = 0$); độc lập nói về việc biến cố này có ảnh hưởng đến xác suất biến cố kia hay không. Trên thực tế, nếu $P(A) > 0$ và $P(B) > 0$ thì hai biến cố xung khắc **không bao giờ** độc lập (vì biết A xảy ra thì chắc chắn B không xảy ra – đó chính là một dạng ảnh hưởng mạnh nhất có thể). Ngược lại, hai biến cố độc lập với xác suất dương luôn có phần chung khác rỗng, nên **không** xung khắc. Quy tắc dùng đúng ngữ cảnh: **cộng** cho xung khắc (“hoặc”), **nhân** cho độc lập (“và”).

8.2.4 The general addition rule

When two events are *not* mutually exclusive (they can happen together), simply adding $P(A)$ and $P(B)$ double-counts the outcomes where both occur. The **general addition rule** corrects for this overlap.

$$P(A \text{ or } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ and } B) \quad (\text{true for any two events, exclusive or not}).$$

Ví dụ mẫu · Worked example

A card is drawn at random from a standard 52-card deck. Find $P(\text{the card is a King or a Heart})$. There are 4 Kings and 13 Hearts, but the King of Hearts is counted in both groups, so these events are *not* mutually exclusive.

$$P(\text{King or Heart}) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

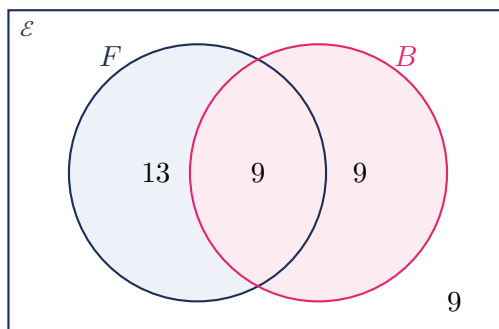
VN

Khi hai biến cố **có thể xảy ra đồng thời** (không xung khắc), cộng trực tiếp $P(A) + P(B)$ sẽ **đếm trùng** phần giao nhau – vì vậy phải **trừ lại** phần chung: $P(A \text{ hoặc } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ và } B)$. Công thức xung khắc ($P(A) + P(B)$) chỉ là trường hợp đặc biệt của công thức tổng quát này khi $P(A \text{ và } B) = 0$. Luôn kiểm tra xem hai biến cố có phần chung hay không trước khi chọn công thức phù hợp.

8.3 Venn Diagrams and Set Notation (Extended)

8.3.1 Set notation for probability

A **Venn diagram** displays the sample space $\mathcal{E}$ as a rectangle, with each event as a circle inside it. This makes overlapping and non-overlapping regions visible directly, and lets us read off probabilities once the diagram is filled with numbers (or counts). Standard notation: $n(A)$ is the number of elements in set A ; $A \cap B$ ("A intersect B") is the overlap, containing elements in *both* A and B ; $A \cup B$ ("A union B") is everything in A , B , or both; and A' is the complement of A (everything *outside* A).



Venn diagram for 40 students: F = plays football, B = plays basketball. Region counts (from left to right): football only, both, basketball only, and neither (outside both circles).

Ví dụ mẫu · Worked example

In a class of 40 students, 22 play football (F) and 18 play basketball (B); 9 play both. Using the Venn diagram above, find (a) $P(\text{plays neither sport})$, (b) $P(\text{plays exactly one of the two sports})$, and (c) $P(F \cup B)$.

Football only = $22 - 9 = 13$; basketball only = $18 - 9 = 9$; both = 9; total accounted for = $13 + 9 + 9 = 31$, so neither = $40 - 31 = 9$.

(a) $P(\text{neither}) = \frac{9}{40}.$

(b) Exactly one sport = $13 + 9 = 22$, so $P(\text{exactly one}) = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$.

(c) $n(F \cup B) = 13 + 9 + 9 = 31$, so $P(F \cup B) = \frac{31}{40}$.

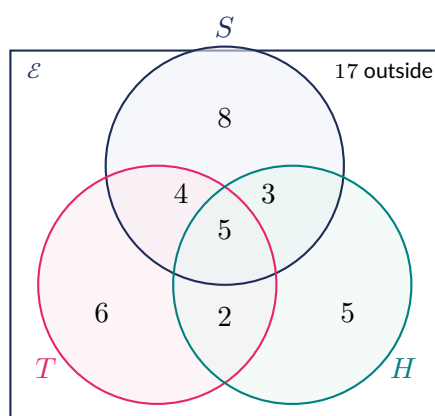
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Sơ đồ Venn biểu diễn không gian mẫu $\mathcal{E}$ (hình chữ nhật) và các biến cố (hình tròn) bên trong. Ký hiệu cần nhớ: $n(A)$ – số phần tử của A ; $A \cap B$ – phần **giao** (thuộc cả A và B); $A \cup B$ – phần **hợp** (thuộc A , B , hoặc cả hai); A' – phần **bù** (nằm ngoài A). Kỹ năng quan trọng nhất là **điền đúng số vào từng vùng**: bắt đầu từ vùng giao (phần chung), sau đó suy ra các vùng “chỉ A ” và “chỉ B ” bằng cách trừ đi phần giao, cuối cùng lấy tổng số phần tử trừ đi tổng các vùng đã biết để tìm vùng “không thuộc cả hai”.

8.3.2 Three-set Venn diagrams

The same principles extend to **three** overlapping events. A three-set Venn diagram has 8 regions in total: one region for each combination of “in” or “out” of the three circles (including the region entirely outside all three).



Three-set Venn diagram for 50 students and three sports: S (swimming), T (tennis), H (hockey). Each region shows the number of students in that exact combination of sports; 17 students play none of the three.

Ví dụ mẫu · Worked example (Extended)

Using the three-set Venn diagram above (total 50 students), find (a) $P(\text{plays none of the three sports})$, (b) $P(\text{plays exactly two sports})$, and (c) $n(S \cap H)$ and $P(S \cap H)$.

(a) The region outside all three circles contains 17 students, so $P(\text{none}) = \frac{17}{50}$.

(b) Exactly two sports means the three “double-overlap-only” regions: $4 + 3 + 2 = 9$ students, so $P(\text{exactly two}) = \frac{9}{50}$.

(c) $S \cap H$ consists of everyone in *both* swimming and hockey, whether or not they also do tennis: the “ S and H only” region (3) plus the “all three” region (5), giving $n(S \cap H) = 3 + 5 = 8$, so $P(S \cap H) = \frac{8}{50} = \frac{4}{25}$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

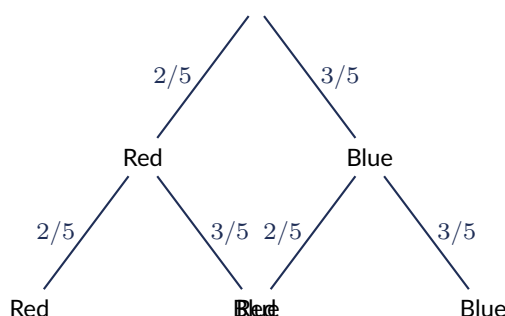
VN

Với sơ đồ Venn 3 tập hợp, có tổng cộng 8 vùng (kể cả vùng ngoài cả ba vòng tròn). Điểm dễ nhầm nhất là tính $n(S \cap H)$: đây là **toàn bộ** phần giao giữa S và H , bao gồm cả những học sinh cũng chơi T (vùng ở giữa, giao cả ba) – không chỉ riêng vùng “chỉ S và H ”. Quy tắc điền số: luôn điền vùng giao **cả ba** trước tiên (ở chính giữa), sau đó lần lượt suy ra các vùng giao từng cặp, rồi các vùng “chỉ một”, và cuối cùng là vùng ngoài cùng.

8.4 Tree Diagrams

8.4.1 Tree diagrams with replacement

A **tree diagram** shows a sequence of events as branches, with the probability of each branch written on it. Along any complete path from the root to a final branch tip, the probabilities are **multiplied** together (this is exactly the “and” rule from Section 2); probabilities of separate complete paths that both lead to the outcome of interest are then **added** together (the “or” rule). When an item is replaced before the next selection, the two draws are **independent**, so the branch probabilities are identical at every stage.



Tree diagram: a counter is drawn, replaced, and a second counter drawn from a bag of 4 red and 6 blue counters (10 total). Because the counter is replaced, the second-draw probabilities are unchanged.

Ví dụ mẫu · Worked example

Using the tree diagram above, find $P(\text{exactly one red counter in the two draws})$.

Exactly one red happens along two separate paths: (Red, Blue) or (Blue, Red).

$$P(\text{exactly one red}) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}.$$

$\{RB\}$
 (R, B)

$\{BR\}$
 (B, R)

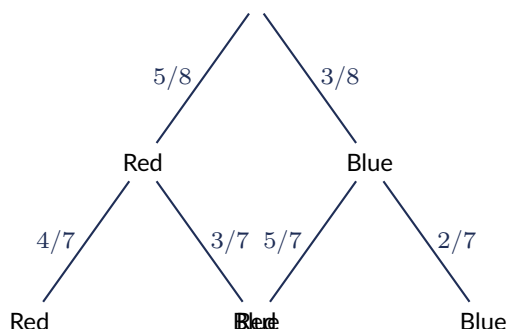
GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trên sơ đồ cây, xác suất của **một đường đi hoàn chỉnh** (từ gốc đến ngọn) bằng **tích** các nhánh dọc theo đường đi đó (quy tắc “và”); nếu có **nhiều đường đi** cùng dẫn đến kết quả mong muốn, ta **cộng** xác suất của các đường đi đó lại (quy tắc “hoặc”). Khi có **hoàn lại (with replacement)**, vật được lấy ra sẽ được trả lại trước lần lấy tiếp theo, nên tổng số vật và tỉ lệ mỗi loại không đổi – xác suất trên các nhánh ở tầng thứ hai luôn giống hệt tầng thứ nhất.

8.4.2 Tree diagrams without replacement (Extended)

When an item is *not* replaced, the total number of items remaining decreases after each draw, and the number of the specific type just removed also decreases. The branch probabilities at the second (and later) stage therefore **depend on what happened earlier** – the two draws are no longer independent.



Tree diagram: two counters drawn *without replacement* from 5 red, 3 blue (8 total). Second-stage probabilities depend on the colour of the first counter drawn.

Ví dụ mẫu · Worked example (Extended)

Using the tree diagram above, find (a) $P(\text{both counters are red})$ and (b) $P(\text{at least one counter is red})$.

(a) $P(\text{both red}) = \frac{5}{8} \times \frac{4}{7} = \frac{20}{56} = \frac{5}{14}.$

(b) It is easier to use the complement: “at least one red” is the opposite of “no red at all” (i.e., both blue).

$$P(\text{both blue}) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}, \quad P(\text{at least one red}) = 1 - \frac{3}{28} = \frac{25}{28}.$$

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi phổ biến nhất với sơ đồ cây **không hoàn lại**: quên giảm **mẫu số** (và tử số nếu lấy trùng loại) ở các nhánh sau. Ở ví dụ trên, sau khi lấy 1 viên đỏ (không trả lại), tổng số viên còn lại là $8 - 1 = 7$ (không phải vẫn là 8), và số viên đỏ còn lại là $5 - 1 = 4$ – vì vậy nhánh thứ hai (nếu nhánh đầu là đỏ) phải là $4/7$, không phải $5/8$ như nhánh đầu. Luôn tự hỏi: “sau lần lấy trước, còn lại bao nhiêu vật tất cả, và bao nhiêu vật thuộc loại đang xét?”

Ví dụ mẫu · Worked example (Extended)

A box contains 3 red, 2 blue, and 2 green pens (7 pens in total). Three pens are drawn at random, one after another, without replacement. Find (a) $P(\text{all three colours appear, one of each})$, (b) $P(\text{at least one green pen is drawn})$, and (c) if this experiment is repeated 35 times, the expected number of repetitions in which (i) all three colours appear, and (ii) at least one green pen appears.

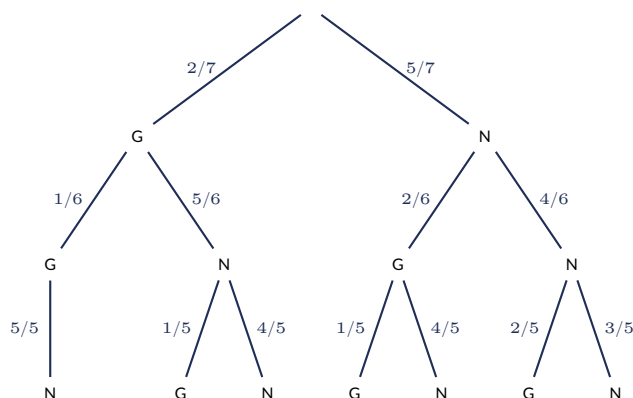
(a) Choosing exactly one pen of each colour from 3 draws (order does not matter for counting, since “one of each” automatically covers every order):

$$P(\text{one of each colour}) = \frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{7}{3}} = \frac{3 \times 2 \times 2}{35} = \frac{12}{35}.$$

(b) Using the complement: “no green at all” means all 3 pens come from the 5 non-green pens (3 red + 2 blue).

$$P(\text{no green}) = \frac{\binom{5}{3}}{\binom{7}{3}} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}, \quad P(\text{at least one green}) = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

(c)(i) $35 \times \frac{12}{35} = 12$ repetitions. (c)(ii) $35 \times \frac{5}{7} = 25$ repetitions.



