

8020
ENGLISH

AMERICAN MATHEMATICS COMPETITIONS

AMC 8 MASTERY

Chinh phục AMC 8

16

chương & đề

713

bài tập + ví dụ

382

hình vẽ

Lý thuyết trọng tâm · ví dụ mẫu · bài tập 3 tầng độ khó · 3 đề thi thử đầy đủ 25 câu/75 phút · lời giải chi tiết từng câu. Đề tiếng Anh như phòng thi, giảng giải tiếng Việt.

8020 EDUCATION · luyenthi8020.com

GIỚI THIỆU

8020 Education — đồng hành từ lớp 1 tới đại học

8020 dạy Toán tư duy, Olympiad và tiếng Anh học thuật theo một lộ trình nối liền: nền ở cấp 1, kỳ thi đấu và học thuật bằng tiếng Anh ở cấp 2, hồ sơ du học ở cấp 3. Mỗi kỳ thi là một cột mốc trên đường đi, không phải vạch đích. Bộ sách này do **bộ phận học thuật 8020** tự biên soạn — mọi bài là bài gốc, lời giải đã soát độc lập — và đi kèm khu luyện online cùng tên trên luyenthi8020.com.

Hành trình 8020

CẤP 1 · LỚP 1-5 Nền tư duy & tiếng Anh THINK MATH TIMO Ôn thi vào lớp 6 trọng điểm Starters · Movers · Flyers	CẤP 2 · LỚP 6-9 Sách này Học thuật bằng tiếng Anh AMC 8 TIMO Cambridge Lower Sec. IGCSE IELTS nền tảng	CẤP 3 · LỚP 10-12 Hồ sơ du học AMC 10 · 12 → AIME IELTS · TOEFL SAT AP · IB · A-Level	ĐẠI HỌC Đồng hành năm đầu Kèm môn đại học: Calculus, Statistics, Economics...
---	---	---	---

Bộ phận học thuật 8020

 Châu Cát Tường Trưởng học thuật · hiện làm việc tại Mỹ Theo sát tuyển sinh đại học Mỹ · IELTS 8.5 · Giải Nhất Toán thành phố · chuyên Toán Lê Hồng Phong · Kỹ sư Tài năng Bách Khoa	 Nguyễn Anh Huy Tiến sĩ KH Máy tính, Carnegie Mellon (Mỹ) 10 năm làm việc tại Mỹ, từng làm Amazon · chuyên Toán Lê Hồng Phong
 Nguyễn Phước Trường Tiến sĩ Toán loại xuất sắc, ĐH Klagenfurt (Áo) ThS top 4% khoa Toán ĐH Masaryk (Séc) · Cử nhân top 2 ĐH Sư phạm TP.HCM	 Phạm Trung Hiếu ThS TU Munich (Đức) · IELTS 8.0 Giải Nhất Olympic Vật lý sinh viên toàn quốc · cựu HS Phổ thông Năng khiếu
 Trần Hoàn Vũ ThS ĐH Sư phạm TP.HCM Dạy AP Calculus, Statistics · chuyên Toán Lê Hồng Phong	



Zalo · WhatsApp 0332 747 169 · 0983 422 692 · luyenthi8020.com



Học viên & phụ huynh nói gì

Bài test đầu vào AMC 12 · nhận xét của giáo viên

80/100 — mức Khá tốt. Cần cải thiện 2 phần: trình bày lời giải chi tiết và tốc độ xử lý bài phức tạp. Giai đoạn tới bám sát ngân hàng đề của hội đồng thi — bước đệm hướng tới AIME.

Học viên AP, mùa điểm 7/2026

“Em cảm ơn thầy đã luôn hỗ trợ em trong thời gian học và thi. Nhờ có thầy mà em học vững hơn rất rất nhiều.” — Calculus BC 5 · Microeconomics 5 · Chemistry 5

Phụ huynh học viên AMC 12

“Đúng vậy em, SAT Math. Kèm ít buổi luyện thi giúp chị.” — học tiếp SAT Math sau AMC

Luyện tiếp trên web 8020

luyenthi8020.com/olympiad/amc-8/

Luyện tiếp online: bài tập theo chủ đề + đề thi thử AMC, chấm điểm ngay

luyenthi8020.com/gioi-thieu/amc/

Giới thiệu kỳ thi AMC → AIME: lịch thi, cấu trúc đề, cách đăng ký

luyenthi8020.com/olympiad/

Toàn bộ khu Toán Olympiad: AMC 8 · 10 · 12, TIMO lớp 1 → 10+

Test đầu vào miễn phí — 8020 chấm, chỉ ra mảng còn yếu và gợi ý lộ trình. Nhắn Zalo hoặc WhatsApp:



Zalo · WhatsApp 0332 747 169 · 0983 422 692 · luyenthi8020.com



8020 AMC 8 Mastery

AMC 8 ở một trang

Hình thức	25 câu trắc nghiệm, 5 lựa chọn (A)–(E), 75 phút, không máy tính.
Chấm điểm	Đúng 6 điểm · bỏ trống 1,5 điểm · sai 0 điểm. Tối đa 150.
Độ khó	Câu 1–10 khởi động, 11–20 trọng tâm, 21–25 rất khó. Bỏ trống câu không chắc là một chiến thuật: 1,5 điểm chắc chắn > đoán bừa (kỳ vọng 1,2 điểm).
Vòng sau	Điểm đủ ngưỡng (thường quanh 100–110 với AMC 10, 85–95 với AMC 12) được mời thi AIME, rồi USAMO/USAJMO.
Nội dung	Như AMC 10 cộng thêm lượng giác, logarit, số phức, đa thức bậc cao, hình giải tích — chương trình tới hết lớp 12, không giải tích.

Cách dùng sách

Mỗi chương đi theo đúng nhịp học một dạng toán thi đấu: **Kiến thức trọng tâm** (định nghĩa, định lý phát biểu bằng tiếng Anh như để thi, kèm giảng giải tiếng Việt) → **Ví dụ mẫu** có lời giải và dòng *Insight* chỉ ra ý tưởng then chốt → ba tầng bài tập: ★ **Nền tảng** (mức câu 5–12), ★★ **Trọng tâm kỳ thi** (mức câu 12–20), ★★★ **Thử thách** (mức câu 20–25). Ký hiệu ♦ cạnh số bài là độ khó 1–5.

Làm bài ra giấy trước, chỉ mở lời giải ở cuối sách khi đã thử ít nhất một hướng. Ba đề thi thử cuối sách làm đúng 75 phút, chấm theo thang 6 / 1,5 / 0.

Mục lục

Ch. 1	Arithmetic Fluency — Fractions, Decimals & Percents Tính toán thành thạo — phân số, thập phân & phần trăm	48 bài
Ch. 2	Ratios, Rates & Proportional Reasoning Tỉ số, tỉ lệ & suy luận tỉ lệ thuận	50 bài
Ch. 3	Algebra — Expressions, Equations & Word Problems Đại số — biểu thức, phương trình & toán lời văn	50 bài
Ch. 4	Patterns, Sequences & Logical Reasoning Quy luật, dãy số & suy luận logic	48 bài
Ch. 5	Number Theory — Divisibility, Primes & Factors Số học — chia hết, số nguyên tố & ước	48 bài
Ch. 6	Digits, Remainders & Number Puzzles Chữ số, số dư & câu đố số	49 bài
Ch. 7	Counting I — Lists, Rules & Casework Đếm 1 — liệt kê, quy tắc đếm & chia trường hợp	49 bài
Ch. 8	Counting II — Arrangements, Choices & Complements Đếm 2 — sắp xếp, chọn & phần bù	50 bài
Ch. 9	Probability & Statistics Xác suất & thống kê	50 bài
Ch. 10	Angles, Triangles & Polygons Góc, tam giác & đa giác	50 bài
Ch. 11	Area, Perimeter & the Pythagorean Theorem Diện tích, chu vi & định lý Pythagoras	49 bài

Ch. 12	Circles, Coordinates & 3D Solids Đường tròn, tọa độ & hình không gian	49 bài
Ch. 13	Problem-Solving Strategies Chiến lược giải toán	48 bài
ĐỀ 1	Full Practice Test 1 Đề thi thử 1	25 bài
ĐỀ 2	Full Practice Test 2 Đề thi thử 2	25 bài
ĐỀ 3	Full Practice Test 3 Đề thi thử 3	25 bài

Chapter 1

8020 AMC 8 Mastery

Arithmetic Fluency — Fractions, Decimals & Percents

Tính toán thành thạo — phân số, thập phân & phần trăm

Mỗi đề AMC 8 mở đầu bằng vài câu tính toán với phân số, số thập phân và phần trăm — và chúng xuất hiện lại bên trong gần như mọi câu khó hơn. Chương này luyện “tính thông minh”: nhìn ra cấu trúc trước khi tính, so sánh phân số bằng phân bù, rút gọn dây chuyền, đổi số thập phân tuần hoàn, và xử lý phần trăm bằng hệ số nhân. Học sinh thường mất điểm vì sai thứ tự phép tính, lấy “phần của phần còn lại” sai gốc, hoặc cộng các phần trăm thay vì nhân.

✓ Thực hiện đúng thứ tự phép tính; dùng hằng đẳng thức và tính phân phối để tính nhanh; ước lượng cho câu “closest to”.

✓ Nhận ra và tính tổng, tích rút gọn dây chuyền $\frac{1}{n(n+k)}$, $1 \pm \frac{1}{\dots}$.

✓ Xử lý phần trăm bằng hệ số nhân: thay đổi nối tiếp, tìm giá gốc, điểm phần trăm, đổi gốc so sánh.

✓ So sánh phân số bằng nhân chéo, phân bù tới 1 và phân số trung gian; giải bài “phần của phần còn lại” bằng sơ đồ hoặc đi ngược.

✓ Biết khi nào phân số cho thập phân hữu hạn; đổi số thập phân tuần hoàn ra phân số; tìm chữ số thứ N theo chu kỳ.

fraction in lowest terms · phân số tối giản

reciprocal · số nghịch đảo

mediant · phân số trung gian

order of operations · thứ tự thực hiện phép tính

distributive law · tính chất phân phối

telescoping · rút gọn dây chuyền (triệt tiêu xen kẽ)

terminating decimal · số thập phân hữu hạn

repeating decimal · số thập phân vô hạn tuần hoàn

period · chu kỳ

place value · giá trị theo hàng

percent increase / decrease · phần trăm tăng / giảm

multiplier · hệ số nhân

percentage point · điểm phần trăm

closest to · gần nhất với

K 1.1 Order of Operations and Smart Computation

Thứ tự phép tính và tính nhanh nhờ cấu trúc

Câu 1–5 của AMC 8 hầu như luôn có một phép tính “trông thì dài”. Để không kiểm tra bạn bấm máy giỏi đến đâu (không được dùng máy tính), mà kiểm tra bạn có **nhìn ra cấu trúc** trước khi lao vào nhân chia hay không. Mười giây quan sát thường tiết kiệm một phút tính toán — và tránh được một lỗi sai.

Definition — Order of operations (thứ tự thực hiện phép tính)

Evaluate (1) grouping symbols — parentheses, brackets, fraction bars; (2) exponents; (3) multiplication and division **from left to right**; (4) addition and subtraction **from left to right**.

Nhân và chia **ngang hàng** nhau, cộng và trừ ngang hàng nhau: cùng hàng thì làm từ trái sang phải. Gạch phân số đóng vai trò dấu ngoặc: $\frac{8+4}{2+1} = \frac{12}{3} = 4$, không phải $8 + \frac{4}{2+1}$.

Common Trap — Ba lỗi kinh điển về thứ tự

- $12 \div 3 \times 2 = 4 \times 2 = 8$, **không phải** $12 \div 6 = 2$ (chia và nhân làm từ trái sang).
- $-3^2 = -9$ vì lũy thừa làm trước dấu trừ; còn $(-3)^2 = 9$.
- $20 - 8 + 2 = 14$, không phải $20 - 10 = 10$ (trừ và cộng cũng làm từ trái sang).

Theorem – Identities that make computation easy (hằng đẳng thức giúp tính nhanh)

For all numbers: $ab + ac = a(b + c)$ (distributive law); $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$; $(n - 1)(n + 1) + 1 = n^2$; $n(n + 1) - (n - 1)(n + 2) = 2$.

Đây đều là phép nhân phá ngoặc lớp 8. Ví dụ: $47 \cdot 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 2500 - 9 = 2491$; $0.75 \cdot 37 + 0.75 \cdot 63 = 0.75 \cdot 100 = 75$. Hằng thức cuối kiểm tra bằng khai triển: $n^2 + n - (n^2 + n - 2) = 2$.

Key Idea – Đặt tên cho con số lặp lại

Khi một số lớn (như 2025) xuất hiện nhiều lần, hãy gọi nó là n và viết các số lân cận thành $n - 1$, $n + 1$, $n + 2$. Biểu thức số khổng lồ trở thành biểu thức chữ nhỏ gọn mà ta rút gọn được bằng các hằng đẳng thức ở trên.

Example 1.1**Đặt n rồi rút gọn**

What is the value of

$$\frac{2025^2 - 2024^2}{2025 \cdot 2026 - 2024 \cdot 2027} ?$$

(A) $\frac{1}{2}$

(B) 2

(C) $\frac{4049}{2}$

(D) 4049

(E) 8098

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) $\frac{4049}{2}$

Tử số là hiệu hai bình phương: $2025^2 - 2024^2 = (2025 - 2024)(2025 + 2024) = 4049$.

Mẫu số: đặt $n = 2025$ thì mẫu là $n(n + 1) - (n - 1)(n + 2) = (n^2 + n) - (n^2 + n - 2) = 2$.

Vậy giá trị là $\frac{4049}{2}$. Đáp án (C).

Bấy: tưởng hai bình phương liên tiếp “chênh 1” thì ra $\frac{1}{2}$; tưởng mẫu bằng 1 (hai tích “gần bằng nhau”) thì ra 4049.

Insight · Số to lặp lại → đặt n , khai triển, phần lớn sẽ triệt tiêu. Hiệu hai bình phương liên tiếp là **tổng** hai số, không phải 1.

Tip – Câu hỏi “closest to” – tách chữ số và lũy thừa của 10

Với câu “Which is closest to...”, đáp án thường cách nhau 10 lần. Làm tròn mỗi số về **một chữ số có nghĩa** và viết dưới dạng (số nhỏ) $\times 10^k$: $0.0498 \approx 5 \times 10^{-2}$, $812 \approx 8 \times 10^2$. Nhân phần số với nhau, cộng các số mũ — sai số làm tròn vài phần trăm không đổi được đáp án.

Example 1.2**Ước lượng bằng lũy thừa của 10**

Which of the following is closest to

$$\frac{0.0498 \times 812}{0.0201 \times 39.7} ?$$

(A) 0.5

(B) 5

(C) 50

(D) 500

(E) 5000

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 50

Làm tròn: $0.0498 \approx 0.05$, $812 \approx 800$, $0.0201 \approx 0.02$, $39.7 \approx 40$.