Tree diagram for three draws without replacement from the box of 3 red, 2 blue, 2 green pens (7 total), tracking only “Green” (G) versus “Not green” (N) at each stage. Note the branch after “G, G” has no further green option, since both green pens are already gone – the third draw there is certain (probability 5/5) to be not-green.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với sơ đồ cây 3 tầng (ba lần lấy không hoàn lại), nguyên tắc vẫn giữ nguyên: sau *mỗi* lần lấy, cả tổng số vật lẫn số vật thuộc loại vừa lấy đều giảm đi 1. Đặc biệt, nếu một loại đã bị lấy **hết** (ví dụ cả 2 bút xanh lá đã được lấy ở hai lần đầu), thì nhánh “lấy thêm loại đó” ở tầng tiếp theo sẽ **không tồn tại** (xác suất bằng 0, nên không cần vẽ) – cây có thể không đối xứng hoàn toàn, và đó là điều bình thường. Với bài “tất cả các màu xuất hiện”, dùng tổ hợp $\binom{n}{k}$ thường nhanh hơn liệt kê từng thứ tự trên cây.

8.5 Conditional Probability (Extended)

8.5.1 Conditional probability notation and two-way tables

Conditional probability asks: given that we already know some event B has happened, what is the probability that another event A also happens? This is written $P(A | B)$, read “the probability of A given B ”. Restricting attention to the outcomes where B is known to be true effectively shrinks the sample space down to just B .

$$P(A | B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}, \quad \text{equivalently, using counts:} \quad P(A | B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}.$$

A **two-way table** organises counts by two categories at once, making conditional probabilities easy to read directly: to find $P(A | B)$, look only within the row or column for B , and divide the count for A within that row/column by the row/column total.

	Wears glasses	No glasses	Total
Male	18	42	60
Female	14	26	40
Total	32	68	100

Ví dụ mẫu · Worked example (Extended)

The table above records 100 students by gender and whether they wear glasses. A student is chosen at random. Find (a) $P(\text{wears glasses})$, (b) $P(\text{wears glasses} | \text{male})$, and (c) $P(\text{male} | \text{wears glasses})$.

- (a) From the Total row, 32 out of 100 students wear glasses: $P(\text{glasses}) = \frac{32}{100} = \frac{8}{25}$.
- (b) Restrict to the Male row only (60 students total, 18 wear glasses): $P(\text{glasses} \mid \text{male}) = \frac{18}{60} = \frac{3}{10}$.
- (c) Restrict to the “wears glasses” column only (32 students total, 18 are male): $P(\text{male} \mid \text{glasses}) = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$.

(!) Lỗi thường gặp: $P(A \mid B)$ và $P(B \mid A)$ thường khác nhau – đừng đảo ngược thứ tự một cách bất cẩn. Ở ví dụ trên, $P(\text{đeo kính} \mid \text{nam}) = \frac{3}{10}$ nhưng $P(\text{nam} \mid \text{đeo kính}) = \frac{9}{16}$, hai giá trị hoàn toàn khác nhau. Quy tắc đọc ký hiệu: $P(A \mid B)$ nghĩa là “đã biết chắc B xảy ra rồi, hỏi khả năng A xảy ra là bao nhiêu” – luôn **chia cho tổng của điều kiện phía sau dấu $\mid$** (hàng hoặc cột của B), không phải tổng của toàn bộ bảng và cũng không phải tổng của A .

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Xác suất có điều kiện $P(A \mid B)$ trả lời câu hỏi: “biết rằng B đã xảy ra, xác suất A cũng xảy ra là bao nhiêu?” – về bản chất, ta thu hẹp không gian mẫu lại chỉ còn các trường hợp thuộc B . Công thức: $P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ và } B)}{P(B)} = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$. Với bảng hai chiều, chỉ cần nhìn vào đúng hàng hoặc cột tương ứng với điều kiện B , rồi chia số liệu của A trong hàng/cột đó cho tổng của hàng/cột đó – không cần dùng đến công thức phân số phức tạp.

8.5.2 Conditional probability and tree diagrams

Tree diagrams for selection *without replacement* are a natural home for conditional probability: every branch after the first is, by definition, a conditional probability – it already assumes the outcome of the branch(es) before it. In fact, the branch probability written on a second-stage branch labelled “given the first was X ” is exactly $P(\text{second outcome} \mid \text{first outcome} = X)$.

Ví dụ mẫu · Worked example (Extended)

Return to the tree diagram for the bag of 5 red and 3 blue counters, drawn without replacement (Section 4.2). Let A = “second counter is red” and B = “first counter is red”. (a) Read $P(A \mid B)$ directly off the tree diagram. (b) Verify this using the formula $P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)}$.

(a) The branch immediately following “first counter red” that leads to “second counter red” is labelled $\frac{4}{7}$ – so $P(A \mid B) = \frac{4}{7}$ can simply be read off the diagram, since that is exactly what the branch label represents.

(b) Independently, $P(B) = P(\text{first red}) = \frac{5}{8}$, and $P(A \text{ and } B) = P(\text{both red}) = \frac{5}{14}$ (found earlier).

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ and } B)}{P(B)} = \frac{5/14}{5/8} = \frac{5}{14} \times \frac{8}{5} = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}. \quad \checkmark$$

The two methods agree exactly, confirming that a without-replacement tree diagram’s second-stage branches *are* conditional probabilities.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Mỗi nhánh của sơ đồ cây **không hoàn lại** (từ tầng thứ hai trở đi) chính là một xác suất có điều kiện: nhân trên nhánh “lần hai ra đỏ” (đi sau nhánh “lần một ra đỏ”) chính là $P(\text{lần hai đỏ} \mid \text{lần một đỏ})$. Đây là lý do vì sao các bài toán không hoàn lại luôn gắn liền với xác suất có điều kiện: khi lấy không hoàn lại, kết quả lần trước *luôn* ảnh hưởng đến xác suất của lần sau, và chính ảnh hưởng đó được thể hiện qua công thức $P(A \mid B)$. Có thể kiểm chứng chéo bằng công thức $P(A \mid B) = \frac{P(A \text{ và } B)}{P(B)}$ để chắc chắn nhánh cây đã ghi đúng.

8.6 Problem Bank

Bài tập luyện tập

Câu 1. A letter is chosen at random from the word MATHEMATICS. Find $P(\text{the letter is M})$.

(A) $\frac{2}{11}$

(C) $\frac{3}{11}$

(B) $\frac{1}{11}$

(D) $\frac{1}{2}$

Lời giải chi tiết

MATHEMATICS has 11 letters, and M appears twice (positions 1 and 6). $P(M) = \frac{2}{11}$. (A).

Bài tập luyện tập

Câu 2. $P(\text{event } A) = 0.37$. Find $P(A \text{ does not occur})$.

(A) 0.63

(C) 1.37

(B) 0.37

(D) 0.5

Lời giải chi tiết

$$P(A') = 1 - 0.37 = 0.63. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Câu 3. A factory tests 500 lightbulbs and finds 15 defective. (a) Estimate the probability that a bulb is defective. (b) In a batch of 8000 bulbs, how many would you expect to be defective?

Lời giải chi tiết

(a) Relative frequency = $\frac{15}{500} = 0.03$.

(b) Expected number = $8000 \times 0.03 = 240$ bulbs.

Bài tập luyện tập

Câu 4. A fair coin is tossed three times. Find $P(\text{exactly two heads})$.

(A) $\frac{3}{8}$

(C) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{4}$

Lời giải chi tiết

Sample space (8 outcomes): HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT. Exactly two heads: HHT, HTH, THH – 3 outcomes. $P = \frac{3}{8}$. (A).

Bài tập luyện tập

Câu 5. Two fair six-sided dice are rolled. (a) Find P (the sum is 9). (b) Find P (the sum is at most 4).

Lời giải chi tiết

(a) Sum = 9: (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3) – 4 outcomes out of 36. $P = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.
(b) Sum ≤ 4 : sum 2 (1 way), sum 3 (2 ways), sum 4 (3 ways); total $1 + 2 + 3 = 6$ outcomes.
 $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Bài tập luyện tập

Câu 6. A card is drawn from a standard 52-card deck. Find P (the card is a Jack or a red card).

- (A) $\frac{7}{13}$ (C) $\frac{1}{2}$
(B) $\frac{15}{26}$ (D) $\frac{3}{4}$

Lời giải chi tiết

Jacks = 4, red cards = 26, red Jacks ($J\heartsuit$, $J\diamondsuit$) = 2 counted in both, so the events are not mutually exclusive.

$$P(\text{Jack or red}) = \frac{4}{52} + \frac{26}{52} - \frac{2}{52} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Câu 7. The probability Minh passes his driving test is 0.8, and independently the probability he passes his motorbike test is 0.65. Find P (he passes both tests).

- (A) 0.52 (C) 0.15
(B) 1.45 (D) 0.845

Lời giải chi tiết

Independent events: $P(\text{both}) = 0.8 \times 0.65 = 0.52$. (A).

Bài tập luyện tập

Câu 8. In a survey of 60 people, 35 like tea, 28 like coffee, and 10 like neither. (a) Find the number of people who like both tea and coffee. (b) Find P (likes tea only).

Lời giải chi tiết

At least one drink: $60 - 10 = 50$ people. By the general addition rule, $n(T \cup C) = n(T) + n(C) - n(T \cap C)$:

$$50 = 35 + 28 - n(T \cap C) \Rightarrow n(T \cap C) = 63 - 50 = \mathbf{13}.$$

Tea only = $35 - 13 = 22$, so $P(\text{tea only}) = \frac{22}{60} = \frac{\mathbf{11}}{\mathbf{30}}$.

Bài tập luyện tập

Câu 9. Using the Venn diagram from Section 3.1 (40 students; 22 football, 18 basketball, 9 both), find $P(\text{plays basketball only})$.

(A) $\frac{9}{40}$

(C) $\frac{22}{40}$

(B) $\frac{18}{40}$

(D) $\frac{31}{40}$

Lời giải chi tiết

Basketball only = $18 - 9 = 9$. $P = \frac{9}{40}$. (A).

Bài tập luyện tập

Câu 10. (Extended) Using the three-set Venn diagram from Section 3.2 (50 students; Swimming S , Tennis T , Hockey H), find (a) $P(\text{plays exactly one sport})$, (b) $P(\text{plays at least two sports})$, and (c) $n(T)$.

Lời giải chi tiết

(a) Exactly one sport: $8 + 6 + 5 = 19$. $P = \frac{19}{50}$.

(b) At least two sports: $(4 + 3 + 2) + 5 = 14$. $P = \frac{14}{50} = \frac{7}{25}$.

(c) $n(T) = 6$ (only) + 4 ($S \cap T$ only) + 2 ($T \cap H$ only) + 5 (all three) = **17**.

Bài tập luyện tập

Câu 11. A biased coin has $P(\text{head}) = 0.6$ on each toss, independently. It is tossed twice. Find $P(\text{two heads})$.

(A) 0.36

(C) 0.6

(B) 1.2

(D) 0.4

Lời giải chi tiết

Independent tosses: $P(HH) = 0.6 \times 0.6 = 0.36$. (A).

Bài tập luyện tập

Câu 12. A spinner is equally likely to land on Red, Blue, or Green ($P = \frac{1}{3}$ each). It is spun twice, with replacement. Find $P(\text{exactly one Red})$.

Lời giải chi tiết

Exactly one Red occurs via (Red, not-Red) or (not-Red, Red), each with probability $\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$:

$$P(\text{exactly one Red}) = 2 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}.$$

Bài tập luyện tập

Câu 13. (Extended) A bag contains 4 red and 5 blue marbles (9 total). Two marbles are drawn without replacement. Find $P(\text{both blue})$.

(A) $\frac{5}{18}$

(C) $\frac{25}{81}$

(B) $\frac{5}{9}$

(D) $\frac{4}{9}$

Lời giải chi tiết

$$P(\text{both blue}) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{20}{72} = \frac{5}{18}. \text{ (A).}$$

(Choice (C), $\frac{25}{81}$, is the wrong answer you get by mistakenly treating the draws as *with* replacement.)

Bài tập luyện tập

Câu 14. (Extended) A box has 4 green and 6 yellow counters (10 total). Three counters are drawn one at a time without replacement. Find (a) $P(\text{all three green})$, (b) $P(\text{first two green, third yellow})$, (c) $P(\text{exactly two green among the three})$.

Lời giải chi tiết

$$\text{(a)} \quad \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{24}{720} = \frac{1}{30}.$$

$$\text{(b)} \quad \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{6}{8} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10}.$$

$$\text{(c)} \quad \text{Exactly two green can occur as GGY, GYG, or YGG, each with probability } \frac{1}{10} \text{ (check: } \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10} \text{ and } \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{72}{720} = \frac{1}{10} \text{ also). Total} = 3 \times \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

Bài tập luyện tập

Câu 15. (Extended) A bag has 3 red and 7 blue balls (10 total). Two balls are drawn without replacement. Find $P(\text{at least one red})$.

(A) $\frac{8}{15}$

(C) $\frac{3}{5}$

(B) $\frac{7}{15}$

(D) $\frac{1}{5}$

Lời giải chi tiết

$$P(\text{no red}) = \frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15}. \text{ So } P(\text{at least one red}) = 1 - \frac{7}{15} = \frac{8}{15}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Câu 16. (Extended) A school surveys 120 students on age and bicycle ownership:

	Owens bicycle	No bicycle	Total
Under 15	40	20	60
15 and over	18	42	60
Total	58	62	120

Find (a) $P(\text{owns a bicycle})$, (b) $P(\text{owns a bicycle} \mid \text{under 15})$, (c) $P(\text{under 15} \mid \text{owns a bicycle})$.

Lời giải chi tiết

(a) $\frac{58}{120} = \frac{29}{60}$.

(b) Restrict to the "Under 15" row (60 total, 40 own a bicycle): $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$.

(c) Restrict to the "Owens bicycle" column (58 total, 40 are under 15): $\frac{40}{58} = \frac{20}{29}$.

Bài tập luyện tập

Câu 17. (Extended) Using the Venn diagram from Section 3.1 (40 students; 22 football F , 18 basketball B , 9 both), find $P(F \mid B)$.

(A) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{9}{22}$

(B) $\frac{9}{40}$

(D) $\frac{22}{40}$

Lời giải chi tiết

$$P(F \mid B) = \frac{n(F \cap B)}{n(B)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}. \text{ (A)}$$

Bài tập luyện tập

Câu 18. (Extended) A jar contains 5 chocolate and 3 plain biscuits (8 total). Two biscuits are taken without replacement. (a) Find $P(\text{second biscuit is plain})$. (b) Find $P(\text{first biscuit was chocolate} \mid \text{second biscuit is plain})$.

Lời giải chi tiết

Second biscuit plain occurs via (Choc, Plain) or (Plain, Plain):

$$P(\text{2nd plain}) = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{15}{56} + \frac{6}{56} = \frac{21}{56} = \frac{3}{8}.$$

(b) $P(\text{1st choc and 2nd plain}) = \frac{15}{56}$, so

$$P(\text{1st choc} \mid \text{2nd plain}) = \frac{15/56}{21/56} = \frac{15}{21} = \frac{5}{7}.$$

Bài tập luyện tập

Câu 19. Two ordinary dice are thrown. Find P (the two dice show the same number).

(A) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{12}$

(D) $\frac{5}{6}$

Lời giải chi tiết

Matching pairs: $(1, 1), (2, 2), \dots, (6, 6)$ – 6 outcomes out of 36. $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Câu 20. (Extended) In a gym with 200 members, 120 use the treadmill (T), 90 use weights (W), and 45 use both. Find (a) $P(T \cup W)$, (b) P (uses neither), (c) $P(W | T)$.

Lời giải chi tiết

(a) $P(T \cup W) = \frac{120 + 90 - 45}{200} = \frac{165}{200} = \frac{33}{40}$.

(b) $P(\text{neither}) = 1 - \frac{33}{40} = \frac{7}{40}$.

(c) $P(W | T) = \frac{n(T \cap W)}{n(T)} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}$.

Bài tập luyện tập

Câu 21. Over 35 days, a shop finds it rains on 21 days. Predict the number of rainy days out of the next 20 days.

(A) 12

(C) 9

(B) 15

(D) 20

Lời giải chi tiết

$P(\text{rain}) = \frac{21}{35} = \frac{3}{5}$. Expected number = $20 \times \frac{3}{5} = 12$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Câu 22. A biased die has $P(6) = 0.3$ on every roll, independently, and is rolled 3 times. Find (a) P (three sixes), (b) P (no sixes at all), (c) P (at least one six), (d) if this 3-roll experiment is repeated 60 times, the expected number of repetitions with at least one six.

Lời giải chi tiết

(a) $0.3^3 = 0.027$.

(b) $0.7^3 = 0.343$.

(c) $1 - 0.343 = 0.657$.

(d) $60 \times 0.657 = 39.42$ repetitions (an expected value, not necessarily a whole number).

Bài tập luyện tập

Câu 23. Events A and B satisfy $P(A) = 0.3$, $P(B) = 0.4$, and $P(A \text{ and } B) = 0.12$. Are A and B independent, mutually exclusive, both, or neither?

- (A) Independent only (C) Both
(B) Mutually exclusive only (D) Neither

Lời giải chi tiết

Check independence: $P(A) \times P(B) = 0.3 \times 0.4 = 0.12 = P(A \text{ and } B)$, so A and B **are independent**. Mutually exclusive would require $P(A \text{ and } B) = 0$, but it is $0.12 \neq 0$, so they are **not mutually exclusive**. **(A)**

Bài tập luyện tập

Câu 24. (Extended) In a class of 45 students, 25 play football, 20 play basketball, and 8 play neither. Find $P(\text{plays football but not basketball})$.

Lời giải chi tiết

At least one sport: $45 - 8 = 37$. $n(F \cap B) = 25 + 20 - 37 = 8$. Football only = $25 - 8 = 17$.

$$P(\text{football only}) = \frac{17}{45}.$$

Bài tập luyện tập

Câu 25. (Extended) A drawer has 8 black and 4 white socks (12 total). Two socks are taken without replacement. Find P (the two socks are different colours).

- (A) $\frac{16}{33}$ (C) $\frac{1}{3}$
(B) $\frac{8}{33}$ (D) $\frac{2}{3}$

Lời giải chi tiết

Different colours occur via (Black, White) or (White, Black):

$$P(\text{different}) = 2 \times \frac{8}{12} \times \frac{4}{11} = 2 \times \frac{32}{132} = \frac{64}{132} = \frac{16}{33}. \text{ (A.)}$$

Bài tập luyện tập

Câu 26. (Extended) A box of 15 components has 3 faulty. Two components are selected without replacement for testing. (a) Find $P(\text{both faulty})$. (b) Find $P(\text{exactly one faulty})$. (c) If 35 such boxes are each tested this way, find the expected number of boxes with exactly one faulty component found.

Lời giải chi tiết

(a) $\frac{3}{15} \times \frac{2}{14} = \frac{6}{210} = \frac{1}{35}$.

(b) Exactly one faulty occurs via (faulty, ok) or (ok, faulty):

$$2 \times \frac{3}{15} \times \frac{12}{14} = 2 \times \frac{36}{210} = \frac{72}{210} = \frac{12}{35}.$$

(c) Expected number of boxes = $35 \times \frac{12}{35} = 12$.

Bài tập luyện tập

Câu 27. (Extended) In a survey of 80 people, 50 own a car (C), 34 own a bicycle (Bi), and 15 own neither. Find $P(C | Bi)$.

(A) $\frac{19}{34}$

(C) $\frac{15}{34}$

(B) $\frac{19}{50}$

(D) $\frac{50}{80}$

Lời giải chi tiết

At least one: $80 - 15 = 65$. $n(C \cap Bi) = 50 + 34 - 65 = 19$.

$$P(C | Bi) = \frac{19}{34}. \text{ (A)}$$

Bài tập luyện tập

Câu 28. (Extended) A bag contains 4 red, 3 blue, and 3 yellow counters (10 total). Two counters are drawn at random without replacement. (a) Find $P(\text{both red})$. (b) Find $P(\text{one red and one blue, in either order})$. (c) Given that the first counter drawn is red, find $P(\text{the second counter is not red})$. (d) Find $P(\text{exactly one red counter among the two draws})$, and check your answer is consistent with parts (a) and (c).

Lời giải chi tiết

(a) $\frac{4}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{12}{90} = \frac{2}{15}$.

(b) $\left(\frac{4}{10} \times \frac{3}{9}\right) + \left(\frac{3}{10} \times \frac{4}{9}\right) = \frac{12}{90} + \frac{12}{90} = \frac{4}{15}$.

(c) After removing 1 red, 3 red remain out of 9 total, so 6 are not red: $P(\text{2nd not red} | \text{1st red}) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

(d) Exactly one red = $P(\text{red, not-red}) + P(\text{not-red, red}) = \left(\frac{4}{10} \times \frac{6}{9}\right) + \left(\frac{6}{10} \times \frac{4}{9}\right) = \frac{24}{90} + \frac{24}{90} = \frac{8}{15}$.

Check: $P(\text{no red}) + P(\text{both red}) + P(\text{exactly one red}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} + \frac{2}{15} + \frac{8}{15} = \frac{30}{90} + \frac{12}{90} + \frac{48}{90} = \frac{90}{90} = 1. \checkmark$

Bài tập luyện tập

Câu 29. Of 50 people, 30 are adults (24 of whom like tea) and 20 are children (8 of whom like tea). Find $P(\text{is a child} \mid \text{likes tea})$.

- (A) $\frac{1}{4}$
(B) $\frac{8}{50}$

- (C) $\frac{20}{50}$
(D) $\frac{8}{20}$

Lời giải chi tiết

Total who like tea = $24 + 8 = 32$. $P(\text{child} \mid \text{tea}) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Câu 30. (Extended) In a survey of 90 students, 54 study Physics, 40 study Chemistry, and 22 study both. (a) Find the number of students who study neither subject. (b) Find $P(\text{a single randomly chosen student studies Physics only})$. (c) Two students are chosen without replacement from all 90; find $P(\text{both study neither subject})$.

Lời giải chi tiết

$n(P \cup C) = 54 + 40 - 22 = 72$. **(a)** Neither = $90 - 72 = 18$.

(b) Physics only = $54 - 22 = 32$, so $P = \frac{32}{90} = \frac{16}{45}$.

(c) $P(\text{both neither}) = \frac{18}{90} \times \frac{17}{89} = \frac{306}{8010} = \frac{17}{445} \approx 0.038$.

Bài tập luyện tập

Câu 31. A bag contains 5 green and 7 orange marbles. One marble is drawn at random. Find $P(\text{green})$ and $P(\text{not green})$.

- (A) $\frac{5}{12}, \frac{7}{12}$
(B) $\frac{5}{7}, \frac{7}{5}$

- (C) $\frac{7}{12}, \frac{5}{12}$
(D) $\frac{5}{12}, \frac{5}{12}$

Lời giải chi tiết

Total = $5 + 7 = 12$. $P(\text{green}) = \frac{5}{12}$. $P(\text{not green}) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Câu 32. A biased coin has $P(\text{heads}) = 0.6$. It is tossed twice. Find $P(\text{exactly one head})$.

- (A) 0.48
(B) 0.36

- (C) 0.24
(D) 0.6

Lời giải chi tiết

Exactly one head occurs as (H,T) or (T,H): $P = (0.6 \times 0.4) + (0.4 \times 0.6) = 0.24 + 0.24 = 0.48$. **(A).**

Bài tập luyện tập

Câu 33. (Extended) A box contains 6 black pens and 4 blue pens. Three pens are drawn without replacement. Find $P(\text{all three are black})$.

(A) $\frac{1}{6}$

(C) $\frac{2}{9}$

(B) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{1}{3}$

Lời giải chi tiết

$$P(\text{all black}) = \frac{6}{10} \times \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{120}{720} = \frac{1}{6}. \text{ (A).}$$

Bài tập luyện tập

Câu 34. In a class of 32 students, every student studies at least one of Art or Music; 19 study Art and 21 study Music. Find $P(\text{studies both Art and Music})$.

(A) $\frac{8}{32}$

(C) $\frac{21}{32}$

(B) $\frac{19}{32}$

(D) $\frac{40}{32}$

Lời giải chi tiết

Since every student studies at least one subject, $n(A \cup M) = 32$. Using $n(A \cup M) = n(A) + n(M) - n(A \cap M)$: $32 = 19 + 21 - n(A \cap M) \Rightarrow n(A \cap M) = 8$. $P = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$. (A).

Bài tập luyện tập

Câu 35. (Extended) A spinner has sections coloured red, blue, and green with $P(\text{red}) = 0.3$, $P(\text{blue}) = 0.45$. The spinner is spun twice, independently. Find $P(\text{first spin red and second spin green})$.

(A) 0.075

(C) 0.3

(B) 0.135

(D) 0.25

Lời giải chi tiết

$P(\text{green}) = 1 - 0.3 - 0.45 = 0.25$. Independent spins: $P(\text{red then green}) = 0.3 \times 0.25 = 0.075$. (A).

Bài tập luyện tập

Câu 36. (Extended) Two ordinary fair dice are rolled and their scores are added. Find $P(\text{sum is at least 10})$.