Tử $\approx 0.05 \cdot 800 = 40$; mẫu $\approx 0.02 \cdot 40 = 0.8$. Thương $\approx \frac{40}{0.8} = 50$.

Các lựa chọn cách nhau 10 lần nên ước lượng là đủ (giá trị thật khoảng 50.7). Đáp án (C).

Bấy: chia 40 cho 0.8 mà quên dời dấu phẩy thì ra 5 hoặc 500.

Insight · Khi các lựa chọn là 0.5, 5, 50, ..., chỉ cần đúng **bậc độ lớn**: làm tròn mạnh tay, đếm số mũ cẩn thận.

K

1.2 Fractions: Operations, Comparison and Parts of a Remainder

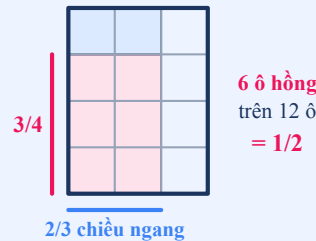
Phân số: phép tính, so sánh và “phần của phần còn lại”

Definition – Fraction, lowest terms, reciprocal (phân số, tối giản, nghịch đảo)

$\frac{a}{b}$ (with $b \neq 0$) is in **lowest terms** when a and b have no common factor greater than 1. The **reciprocal** of $\frac{a}{b}$ ($a \neq 0$) is $\frac{b}{a}$.
Operations:

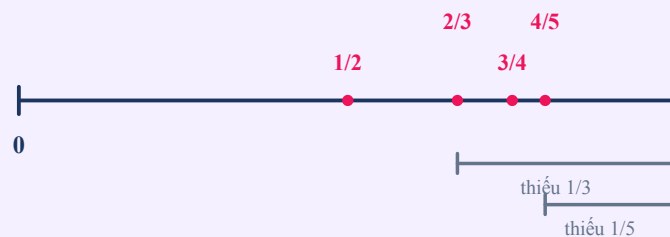
$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Nhân hai phân số = lấy “một phần của một phần”: $\frac{3}{4}$ của $\frac{2}{3}$ hình vuông là $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ (mô hình diện tích bên dưới: 12 ô nhỏ, 6 ô bị tô cả hai lần).

**Theorem – Comparing Fractions (so sánh phân số)**

For positive a, b, c, d : (1) $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$ (cross-multiplication). (2) $\frac{n}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$, so the closer the **missing part** to 1 is to 0, the larger the fraction. (3) If $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, then the **mediant** $\frac{a+c}{b+d}$ lies strictly between them.

(1) nhân hai vế với $bd > 0$. (2) $\frac{2}{3}$ thiếu $\frac{1}{3}$ mới tới 1, còn $\frac{4}{5}$ chỉ thiếu $\frac{1}{5}$ nên $\frac{4}{5}$ lớn hơn — xem trục số. (3) $\frac{a+c}{b+d} - \frac{a}{b} = \frac{bc-ad}{b(b+d)} > 0$, tương tự cho vế kia. Phân số trung gian (mediant) rất hữu ích để tìm một phân số “kẹp giữa” hai phân số cho trước.

**Example 1.3**

So sánh bằng phần bù tới 1

Let $P = \frac{2023}{2025}$, $Q = \frac{2024}{2027}$, and $R = \frac{2025}{2026}$. Which of the following is true?

- (A) $P < Q < R$ (B) $P < R < Q$ (C) $Q < P < R$ (D) $Q < R < P$ (E) $R < Q < P$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) $Q < P < R$

Nhân chéo ở đây rất nặng. Thay vào đó, so sánh **phần thiếu tới 1**:

$$1 - P = \frac{2}{2025} = \frac{1}{1012.5}, \quad 1 - Q = \frac{3}{2027} = \frac{1}{675.666...}, \quad 1 - R = \frac{1}{2026}.$$

Phân số có tử 1 thì mẫu càng lớn càng nhỏ, nên $1 - R < 1 - P < 1 - Q$. Phần thiếu càng nhỏ thì phân số càng lớn: $Q < P < R$. Đáp án (C).

Insight · Phân số gần 1 $\rightarrow$ so sánh **phần bù** $1 - \frac{a}{b} = \frac{b-a}{b}$; đưa phần bù về tử số 1 (hoặc cùng tử) để so sánh ngay.

Key Idea — “Phần của phần còn lại” — nhân các phần còn lại

Nếu lần lượt lấy đi $\frac{1}{4}$, rồi $\frac{2}{3}$ của phần còn lại, thì phần còn lại cuối cùng là $\left(1 - \frac{1}{4}\right) \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ của ban đầu. Mỗi bước, “phần còn lại” là một **tổng mới**; vẽ sơ đồ đoạn thẳng chia theo mẫu số chung là cách nhìn rõ nhất.

Tip — Chọn tổng tiện lợi, hoặc đi ngược

Khi để chỉ cho các phân số mà chưa cho tổng, hãy **giả sử tổng bằng mẫu số chung nhỏ nhất** (ví dụ 20 phần) và làm việc với số nguyên. Khi để cho kết quả cuối cùng (“còn lại 2 cái”), hãy **đi ngược** từ cuối lên, đảo từng phép tính.

Example 1.4**Sơ đồ đoạn thẳng với tổng 20 phần**

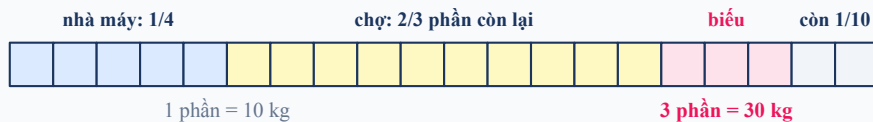
A farmer sold $\frac{1}{4}$ of his rice harvest to a mill. Then he sold $\frac{2}{3}$ of the rice he had left at the market, and then gave 30 kg to a neighbor. He now has $\frac{1}{10}$ of the harvest left. How many kilograms of rice did he harvest?

(A) 120 (B) 150 (C) 200 (D) 240 (E) 300

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (C) 200

Mẫu số chung của $\frac{1}{4}$ và $\frac{1}{10}$ là 20, nên chia cả vụ lúa thành **20 phần** bằng nhau.

Bán cho nhà máy: $\frac{1}{4} \cdot 20 = 5$ phần, còn 15 phần. Bán ở chợ: $\frac{2}{3} \cdot 15 = 10$ phần, còn 5 phần. Cuối cùng còn $\frac{1}{10} \cdot 20 = 2$ phần, nên phần biểu hàng xóm là $5 - 2 = 3$ phần.



3 phần = 30 kg $\Rightarrow$ 1 phần = 10 kg, cả vụ là $20 \cdot 10 = 200$ kg. Đáp án (C).

Bấy: hiểu $\frac{2}{3}$ là $\frac{2}{3}$ cả vụ thì $1 - \frac{1}{4} - \frac{2}{3} < \frac{1}{10}$ — vô lý; tưởng 30 kg là toàn bộ $\frac{1}{4}$ còn lại sau khi bán ở chợ thì ra 120.

Insight • Chia tổng thành “mẫu số chung” phần bằng nhau; mỗi câu “phần của phần còn lại” trở thành phép tính số nguyên trên sơ đồ.

Common Trap — Hai lỗi cộng phân số

- $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \neq \frac{2}{5}$: cộng tử với tử, mẫu với mẫu cho ra **phân số trung gian**, nằm giữa hai số chứ không phải tổng của chúng.
- “Lấy $\frac{1}{3}$ phần còn lại” **không** phải $\frac{1}{3}$ của ban đầu — luôn hỏi: “phần của cái gì?”

K 1.3 Telescoping Sums and Products**Tổng và tích “rút gọn dây chuyền”**

Một tổng gồm hàng chục phân số mà đề vẫn mong bạn tính trong một phút — gần như chắc chắn các số hạng sẽ **triệt tiêu dây chuyền** (telescoping): mỗi số hạng được viết thành hiệu của hai số, và phần sau của số hạng này xoá phần trước của số hạng kế tiếp.

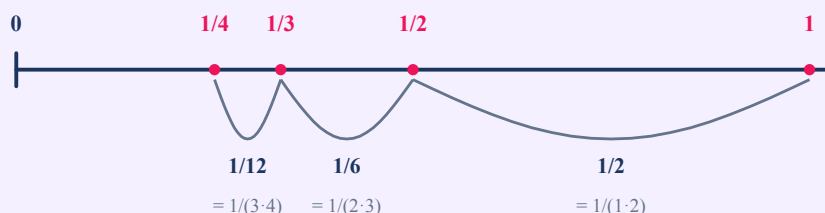
Theorem – Splitting a fraction (tách phân số)

For positive integers n and k :

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}, \quad \frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}.$$

Hence $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{m(m+1)} = 1 - \frac{1}{m+1}.$

Quy đồng về phải: $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} = \frac{(n+k) - n}{n(n+k)} = \frac{k}{n(n+k)}.$ Trên trục số, $\frac{1}{n(n+1)}$ chính là **khoảng cách** giữa $\frac{1}{n+1}$ và $\frac{1}{n}$; cộng các khoảng cách liên nhau được khoảng cách từ điểm đầu đến điểm cuối.

**Example 1.5****Tách với hiệu $k = 3$**

What is the value of

$$\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \frac{1}{8 \cdot 11} + \cdots + \frac{1}{59 \cdot 62} ?$$

(A) $\frac{5}{62}$

(B) $\frac{5}{31}$

(C) $\frac{10}{31}$

(D) $\frac{15}{31}$

(E) $\frac{30}{31}$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(B)** $\frac{5}{31}$

Hai thừa số ở mẫu luôn chênh nhau 3, nên $\frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right).$

Tổng = $\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{59} - \frac{1}{62} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{62} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{30}{62} = \frac{5}{31}.$ Đáp án (B).

Bây: quên hệ số $\frac{1}{3}$ (tử là 1 chứ không phải 3) thì ra $\frac{15}{31}.$

Insight · Mẫu là tích hai số cách đều $k \rightarrow$ tách thành $\frac{1}{k} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+k} \right)$; nhớ hệ số $\frac{1}{k}$ khi tử không bằng k .

Theorem – Telescoping products (tích rút gọn dây chuyền)

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{m}\right) = \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{m+1}{m} = m+1,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{m+1}{2m}.$$

Viết mỗi thừa số thành một phân số: tử của thừa số này bằng mẫu của thừa số sau nên triệt tiêu. Với dòng hai, tách $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{k+1}{k}$ rồi rút gọn riêng hai dãy.

Example 1.6

Phân tích thành hai tích dãy chuyển

What is the value of

$$\left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{98 \cdot 100}\right)?$$

(A) $\frac{49}{50}$

(B) 1

(C) $\frac{99}{50}$

(D) 2

(E) 99

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) $\frac{99}{50}$

Quy đồng một thừa số: $1 + \frac{1}{n(n+2)} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n+1}{n+2}$.

Tích bằng $\left(\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{99}{98}\right) \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{99}{100}\right) = \frac{99}{1} \cdot \frac{2}{100} = \frac{99}{50}$. Đáp án (C).

Bẫy: chỉ rút gọn dãy thứ nhất ra 99; đoán “tích tiến tới 2” mà không tính thì chọn 2.

Insight · Thấy $n(n+2) + 1 \rightarrow$ nghĩ ngay tới $(n+1)^2$. Tích phân số: tách mỗi thừa số thành tích các tỉ số “trượt”, rồi rút gọn từng dãy.

Common Trap — Số hạng nào sống sót?

Khi rút gọn dãy chuyển, luôn **viết ra hai số hạng đầu và hai số hạng cuối**. Với $\frac{1}{n(n+2)}$, các số hạng triệt tiêu “cách một”, nên sống sót **hai** số ở đầu và **hai** số ở cuối: $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{8 \cdot 10} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\right)$. Chỉ giữ một số ở mỗi đầu là lỗi phổ biến nhất.

Tip — Nhận dạng trong phòng thi

Mẫu số là 2, 6, 12, 20, 30, ... ($= 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, \dots$) hay 3, 15, 35, 63, ... ($= 1 \cdot 3, 3 \cdot 5, \dots$) — hãy phân tích mẫu thành tích hai số. Tích có dạng $1 \pm \frac{1}{\dots}$ — hãy quy đồng từng thừa số trước.

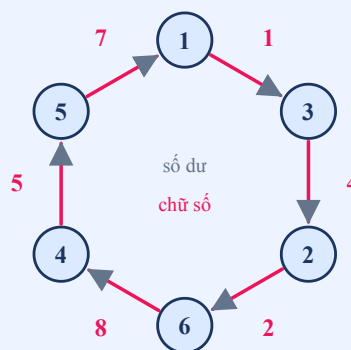
K 1.4 Decimals: Terminating, Repeating and Place Value

Số thập phân: hữu hạn, tuần hoàn và giá trị hàng

Definition — Terminating and repeating decimals (thập phân hữu hạn, tuần hoàn)

A decimal **terminates** if it has finitely many nonzero digits after the decimal point ($\frac{3}{8} = 0.375$). It is **repeating** if a block of digits repeats forever; the bar marks the block: $\frac{5}{13} = 0.38461\overline{5}$, $\frac{1}{6} = 0.1\overline{6}$. The length of the shortest block is the **period**.

Mọi phân số đều cho số thập phân hữu hạn hoặc tuần hoàn. Lý do nằm ở phép chia dài: chia a cho b chỉ có các số dư $0, 1, \dots, b-1$; khi một số dư lặp lại, các chữ số lặp lại. Vòng số dư của $\frac{1}{7}$ ở dưới cho chu kỳ 142857.



Theorem – When does a fraction terminate? (khi nào thập phân hữu hạn)

A fraction $\frac{a}{b}$ in lowest terms has a terminating decimal if and only if b has no prime factors other than 2 and 5. If $b = 2^m 5^n$, the decimal has exactly $\max(m, n)$ digits after the decimal point.

Nếu $b = 2^m 5^n$ với $m \geq n$, nhân cả tử và mẫu với 5^{m-n} để mẫu thành 10^m : $\frac{3}{40} = \frac{3}{2^3 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 25}{10^3} = 0.075$. Ngược lại, nếu $\frac{a}{b} = \frac{N}{10^k}$ thì b chia hết 10^k , nên b chỉ có ước nguyên tố 2 và 5.

Example 1.7**Bù cho đủ cặp 2-5**

When $\frac{3}{2^9 \cdot 5^4}$ is written as a decimal, how many zeros are there between the decimal point and the first nonzero digit?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 9

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 5

Mẫu có 2^9 nhưng chỉ 5^4 ; nhân tử và mẫu với 5^5 để có đủ 9 cặp 2 · 5:

$$\frac{3}{2^9 \cdot 5^4} = \frac{3 \cdot 5^5}{2^9 \cdot 5^9} = \frac{3 \cdot 3125}{10^9} = \frac{9375}{10^9} = 0.000009375.$$

Có 9 chữ số sau dấu phẩy, tử 9375 chiếm 4 chữ số cuối, nên có $9 - 4 = 5$ chữ số 0 đứng trước. Đáp án (C).

Bây: chỉ nhìn số mũ 5^4 mà trả lời 3 hoặc 4; trả lời 9 là nhầm tổng số chữ số sau dấu phẩy với số chữ số 0.

Insight · Muốn đọc chữ số của $\frac{a}{2^m 5^n}$: bù thừa số còn thiếu để mẫu thành $10^{\max(m, n)}$, rồi đếm chữ số của tử mới.

Theorem – Repeating decimal → fraction (đổi số thập phân tuần hoàn ra phân số)

$$0.\overline{d_1 d_2 \dots d_k} = \frac{\overline{d_1 d_2 \dots d_k}}{\underbrace{99 \dots 9}_k}, \quad \text{e.g. } 0.\overline{36} = \frac{36}{99} = \frac{4}{11}, \quad 0.\overline{135} = \frac{135}{999} = \frac{5}{37}.$$

Đặt $x = 0.\overline{36}$ thì $100x = 36.\overline{36}$; trừ hai đẳng thức được $99x = 36$. Với chu kỳ k chữ số, nhân với 10^k rồi trừ.

Tip – Chữ số thứ N: chỉ cần N chia cho chu kỳ

Chu kỳ dài p chữ số thì chữ số thứ N (sau dấu phẩy, với số tuần hoàn ngay từ đầu) trùng với chữ số thứ r , trong đó r là số dư của N khi chia cho p (nếu $r = 0$ thì lấy chữ số thứ p). Tổng N chữ số đầu = (số chu kỳ đầy đủ) × (tổng một chu kỳ) + tổng phần lẻ.

Example 1.8**Tổng các chữ số theo chu kỳ**

The decimal expansion of $\frac{5}{13}$ is 0.384615384615... What is the sum of the first 100 digits after the decimal point?

- (A) 432 (B) 447 (C) 450 (D) 453 (E) 459

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 453

Chu kỳ là 384615, dài 6 chữ số, tổng một chu kỳ $3 + 8 + 4 + 6 + 1 + 5 = 27$.

$100 = 6 \cdot 16 + 4$: có 16 chu kỳ đầy đủ (96 chữ số) và 4 chữ số lẻ 3, 8, 4, 6.

Tổng = $16 \cdot 27 + (3 + 8 + 4 + 6) = 432 + 21 = 453$. Đáp án (D).

Bây: bỏ quên phần lẻ ra 432; lấy 3 chữ số lẻ ra 447; lấy $\frac{100}{6} \cdot 27 = 450$; làm tròn lên 17 chu kỳ ra 459.

Insight · Mọi câu hỏi về “chữ số thứ N” hay “tổng N chữ số” của số tuần hoàn: chia N cho chu kỳ, xử lý phần dư riêng.

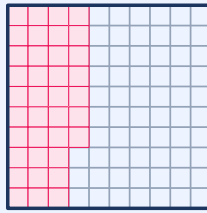
Common Trap — Bẫy số thập phân

- $0.3 \times 0.3 = 0.09$ chứ không phải 0.9 (đếm tổng số chữ số sau dấu phẩy của hai thừa số).
- $0.\overline{9} = 1$ thật sự (vì $\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$, nhân 3 hai vế).
- $0.1\overline{6} \neq \frac{16}{99}$. Số tuần hoàn **không** ngay từ đầu: $0.1\overline{6} = \frac{16 - 1}{90} = \frac{1}{6}$ (nhân 10 để đưa về dạng tuần hoàn ngay, rồi chia 10).

K 1.5 Percents and Percent Change**Phần trăm và phần trăm thay đổi****Definition — The language of percent (ngôn ngữ phần trăm)**

$p\%$ means $\frac{p}{100}$. “ $p\%$ of x ” is $\frac{p}{100} \cdot x$. “ A is what percent of B ” asks for $\frac{A}{B} \cdot 100\%$. “ A is $p\%$ more than B ” means $A = \left(1 + \frac{p}{100}\right)B$; “ $p\%$ less” means $A = \left(1 - \frac{p}{100}\right)B$.

Phần trăm luôn là phần trăm **của một cái gốc**. Câu “nhiều hơn bao nhiêu phần trăm” lấy cái đứng **sau** chữ “than” làm gốc.



$$37 \text{ ô} / 100 \text{ ô} = 37\%$$

Key Idea — $x\%$ của y bằng $y\%$ của x

$\frac{x}{100} \cdot y = \frac{y}{100} \cdot x$. Vì vậy 4% của 75 bằng 75% của 4, tức là 3. Đổi chỗ khi một trong hai số “tròn” hơn: 36% của 25 = 25% của 36 = 9.

Theorem — Multipliers (hệ số nhân)

Increasing by $p\%$ multiplies by $1 + \frac{p}{100}$; decreasing by $p\%$ multiplies by $1 - \frac{p}{100}$. Successive changes **multiply** (and their order does not matter). To undo a change, **divide** by its multiplier.

Tăng 50% rồi giảm 40%: $1.5 \cdot 0.6 = 0.9$ — giá cuối **thấp hơn** giá gốc 10%, chứ không phải cao hơn $50 - 40 = 10$ phần trăm. Tăng 10% hai lần liên tiếp: $1.1 \cdot 1.1 = 1.21$, tức tăng 21% chứ không phải 20%. Muốn biết giá trước khi tăng 8%: lấy giá sau chia cho 1.08.

**Example 1.9****Nhân các hệ số**

A store raised the price of a backpack by 20%. Later, during a sale, the new price was cut by 25%, and members received a further 10% off the sale price. A member's final price is what percent of the original price?

- (A) 75% (B) 81% (C) 85% (D) 90% (E) 95%

SOLUTION • LỜI GIẢI · Answer: **(B)** 81%

Mỗi thay đổi là một hệ số nhân: $\times 1.2$, $\times 0.75$, $\times 0.9$.

$1.2 \cdot 0.75 = 0.9$, rồi $0.9 \cdot 0.9 = 0.81$. Giá cuối bằng 81% giá gốc. Đáp án (B).

Bẫy: cộng trừ phần trăm $100 + 20 - 25 - 10 = 85$; quên phần giảm thêm 10% cho hội viên thì ra 90%.

Insight · Phần trăm thay đổi nối tiếp: **nhân** hệ số, không cộng phần trăm. Bắt đầu từ giá 100 cho dễ nhìn.

Common Trap — Ba cái bẫy phần trăm

- Tăng $p\%$ rồi giảm $p\%$ **không** về chỗ cũ: $(1 + \frac{p}{100})(1 - \frac{p}{100}) = 1 - \frac{p^2}{10000}$, luôn hụt.
- Gốc thay đổi: nếu A nhiều hơn B là 25% ($A = 1.25B$) thì B ít hơn A là 20% ($B = 0.8A$), không phải 25% .
- “Điểm phần trăm” (percentage points) khác “phần trăm”: từ 40% lên 45% là tăng 5 điểm phần trăm, nhưng tăng 12.5% so với 40% .

Tip — Chọn 100 làm giá trị ban đầu — hoặc nhìn cái không đổi

Bài phần trăm không cho số cụ thể: cho giá gốc = 100. Bài có hai nhóm trao đổi với nhau: **tổng không đổi**, hãy biểu diễn mỗi nhóm thành phân số của tổng trước và sau khi đổi.

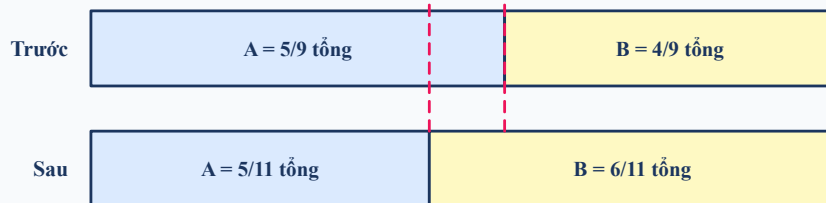
Example 1.10**Tổng không đổi**

Club A has 25% more members than club B . Then 10 members of club A switch to club B , and no one else joins or leaves. Now club B has 20% more members than club A . How many members do the two clubs have in total?

- (A) 81 (B) 90 (C) 99 (D) 108 (E) 110

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 99

Tổng N không đổi. Trước: $A : B = 5 : 4$, nên A chiếm $\frac{5}{9}$ tổng. Sau: $B : A = 6 : 5$, nên A chiếm $\frac{5}{11}$ tổng.



$$10 \text{ người chuyển} = \frac{5}{9} - \frac{5}{11} = \frac{10}{99} \text{ tổng}$$

10 người chuyển đi chính là phần chênh: $\left(\frac{5}{9} - \frac{5}{11}\right) N = \frac{10}{99} N = 10$, nên $N = 99$. Đáp án (C).

Kiểm tra: $A = 55$, $B = 44$ ($55 = 1.25 \cdot 44$); sau đó $A = 45$, $B = 54 = 1.2 \cdot 45$. ✓

Insight · Hai nhóm chuyển qua lại → tổng là đại lượng bất biến; đổi “ $p\%$ nhiều hơn” thành tỉ số rồi thành **phân số của tổng**.

E Worked Examples — Competition Level**Ví dụ mẫu mức thi đấu**

Hai ví dụ cuối ở mức câu 20–25 của AMC 8. Hãy thử tự giải ít nhất 5 phút trước khi đọc lời giải.

Example 1.11**Hằng đẳng thức làm tích dây chuyền**

What is the value of

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{16}\right) \left(1 + \frac{1}{256}\right)?$$

- (A) $\frac{255}{128}$ (B) $\frac{65535}{32768}$ (C) $\frac{131071}{65536}$ (D) 2 (E) $\frac{65537}{32768}$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) $\frac{65535}{32768}$

Các mẫu 2, 4, 16, 256 là $2^1, 2^2, 2^4, 2^8$ — mỗi số là bình phương của số trước. Đó là dấu hiệu dùng $(1 - a)(1 + a) = 1 - a^2$.

Nhân thêm $\left(1 - \frac{1}{2}\right)$ vào trước: $\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4}$; nhân tiếp với $\left(1 + \frac{1}{4}\right)$ được $1 - \frac{1}{16}$; rồi $1 - \frac{1}{256}$; rồi $1 - \frac{1}{65536}$.

Vì đã nhân thêm $\frac{1}{2}$, tích cần tìm $= 2 \left(1 - \frac{1}{65536} \right) = 2 - \frac{1}{32768} = \frac{65535}{32768}$. Đáp án (B).

Bây: quên thừa số cuối thì ra $\frac{255}{128}$; nhân 2 chỉ vào số 1 (viết $2 - \frac{1}{65536}$) thì ra $\frac{131071}{65536}$.

Insight • Các số hạng là bình phương liên tiếp $(a, a^2, a^4, \dots) \rightarrow$ **nhân thêm** một thừa số $(1 - a)$ để kích hoạt hiệu hai bình phương.

Example 1.12

Chặn bằng số hạng lớn nhất rồi chia trường hợp

Positive integers $a < b < c < d$ satisfy

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = 1.$$

What is the least possible value of d ?

(A) 12

(B) 15

(C) 18

(D) 20

(E) 24

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (A) 12

Chặn a . $a \geq 2$ (nếu $a = 1$ thì tổng đã vượt 1). Nếu $a \geq 3$ thì tổng không vượt $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{57}{60} < 1$. Vậy $a = 2$ và $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{2}$.

Chặn b . Ba phân số giảm dần có tổng $\frac{1}{2}$ nên $\frac{3}{b} > \frac{1}{2}$, tức $b \leq 5$; lại có $b \geq 3$.

• $b = 3$: $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{6}$ với $c \geq 7$; $c = 7, 8, 9, 10$ cho $d = 42, 24, 18, 15$ ($c = 11$ không cho d nguyên, $c \geq 12$ thì $d \leq c$). Nhỏ nhất $d = 15$.

• $b = 4$: $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{1}{4}$ với $c \geq 5$; $c = 5$ cho $d = 20$, $c = 6$ cho $d = 12$ ($c = 7$ không nguyên, $c \geq 8$ thì $d \leq c$).

• $b = 5$: $\frac{1}{c} + \frac{1}{d} = \frac{3}{10}$ với $c \geq 6$ thì $\frac{2}{c} \geq \frac{3}{10}$ buộc $c = 6$, nhưng $\frac{3}{10} - \frac{1}{6} = \frac{2}{15}$ không phải phân số đơn vị.

Nhỏ nhất là $d = 12$, đạt tại $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = 1$. Đáp án (A).

Bây: tham lam chọn $a = 2, b = 3$ rồi dừng ở $d = 15$ mà không thử $b = 4$.

Insight • Tổng các phân số đơn vị: số hạng **lớn nhất** phải “gánh” ít nhất trung bình $\frac{1}{a} \geq \frac{\text{tổng}}{\text{số số hạng}}$ — từ đó chặn từng biến rồi chia trường hợp gọn gàng.

1 Exercises 1 • Foundation

Bài tập 1 • Nền tảng



1.1 What is the value of $20 - 4 \div \frac{2}{3} \times 2 + 3^2$?

(A) 5

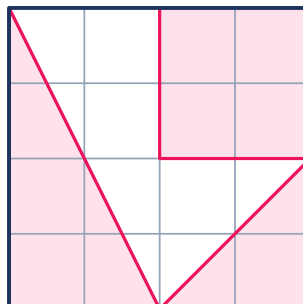
(B) 11

(C) 14

(D) 17

(E) 26

1.2 The large square shown is divided into 16 congruent small squares. What fraction of the large square is shaded?



(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{9}{16}$

(C) $\frac{5}{8}$

(D) $\frac{11}{16}$

(E) $\frac{3}{4}$

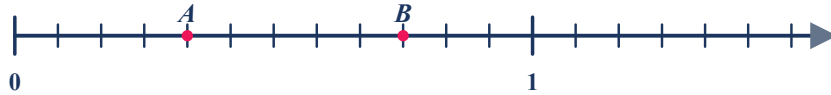
1.3 What is the value of $\frac{0.2 \times 0.5}{0.02} + 0.4 \times 0.25$?

- (A) 0.51 (B) 1.5 (C) 5.1 (D) 6 (E) 51

1.4 What is 8% of 125 plus 125% of 8?

- (A) 20 (B) 30 (C) 40 (D) 100 (E) 200

1.5 On the number line shown, the segment from 0 to 1 is divided into 12 equal parts. Point B is the midpoint of segment $\overline{AC}$. At what number is point C ?