(A) $\frac{6}{36}$

(C) $\frac{7}{36}$

(B) $\frac{5}{36}$

(D) $\frac{4}{36}$

Lời giải chi tiết

Sums ≥ 10 : sum = 10: (4, 6), (5, 5), (6, 4) – 3 ways; sum = 11: (5, 6), (6, 5) – 2 ways; sum = 12: (6, 6) – 1 way. Total = 3 + 2 + 1 = 6 outcomes out of 36. $P = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. (A).

Bài tập luyện tập

Câu 37. (Extended) A committee of 2 people is chosen at random from a group of 5 men and 3 women (chosen without replacement, order does not matter). Find P (both chosen are women).

(A) $\frac{3}{28}$

(C) $\frac{9}{64}$

(B) $\frac{6}{28}$

(D) $\frac{1}{8}$

Lời giải chi tiết

Treating the two selections as an unordered pair via a tree diagram: $P(\text{both women}) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{6}{56} = \frac{3}{28}$. (A).

Bài tập luyện tập

Câu 38. (Extended) In a group of 60 students, $P(\text{plays football}) = \frac{1}{3}$ and $P(\text{plays basketball}) = \frac{2}{5}$; 9 students play both sports. Find $P(\text{plays neither sport})$.

(A) $\frac{25}{60}$

(C) $\frac{15}{60}$

(B) $\frac{20}{60}$

(D) $\frac{35}{60}$

Lời giải chi tiết

Football: $\frac{1}{3} \times 60 = 20$ students. Basketball: $\frac{2}{5} \times 60 = 24$ students. Both = 9, so $n(F \cup B) = 20 + 24 - 9 = 35$. Neither = $60 - 35 = 25$, i.e. $P(\text{neither}) = \frac{25}{60} = \frac{5}{12}$. (A).

Statistics

Mục tiêu Unit: Trung bình cộng, trung vị, mốt và khoảng biến thiên từ danh sách số liệu và từ bảng tần số (kể cả tìm giá trị còn thiếu, gộp trung bình của hai nhóm); ước lượng trung bình từ dữ liệu ghép nhóm bằng giá trị đại diện, xác định lớp chứa mốt và lớp chứa trung vị; biểu đồ thân lá (kể cả dạng lưng-đối-lưng) và tìm trung vị, khoảng biến thiên, tứ phân vị trực tiếp từ biểu đồ; biểu đồ tần số với độ rộng lớp bằng nhau và không bằng nhau – mật độ tần số (Extended); biểu đồ tần số tích lũy, trung vị, tứ phân vị, độ lệch tứ phân vị, phần trăm vị và biểu đồ hộp (Extended); biểu đồ phân tán, tương quan và đường thẳng hồi quy vẽ bằng mắt.

9.1 Averages and Range

9.1.1 Mean, median, mode and range from a list of values

For a list of n numerical values, four summary statistics describe the data.

Mean: $\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$ (sum of all values $\div$ number of values). **Median:** the middle value once the data is sorted in order (average of the two middle values if n is even). **Mode:** the value that occurs most often (a data set can have no mode, one mode, or several). **Range:** maximum – minimum, a simple (but crude) measure of spread.

Ví dụ mẫu • Mean, median, mode, range

Find the mean, median, mode, and range of: 4, 7, 7, 9, 12, 15.

Mean: $\frac{4 + 7 + 7 + 9 + 12 + 15}{6} = \frac{54}{6} = 9$.

Median: $n = 6$ (even), so average the 3rd and 4th values in the sorted list 4, 7, 7, 9, 12, 15:
 $\frac{7 + 9}{2} = 8$.

Mode: 7 (it appears twice, more than any other value).

Range: $15 - 4 = 11$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với một danh sách số liệu, luôn **sắp xếp theo thứ tự tăng dần trước** khi tìm trung vị. Nếu n lẻ, trung vị là giá trị chính giữa; nếu n chẵn, trung vị là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa. Mốt là giá trị xuất hiện nhiều lần nhất – một bộ số liệu có thể không có mốt, có một mốt, hoặc có nhiều mốt (đa mốt). Khoảng biến thiên (range) chỉ dùng hai giá trị cực trị nên rất nhạy với ngoại lệ (outlier), không phản ánh tốt độ phân tán của toàn bộ dữ liệu – đây là lý do IQR (Mục 5) thường được ưa dùng hơn.

9.1.2 Ungrouped frequency tables

When the same value repeats many times, data is often organised in a **frequency table**. The mean is then calculated using

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f},$$

where x is each distinct value and f is how many times it occurs. The median and mode are found by tracking a running (cumulative) total of the frequencies to locate the middle position(s).

Ví dụ mẫu · Frequency table

A survey of 25 students records the number of siblings each has:

Number of siblings x	0	1	2	3	4
Frequency f	5	9	7	3	1

Find the mean, median, mode, and range.

$$\sum f = 5 + 9 + 7 + 3 + 1 = 25. \quad \sum fx = 0(5) + 1(9) + 2(7) + 3(3) + 4(1) = 0 + 9 + 14 + 9 + 4 = 36.$$

$$\text{Mean} = \frac{36}{25} = 1.44 \text{ siblings.}$$

Median: $n = 25$, so the median is the $\frac{25+1}{2} = 13$ th value once all 25 values are listed in order.

Running totals: up to $x = 0$ is 5; up to $x = 1$ is $5 + 9 = 14$. Since $5 < 13 \leq 14$, the 13th value falls in the group $x = 1$, so **median** = 1.

Mode = 1 (highest frequency, $f = 9$). **Range** = $4 - 0 = 4$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với bảng tần số không ghép nhóm (mỗi x là một giá trị cụ thể, không phải một khoảng), công thức trung bình trở thành $\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f}$ - thực chất vẫn là "tổng chia số lượng", chỉ khác là ta nhân mỗi giá trị với tần số của nó trước khi cộng để khỏi phải liệt kê từng phần tử. Khi tìm trung vị từ bảng tần số, hãy cộng dồn tần số (tần số tích lũy) để xác định vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ (n lẻ) hoặc trung bình hai vị trí $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2} + 1$ (n chẵn) rơi vào giá trị x nào.

9.1.3 Missing values and combining data sets

Two common exam variations build directly on the mean formula: finding a value that is missing from a data set when the mean is already known, and combining two separate data sets into one.

Ví dụ mẫu · Finding a missing value

The mean of 8 numbers is 15. Seven of the numbers are 10, 12, 14, 16, 18, 20, 11. Find the eighth number.

Since the mean of all 8 numbers is 15, their total must be $15 \times 8 = 120$.

Sum of the seven known numbers: $10 + 12 + 14 + 16 + 18 + 20 + 11 = 101$.

Eighth number = $120 - 101 = 19$.

Ví dụ mẫu · Combining two data sets (weighted mean)

Class A has 18 students with a mean test score of 64. Class B has 12 students with a mean test score of 74. Find the mean score of all 30 students combined.

Total score of Class A = $18 \times 64 = 1152$. Total score of Class B = $12 \times 74 = 888$.

Combined total = $1152 + 888 = 2040$. Combined number of students = $18 + 12 = 30$.
 Combined mean = $\frac{2040}{30} = 68$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Để tìm một giá trị còn thiếu khi biết trung bình, luôn quay lại công thức gốc: tổng = trung bình $\times$ số lượng, rồi lấy tổng cần có trừ đi tổng đã biết. Khi **gộp hai nhóm dữ liệu**, phải cộng **tổng** của từng nhóm (trung bình nhân số lượng của nhóm đó) rồi chia cho **tổng số lượng** của cả hai nhóm – đây gọi là **trung bình có trọng số (weighted mean)**, vì nhóm đông hơn sẽ "kéo" trung bình chung về phía nó nhiều hơn.

(!) Lỗi thường gặp: Một sai lầm rất phổ biến khi gộp hai nhóm là lấy trung bình cộng đơn giản của hai giá trị trung bình, tức $\frac{\text{mean}_1 + \text{mean}_2}{2}$. Cách này chỉ đúng khi **hai nhóm có cùng số lượng phần tử**. Trong Ví dụ trên, nếu tính sai theo cách này sẽ ra $\frac{64 + 74}{2} = 69$ – khác với kết quả đúng là 68, vì Class A (18 học sinh) đông hơn Class B (12 học sinh) nên phải "kéo" trung bình chung gần với 64 hơn.

9.2 Grouped (Continuous) Data

9.2.1 Estimating the mean from a grouped frequency table

When raw data is grouped into class intervals (e.g. 10–20, 20–30, ...), the exact value of each item is lost – only the class it falls into is known. To estimate the mean, each class is represented by its **midpoint** (the average of the class boundaries), and the same weighted-mean formula is applied:

$$\text{mean} \approx \frac{\sum fx}{\sum f}, \quad x = \text{midpoint of each class.}$$

Because the midpoint stands in for every value in that class, this can only ever be an **estimate** of the true mean.

Ví dụ mẫu · Estimating the mean from grouped data

The table shows the heights (h cm) of 40 plants.

Height h (cm)	$0 \leq h < 10$	$10 \leq h < 20$	$20 \leq h < 30$	$30 \leq h < 40$	$40 \leq h < 50$
Midpoint x	5	15	25	35	45
Frequency f	4	10	9	12	5

Estimate the mean height, state the modal class, and state the class containing the median.

$$\sum f = 4 + 10 + 9 + 12 + 5 = 40.$$

$$\sum fx = 4(5) + 10(15) + 9(25) + 12(35) + 5(45) = 20 + 150 + 225 + 420 + 225 = 1040.$$

$$\text{Estimated mean} = \frac{1040}{40} = 26 \text{ cm.}$$

Modal class: the class with the highest frequency is 12, so the modal class is $30 \leq h < 40$.

Median class: cumulative frequencies are 4, 14, 23, 35, 40. The median position is $\frac{n}{2} = 20$ th.

Since $14 < 20 \leq 23$, the median lies in the class $20 \leq h < 30$ (note this is *not* the same as the modal class here).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Với dữ liệu ghép nhóm, ta KHÔNG biết giá trị chính xác của từng phần tử nên phải dùng **giá trị đại diện (midpoint)** của mỗi lớp – kết quả chỉ là **trung bình ước lượng (estimated mean)**, không phải trung bình chính xác. $\text{Midpoint} = \frac{\text{cận dưới} + \text{cận trên}}{2}$ của mỗi lớp.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Lớp chứa mốt (modal class) là lớp có tần số lớn nhất – đọc trực tiếp từ bảng, không cần tính toán gì thêm. **Lớp chứa trung vị** phải xác định qua **tần số tích lũy**: tìm vị trí thứ $\frac{n}{2}$ rồi xem tần số tích lũy vượt qua vị trí đó ở lớp nào. Hai lớp này **không nhất thiết trùng nhau** – đề thi rất hay kiểm tra học sinh có phân biệt được hai khái niệm này không.

9.3 Stem-and-Leaf Diagrams**9.3.1 Constructing and reading a stem-and-leaf diagram**

A **stem-and-leaf diagram** displays every individual data value while still grouping it visually, unlike a grouped frequency table. Each value is split into a **stem** (leading digit(s)) and a **leaf** (the last digit); leaves on each stem row are written in increasing order. Because every original value is preserved, the median, range, and quartiles can all be read off exactly (no estimation needed).

Ví dụ mẫu · Constructing a stem-and-leaf diagram

Fifteen students' test marks are: 45, 31, 23, 66, 38, 52, 47, 34, 61, 25, 58, 42, 34, 51, 47.

Sorting first: 23, 25, 31, 34, 34, 38, 42, 45, 47, 47, 51, 52, 58, 61, 66.

Stem Leaf	
2	3 5
3	1 4 4 8
4	2 5 7 7
5	1 2 8
6	1 6

Key: 2 | 3 = 23 marks. Stems are the tens digit, leaves are the units digit, of 15 students' test marks.

Ví dụ mẫu · Median, range and quartiles from a stem-and-leaf diagram

Using the diagram above ($n = 15$ values: 23, 25, 31, 34, 34, 38, 42, 45, 47, 47, 51, 52, 58, 61, 66), find the median, range, Q_1 , Q_3 , and the interquartile range.

Median: the 8th value (middle of 15) = **45**.

Range: $66 - 23 = 43$.

Q_1 : median of the lower 7 values (23, 25, 31, 34, 34, 38, 42) = the 4th value = **34**.

Q_3 : median of the upper 7 values (47, 47, 51, 52, 58, 61, 66) = the 4th value = **52**.

IQR = $52 - 34 = 18$.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ưu điểm lớn nhất của biểu đồ thân lá so với bảng tần số ghép nhóm là **giữ nguyên từng giá trị gốc**, nên trung vị, khoảng biến thiên, và tứ phân vị đều tìm được **chính xác**, không phải ước lượng. Cách đọc: đếm số giá trị n , xác định vị trí trung vị (giá trị chính giữa khi đọc theo thứ tự lá tăng dần trên từng hàng thân), sau đó chia đôi phần dưới và phần trên để tìm Q_1 , Q_3 giống hệt cách làm với danh sách số liệu thô.