- (A) $\frac{13}{12}$ (B) $\frac{7}{6}$ (C) $\frac{5}{4}$ (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{17}{12}$

1.6 Four friends share a pizza. An takes $\frac{1}{4}$ of the pizza. Binh then takes $\frac{1}{3}$ of what is left. Chi then takes $\frac{1}{2}$ of what is left after that, and Dũng takes the rest. Which statement is true?

- (A) An gets the most. (B) Dũng gets the most.
(C) Chi gets the least. (D) All four get the same amount.
(E) Bình gets more than Chi.

1.7 A shop marks all prices down by 20%. At the checkout, a coupon takes another 15% off the marked-down price. The two discounts together are equivalent to a single discount of what percent?

- (A) 30% (B) 32% (C) 34% (D) 35% (E) 68%

1.8 What is $0.\overline{27} + 0.\overline{3}$ written as a fraction in lowest terms?

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{6}{11}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{20}{33}$ (E) $\frac{61}{99}$

1.9 Which of the following numbers is strictly between $\frac{3}{5}$ and $\frac{2}{3}$?

- (A) $\frac{5}{9}$ (B) $\frac{4}{7}$ (C) $\frac{7}{12}$ (D) $\frac{3}{5}$ (E) $\frac{5}{8}$

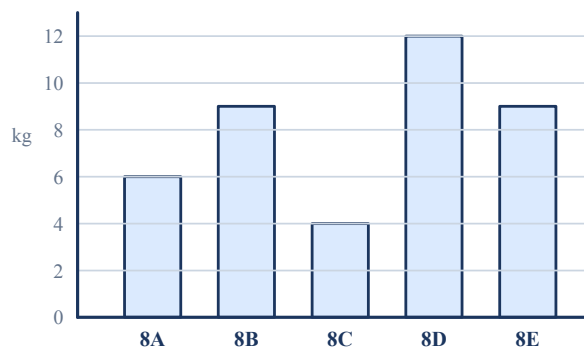
1.10 What is the value of $37 \times 0.75 + 63 \times \frac{3}{4} - 0.25 \times 100$?

- (A) 50 (B) 55 (C) 75 (D) 100 (E) 125

1.11 After its price was increased by 15%, a bicycle costs 2300 thousand đồng. What was the price, in thousand đồng, before the increase?

- (A) 1955 (B) 2000 (C) 2070 (D) 2185 (E) 2645

1.12 The bar graph shows how many kilograms of waste paper each of five classes collected for recycling. What percent of the total amount of paper was collected by class 8D?



- (A) 12% (B) 20% (C) 24% (D) 25% (E) 30%

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi



1.13 What is the value of

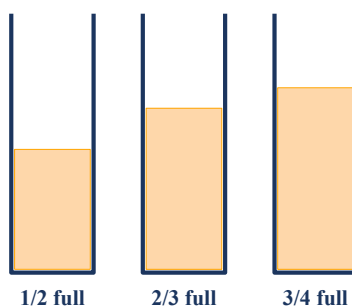
♦♦

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} ?$$

- (A) $\frac{4}{11}$ (B) $\frac{5}{11}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{6}{11}$ (E) $\frac{10}{11}$

1.14 Three identical cylindrical glasses are $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, and $\frac{3}{4}$ full of juice, as shown. Lan pours juice from glass to glass, without spilling, until all three glasses contain the same amount. What fraction of a glass does each glass then contain?

♦♦



- (A) $\frac{7}{12}$ (B) $\frac{5}{8}$ (C) $\frac{23}{36}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{23}{12}$

1.15 A cereal company makes its box 20% larger by weight and raises the price of the box by 8%. By what percent does the price per gram decrease?

♦♦

- (A) 6% (B) 8% (C) 9% (D) 10% (E) 12%

1.16 Which of the following fractions has a decimal expansion whose shortest repeating block has exactly 3 digits?

♦♦

- (A) $\frac{1}{33}$ (B) $\frac{1}{27}$ (C) $\frac{1}{13}$ (D) $\frac{1}{11}$ (E) $\frac{1}{7}$

1.17 For how many integers n is $\frac{3}{8} < \frac{n}{40} < \frac{5}{9}$?

♦♦

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 15

1.18 When $\frac{1}{2^8}$ is written as a decimal, what is the sum of its digits?

♦♦

- (A) 25 (B) 26 (C) 28 (D) 30 (E) 32

1.19 The number x is 150% of y , and y is 40% of z . If $x + y + z = 320$, what is z ?

♦♦

- (A) 64 (B) 96 (C) 128 (D) 160 (E) 200

1.20 Each edge of a cube is increased by 50%. By what percent does the volume of the cube increase?

♦♦

- (A) 50% (B) 125% (C) 150% (D) 225% (E) 237.5%

1.21 Positive integers a , b , and c satisfy

♦♦♦

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{38}{11}.$$

What is $a + b + c$?

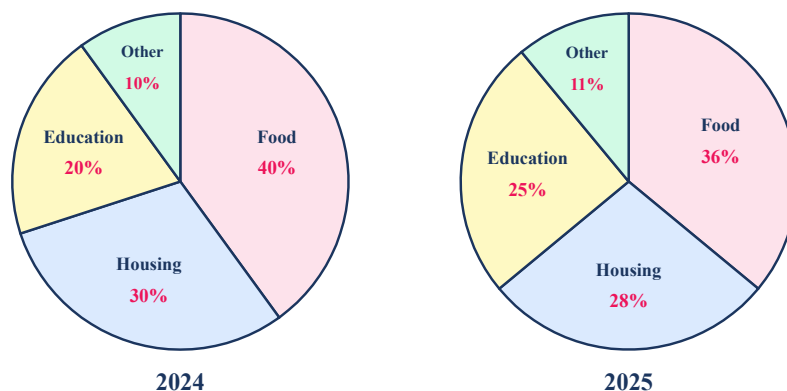
- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

1.22 For how many integers n with $1 \leq n \leq 100$ can the number $\frac{n}{72}$ be written as a decimal with at most two digits after the decimal point?

♦♦♦

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 11

- 1.23** After raising all its prices by 25%, a store offers “buy 3, get 1 free.” A customer takes 4 items of the same kind. Compared with the original price of one item, the customer's average cost per item is lower by what percent?
 (A) 1.25% (B) 2.5% (C) 5% (D) 6.25% (E) 8.75%
- 1.24** Starting with the fraction $\frac{1}{5}$, Lan adds 1 to both the numerator and the denominator, again and again: $\frac{1}{5} \rightarrow \frac{2}{6} \rightarrow \frac{3}{7} \rightarrow \dots$. After how many such steps is the fraction greater than $\frac{9}{10}$ for the first time?
 (A) 35 (B) 36 (C) 40 (D) 41 (E) 45
- 1.25** The pie charts show how a family divided its budget among four categories in 2024 and in 2025. The total budget in 2025 was 25% greater than in 2024. By what percent did the family's spending on education increase from 2024 to 2025?



- (A) 5% (B) 20% (C) 25% (D) 50% (E) 56.25%
- 1.26** In an election with two candidates, A and B , every vote goes to one of them. After 60% of the votes have been counted, A has 55% of the counted votes. Candidate A is certain to finish with more votes than B exactly when A receives more than $x\%$ of the remaining votes. What is x ?
 (A) 42.5 (B) 45 (C) 50 (D) 55 (E) 57.5

3 Exercises 3 • Challenge

Bài tập 3 • Thử thách



- 1.27** Each of the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6 is placed in exactly one of the six boxes shown, forming the sum of three fractions. What is the least possible value of the sum?

$$\frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}} + \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

- (A) 1 (B) $\frac{11}{10}$ (C) $\frac{23}{20}$ (D) $\frac{6}{5}$ (E) $\frac{79}{60}$

- 1.28** What is the value of

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \dots + \frac{19}{9^2 \cdot 10^2}?$$

- (A) $\frac{9}{10}$ (B) $\frac{99}{100}$ (C) $\frac{100}{101}$ (D) 1 (E) $\frac{11}{10}$
- 1.29** When the sum $0.\overline{57} + 0.\overline{468}$ is written as a decimal, what is the sum of the first 60 digits after the decimal point?
 (A) 160 (B) 170 (C) 180 (D) 200 (E) 220

- 1.30** For how many positive integers $n \leq 1000$ is $n\%$ of $n\%$ of n an integer?

Integer answer • Đáp số nguyên

- 1.31** How many ordered pairs of positive integers (a, b) satisfy $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{30}$?

♦♦♦♦

Integer answer · Đáp số nguyên

- 1.32** What is the greatest integer that does not exceed

♦♦♦♦

$$\frac{1}{\frac{1}{2001} + \frac{1}{2002} + \frac{1}{2003} + \cdots + \frac{1}{2010}}?$$

- (A) 199 (B) 200 (C) 201 (D) 202 (E) 2005

- 1.33** In a survey of a school, 70% of the students like tea, 80% like coffee, and 90% like juice. At least what percent of the students like all three drinks?

♦♦♦♦

- (A) 40% (B) 50.4% (C) 60% (D) 70% (E) 80%

- 1.34** Exactly one pair of parentheses is inserted into the expression

♦♦♦♦

$$12 - 6 \div 2 \times 3 + 1$$

so that it encloses two or more consecutive numbers (together with the operations between them); for example, $(12 - 6) \div 2 \times 3 + 1$. How many different values can the resulting expression have?

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

- 1.35** The price of a jacket is increased by $p\%$, and then the new price is decreased by $q\%$, where p and q are positive integers. The final price equals the original price. How many ordered pairs (p, q) are possible?

♦♦♦♦

Integer answer · Đáp số nguyên

- 1.36** What is the value of

♦♦♦♦

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \cdots + \frac{10}{1024}?$$

(The k -th term is $\frac{k}{2^k}$.)

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{7}{4}$ (C) $\frac{253}{128}$ (D) $\frac{1013}{512}$ (E) $\frac{509}{256}$

Chapter 2

8020 AMC 8 Mastery

Ratios, Rates & Proportional Reasoning

Tỉ số, tỉ lệ & suy luận tỉ lệ thuận

Tỉ số, tỉ lệ và tốc độ có mặt trong gần một phần ba đề AMC 8: chia theo tỉ lệ, trộn hỗn hợp, vận tốc, năng suất, bản đồ, phóng to thu nhỏ. Chương này dạy cách đọc ra “số phần”, tìm đại lượng không đổi, phân biệt tỉ lệ thuận và tỉ lệ nghịch, cộng năng suất, dùng quy tắc đòn bẩy cho trung bình có trọng số và đi từ tỉ số độ dài sang tỉ số diện tích, thể tích. Học sinh thường mất điểm vì nhầm phần–phần với phần–toàn thể, lấy trung bình cộng các vận tốc, và quên bình phương khi đổi tỉ lệ diện tích.

✓ Đối mọi dữ kiện về “số phần” và giá trị một phần; gộp các tỉ số có chung một đại lượng; nhận ra tỉ số ẩn trong câu “phần số của A bằng phần số của B”.

✓ Tìm đại lượng không đổi (tổng, hiệu, phần còn lại, tích) để giải các bài tỉ số thay đổi.

✓ Phân biệt tỉ lệ thuận ($y = kx$) với tỉ lệ nghịch ($xy = k$); dùng tính chất dãy tỉ số bằng nhau.

✓ Giải bài vận tốc và năng suất: đổi đơn vị, vận tốc trung bình, vận tốc tương đối, cộng năng suất.

✓ Dùng quy tắc đòn bẩy cho hỗn hợp và trung bình có trọng số.

✓ Dùng hệ số tỉ lệ k , k^2 , k^3 và tỉ số diện tích tam giác chung chiều cao.

ratio · tỉ số

part-to-whole ratio · tỉ số phần so với toàn thể

proportion · tỉ lệ thức

directly proportional · tỉ lệ thuận

inversely proportional · tỉ lệ nghịch

rate / unit rate · tốc độ / đơn giá

average speed · vận tốc trung bình

relative speed · vận tốc tương đối

work rate · năng suất

weighted average · trung bình có trọng số

mixture, concentration · hỗn hợp, nồng độ

scale (of a map) · tỉ lệ bản đồ

scale factor · hệ số tỉ lệ

similar figures · hình đồng dạng

K 2.1 Ratios: Parts, Wholes and Invariants

Tỉ số: phần, toàn thể và đại lượng không đổi

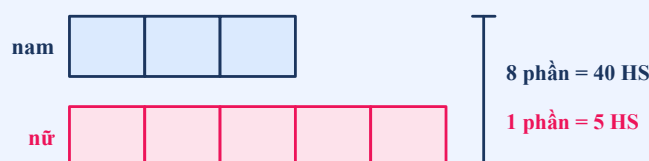
Tỉ số (ratio) là ngôn ngữ của AMC 8: “cứ 3 bạn nam thì có 5 bạn nữ”, “trộn theo tỉ lệ 2 : 3”, “bản đồ tỉ lệ 1 : 50 000”. Cả chương này chỉ xoay quanh một ý: **tỉ số cho biết số phần, không cho biết số lượng**. Muốn ra số lượng thật, ta cần thêm một dữ kiện để tìm **giá trị của một phần**.

Definition – Ratio, parts, part-to-whole (tỉ số, số phần, phần so với toàn thể)

Quantities A and B are in the ratio $a : b$ when $\frac{A}{B} = \frac{a}{b}$, i.e. $A = ak$ and $B = bk$ for some $k > 0$ (the **value of one part**).

Then A is $\frac{a}{a+b}$ of the whole $A + B$. A ratio does not change when all its terms are multiplied or divided by the same nonzero number: $6 : 10 = 3 : 5$.

Ví dụ: lớp 40 học sinh, nam : nữ = 3 : 5. Tổng 8 phần ứng với 40 học sinh nên một phần là 5 học sinh; nam = 15, nữ = 25. Nam chiếm $\frac{3}{8}$ cả lớp — **không phải** $\frac{3}{5}$ (đó là tỉ số nam so với nữ).



Theorem – Two ways a ratio is hidden (hai cách tỉ số “trấn” trong đề)

(1) If $\frac{p}{q}$ of A equals $\frac{r}{s}$ of B (all positive), then $A : B = \frac{r}{s} : \frac{p}{q} = rq : ps$. (2) If $A : B = a : b$ and $B : C = c : d$, then $A : B : C = ac : bc : bd$ — rescale both ratios so that the shared quantity B gets the same number of parts.

(1) Từ $\frac{p}{q}A = \frac{r}{s}B$ suy ra $\frac{A}{B} = \frac{r/s}{p/q} = \frac{rq}{ps}$: **đại lượng nào lấy phân số nhỏ hơn thì lớn hơn**. Chẳng hạn $\frac{2}{3}$ số bi đỏ bằng $\frac{1}{2}$ số bi xanh thì đỏ : xanh = $\frac{1}{2} : \frac{2}{3} = 3 : 4$. (2) Nhân hai tỉ số để B có cùng số phần (dùng BCNN): $A : B = 2 : 3$ và $B : C = 4 : 5$ cho $A : B : C = 8 : 12 : 15$.

Example 2.1**Hai phân số bằng nhau → một tỉ số**

In a chess club, $\frac{3}{4}$ of the boys and $\frac{2}{3}$ of the girls play in a tournament, and the same number of boys as girls play. The club has 51 members. How many members of the club are girls?

(A) 17 (B) 24 (C) 27 (D) 30 (E) 34

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 27

Số nam thi đấu bằng số nữ thi đấu: $\frac{3}{4}B = \frac{2}{3}G$. Theo hợp định lý, $B : G = \frac{2}{3} : \frac{3}{4} = 8 : 9$ (nhân cả hai với 12).

Tổng $8 + 9 = 17$ phần ứng với 51 người, một phần là 3 người. Số nữ là $9 \cdot 3 = 27$. Đáp án (C).

Kiểm tra: nam 24, $\frac{3}{4} \cdot 24 = 18$; nữ 27, $\frac{2}{3} \cdot 27 = 18$. ✓ Bẫy: viết ngược thành $B : G = 9 : 8$ thì ra 24 nữ.

Insight · “ $\frac{p}{q}$ của A bằng $\frac{r}{s}$ của B ” là một tỉ số trá hình; đại lượng bị lấy phân số **nhỏ hơn** là đại lượng **lớn hơn**.

Key Idea – Tìm cái KHÔNG đổi

Khi số lượng thay đổi, tỉ số thay đổi — nhưng thường có một đại lượng đứng yên, và đó là chìa khoá:

- Hai người **cùng nhận thêm** (hoặc cùng bớt) một số như nhau → **hiệu** không đổi.
- Một người **chuyển** cho người kia → **tổng** không đổi.
- Chỉ một nhóm thay đổi → nhóm **còn lại** không đổi.

Hãy viết tỉ số trước và sau sao cho đại lượng không đổi có **cùng số phần**.

Example 2.2**Hiệu không đổi**

Mai has 5 stickers for every 2 stickers that Lan has. Their grandmother then gives each girl 12 more stickers, and now Mai has exactly twice as many stickers as Lan. How many stickers did Mai have before the gift?

(A) 24 (B) 36 (C) 48 (D) 60 (E) 72

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 60

Mỗi bạn nhận thêm 12 nên **hiệu** số nhãn dán không đổi. Trước: Mai : Lan = $5 : 2$, hiệu 3 phần. Sau: Mai : Lan = $2 : 1$, hiệu 1 phần.

Viết lại để hiệu có cùng số phần: trước $5 : 2$ (hiệu 3), sau $6 : 3$ (hiệu 3). Lan từ 2 phần lên 3 phần, tăng 1 phần = 12 nhãn.

Vậy một phần là 12, lúc đầu Mai có $5 \cdot 12 = 60$ nhãn. Đáp án (D).

Kiểm tra: 60 và 24; sau đó 72 và 36, đúng gấp đôi. ✓ Bẫy: trả lời 24 là số nhãn của Lan.

Insight · Cùng thêm (hay cùng bớt) một lượng như nhau → **hiệu** bất biến; đổi hai tỉ số về cùng số phần cho hiệu rồi so sánh từng phần.

Common Trap — Ba cái bẫy tỉ số

- Nhầm **phần-phần** với **phần-toàn thể**: nam : nữ = 3 : 5 thì nam là $\frac{3}{8}$ lớp, không phải $\frac{3}{5}$.
- Cộng cùng một số vào hai vế **làm đổi** tỉ số: 3 : 5 cộng thêm 1 mỗi bên thành 4 : 6 = 2 : 3 $\neq$ 3 : 5. Chỉ nhân/chia mới giữ tỉ số.
- Tỉ số 3 : 5 **không** có nghĩa là có đúng 3 và 5 cái: nó là $3k$ và $5k$. Nhiều bài hỏi “ít nhất” chính là hỏi k nhỏ nhất.

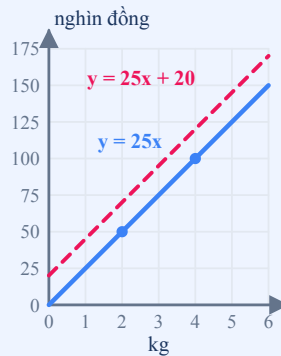
Tip — Gọi một phần là k — hoặc vẽ sơ đồ đoạn thẳng

Khi đề cho tỉ số và một hiệu/tổng, đừng lập hệ hai ẩn: gọi giá trị một phần là k (hoặc vẽ các ô bằng nhau) — một phương trình bậc nhất là xong. Khi tỉ số có ba đại lượng, quy về **một dãy tỉ số** $A : B : C$ trước khi tính.

K 2.2 Direct and Inverse Proportion**Tỉ lệ thuận và tỉ lệ nghịch****Definition — Direct proportion (tỉ lệ thuận)**

y is **directly proportional** to x if $y = kx$ for a constant $k \neq 0$; equivalently $\frac{y}{x}$ is constant. Its graph is a straight line **through the origin**. Doubling x doubles y ; $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$.

Giá gạo 25 nghìn/kg: tiền = $25 \times (\text{số kg})$ — tỉ lệ thuận, đồ thị là đường thẳng qua gốc. Nếu cửa hàng thu thêm phí giao 20 nghìn thì tiền = $25x + 20$: vẫn là đường thẳng nhưng **không** tỉ lệ thuận (mua gấp đôi không trả gấp đôi).

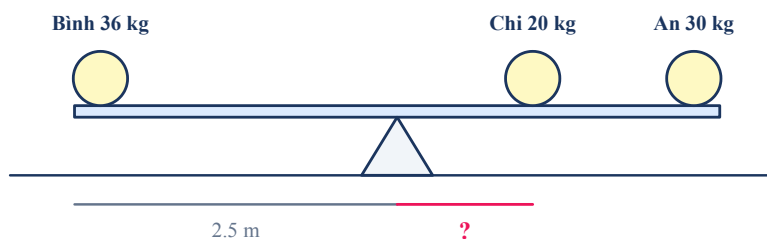
**Definition — Inverse proportion (tỉ lệ nghịch)**

y is **inversely proportional** to x if $xy = k$ for a constant $k \neq 0$. Doubling x halves y ; $x_1y_1 = x_2y_2$.

Ví dụ quen thuộc: cùng một quãng đường thì **vận tốc $\times$ thời gian** không đổi; cùng một công việc thì **số người $\times$ số ngày** không đổi; bập bênh cân bằng thì **cân nặng $\times$ khoảng cách tới trụ** ở hai bên bằng nhau (khối lượng nặng hơn phải ngồi gần trụ hơn).

Example 2.3**Cân bằng đòn bẩy: tích không đổi**

A seesaw is 5 m long with its pivot at the middle. Bình (36 kg) sits at the left end, and An (30 kg) sits at the right end. Chi (20 kg) wants to sit on the right side so that the seesaw balances. How many meters from the pivot should Chi sit? (A seesaw balances when, for the two sides, the sums of (mass $\times$ distance to the pivot) are equal. The figure is not drawn to scale.)



- (A) 0.5 (B) 0.75 (C) 1 (D) 1.25 (E) 1.5

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 0.75

Mỗi đầu cách trụ 2.5 m. Bên trái: $36 \cdot 2.5 = 90$. Bên phải đang có An: $30 \cdot 2.5 = 75$.

Còn thiếu $90 - 75 = 15$, nên Chi ngồi cách trụ x mét với $20x = 15$, tức $x = 0.75$ m. Đáp án (B).

Bây: chỉ so Bình với Chi ($36 \cdot 2.5 = 20x$, $x = 4.5$ — vượt khỏi bập bênh!) là quên rằng An cũng đang ngồi bên phải.

Insight · Cân bằng là “tổng các tích bằng nhau”: tính lượng còn thiếu của một bên rồi chia cho cân nặng của người mới.

Theorem — Equal ratios add up (tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

If $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = k$ and $b + d + f \neq 0$, then

$$\frac{a + c + e}{b + d + f} = k, \quad \text{and more generally} \quad \frac{ma + nc}{mb + nd} = k.$$

Vì $a = kb$, $c = kd$, $e = kf$ nên $a + c + e = k(b + d + f)$. Tính chất này cho phép **cộng tử với tử, mẫu với mẫu** — điều bị cấm khi cộng phân số bình thường, nhưng đúng khi các tỉ số **bằng nhau**.

Example 2.4

Cộng các tỉ số bằng nhau

Positive numbers a , b , and c satisfy

$$\frac{a + b}{3} = \frac{b + c}{4} = \frac{c + a}{5}.$$

What is the value of $\frac{a + b + c}{a - b + c}$?

(A) 1

(B) $\frac{6}{5}$

(C) $\frac{4}{3}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) 2

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) $\frac{3}{2}$

Gọi giá trị chung là k : $a + b = 3k$, $b + c = 4k$, $c + a = 5k$. Cộng ba đẳng thức (hay dùng tính chất dãy tỉ số): $2(a + b + c) = 12k$, nên $a + b + c = 6k$.

Trừ lần lượt: $c = 6k - 3k = 3k$, $a = 6k - 4k = 2k$, $b = 6k - 5k = k$. Vậy $a : b : c = 2 : 1 : 3$.

$$\frac{a + b + c}{a - b + c} = \frac{6k}{4k} = \frac{3}{2}. \text{ Đáp án (D).}$$

Insight · Dãy tỉ số bằng nhau → đặt chung bằng k , cộng tất cả để có tổng, rồi trừ ra từng biến.

Common Trap — Tỉ lệ nghịch không có nghĩa là “trừ đi”

Số công nhân tăng từ 6 lên 9 (thêm 50%) thì số ngày giảm còn $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$, tức giảm $33\frac{1}{3}\%$ — **không phải** giảm 50%, cũng không phải “bớt 3 ngày”. Với tỉ lệ nghịch, hãy luôn quay về **tích không đổi**: $6 \cdot 12 = 9 \cdot t \Rightarrow t = 8$.

Tip — Hỏi: cái gì nhân với cái gì thì không đổi?

Trước khi tính, viết ra đại lượng bất biến: “tổng công việc = người $\times$ ngày”, “quãng đường = tốc độ $\times$ thời gian”, “số chữ = trang $\times$ dòng $\times$ chữ mỗi dòng”. Nếu bất biến là một **thương** thì tỉ lệ thuận, là một **tích** thì tỉ lệ nghịch.

K

2.3 Rates: Unit Rates, Speed and Work

Tốc độ: đơn giá, vận tốc và năng suất

Definition — Rate and unit rate (tỉ suất, đơn giá)

A **rate** compares two quantities with different units: km/h, pages per minute, liters per 100 km. The **unit rate** is the amount for one unit of the second quantity. Amount = rate $\times$ time; in particular $d = vt$.

Đổi đơn vị bằng cách nhân với các phân số “bằng 1”: $72 \text{ km/h} = 72 \cdot \frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$. Viết đơn vị vào từng thừa số và gạch các đơn vị giống nhau — kỹ thuật này gọi là **phân tích thứ nguyên** (dimensional analysis).

Example 2.5

Phân tích thứ nguyên

A leaking faucet drips once every 2 seconds, and 15 drops make 1 milliliter. Which of the following is closest to the number of liters of water the faucet wastes in 30 days?

- (A) 0.9 (B) 9 (C) 90 (D) 900 (E) 9000

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 90

Nối các hệ số đổi đơn vị: $30 \text{ ngày} \cdot \frac{24 \text{ giờ}}{1 \text{ ngày}} \cdot \frac{3600 \text{ s}}{1 \text{ giờ}} \cdot \frac{1 \text{ giọt}}{2 \text{ s}} \cdot \frac{1 \text{ mL}}{15 \text{ giọt}} \cdot \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}}$.

Tính: $30 \cdot 24 \cdot 3600 = 2\,592\,000$ giây, chia 2 được 1 296 000 giọt, chia 15 được 86 400 mL = 86.4 lít. Gần nhất là 90. Đáp án (C).

Bây: quên đổi mL sang lít thì ra hàng chục nghìn; nhân 15 thay vì chia thì lệch hẳn bậc độ lớn.

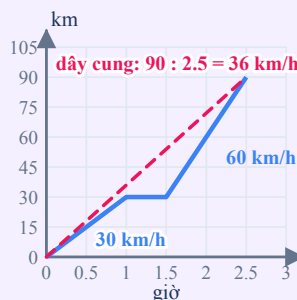
Insight · Viết **mọi** hệ số kèm đơn vị thành phân số; đơn vị gạch được với nhau thì phép tính chắc chắn đúng chiều (nhân hay chia).

Theorem — Average speed (vận tốc trung bình)

$$\text{average speed} = \frac{\text{total distance}}{\text{total time}}.$$

For two legs of **equal distance** at speeds u and v it equals $\frac{2uv}{u+v}$; for two legs of **equal time** it equals $\frac{u+v}{2}$.

Trên đồ thị quãng đường – thời gian, vận tốc trung bình là **độ dốc của dây cung** nối điểm đầu với điểm cuối; thời gian nghỉ vẫn tính vào tổng thời gian. Hai đoạn đường bằng nhau: thời gian là $\frac{d}{u} + \frac{d}{v}$, nên trung bình = $\frac{2d}{d/u + d/v} = \frac{2uv}{u+v}$.



Example 2.6

Cần chạy nhanh bao nhiêu?

Lan cycles the first 12 km of a 24-km route at 18 km/h. At what constant speed, in km/h, must she ride the remaining 12 km so that her average speed for the whole route is 24 km/h?

- (A) 28 (B) 30 (C) 32 (D) 36 (E) 40

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 36

Muốn trung bình 24 km/h trên 24 km thì **tổng thời gian** phải là 1 giờ = 60 phút.

Đoạn đầu mất $\frac{12}{18}$ giờ = 40 phút. Còn 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ cho 12 km: vận tốc $12 : \frac{1}{3} = 36$ km/h. Đáp án (D).

Bấy: lấy trung bình cộng $\frac{18+v}{2} = 24$ ra $v = 30$ — sai vì hai đoạn tốn thời gian khác nhau.

Insight · Vận tốc trung bình mục tiêu → quy ra **tổng thời gian** cho phép; trừ thời gian đã dùng để biết thời gian còn lại.

Theorem — Work rates add (năng suất cộng được)

If one worker finishes a job in a hours, the worker's rate is $\frac{1}{a}$ job per hour. Rates of people working together **add**: two workers who alone need a and b hours need T hours together, where $\frac{1}{T} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

Cộng **năng suất**, không cộng thời gian. Khi đề cho “máy mới nhanh hơn 50%”, hãy chọn năng suất máy cũ là một số tiện (như 2) thì máy mới là 3, rồi tính khối lượng công việc theo cùng đơn vị.

Example 2.7

Năng suất cộng được

A new machine works 50% faster than an old machine. Two old machines and one new machine, working together, finish an order in 6 hours. How many hours would one old machine and two new machines, working together, take to finish the same order?