9.3.2 Back-to-back stem-and-leaf diagrams

A **back-to-back stem-and-leaf diagram** compares two data sets sharing the same stems: one set's leaves are written to the left of the stem (read *outward*, i.e. largest digit closest to the stem), and the other set's leaves are written to the right (read normally).

Ví dụ mẫu · Back-to-back stem-and-leaf diagram (comparing two groups)

Two groups of 11 people each recorded the time (minutes) taken to complete a puzzle.

Group A		Group B
8 5 2	1	4 7 9
9 7 5 3 1	2	0 2 4 6 8
6 3 1	3	0 2 5

Key: for Group A, $8 | 1 = 18$; for Group B, $1 | 4 = 14$. Both groups have 11 recorded times (minutes).

Find the median and range for each group, and compare.

Group A sorted: 12, 15, 18, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 36. Median (the 6th of 11) = **25**. Range = $36 - 12 = 24$.

Group B sorted: 14, 17, 19, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 35. Median (the 6th of 11) = **24**. Range = $35 - 14 = 21$.

Group A's median (25) is 1 minute higher than Group B's (24), so Group B was typically slightly faster; Group A's times are also more spread out (range 24 vs. 21).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trong biểu đồ thân lá lưng-đối-lưng (back-to-back), thân (stem) chỉ viết **một lần ở giữa**, dùng chung cho cả hai nhóm; lá của nhóm bên trái đọc từ thân ra ngoài (giá trị tăng dần từ trong ra ngoài), lá của nhóm bên phải đọc bình thường từ thân ra ngoài. Khi so sánh hai nhóm, luôn nêu **cả trung vị lẫn khoảng biến thiên (hoặc IQR)**: trung vị cho biết nhóm nào "điển hình" cao/thấp hơn, còn khoảng biến thiên/IQR cho biết nhóm nào có dữ liệu đồng đều hơn hay phân tán hơn.

9.4 Histograms

9.4.1 Histograms with equal class widths

When all class widths are equal, a histogram is a bar chart with no gaps between bars, where the **height of each bar is simply the frequency** of that class (there is no need to compute a density, since dividing every frequency by the same constant width would not change the relative shape).

Ví dụ mẫu · Reading an equal-width histogram

Test scores for 50 students are grouped into classes of width 10: 0–10 ($f = 2$), 10–20 ($f = 6$), 20–30 ($f = 14$), 30–40 ($f = 18$), 40–50 ($f = 8$), 50–60 ($f = 2$). Check the total, and state which bar is tallest.

Total = $2 + 6 + 14 + 18 + 8 + 2 = 50$ ✓ (matches the 50 students). The tallest bar is the class 30–40 ($f = 18$), which is also the modal class.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Khi mọi lớp có cùng độ rộng, trục tung của histogram vẫn có thể ghi là "tần số" – chiều cao cột **chính là tần số**, không cần chia cho độ rộng lớp. Đây là điểm khác biệt quan trọng với histogram độ rộng không đều ở mục tiếp theo.

9.4.2 Histograms with unequal class widths (Extended)

When class widths differ, using raw frequency as the bar height would be misleading – a wide class would look "tall" simply because it has captured more values, not because that value range is genuinely more common. Instead, the vertical axis must show **frequency density**:

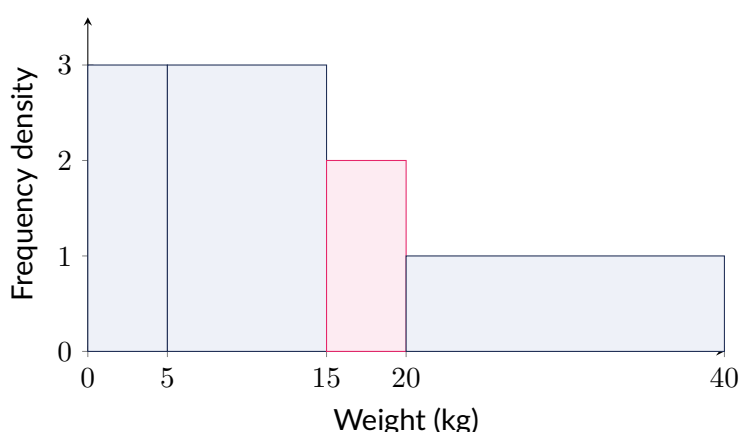
$$\text{frequency density} = \frac{\text{frequency}}{\text{class width}}$$

The **area** of each bar (height $\times$ width = frequency density $\times$ class width = frequency) then correctly represents the frequency of that class, regardless of how wide or narrow the class is.

Ví dụ mẫu · Constructing a histogram with unequal class widths (Extended)

The weights (kg) of parcels are grouped as: 0–5 ($f = 15$), 5–15 ($f = 30$), 15–20 ($f = 10$), 20–40 ($f = 20$). Calculate the frequency density for each class and sketch the histogram.

$$fd_{0-5} = \frac{15}{5} = 3. \quad fd_{5-15} = \frac{30}{10} = 3. \quad fd_{15-20} = \frac{10}{5} = 2. \quad fd_{20-40} = \frac{20}{20} = 1.$$



Histogram with unequal class widths for parcel weights: bar height = frequency density = frequency $\div$ class width.

(!) Lỗi thường gặp: Trục tung của histogram khi độ rộng lớp **KHÔNG** bằng nhau phải là **mật độ tần số**, không phải tần số. Vẽ nhầm trục tung là tần số sẽ khiến các lớp rộng bị "phóng đại" chiều cao một cách sai lệch. Ngược lại, muốn tìm lại tần số từ chiều cao trên histogram:

frequency = $fd \times \text{class width}$ – đây là dạng câu hỏi "làm ngược" rất hay gặp trong đề Extended.

9.4.3 Working backwards, and estimating sub-interval frequencies (Extended)

Two further skills build on frequency density: recovering a frequency when only the density and class width are given, and using the **proportion of area** within a single bar to estimate how many values lie in part of that class (this assumes values are spread evenly across the class).

Ví dụ mẫu · Working backwards from frequency density (Extended)

A histogram bar spans the class 20–45 and has height (frequency density) 1.6. Find the frequency represented by this bar.

Class width = $45 - 20 = 25$. Frequency = $fd \times \text{width} = 1.6 \times 25 = 40$.

Ví dụ mẫu · Estimating a sub-interval frequency from area (Extended)

A histogram has classes 0–10 (frequency density 1.5), 10–20 (frequency density 3.0), and 20–40 (frequency density 0.8). Estimate the number of values that lie between 15 and 25.

First find the frequency of each full class: 0–10: $1.5 \times 10 = 15$; 10–20: $3.0 \times 10 = 30$; 20–40: $0.8 \times 20 = 16$.

The interval 15–25 cuts across two bars, so each part must be estimated separately (assuming values are spread evenly within each bar, so sub-area is proportional to sub-width):

Part in 10–20 (i.e. 15 to 20): this is $20 - 15 = 5$ out of the full width 10, i.e. a proportion $\frac{5}{10} = 0.5$ of that class $\Rightarrow 0.5 \times 30 = 15$ values.

Part in 20–40 (i.e. 20 to 25): this is $25 - 20 = 5$ out of the full width 20, i.e. a proportion $\frac{5}{20} = 0.25$ of that class $\Rightarrow 0.25 \times 16 = 4$ values.

Estimated total between 15 and 25: $15 + 4 = 19$ values.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Ý tưởng cốt lõi: trong một cột của histogram, chiều cao (mật độ tần số) là KHÔNG đổi trên suốt bề rộng cột, nên diện tích của một phần cột tỉ lệ thuận với bề rộng của phần đó. Vì vậy, số giá trị ước lượng trong một khoảng con = (bề rộng khoảng con ÷ bề rộng cả lớp) × tần số của cả lớp đó. Nếu khoảng cần tìm cắt ngang qua **nhều cột**, phải tính riêng phần đóng góp từ mỗi cột rồi cộng lại như trong Ví dụ trên.

9.5 Cumulative Frequency Diagrams and Box Plots (Extended)

9.5.1 Constructing the cumulative frequency table and curve

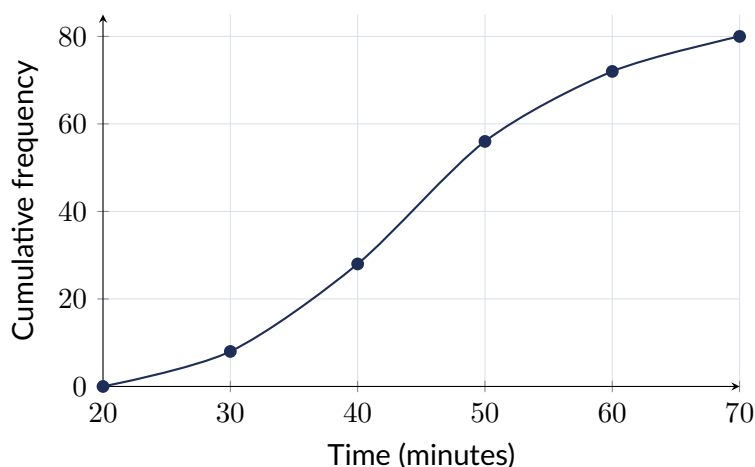
A **cumulative frequency** table keeps a running total of frequencies up to (and including) each class. Plotting cumulative frequency against the **upper class boundary** of each class, then joining the points with a smooth increasing curve, gives a **cumulative frequency curve** (sometimes called an ogive).

Ví dụ mẫu · Constructing a cumulative frequency table (Extended)

The finishing times (minutes) of 80 runners in a race are grouped as: 20–30 ($f = 8$), 30–40 ($f = 20$), 40–50 ($f = 28$), 50–60 ($f = 16$), 60–70 ($f = 8$). Construct the cumulative frequency table.

Time < (upper boundary)	30	40	50	60	70
Cumulative frequency	8	28	56	72	80

(Each entry is the running total: 8 ; $8 + 20 = 28$; $28 + 28 = 56$; $56 + 16 = 72$; $72 + 8 = 80$, matching the total of 80 runners.)



Cumulative frequency curve for the finishing times of 80 runners (upper class boundary against cumulative frequency).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Biểu đồ tần số tích lũy luôn vẽ theo **cận trên** của mỗi lớp (không phải cận dưới hay midpoint), vì tần số tích lũy là "số giá trị nhỏ hơn hoặc bằng" cận đó. Đường cong luôn **đi lên hoặc nằm ngang**, không bao giờ đi xuống, vì tần số tích lũy chỉ có thể tăng hoặc giữ nguyên khi ta xét thêm các lớp lớn hơn.

9.5.2 Median, quartiles, interquartile range and percentiles

From the cumulative frequency curve, key positions in the data can be read off directly (or estimated by linear interpolation within a class, if working from the table rather than the graph):

For n total values: **median** is at position $\frac{n}{2}$; **lower quartile** Q_1 is at position $\frac{n}{4}$; **upper quartile** Q_3 is at position $\frac{3n}{4}$; **interquartile range** $IQR = Q_3 - Q_1$; more generally, the k th **percentile** is at position $\frac{k}{100} \times n$.

Ví dụ mẫu · Median, quartiles, IQR and a percentile from a cumulative frequency curve (Extended)

Using the 80-runner data from the previous example (cumulative frequencies 8, 28, 56, 72, 80 at boundaries 30, 40, 50, 60, 70), estimate the median, Q_1 , Q_3 , the IQR, and the 90th percentile, using linear interpolation within each class.

Median (position $\frac{80}{2} = 40$): falls in class 40–50 (cumulative frequency runs from 28 to 56 there).

$$\text{median} = 40 + \frac{40 - 28}{56 - 28} \times 10 = 40 + \frac{12}{28} \times 10 \approx \mathbf{44.3 \text{ min.}}$$

Q_1 (position $\frac{80}{4} = 20$): falls in class 30–40 (cumulative frequency runs from 8 to 28).

$$Q_1 = 30 + \frac{20 - 8}{28 - 8} \times 10 = 30 + \frac{12}{20} \times 10 = 30 + 6 = \mathbf{36}.$$

Q_3 (position $\frac{3(80)}{4} = 60$): falls in class 50–60 (cumulative frequency runs from 56 to 72).

$$Q_3 = 50 + \frac{60 - 56}{72 - 56} \times 10 = 50 + \frac{4}{16} \times 10 = 50 + 2.5 = \mathbf{52.5}.$$

$$\text{IQR} = 52.5 - 36 = \mathbf{16.5}.$$

90th percentile (position $0.90 \times 80 = 72$): this lands exactly at the point where cumulative frequency reaches 72, i.e. the upper boundary of class 50–60:

$$P_{90} = 50 + \frac{72 - 56}{72 - 56} \times 10 = 50 + 10 = \mathbf{60 \text{ min.}}$$

So 90% of runners finished in under 60 minutes.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nội suy tuyến tính (linear interpolation) trong biểu đồ tần số tích lũy: xác định lớp chứa vị trí cần tìm, rồi dùng tỉ lệ $\frac{\text{vị trí cần} - \text{tần số tích lũy đầu lớp}}{\text{tần số tích lũy cuối lớp} - \text{tần số tích lũy đầu lớp}}$ nhân với độ rộng lớp, cộng vào cận dưới của lớp đó. Vị trí trung vị luôn là $\frac{n}{2}$, Q_1 là $\frac{n}{4}$, Q_3 là $\frac{3n}{4}$, và phần trăm vị thứ k là $\frac{k}{100} \times n$ – công thức giống hệt nhau, chỉ khác vị trí cần tìm.