(A) 4

(B) $\frac{9}{2}$

(C) 5

(D) $\frac{21}{4}$

(E) 6

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) $\frac{21}{4}$

Chọn năng suất máy cũ là 2 đơn vị/giờ, máy mới là 3 đơn vị/giờ.

Đơn hàng: $(2 + 2 + 3) \cdot 6 = 42$ đơn vị. Đội mới có năng suất $2 + 3 + 3 = 8$ đơn vị/giờ, cần $\frac{42}{8} = \frac{21}{4}$ giờ. Đáp án (D).

Bấy: nghĩ “đổi một máy cũ lấy một máy mới thì cả đội nhanh hơn 50%” rồi lấy $6 : 1.5 = 4$. Thực ra năng suất cả đội chỉ tăng từ 7 lên 8 đơn vị.

Insight · Chọn đơn vị năng suất tiện lợi, quy công việc ra “số đơn vị”, rồi chia cho năng suất tổng.

Key Idea — Vận tốc tương đối (relative speed)

Hai vật chuyển động **cùng chiều**: khoảng cách giữa chúng thay đổi với tốc độ bằng **hiệu** hai vận tốc. **Ngược chiều** (đi về phía nhau): bằng **tổng** hai vận tốc. Thời gian đuổi kịp = $\frac{\text{khoảng cách ban đầu}}{\text{hiệu vận tốc}}$.

Example 2.8

Đuổi kịp trước khi tới hang

A cat is 15 m behind a mouse, and the mouse's hole is 30 m ahead of the mouse, all on a straight line as shown. The mouse runs toward its hole at 3.5 m/s. At the same moment the cat starts chasing at a constant speed. What is the least speed, in m/s, at which the cat reaches the mouse no later than the moment the mouse reaches its hole?



(A) 4.5

(B) 5

(C) 5.25

(D) 5.5

(E) 6

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 5.25

Chuột cần $\frac{30}{3.5} = \frac{60}{7}$ giây để về hang. Muốn bắt kịp chậm nhất ngay cửa hang, mèo phải chạy $15 + 30 = 45$ m trong $\frac{60}{7}$ giây.

Vận tốc tối thiểu = $45 : \frac{60}{7} = \frac{315}{60} = 5.25$ m/s. Đáp án (C).

Cách nhìn vận tốc tương đối: mèo phải xoá khoảng cách 15 m trong $\frac{60}{7}$ s, nên hiệu vận tốc ít nhất $15 \cdot \frac{7}{60} = 1.75$; $3.5 + 1.75 = 5.25$. Bẫy: lấy $\frac{30}{3.5}$ rồi quên rằng mèo phải chạy 45 m chứ không phải 30 m.

Insight · Bài đuổi bắt có “hạn chết” → tính thời gian của người bị đuổi trước, rồi suy ra vận tốc cần thiết; hoặc dùng hiệu vận tốc.

Common Trap — Bẫy vận tốc

- Trung bình vận tốc $\neq$ trung bình cộng các vận tốc (trừ khi các đoạn tốn **thời gian** bằng nhau).
- Đổi phút ra giờ: 20 phút = $\frac{1}{3}$ giờ, không phải 0.2 giờ.
- Năng suất thì cộng, thời gian thì **không** cộng: hai người mỗi người cần 6 giờ thì làm chung cần 3 giờ, không phải 12.

Tip — Chọn quãng đường (hay công việc) tiện lợi

Khi đề không cho quãng đường hoặc khối lượng công việc, hãy tự chọn một con số chia hết cho mọi vận tốc/thời gian xuất hiện (BCNN). Ví dụ đi 40 km/h, về 60 km/h: chọn quãng đường 120 km, thời gian $3 + 2 = 5$ giờ, trung bình $\frac{240}{5} = 48$ km/h (không phải 50).

K 2.4 Mixtures and Weighted Averages

Hỗn hợp và trung bình có trọng số

Theorem — Weighted average and the lever rule (trung bình có trọng số và quy tắc đòn bẩy)

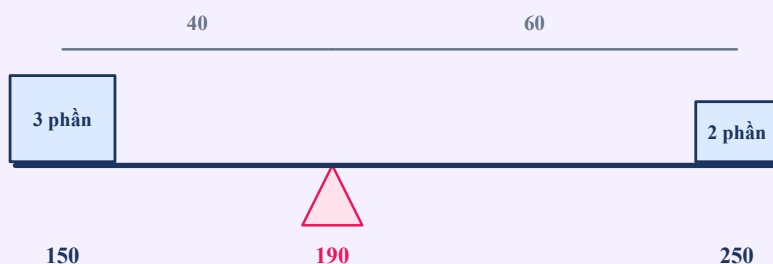
If m units with value p are combined with n units with value q , the average value is

$$r = \frac{mp + nq}{m + n},$$

which lies between p and q . Moreover

$$\frac{m}{n} = \frac{q - r}{r - p} \quad (\text{lever rule}).$$

Từ $(m + n)r = mp + nq$ suy ra $m(r - p) = n(q - r)$. Đặt p, r, q lên trục số như một đòn bẩy với trụ ở r : **lượng của mỗi loại tỉ lệ nghịch với khoảng cách từ nó đến trụ**. Trộn trà 150 nghìn/kg với trà 250 nghìn/kg thành loại 190 nghìn/kg: khoảng cách 40 và 60, nên khối lượng loại rẻ : loại đắt = $60 : 40 = 3 : 2$ (loại gần trụ hơn chiếm nhiều hơn).



Example 2.9

Quy tắc đòn bẩy

A shop mixes coffee that costs 180 thousand đồng per kilogram with coffee that costs 240 thousand đồng per kilogram to make 50 kg of a blend worth 216 thousand đồng per kilogram. How many kilograms of the cheaper coffee does the shop use?

- (A) 15 (B) 20 (C) 25 (D) 30 (E) 35

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 20

Theo quy tắc đòn bẩy, loại rẻ : loại đắt = $(240 - 216) : (216 - 180) = 24 : 36 = 2 : 3$.

50 kg chia 5 phần, mỗi phần 10 kg; loại rẻ chiếm 2 phần = 20 kg. Đáp án (B).

Kiểm tra: $20 \cdot 180 + 30 \cdot 240 = 3600 + 7200 = 10800 = 50 \cdot 216$. ✓ Bẫy: ghép nhầm khoảng cách với loại (36 đi với loại rẻ) thì ra 30 kg.

Insight · Loại nào **gần** giá trị trung bình hơn thì chiếm **nhiều** hơn — lượng tỉ lệ nghịch với khoảng cách.

Key Idea — Cái gì cộng được?

Trong bài trộn, **lượng chất** (gam đường, tiền, tổng điểm) thì cộng được; **nồng độ, đơn giá, điểm trung bình** thì không cộng được. Luôn đổi về lượng: nồng độ $\times$ khối lượng = lượng chất; trung bình $\times$ số người = tổng điểm.

Example 2.10

Trung bình tuổi của hai nhóm

The average age of the 52 people on a school trip is 18 years. The average age of the teachers is 40, and the average age of the students is 14. How many teachers are on the trip?

(A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 12 (E) 13

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 8

Đòn bẩy với trụ ở 18: giáo viên cách $40 - 18 = 22$, học sinh cách $18 - 14 = 4$. Số người tỉ lệ nghịch với khoảng cách: giáo viên : học sinh = $4 : 22 = 2 : 11$.

52 người là 13 phần, mỗi phần 4 người. Số giáo viên là $2 \cdot 4 = 8$. Đáp án (C).

Kiểm tra bằng tổng tuổi: $8 \cdot 40 + 44 \cdot 14 = 320 + 616 = 936 = 52 \cdot 18$. ✓

Insight · Hai nhóm gộp lại, biết ba “trung bình” → đòn bẩy cho ngay **tỉ số số lượng**.

Common Trap — Không lấy trung bình của các trung bình

Lớp A (10 bạn) trung bình 9 điểm, lớp B (30 bạn) trung bình 7 điểm: trung bình chung là $\frac{90 + 210}{40} = 7.5$, **không phải** 8. Chỉ khi hai nhóm có **cùng số lượng** thì mới được cộng hai trung bình rồi chia đôi.

Tip — Ba con số trên một trục

Gặp bài trộn hai loại (giá, nồng độ, điểm, tuổi, vận tốc trên cùng thời gian...), vẽ ba điểm $p < r < q$ trên trục số, ghi hai khoảng cách, rồi **đảo chéo**: lượng loại p ứng với khoảng cách $q - r$. Nhanh hơn nhiều so với lập phương trình.

K 2.5 Scale Factors: Maps, Similar Figures and Area Ratios

Hệ số tỉ lệ: bản đồ, hình đồng dạng và tỉ số diện tích

Theorem — Scaling lengths, areas and volumes (phóng to – thu nhỏ)

If every length of a figure is multiplied by k , then every area is multiplied by k^2 and every volume by k^3 . A map with scale $1 : n$ multiplies real lengths by $\frac{1}{n}$, so it multiplies real areas by $\frac{1}{n^2}$.

Một hình vuông cạnh a phóng k lần thành cạnh ka , diện tích $(ka)^2 = k^2a^2$; hình lập phương thành $(ka)^3 = k^3a^3$. Mọi hình phẳng đều xấp xỉ được bằng các ô vuông nhỏ (mọi khối bằng các khối lập phương nhỏ), nên quy tắc đúng cho mọi hình.

Example 2.11

Từ bản đồ này sang bản đồ kia

On a map with scale $1 : 40\,000$, a lake has an area of 3 cm^2 . What is the area of the same lake, in cm^2 , on a map with scale $1 : 100\,000$?

(A) 0.48 (B) 1.2 (C) 1.92 (D) 7.5 (E) 18.75

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (A) 0.48

Đi từ bản đồ thứ nhất sang bản đồ thứ hai, mọi độ dài nhân với $\frac{40\,000}{100\,000} = \frac{2}{5}$, nên diện tích nhân với $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

Diện tích mới $= 3 \cdot \frac{4}{25} = 0.48 \text{ cm}^2$. Đáp án (A).

Bấy: nhân 3 với $\frac{2}{5}$ (quên bình phương) ra 1.2; lật ngược tỉ số ra 7.5 hoặc 18.75 — bản đồ tỉ lệ **nhỏ hơn** (1 : 100 000) vẽ hồ **nhỏ hơn**.

Nhân tiện: diện tích thật là $3 \cdot 400^2 \text{ m}^2 = 480\,000 \text{ m}^2 = 48 \text{ ha}$ (vì 1 cm trên bản đồ thứ nhất là 400 m).

Insight · Độ dài theo k , diện tích theo k^2 , thể tích theo k^3 . Kiểm tra chiều: tỉ lệ bản đồ 1 : n với n lớn hơn thì hình vẽ nhỏ hơn.

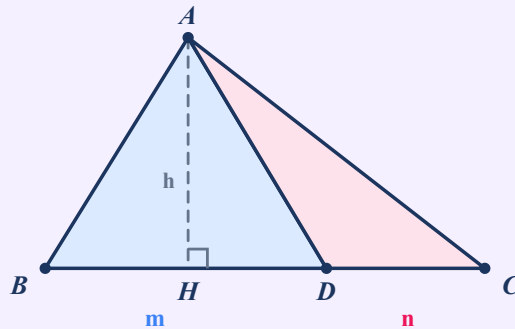
Theorem — Triangles with the same height (cùng chiều cao)

If D lies on side BC of triangle ABC , then

$$\frac{[ABD]}{[ADC]} = \frac{BD}{DC}.$$

More generally, triangles with equal heights have areas in the ratio of their bases. ($[XYZ]$ denotes the area of triangle XYZ .)

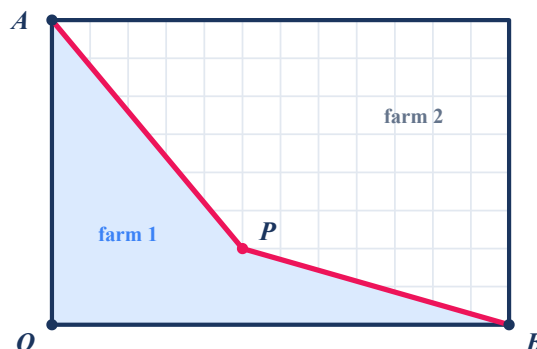
Hai tam giác ABD và ADC có chung đường cao $AH = h$ hạ từ A , nên $[ABD] = \frac{1}{2}mh$ và $[ADC] = \frac{1}{2}nh$. Định lý nhỏ này biến **tỉ số độ dài** thành **tỉ số diện tích** và ngược lại — công cụ số một cho các bài “chia tam giác”.



Example 2.12

Nắn thẳng hàng rào: đường song song giữ nguyên diện tích

A rectangular field with corners $O = (0, 0)$, $(12, 0)$, $(12, 8)$, and $(0, 8)$ is drawn on a grid of unit squares. Two farms are separated by a bent fence from $A = (0, 8)$ to $P = (5, 2)$ to $B = (12, 0)$, as shown. The farmers replace it by one straight fence from A to a point Q on the bottom side, so that each farm keeps exactly the same area. What is the distance OQ ?



(A) 6

(B) $\frac{20}{3}$

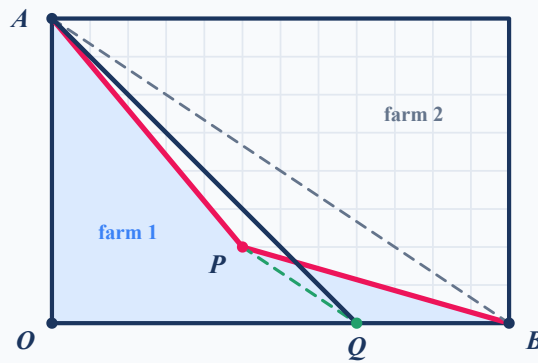
(C) 7

(D) 8

(E) 9

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 8

Ý tưởng: kẻ qua P đường thẳng song song với AB , cắt cạnh dưới tại Q . Hai tam giác ABP và ABQ có chung đáy AB và cùng chiều cao (vì $PQ \parallel AB$), nên có diện tích bằng nhau. Thay đường gấp khúc $A-P-B$ bằng đoạn AQ thì phần đất mỗi bên được bù trừ đúng bằng nhau.



AB đi xuống 8 ô khi sang phải 12 ô, tức cứ sang phải 3 thì xuống 2. Từ $P = (5, 2)$ đi theo hướng đó: sang phải 3, xuống 2 là tới $(8, 0)$. Vậy $OQ = 8$. Đáp án (D).

Kiểm tra bằng diện tích: nông trại 1 lúc đầu là tứ giác $OAPB$, bằng tam giác OAP ($\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 20$) cộng tam giác OPB ($\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 12$), tổng 32; tam giác OAQ có diện tích $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot OQ = 32$ khi $OQ = 8$ ✓. Bấy: nối thẳng A với B ($OQ = 12$) hay đi qua chân đường thẳng AP kéo dài ($OQ = \frac{20}{3}$) đều làm lệch diện tích.

Insight • Hai tam giác chung đáy và có đỉnh nằm trên một đường song song với đáy thì có diện tích bằng nhau — dời đỉnh dọc đường song song không đổi diện tích.

Common Trap — Độ dài gấp đôi, diện tích gấp bốn

- Hình đồng dạng với tỉ số độ dài k có tỉ số diện tích k^2 : một tấm ảnh phóng to 3 lần (cạnh) tốn giấy gấp 9 lần.
- Ngược lại, biết tỉ số diện tích 16 : 25 thì tỉ số độ dài là 4 : 5, và tỉ số thể tích là 64 : 125.
- Hai tam giác chỉ “có tỉ số diện tích bằng tỉ số đáy” khi chúng **cùng chiều cao** — kiểm tra đỉnh chung và đáy cùng nằm trên một đường thẳng.

Tip — Tìm cặp tam giác chung đỉnh

Trong một hình có nhiều đoạn chia theo tỉ số, hãy tìm các cặp tam giác có **chung một đỉnh** và **đáy nằm trên cùng một đường thẳng**; viết diện tích theo các “phần”, rồi cộng trừ. Gán diện tích cả hình bằng một số tiện lợi (như BCNN của các mẫu) để tránh phân số.

E Worked Examples — Competition Level

Ví dụ mẫu mức thi đấu

Hai ví dụ cuối ở mức câu 20–25 của AMC 8. Hãy thử tự giải ít nhất 5 phút trước khi đọc lời giải.

Example 2.13

Một xe máy, ba người: ai cũng đi bộ một đoạn

Three friends must travel 40 km. They have one motorbike, which carries at most two people (the driver and one passenger) and travels at 40 km/h. Only An can drive. Each friend walks at 8 km/h. The motorbike can turn around instantly and can drop off or pick up a friend anywhere on the road. All three start together. What is the least number of minutes after which all three friends can be at the destination?

- (A) 100 (B) 110 (C) 120 (D) 140 (E) 180

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (C) 120

Kế hoạch: An chở Bình đi x km, thả Bình đi bộ tiếp; An quay lại đón Chi (đang đi bộ) rồi chở Chi đến đích. Tốt nhất là mọi người đến cùng lúc — nếu một người đến sớm, có thể dời điểm thả để san bớt thời gian cho người đến muộn.

Bình: $\frac{x}{40} + \frac{40-x}{8} = 5 - \frac{x}{10}$ giờ.

Chi: khi xe thả Bình (lúc $\frac{x}{40}$ giờ), Chi ở km $\frac{x}{5}$; khoảng cách $\frac{4x}{5}$ thu hẹp với vận tốc $40 + 8 = 48$ (ngược chiều), mất $\frac{x}{60}$ giờ; gặp nhau ở km $\frac{x}{5} + 8 \cdot \frac{x}{60} = \frac{x}{3}$, lúc $\frac{x}{40} + \frac{x}{60} = \frac{x}{24}$ giờ. Chở nốt $40 - \frac{x}{3}$ km: Chi tới đích lúc $\frac{x}{24} + 1 - \frac{x}{120} = 1 + \frac{x}{30}$ giờ.

Cho bằng nhau: $5 - \frac{x}{10} = 1 + \frac{x}{30} \Rightarrow \frac{4x}{30} = 4 \Rightarrow x = 30$. Thời gian $5 - 3 = 2$ giờ = 120 phút. Đáp án (C).

Nhận xét: Bình và Chi mỗi người đi bộ đúng 10 km và đi xe 30 km — đối xứng, như mong đợi. Bấy: chờ Bình thẳng tới đích rồi mới quay lại đón Chi ($x = 40$) thì Chi đến lúc $1 + \frac{40}{30} = \frac{7}{3}$ giờ = 140 phút; cho mỗi người đi bộ nửa đường mất $\frac{20}{8} + \frac{20}{40} = 3$ giờ = 180 phút.

Insight • Bài “chung phương tiện”: thời điểm tối ưu là khi **mọi người đến cùng lúc**; viết thời gian của từng người theo một biến (điểm thả) rồi cho bằng nhau.

Example 2.14

Một điểm chuyển nhóm, hai trung bình cùng tăng

The students of a class are split into two groups. The average score of group A is 84, and the average score of group B is 64. Lan, whose score is 74, moves from group A to group B . After the move, the average of group A is 1 point higher than before, and the average of group B is 0.5 point higher than before. How many students are in the class?

(A) 20 (B) 29 (C) 30 (D) 31 (E) 40

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (C) 30

Bỏ một điểm số ra khỏi nhóm. Nhóm A có n bạn, tổng $84n$. Bỏ Lan: $\frac{84n - 74}{n - 1} = 85$, tức $84n - 74 = 85n - 85$, nên $n = 11$.

Cách nhìn gọn: Lan thấp hơn trung bình nhóm A đúng 10 điểm; 10 điểm “thiếu” đó trước kia kéo trung bình của n bạn xuống, bỏ Lan thì $n - 1$ bạn còn lại chia nhau 10 điểm: $\frac{10}{n - 1} = 1$, nên $n - 1 = 10$.

Thêm một điểm số vào nhóm. Lan cao hơn trung bình nhóm B đúng 10 điểm; thêm Lan vào nhóm m bạn thì $m + 1$ bạn chia nhau 10 điểm: $\frac{10}{m + 1} = 0.5$, nên $m + 1 = 20$, $m = 19$.

Cả lớp có $11 + 19 = 30$ học sinh. Đáp án (C).

Bấy: tính $n - 1 = 10$ rồi quên cộng Lan lại vào nhóm A (ra $10 + 19 = 29$), hay ra 31 do đếm Lan hai lần ($11 + 20$).

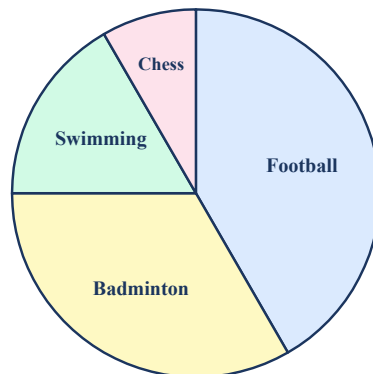
Insight • Thêm (hay bớt) một giá trị x vào nhóm có trung bình a : trung bình thay đổi $\frac{x - a}{\text{số phần tử sau khi thay đổi}}$ — chênh lệch so với trung bình được “chia đều” cho cả nhóm.

1 Exercises 1 • Foundation

Bài tập 1 • Nền tảng

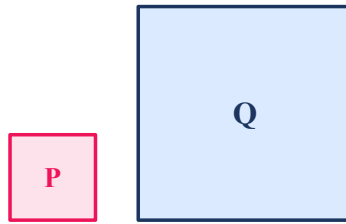


- 2.1** Each student in a class chose exactly one favorite sport, and the pie chart shows the results. The numbers of students who chose football, badminton, swimming, and chess are in the ratio 5 : 4 : 2 : 1. Exactly 18 students chose chess. How many more students chose football than badminton?

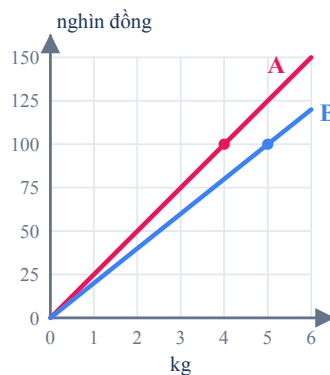


(A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 36 (E) 72

- 2.2** The side lengths of squares P and Q are in the ratio $2 : 5$. The area of Q is 84 cm^2 greater than the area of P . What is the area of P , in cm^2 ?



- (A) 16 (B) 24 (C) 28 (D) 36 (E) 56
- 2.3** A car travels at 90 km/h . A cheetah runs at 30 m/s . How many seconds does the cheetah need to run the distance that the car travels in 1 minute?
- (A) 30 (B) 45 (C) 50 (D) 60 (E) 75
- 2.4** Typist X types 3 pages every 4 minutes, and typist Y types 5 pages every 6 minutes. Working at the same time, how many minutes do they need to type a 76-page report?
- (A) 36 (B) 40 (C) 44 (D) 45 (E) 48
- 2.5** Lan takes 2 steps per second, and each of her steps is 0.6 m long. Minh takes 3 steps every 2 seconds, and each of his steps is 0.75 m long. They start a 540-meter walk at the same time. How many seconds after the first one finishes does the other finish?
- (A) 15 (B) 20 (C) 24 (D) 30 (E) 36
- 2.6** Car A uses 6 liters of fuel per 100 km . Car B travels 15 km on each liter of fuel. On a 600-km trip, how many more liters of fuel does one of the cars use than the other?
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 9
- 2.7** A book is printed with 30 lines on each page and has 240 pages. It is reprinted with 36 lines on each page, and each new line holds 25% more words than each old line. How many pages does the new edition have?
- (A) 144 (B) 160 (C) 180 (D) 200 (E) 225
- 2.8** A bus drives at 60 km/h whenever it is moving. Because of its stops, its average speed over a long route is only 48 km/h . On average, for how many minutes of each hour is the bus stopped?
- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 20
- 2.9** On a map with scale $1 : 250\,000$, two towns are 6.4 cm apart. Lan drives from one town to the other along a straight road at 40 km/h . How many minutes does the trip take?
- (A) 6 (B) 12 (C) 16 (D) 20 (E) 24
- 2.10** The graph shows the price of rice A and of rice B as a function of the number of kilograms bought. Each price is proportional to the mass. How many thousand đồng more do 15 kg of rice A cost than 15 kg of rice B ?



- (A) 75 (B) 80 (C) 90 (D) 100 (E) 125

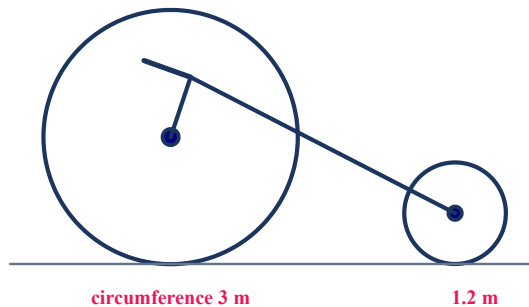
- 2.11** ♦♦ A farm has enough hay to feed 12 horses for 30 days. After 6 days, 4 of the horses are sold. Every horse eats the same amount each day. For how many more days does the remaining hay last?
- (A) 24 (B) 27 (C) 30 (D) 36 (E) 45
- 2.12** ♦♦ Mai drives for 2 hours at 50 km/h and then for 3 more hours at a constant speed. Her average speed for the whole 5 hours is 62 km/h. What was her speed, in km/h, during the last 3 hours?
- (A) 64 (B) 66 (C) 68 (D) 70 (E) 74

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi

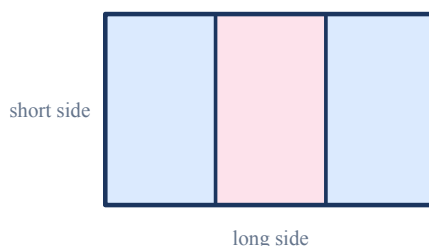


- 2.13** ♦♦ Two shelves hold only books. The ratio of the number of books on the top shelf to the number on the bottom shelf is 7 : 4. After some books are moved from the top shelf to the bottom shelf, the ratio becomes 3 : 2. What is the least possible total number of books?
- (A) 15 (B) 22 (C) 33 (D) 44 (E) 55
- 2.14** ♦♦ Lan cycles from home to her grandmother's house and back along the same road. Her average speed for the whole round trip is 24 km/h, and her speed on the way back is 30 km/h. What was her speed on the way there, in km/h? (Each way she rides at a constant speed.)
- (A) 18 (B) 20 (C) 21 (D) 22 (E) 27
- 2.15** ♦♦ A bag holds only red and blue marbles. If one red marble is removed, then exactly $\frac{1}{7}$ of the remaining marbles are red. If instead one blue marble is removed, then exactly $\frac{1}{6}$ of the remaining marbles are red. How many marbles are in the bag?
- (A) 36 (B) 42 (C) 43 (D) 48 (E) 49
- 2.16** ♦♦ On an old-style bicycle, the circumference of the front wheel is 3 m and the circumference of the back wheel is 1.2 m, as shown. On a ride, the back wheel turns 300 more times than the front wheel. How many meters long is the ride?

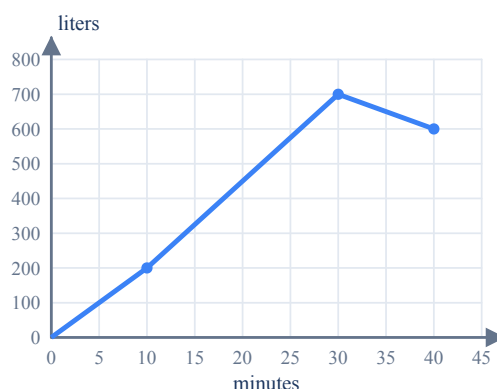


- (A) 300 (B) 360 (C) 450 (D) 600 (E) 750
- 2.17** ♦♦ Grandfather divides a sum of money among his three grandchildren in the ratio of their ages, 6 : 8 : 10. One year later he divides the same sum in the ratio of their new ages, 7 : 9 : 11. The youngest grandchild receives 15 thousand đồng more the second time. How many thousand đồng does grandfather divide each time?
- (A) 1080 (B) 1215 (C) 1296 (D) 1440 (E) 1620
- 2.18** ♦♦ Two bottles have exactly the same shape, but different sizes. The surface area of the smaller bottle is $\frac{9}{16}$ of the surface area of the larger bottle. The smaller bottle holds 54 mL. How many milliliters does the larger bottle hold?
- (A) 72 (B) 96 (C) 108 (D) 120 (E) 128

- 2.19** A rectangle is cut into three congruent rectangular strips by two lines parallel to its short sides, as shown. Each strip is similar to the original rectangle. What is the ratio of the long side to the short side of the original rectangle?