(!) Lỗi thường gặp: Lỗi thường gặp nhất khi đọc biểu đồ tần số tích lũy là **đọc nhầm trục**: đọc giá trị trên trục hoành (biên lớp, ví dụ thời gian) khi đề hỏi tần số tích lũy, hoặc ngược lại. Quy tắc: muốn tìm trung vị/tứ phân vị, đi TỪ trục tung (vị trí $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{4}$, $\frac{3n}{4}$) SANG đường cong rồi chiếu XUỐNG trục hoành để đọc giá trị; muốn tìm "có bao nhiêu giá trị nhỏ hơn a ", đi TỪ trục hoành (giá trị a) LÊN đường cong rồi chiếu SANG trục tung.

9.5.3 Box-and-whisker plots and comparing distributions

A **box-and-whisker plot** (box plot) summarises a data set using its **five-number summary**: minimum, Q_1 , median, Q_3 , and maximum. The box spans Q_1 to Q_3 (so its length is the IQR) with a line marking the median; whiskers extend from the box out to the minimum and maximum values.

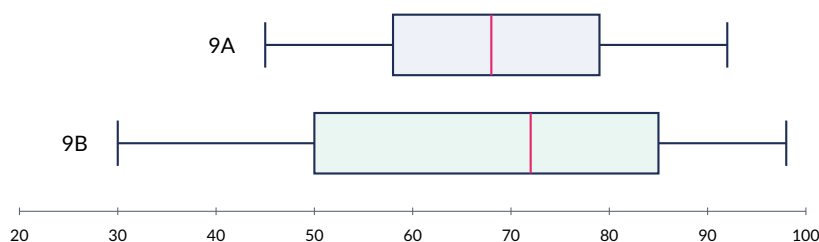
Ví dụ mẫu · Comparing two box plots (Extended)

Two classes sat the same test. Class 9A: minimum 45, $Q_1 = 58$, median 68, $Q_3 = 79$, maximum 92. Class 9B: minimum 30, $Q_1 = 50$, median 72, $Q_3 = 85$, maximum 98. Compare the two classes' performance.

$$\text{IQR}_{9A} = 79 - 58 = 21. \quad \text{IQR}_{9B} = 85 - 50 = 35.$$

$$\text{Range}_{9A} = 92 - 45 = 47. \quad \text{Range}_{9B} = 98 - 30 = 68.$$

Since $\text{median}_{9B} = 72 > \text{median}_{9A} = 68$, class 9B typically scored higher. However, $\text{IQR}_{9B} = 35 > \text{IQR}_{9A} = 21$ (and likewise for the range), so class 9B's scores were considerably more spread out (less consistent) than class 9A's.



Box plots comparing test scores of Class 9A and Class 9B.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Box plot tóm tắt 5 giá trị: min, Q_1 , trung vị, Q_3 , max. Chiều dài của "hộp" chính là IQR (chứa đúng 50% dữ liệu ở giữa). Khi so sánh hai box plot, luôn nhận xét theo **hai khía cạnh**: (1) **vị trí trung tâm** (so sánh trung vị – nhóm nào có giá trị "điển hình" cao/thấp hơn) và (2) **độ phân tán** (so sánh IQR hoặc range – nhóm nào đồng đều/ổn định hơn, nhóm nào biến động nhiều hơn). Trung vị cao hơn KHÔNG có nghĩa là toàn bộ dữ liệu của nhóm đó lớn hơn nhóm kia ở mọi điểm.

9.6 Scatter Diagrams and Correlation**9.6.1 Types of correlation and line of best fit**

A **scatter diagram** plots pairs of values (x, y) to reveal any relationship between two variables.

Types of correlation

- **Positive correlation:** as x increases, y tends to increase (points rise from lower-left to upper-right).
- **Negative correlation:** as x increases, y tends to decrease (points fall from upper-left to lower-right).
- **No correlation:** the points show no clear linear trend (a random scatter).

When correlation is present, a **line of best fit** can be drawn by eye: a straight line passing through the **mean point** $(\bar{x}, \bar{y})$, positioned so roughly equal numbers of points lie above and below it.

Ví dụ mẫu · Scatter diagram and line of best fit

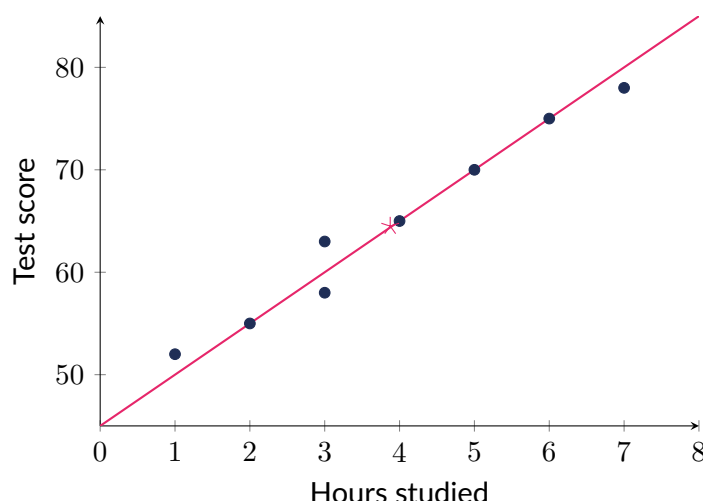
The table shows hours studied (x) and test score (y) for 8 students.

x (hours)	1	2	3	3	4	5	6	7
y (score)	52	55	58	63	65	70	75	78

Find the mean point, and state the type of correlation.

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7}{8} = \frac{31}{8} = 3.875. \quad \bar{y} = \frac{52 + 55 + 58 + 63 + 65 + 70 + 75 + 78}{8} = \frac{516}{8} = 64.5.$$

Mean point: $(3.875, 64.5)$. As x increases, y consistently increases, so this is **strong positive correlation**. A line of best fit drawn by eye through the mean point gives approximately $y \approx 5x + 45$.



Scatter diagram of hours studied versus test score, with a line of best fit drawn by eye through the mean point $(3.875, 64.5)$ (marked with a star).

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Trước khi vẽ đường thẳng hồi quy bằng mắt (line of best fit), luôn tính **điểm trung bình** $(\bar{x}, \bar{y})$ trước – đường thẳng **bắt buộc phải đi qua điểm này**, và được vẽ sao cho số điểm dữ liệu nằm phía trên và phía dưới đường thẳng tương đối cân bằng nhau. Tương quan **dương**: hai biến cùng tăng/cùng giảm; tương quan **âm**: biến này tăng thì biến kia giảm; **không có tương quan**: các điểm phân tán ngẫu nhiên, không theo xu hướng nào.

9.6.2 Interpolation, extrapolation, and correlation versus causation

Once a line of best fit is drawn, it can be used to estimate a y -value for a given x -value. **Interpolation** means estimating within the range of the original data (reasonably reliable); **extrapolation** means estimating outside that range (much less reliable, since there is no guarantee the same trend continues).

Ví dụ mẫu · Interpolation and extrapolation

Using the line of best fit $y \approx 5x + 45$ from the previous example (data ranged from $x = 1$ to $x = 7$ hours), estimate the test score for a student who studies (a) 2.5 hours, and (b) 10 hours. Comment on the reliability of each estimate.

(a) $x = 2.5$ is within the data range 1–7 (**interpolation**): $y = 5(2.5) + 45 = 12.5 + 45 = 57.5$. This is a reasonably reliable estimate.

(b) $x = 10$ is outside the data range (**extrapolation**): $y = 5(10) + 45 = 95$. This estimate is much less reliable – the linear trend observed for 1 to 7 hours of study may not continue unchanged at 10 hours (for instance, scores cannot realistically exceed 100, so the true relationship must eventually flatten out).

Correlation does not imply causation. A strong correlation shows that two variables tend to move together, but it does not prove that one *causes* the other – a third, unmeasured factor may influence both variables simultaneously.

GIẢI THÍCH TIẾNG VIỆT

VN

Nội suy (interpolation) là ước lượng bên trong phạm vi dữ liệu đã có – tương đối đáng tin cậy. **Ngoại suy (extrapolation)** là ước lượng bên ngoài phạm vi dữ liệu – kém tin cậy hơn nhiều vì không có gì đảm bảo xu hướng tuyến tính vẫn tiếp tục đúng ở ngoài phạm vi đã quan sát.

Ngoài ra, **tương quan không đồng nghĩa với quan hệ nhân quả**: hai biến có tương quan mạnh không có nghĩa biến này "gây ra" biến kia – có thể cả hai cùng chịu ảnh hưởng bởi một yếu tố thứ ba.

9.7 Problem Bank

Bài tập luyện tập

Find the mode of: 5, 8, 8, 10, 10, 10, 12, 15.

- | | |
|--------|--------|
| (A) 8 | (C) 12 |
| (B) 10 | (D) 15 |

Lời giải chi tiết

The value 10 occurs three times, more than any other value. **(B)**.

Bài tập luyện tập

The mean of 9 numbers is 24. Eight of the numbers are 18, 20, 22, 25, 27, 29, 19, 23. Find the ninth number.

Lời giải chi tiết

Required total = $24 \times 9 = 216$. Sum of the eight known numbers: $18 + 20 + 22 + 25 + 27 + 29 + 19 + 23 = 183$. Ninth number = $216 - 183 = 33$.

Bài tập luyện tập

Group P has 20 students with mean score 55. Group Q has 30 students with mean score 65. Find the mean score of all 50 students combined.

- | | |
|--------|--------|
| (A) 60 | (C) 62 |
| (B) 61 | (D) 58 |

Lời giải chi tiết

Total P = $20 \times 55 = 1100$. Total Q = $30 \times 65 = 1950$. Combined total = 3050. Combined mean = $\frac{3050}{50} = 61$. **(B)**.

Bài tập luyện tập

A frequency table gives values: 2 ($f = 4$), 4 ($f = 6$), 6 ($f = 5$), 8 ($f = 5$). Find the mean.

- | | |
|---------|---------|
| (A) 5.0 | (C) 5.2 |
| (B) 5.1 | (D) 4.9 |

Lời giải chi tiết

$$\sum f = 20. \sum fx = 2(4) + 4(6) + 6(5) + 8(5) = 8 + 24 + 30 + 40 = 102. \text{ Mean} = \frac{102}{20} = 5.1. \text{ (B).}$$

Bài tập luyện tập

The table shows the weights (kg) of 50 parcels.

Weight	$0 \leq w < 2$	$2 \leq w < 4$	$4 \leq w < 6$	$6 \leq w < 8$	$8 \leq w < 10$
Frequency f	22	5	6	8	9

(a) Estimate the mean weight. (b) State the modal class. (c) State the class containing the median.

Lời giải chi tiết

Midpoints: 1, 3, 5, 7, 9. $\sum f = 50$. $\sum fx = 22(1) + 5(3) + 6(5) + 8(7) + 9(9) = 22 + 15 + 30 + 56 + 81 = 204$.

(a) Mean $\approx \frac{204}{50} = 4.08$ kg.

(b) Highest frequency is 22, so the modal class is $0 \leq w < 2$.

(c) Cumulative frequencies: 22, 27, 33, 41, 50. Median position $= \frac{50}{2} = 25$ th. Since $22 < 25 \leq 27$, the median lies in $2 \leq w < 4$.

Bài tập luyện tập

Thirteen people's ages give the stem-and-leaf data 18, 19, 20, 22, 25, 27, 29, 31, 33, 36, 40, 42 ($n = 12$). Find the median, range, Q_1 , Q_3 , and IQR.

Lời giải chi tiết

Data already sorted, $n = 12$. Median $= \frac{6\text{th} + 7\text{th}}{2} = \frac{27 + 29}{2} = 28$. Range $= 42 - 18 = 24$.

Lower half (18, 19, 20, 22, 25, 27): $Q_1 = \frac{20 + 22}{2} = 21$.

Upper half (29, 31, 33, 36, 40, 42): $Q_3 = \frac{33 + 36}{2} = 34.5$.

IQR $= 34.5 - 21 = 13.5$.

Bài tập luyện tập

A back-to-back stem-and-leaf diagram gives the heights (cm) of two teams of 9 players each. Team X (sorted): 150, 153, 155, 158, 162, 164, 167, 169, 172. Team Y (sorted): 148, 151, 154, 157, 159, 163, 166, 170, 174. Find the median and range for each team, then state which team is generally taller and which has more variable heights.

Lời giải chi tiết

Team X: median (5th of 9) = 162; range $= 172 - 150 = 22$.

Team Y: median (5th of 9) = 159; range $= 174 - 148 = 26$.

Since $162 > 159$, Team X is generally taller. Since $26 > 22$, Team Y's heights are more variable.

Bài tập luyện tập

An equal-width histogram has bars of width 5 with heights (frequencies) 4, 9, 14, 10, 3 for consecutive classes 0–5, 5–10, 10–15, 15–20, 20–25. How many values lie in the class 10–15?

- (A) 9 (C) 10
(B) 14 (D) 4

Lời giải chi tiết

For equal class widths, bar height = frequency directly, so the class 10–15 (third bar) has frequency 14. **(B)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) A histogram class 15–24 has frequency 27. Find its frequency density.

- (A) 3 (C) 0.33
(B) 243 (D) 27

Lời giải chi tiết

Class width = $24 - 15 = 9$. $fd = \frac{27}{9} = 3$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) A histogram class 15–45 has frequency density 0.6. Find the frequency.

- (A) 18 (C) 0.6
(B) 30 (D) 50

Lời giải chi tiết

Class width = $45 - 15 = 30$. Frequency = $fd \times \text{width} = 0.6 \times 30 = 18$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) A histogram has classes 0–20 (frequency density 0.9), 20–30 (frequency density 2.4), 30–60 (frequency density 0.5). Estimate the number of values between 25 and 40.

Lời giải chi tiết

Full-class frequencies: 0–20: $0.9 \times 20 = 18$; 20–30: $2.4 \times 10 = 24$; 30–60: $0.5 \times 30 = 15$.

Part in 20–30 (i.e. 25 to 30): width 5 of 10, proportion $0.5 \Rightarrow 0.5 \times 24 = 12$.

Part in 30–60 (i.e. 30 to 40): width 10 of 30, proportion $\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \times 15 = 5$.

Estimated total between 25 and 40: $12 + 5 = 17$.

Bài tập luyện tập

(Extended) The queuing times (minutes) of 100 customers are grouped as: 0–5 ($f = 10$), 5–10 ($f = 22$), 10–15 ($f = 35$), 15–20 ($f = 23$), 20–25 ($f = 10$). (a) Construct the cumulative frequency table. (b) Estimate the median. (c) Estimate Q_1 , Q_3 , and the IQR.

Lời giải chi tiết

(a) Cumulative frequencies at upper boundaries 5, 10, 15, 20, 25: 10, 32, 67, 90, 100.

(b) **Median** (position 50): falls in class 10–15 (cumulative from 32 to 67).

$$\text{median} = 10 + \frac{50 - 32}{67 - 32} \times 5 = 10 + \frac{18}{35} \times 5 \approx \mathbf{12.6 \text{ min.}}$$

(c) Q_1 (position 25): falls in class 5–10 (cumulative from 10 to 32).

$$Q_1 = 5 + \frac{25 - 10}{32 - 10} \times 5 = 5 + \frac{15}{22} \times 5 \approx \mathbf{8.41}.$$

Q_3 (position 75): falls in class 15–20 (cumulative from 67 to 90).

$$Q_3 = 15 + \frac{75 - 67}{90 - 67} \times 5 = 15 + \frac{8}{23} \times 5 \approx \mathbf{16.74}.$$

IQR $\approx 16.74 - 8.41 = \mathbf{8.33}$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Using the 80-runner cumulative frequency data (boundaries 20, 30, 40, 50, 60, 70 with cumulative frequencies 0, 8, 28, 56, 72, 80), estimate the 60th percentile.

(A) 47.1

(C) 50

(B) 44.3

(D) 45

Lời giải chi tiết

Position $= 0.60 \times 80 = 48$ th, which falls in class 40–50 (cumulative from 28 to 56).

$$P_{60} = 40 + \frac{48 - 28}{56 - 28} \times 10 = 40 + \frac{20}{28} \times 10 \approx 47.1. \quad \mathbf{(A)}.$$

Bài tập luyện tập

A box plot shows minimum 12, $Q_1 = 18$, median 25, $Q_3 = 33$, maximum 40. What percentage of the data values lie between Q_1 and Q_3 ?

(A) 25%

(C) 75%

(B) 50%

(D) 100%

Lời giải chi tiết

By definition, the interquartile range always contains the middle 50% of the data (from the 25th to the 75th percentile). **(B)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) Two factories' daily output (units) are summarised by box plots. Factory M: minimum 120, $Q_1 = 150$, median 175, $Q_3 = 200$, maximum 230. Factory N: minimum 100, $Q_1 = 140$, median 165, $Q_3 = 210$, maximum 260. Compare typical output and consistency between the two factories.

Lời giải chi tiết

$IQR_M = 200 - 150 = 50$. $IQR_N = 210 - 140 = 70$.
 $Range_M = 230 - 120 = 110$. $Range_N = 260 - 100 = 160$.
Since $median_M = 175 > median_N = 165$, Factory M typically produces more units per day. However, both IQR_N and $Range_N$ exceed those of Factory M, so **Factory N's daily output is more variable** (less consistent from day to day) than Factory M's.

Bài tập luyện tập

A scatter diagram shows points rising steadily from the lower-left to the upper-right, closely clustered around a straight line. This suggests:

- (A) Strong positive correlation (C) No correlation
(B) Strong negative correlation (D) Causation has been confirmed

Lời giải chi tiết

As x increases, y increases too, and the points lie close to a line, indicating a strong *positive* relationship. (A).

Bài tập luyện tập

Using the line of best fit $y \approx 5x + 45$ (valid for x between 1 and 7 hours studied), estimate the test score for a student who studies 2.5 hours.

Lời giải chi tiết

$x = 2.5$ lies within the original data range, so this is interpolation: $y = 5(2.5) + 45 = 12.5 + 45 = 57.5$.

Bài tập luyện tập

A student uses a line of best fit, valid for data collected with x between 1 and 7, to estimate y at $x = 50$. This estimate is unreliable mainly because:

- (A) The relationship observed within the data range may not continue beyond it (C) Lines of best fit cannot be extended at all
(B) The mean point changes value every time (D) The line of best fit only works for even values of x

Lời giải chi tiết

Extrapolating far outside the collected data range assumes the same linear trend continues, which is often not justified. (A).

Bài tập luyện tập

Three sections take a quiz. Section 1: 10 students, mean 70. Section 2: 15 students, mean 75. Section 3: 25 students, mean 82. Find the overall mean for all 50 students.

Lời giải chi tiết

$\text{Total}_1 = 10 \times 70 = 700$. $\text{Total}_2 = 15 \times 75 = 1125$. $\text{Total}_3 = 25 \times 82 = 2050$.
Combined total = $700 + 1125 + 2050 = 3875$. Combined mean = $\frac{3875}{50} = 77.5$.

Bài tập luyện tập

A set of 20 numbers has mean 18. One value, 38, is removed. Find the mean of the remaining 19 numbers, correct to 2 decimal places.

Lời giải chi tiết

Original total = $18 \times 20 = 360$. New total = $360 - 38 = 322$. New mean = $\frac{322}{19} \approx 16.95$.

Bài tập luyện tập

Fifteen students' test marks give a stem-and-leaf diagram with sorted values 23, 25, 31, 34, 34, 38, 42, 45, 47, 47, 51, 52, 58, 61, 66. Find the range.

- | | |
|--------|--------|
| (A) 43 | (C) 23 |
| (B) 66 | (D) 38 |

Lời giải chi tiết

Range = $66 - 23 = 43$. (A).

Bài tập luyện tập

A grouped frequency table has classes 10–20 ($f = 5$), 20–30 ($f = 12$), 30–40 ($f = 18$), 40–50 ($f = 9$). State the modal class.

- | | |
|-----------|-----------|
| (A) 10–20 | (C) 30–40 |
| (B) 20–30 | (D) 40–50 |

Lời giải chi tiết

The highest frequency is 18, in the class 30–40. (C).

Bài tập luyện tập

Using the table from the previous question ($n = 44$), state the class containing the median.

- | | |
|-----------|-----------|
| (A) 10–20 | (C) 30–40 |
| (B) 20–30 | (D) 40–50 |

Lời giải chi tiết

Cumulative frequencies: 5, 17, 35, 44. Median position = $\frac{44}{2} = 22$ nd. Since $17 < 22 \leq 35$, the median lies in 30–40. **(C)**.

Bài tập luyện tập

Find the interquartile range of: 4, 7, 9, 12, 15, 18, 20, 22, 25, 30.

Lời giải chi tiết

$n = 10$ (even). Lower half (4, 7, 9, 12, 15): $Q_1 = 9$ (median of these 5). Upper half (18, 20, 22, 25, 30): $Q_3 = 22$ (median of these 5).
 $IQR = 22 - 9 = 13$.

Bài tập luyện tập

(Extended) A histogram has classes 0–10 (frequency 25, frequency density unknown), 10–15 (frequency density 4), 15–25 (frequency density 2.2), 25–40 (frequency density 1). (a) Find the frequency density of the class 0–10. (b) Find the total number of values represented across all four classes.

Lời giải chi tiết

(a) $fd_{0-10} = \frac{25}{10} = 2.5$.
(b) $f_{10-15} = 4 \times 5 = 20$; $f_{15-25} = 2.2 \times 10 = 22$; $f_{25-40} = 1 \times 15 = 15$.
Total = $25 + 20 + 22 + 15 = 82$.

Bài tập luyện tập

(Extended) Using the 80-runner cumulative frequency curve (boundaries 20, 30, 40, 50, 60, 70 with cumulative frequencies 0, 8, 28, 56, 72, 80), estimate how many runners finished in under 50 minutes.

- (A) 56 (C) 72
(B) 28 (D) 80

Lời giải chi tiết

Reading the cumulative frequency at $x = 50$ directly from the table/curve gives 56. **(A)**.

Bài tập luyện tập

The mean of 12 numbers is 8. A second group of x numbers has mean 14. When both groups are combined, the mean of all $12 + x$ numbers is 11.6. Find x .

Lời giải chi tiết

Total of first group = $12 \times 8 = 96$. Total of second group = $14x$.
Combined mean equation: $\frac{96 + 14x}{12 + x} = 11.6$.
 $96 + 14x = 11.6(12 + x) = 139.2 + 11.6x$

$$2.4x = 43.2$$

$$x = 18.$$

$$\text{Check: total} = 96 + 14(18) = 96 + 252 = 348; \text{ combined } n = 30; \text{ mean} = \frac{348}{30} = 11.6 \checkmark$$

Bài tập luyện tập

A study finds a strong positive correlation between the number of fire trucks sent to a fire and the amount of damage caused. Which is the best interpretation?

- (A) Fire trucks probably cause more damage (C) There is no real relationship between the two variables
(B) Both variables are likely influenced by a third factor – the size of the fire (D) Sending fewer fire trucks would reduce damage

Lời giải chi tiết

Larger fires both require more fire trucks and cause more damage; the size of the fire is the underlying (confounding) factor linking the two variables, not the number of trucks itself. **(B)**.

Bài tập luyện tập

Find the range of: 12, 45, 7, 33, 9, 50, 3.

- (A) 47 (C) 3
(B) 50 (D) 44

Lời giải chi tiết

Sorted: 3, 7, 9, 12, 33, 45, 50. Range = $50 - 3 = 47$. **(A)**.

Bài tập luyện tập

(Extended) In a cumulative frequency table for 90 values, the median class is 60–70, with cumulative frequency 40 up to 60 and 68 up to 70. Estimate the median.

Lời giải chi tiết

Median position = $\frac{90}{2} = 45\text{th}$. Since it falls in class 60–70 (cumulative from 40 to 68):

$$\text{median} = 60 + \frac{45 - 40}{68 - 40} \times 10 = 60 + \frac{5}{28} \times 10 \approx \mathbf{61.8}.$$

Bài tập luyện tập

(Extended) The distances (km) travelled to work by 60 employees are grouped as: 0–5 ($f = 8$), 5–10 ($f = 16$), 10–20 ($f = 24$), 20–35 ($f = 12$). (a) Estimate the mean distance. (b) State the modal class. (c) Calculate the frequency density for each class. (d) Estimate the number of employees who travel between 15 and 25 km.

Lời giải chi tiết

(a) Midpoints: 2.5, 7.5, 15, 27.5. $\sum f = 60$.

$$\sum fx = 8(2.5) + 16(7.5) + 24(15) + 12(27.5) = 20 + 120 + 360 + 330 = 830.$$

$$\text{Mean} \approx \frac{830}{60} \approx \mathbf{13.83 \text{ km.}}$$

(b) Highest frequency is 24, so the modal class is **10–20 km**.

$$(c) \text{fd}_{0-5} = \frac{8}{5} = 1.6; \text{fd}_{5-10} = \frac{16}{5} = 3.2; \text{fd}_{10-20} = \frac{24}{10} = 2.4; \text{fd}_{20-35} = \frac{12}{15} = 0.8.$$

(d) **Part in 10–20 (i.e. 15 to 20):** width 5 of 10, proportion $0.5 \Rightarrow 0.5 \times 24 = 12$.

Part in 20–35 (i.e. 20 to 25): width 5 of 15, proportion $\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{3} \times 12 = 4$.

Estimated total between 15 and 25 km: $12 + 4 = \mathbf{16}$ employees.

Ôn tập nhanh:

(1) Với dữ liệu thô hoặc bảng tần số không ghép nhóm, tìm trung bình bằng $\frac{\sum x}{n}$ hoặc $\frac{\sum fx}{\sum f}$; với dữ liệu ghép nhóm, luôn thay mỗi lớp bằng **midpoint** rồi mới áp dụng công thức đó – kết quả chỉ là ước lượng.

(2) Khi gộp trung bình của hai nhóm, cộng **tổng** của từng nhóm rồi chia cho **tổng số lượng** – không lấy trung bình cộng đơn giản của hai giá trị trung bình trừ khi hai nhóm có cùng số lượng.

(3) Lớp chứa một đọc trực tiếp (tần số lớn nhất); lớp chứa trung vị phải tra qua tần số tích lũy tại vị trí $\frac{n}{2}$ – hai lớp này có thể khác nhau.

(4) Histogram: độ rộng lớp bằng nhau → trục tung là tần số; độ rộng lớp **KHÔNG** bằng nhau → trục tung **LUÔN** là mật độ tần số (= tần số ÷ độ rộng lớp); muốn tìm ngược tần số, nhân mật độ với độ rộng.

(5) Biểu đồ tần số tích lũy vẽ theo **cận trên** của lớp; vị trí trung vị là $\frac{n}{2}$, Q_1 là $\frac{n}{4}$, Q_3 là $\frac{3n}{4}$ – luôn kiểm tra đang đọc từ trục nào sang trục nào trước khi chốt đáp số.

(6) Box plot: so sánh cả trung vị (vị trí trung tâm) lẫn IQR/range (độ phân tán) khi nhận xét hai bộ dữ liệu, không chỉ nêu một trong hai.

(7) Tương quan chỉ mô tả xu hướng cùng biến thiên, không chứng minh quan hệ nhân quả; ngoại suy (dự đoán ngoài phạm vi dữ liệu đã cho) luôn kém tin cậy hơn nội suy.

Đồng hành cùng 8020 English

Cảm ơn bạn đã học cùng bộ giáo trình quốc tế 8020. **Điểm thật · Thầy thật · Kết quả thật** — nhiều học viên chỉ cần 1–2 khoá để đạt kết quả mong muốn.

Chương trình đào tạo tại 8020 English

IELTS Academic/General · SAT · PTE · Duolingo · TOEFL | AP (College Board) · IB Diploma · Cambridge IGCSE / A-Level | sẵn học bổng du học.

Vì sao chọn 8020 English?

- **100% giáo viên** đạt tối thiểu 8.0 IELTS hoặc 1500 SAT — đội ngũ Giáo sư · Tiến sĩ · Thạc sĩ tốt nghiệp trường top đầu thế giới (Carnegie Mellon — #1 Hoa Kỳ về Khoa học Máy tính).
- **Kèm 1–1** mọi độ tuổi; lớp sĩ số nhỏ 2–5 bạn (đa số dưới 10 bạn/lớp).
- Lộ trình cá nhân hoá, theo sát tiến độ từng học viên; lớp OFFLINE tại TP.HCM & ONLINE toàn quốc.

Bảng vàng học viên

AP 5/5 — Calculus AB/BC
SAT 1590 / 1570 / 1550

AP 4–5 — Biology, Chemistry
IELTS 8.0–9.0

IB 90/100 — Economics
Duolingo 110 · PTE 90

Cảm nhận học viên & phụ huynh

"Bạn đã cải thiện được tư duy Writing — kỹ năng từng là nỗi sợ lớn nhất — và cuối cùng đã đậu vào trường top như mong muốn. Thái độ học tập cực kỳ nghiêm túc; ngay cả khi nằm viện vẫn cố gắng học đều đặn."

— Phan Thị Thanh Hằng • IELTS Overall 8.5

"Cần tất cả kỹ năng trên 7.5 để xét vào trường top 1 Anh Quốc về Y học (chương trình UKFPO của NHS) — và đã đạt mục tiêu sau khi học Writing 1-1."

— Trần Hoàng Bảo Ngọc • IELTS Overall 8.0 (Writing 6.0 → 7.5)

"Gia đình và bé xin cảm ơn thầy cô đã giúp con có hành trang chín chu khi qua Mỹ. Đạt điểm 5 môn Giải tích trong thời gian ngắn là quá mãn nguyện."

— Phụ huynh • AP Calculus BC 5/5

"Em cảm ơn thầy đã luôn đồng hành. Nhờ thầy, em học vững hơn rất nhiều dù thời gian ôn không dài."

— Học viên • AP Calculus AB 4

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

FEEDBACK PHỤ HUYNH & HỌC VIÊN AP



Phụ huynh • AP Calculus BC: 5

"Gia đình cảm ơn thầy cô đã giúp con có hành trang chín chu khi qua Mỹ. Đạt điểm 5 môn Giải tích trong thời gian ngắn là quá mãn nguyện."



Phụ huynh • AP Calculus BC

"Mẹ con xin gửi lời cảm ơn chân thành tới thầy và cả nhóm. Thời gian ôn rất ngắn nhưng con nhận được rất nhiều sự hỗ trợ."



Học viên • AP Calculus AB: 4 • Statistics: 3

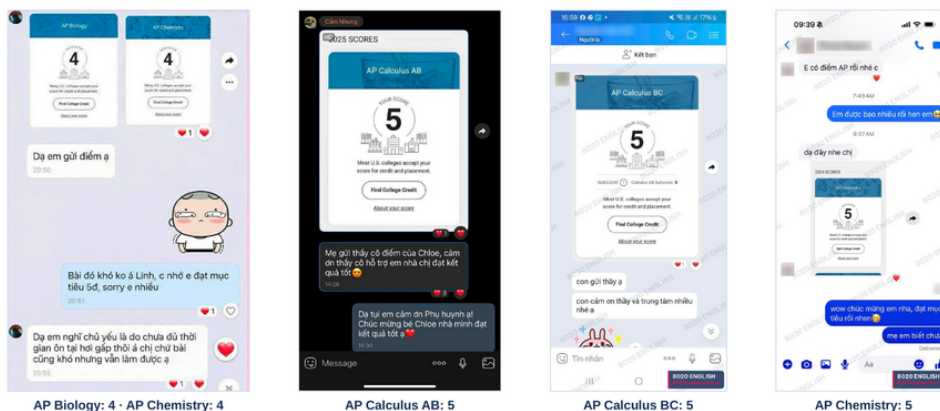
"Em cảm ơn thầy Steven đã luôn đồng hành. Nhờ thầy, em học vững hơn rất nhiều dù thời gian không dài."

Feedback phụ huynh & học viên AP — nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Điểm thi thật của học viên

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ AP

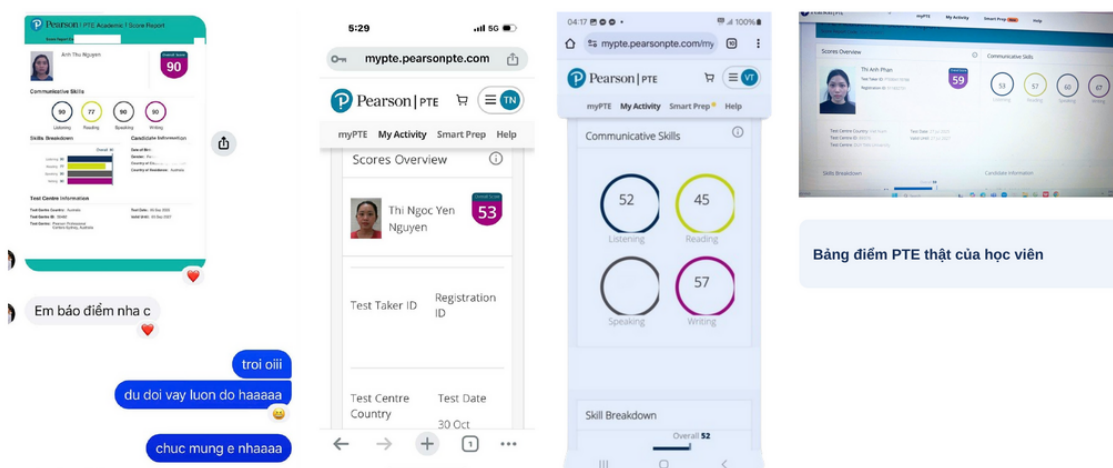
8020
ENGLISH

Bảng điểm AP thật của học viên – nhiều môn đạt điểm 4 & 5

Bảng điểm AP thật – Calculus AB/BC 5/5 · Biology & Chemistry 4-5 (College Board)

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

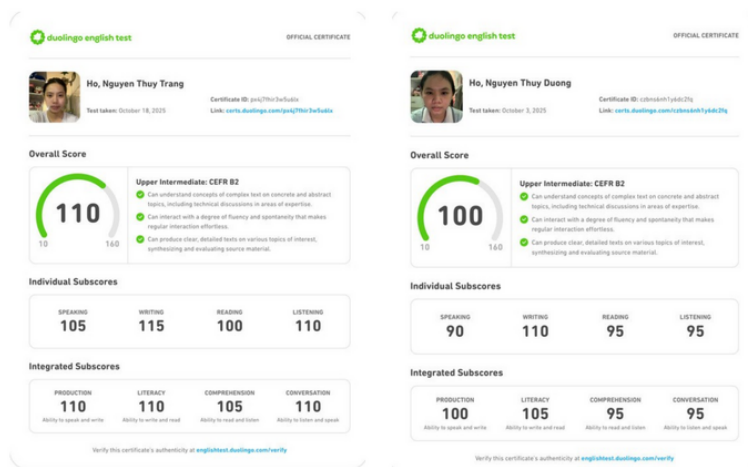
ĐIỂM SỐ PTE

8020
ENGLISH

Học viên 8020 – PTE Academic 90

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

ĐIỂM SỐ DUOLINGO



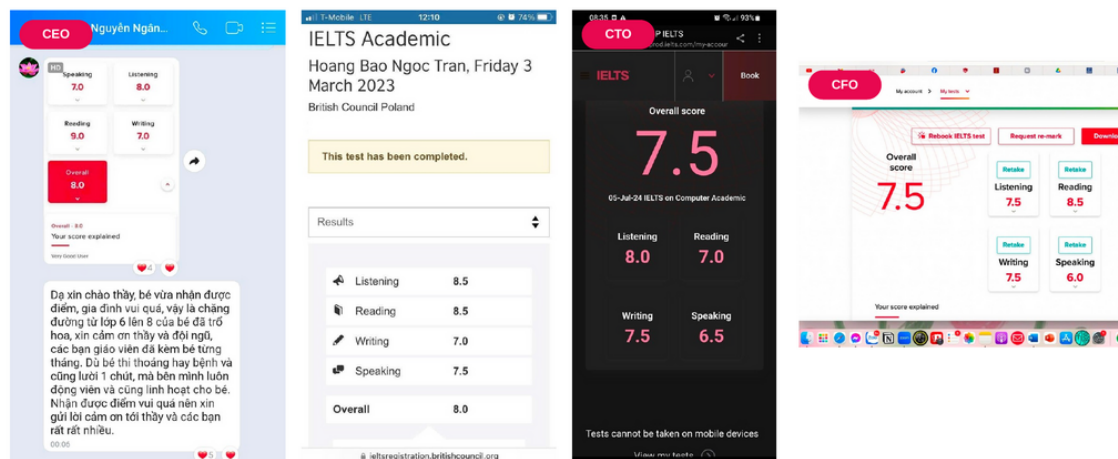
Duolingo English Test – 110 & 100

Học viên 8020 – Duolingo English Test 110 & 100

KẾT QUẢ HỌC VIÊN

THÀNH TÍCH HỌC VIÊN

Bảng điểm thi thật – chất lượng được giám sát nghiêm ngặt. Một số học viên chỉ cần 1–2 khóa để đạt kết quả mong muốn.



Học viên 8020 – IELTS 8.0 / 7.5 / 8.5 (báo điểm thật)

**8020 ENGLISH – CHƯƠNG TRÌNH QUỐC TẾ**

Test đầu vào & tư vấn lộ trình MIỄN PHÍ

Hotline Thầy Tường (Head of 8020): 0332 747 169
Cô Nancy: 0983 422 692 · 0772 631 496

Offline Trần Phú, P.4, Q.5, TP.HCM

Online Lớp trực tuyến toàn quốc

Web luyenthi8020.com