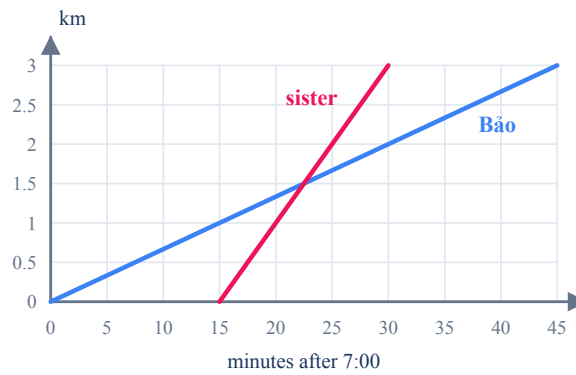


- (A) $\sqrt{2}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 (E) 3
- 2.20** Lan usually rides her bike to school at a constant speed. If she rode 25% faster, she would arrive 12 minutes earlier than usual. If instead she rode 25% slower, how many minutes later than usual would she arrive?
- (A) 12 (B) 15 (C) 16 (D) 20 (E) 25
- 2.21** A rectangular photo is enlarged to a larger photo of the same shape, and its area increases by 125%. By what percent does its perimeter increase?
- (A) 25% (B) 50% (C) 62.5% (D) 125% (E) 150%
- 2.22** Jar A contains juice and water in the ratio 1 : 2, and jar B contains juice and water in the ratio 3 : 1. Using a cup, Lan pours some full cups from jar A and some full cups from jar B (at least one from each) into an empty pitcher, so that the pitcher contains equal amounts of juice and water. What is the least number of cups she can pour?
- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 10
- 2.23** A tank starts empty. Tap P is opened at time 0. Ten minutes later tap Q is also opened, and at minute 30 a drain at the bottom is opened too. The graph shows the amount of water in the tank during the first 40 minutes; each tap and the drain work at its own constant rate. At minute 40, tap P is closed, while tap Q and the drain stay open. How many more minutes does it take for the tank to become empty?



- (A) 20 (B) 24 (C) 28 (D) 30 (E) 35
- 2.24** A shop sells a nut mix made of cashews and peanuts in the ratio 2 : 3 by mass. Cashews cost 300 thousand đồng per kilogram and peanuts cost 100 thousand đồng per kilogram, and the price of the mix is the total cost of its nuts. The price of cashews rises by 20% and the price of peanuts falls by 10%. By what percent does the price of the mix rise?
- (A) 2% (B) 5% (C) 8% (D) 10% (E) 12%
- 2.25** A crown with mass 1500 g is made of gold and silver only. Assume that 1 cm³ of gold has mass 20 g and 1 cm³ of silver has mass 10 g. The volume of the crown is 100 cm³. How many grams of gold does the crown contain?
- (A) 750 (B) 1000 (C) 1125 (D) 1200 (E) 1250

- 2.26** Bảo walks from home to school, 3 km away, and his sister rides a bicycle along the same road from home to school.
♦♦ The graph shows their distances from home. How many minutes had his sister been riding when she passed Bảo?



- (A) 5 (B) 6 (C) 7.5 (D) 15 (E) 22.5

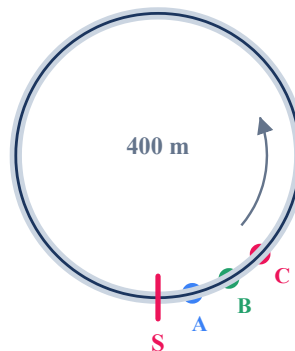
3

Exercises 3 • Challenge



Bài tập 3 • Thử thách

- 2.27** Runners A , B , and C start together from the line S of a 400-meter circular track and run around it in the same direction, at constant speeds of 170, 210, and 290 meters per minute, respectively. After how many minutes are all three runners at the same point of the track for the first time?
♦♦♦



- (A) 5 (B) 10 (C) 20 (D) 40 (E) 80

- 2.28** Lan and Minh must type a long report. If Lan types the first half by herself and then Minh types the second half by himself, the job takes 12.5 hours. If they type at the same time, sharing the work, the job takes 6 hours. How many hours would the faster typist need to type the whole report alone?
♦♦♦

- (A) 6 (B) 6.25 (C) 10 (D) 12.5 (E) 15

- 2.29** Working alone, An, Bình, and Chi could paint a house in 6, 9, and 18 days, respectively. The three start painting together. At the end of some day Bình leaves, and An and Chi finish the house together. The total payment of 3600 thousand đồng is divided in proportion to the amount of work each person did, and Bình receives 400 thousand đồng. How many days does the painting take?
♦♦♦

- (A) 3 (B) $\frac{7}{2}$ (C) 4 (D) $\frac{9}{2}$ (E) 5

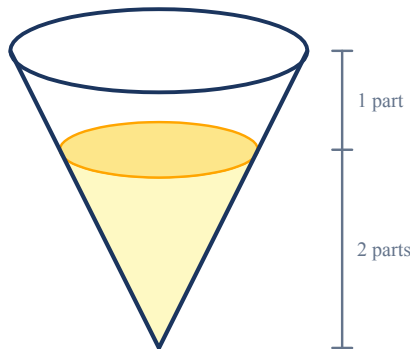
- 2.30** Every student in a class answered a question with “yes” or “no”. Among the boys, the ratio of “yes” to “no” answers was 3 : 2; among the girls it was 1 : 3; and for the whole class it was 5 : 7. What is the least possible number of students in the class?
♦♦♦

- (A) 21 (B) 42 (C) 63 (D) 84 (E) 105

- 2.31** In a club, the ratio of girls to boys was $3 : 2$. Then 18 new members joined — at least one girl and at least one boy — and the ratio of girls to boys became $5 : 4$. What is the greatest possible number of members of the club after the new members joined?

Integer answer · Đáp số nguyên

- 2.32** An ice-cream cone is a cone with its tip pointing down, as shown. Milk is poured in until it reaches $\frac{2}{3}$ of the height of the cone, and then the cone holds 48 mL of milk. How many more milliliters of milk are needed to fill the cone to the top?



- (A) 24 (B) 60 (C) 108 (D) 114 (E) 162

- 2.33** Jug A holds 6 liters of lemonade that is 20% lemon juice, and jug B holds 4 liters of lemonade that is 50% lemon juice. Minh takes x liters out of each jug at the same time, then pours the liquid taken from A into B and the liquid taken from B into A . After stirring, the two jugs have the same percent of lemon juice. What is x ?

- (A) 2 (B) 2.4 (C) 2.5 (D) 3 (E) 4

- 2.34** Four friends share a taxi. The fare is a fixed amount per kilometer, and the cost of each kilometer is split equally among the friends who are in the taxi during that kilometer. An gets out first, then Bình, then Chi, and Dũng rides alone for the last 5 km, as shown. An pays 12, Bình pays 24, and Chi pays 54 thousand đồng. The fare is 6 thousand đồng per kilometer. How many thousand đồng does Dũng pay?

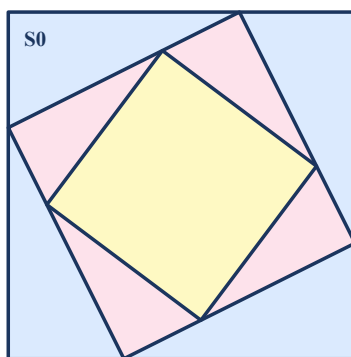


- (A) 54 (B) 60 (C) 72 (D) 78 (E) 84

- 2.35** Positive integers $a < b < c$ satisfy $a : b = b : c$ and $a + b + c = 133$. What is the sum of all possible values of b ?

Integer answer · Đáp số nguyên

- 2.36** Square S_0 has area 81. For each $n \geq 0$, square S_{n+1} has its vertices on the sides of S_n , one on each side, each dividing its side in the ratio 1 : 2, as shown. What is the area of S_4 ?



- (A) $\frac{625}{81}$ (B) 9 (C) $\frac{125}{9}$ (D) 16 (E) $\frac{256}{9}$

Chapter 3

8020 AMC 8 Mastery

Algebra — Expressions, Equations & Word Problems

Đại số — biểu thức, phương trình & toán lời văn

Đại số là “ngôn ngữ” của gần một phần ba đề AMC 8: rút gọn biểu thức, giải phương trình bậc nhất, và nhất là dịch bài toán lời văn (tuổi, tiền, điểm thi, số liên tiếp) thành phương trình. Chương này dạy cách chọn ẩn khéo, dùng hằng đẳng thức, kết hợp các phương trình để lấy thẳng đại lượng để hỏi, đọc quan hệ tuyến tính trên đồ thị và tìm nghiệm nguyên. Học sinh thường mất điểm vì sai dấu khi phá ngoặc, dịch ngược “5 less than x ”, quên dấu mũ khi đếm, hoặc tìm đúng x rồi trả lời nhầm đại lượng.

✓ Rút gọn và tính giá trị biểu thức; dùng hằng đẳng thức $(a \pm b)^2$, $a^2 - b^2$ và tính theo “khối” mà không cần từng ẩn.

✓ Dịch bài toán lời văn thành phương trình: chọn ẩn ở giữa, dùng hiệu tuổi không đổi, phương pháp giả sử.

✓ Đọc quan hệ tuyến tính từ bảng và đồ thị, giải bất phương trình, đếm nghiệm nguyên của $ax + by = c$.

✓ Giải phương trình bậc nhất (kể cả có phân số, có tham số), nhận biết vô nghiệm và vô số nghiệm.

✓ Giải hệ hai ẩn bằng thế và cộng đại số; cộng/nhân tất cả phương trình để lấy thẳng đại lượng cần tìm.

variable · biến, ẩn

expression · biểu thức

like terms · hạng tử đồng dạng

to evaluate · tính giá trị

identity · hằng đẳng thức / đẳng thức đúng với mọi giá trị

equation / solution · phương trình / nghiệm

consecutive integers · các số nguyên liên tiếp

system of equations · hệ phương trình

substitution / elimination · phương pháp thế / cộng đại số

linear relationship · quan hệ tuyến tính (bậc nhất)

slope, rate of change · hệ số góc, tốc độ thay đổi

inequality · bất phương trình / bất đẳng thức

at least / at most · ít nhất / nhiều nhất

absolute value · giá trị tuyệt đối

K 3.1 Algebraic Expressions and Identities

Biểu thức đại số và hằng đẳng thức

Đại số là cách viết gọn một phép tính **chưa biết số**. Ở AMC 8, biểu thức đại số xuất hiện theo hai kiểu: để cho sẵn biểu thức và bắt rút gọn/tính giá trị, hoặc để cho một tình huống mà bạn phải tự viết biểu thức. Kỹ năng then chốt của cả hai là: **rút gọn trước, thay số sau**, và nhận ra khi để cho một **khối** (như $3a - 2b$) thì không cần tìm riêng từng chữ.

Definition — Variable, expression, like terms (biến, biểu thức, hạng tử đồng dạng)

A **variable** is a letter standing for a number. An **expression** combines numbers and variables with operations, e.g. $3(2a - b) + a$. **Like terms** have the same variable part ($5ab$ and $-2ab$; but not a^2 and a) and can be combined: $5ab - 2ab = 3ab$. To **evaluate** an expression, substitute values for the variables.

Phá ngoặc bằng tính chất phân phối, rồi gộp các hạng tử đồng dạng: $2(3a - b) - 3(a - 2b) = 6a - 2b - 3a + 6b = 3a + 4b$. Chú ý dấu trừ trước ngoặc đổi dấu **mọi** hạng tử bên trong.

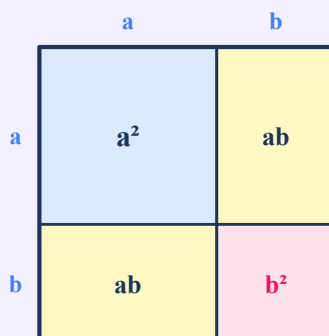
Theorem – Three identities (ba hằng đẳng thức đáng nhớ)

For all numbers a, b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Consequences: $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ and $(a - b)^2 = (a + b)^2 - 4ab$.

Hình vuông cạnh $a + b$ được chia thành bốn mảnh: a^2 , b^2 và **hai** hình chữ nhật ab — đó là lý do có số 2 trong $2ab$. Hai hệ quả có được bằng cách trừ hai đẳng thức đầu cho nhau.

**Key Idea — Để cho một khối — dùng nguyên khối**

Nếu để cho $3a - 2b = 7$ mà hỏi $6a - 4b + 5$, đừng cố tìm a và b (có vô số cặp!). Hãy viết biểu thức cần tính theo khối đã cho: $6a - 4b + 5 = 2(3a - 2b) + 5$. Tương tự, biết $a + b$ và ab là biết $a^2 + b^2$, $(a - b)^2$, ... qua hằng đẳng thức.

Example 3.1

Viết biểu thức theo khối đã cho

If $3a - 2b = 7$, what is the value of $6a - 4b + 5$?

- (A) 12 (B) 14 (C) 19 (D) 21 (E) 26

SOLUTION • LỜI GIẢI · Answer: (C) 19

Không thể tìm riêng a, b , nhưng không cần: $6a - 4b = 2(3a - 2b) = 2 \cdot 7 = 14$.

Vậy $6a - 4b + 5 = 14 + 5 = 19$. Đáp án (C).

Bẫy: quên nhân đôi thì ra 12; quên cộng 5 thì ra 14.

Insight · Một phương trình hai ẩn không cho từng ẩn, nhưng cho **một tổ hợp**; hãy viết điều cần tính thành bội của tổ hợp đó.

Example 3.2

Hằng đẳng thức nổi tổng, tích và hiệu

Numbers a and b satisfy $a + b = 5$ and $a^2 + b^2 = 17$. What is the value of $(a - b)^2$?

- (A) 1 (B) 4 (C) 8 (D) 9 (E) 17

SOLUTION • LỜI GIẢI · Answer: (D) 9

Từ $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$: $25 = 17 + 2ab$, nên $2ab = 8$.

Khi đó $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = 17 - 8 = 9$. Đáp án (D).

Kiểm tra: $a = 4, b = 1$ thỏa mãn, và $(4 - 1)^2 = 9$. Bẫy: quên chia 2 (lấy $ab = 8$) rồi tính $17 - 2 \cdot 8 = 1$; hoặc tính $(a - b)^2$ như $a^2 + b^2 = 17$.

Insight · Ba đại lượng $a + b, ab, a^2 + b^2$ (và $(a - b)^2$): biết hai cái là tính được cái còn lại, không cần giải ra a, b .

Common Trap — Những lỗi biến đổi kinh điển

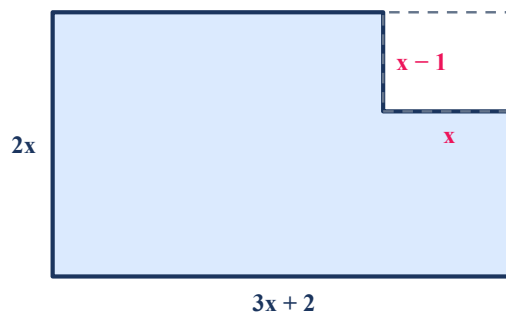
- $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$ — thiếu hẳn $2ab$ (xem hình vuông ở trên).
- $-(x - 3) = -x + 3$, không phải $-x - 3$: dấu trừ trước ngoặc đổi dấu **tất cả**.
- $\frac{2x + 6}{2} = x + 3$, nhưng $\frac{x + 6}{2} = \frac{x}{2} + 3$, không phải $x + 3$: chia thì chia **mọi** hạng tử của tử số.
- Gộp $3x + 2x^2$ thành $5x^3$ — hai hạng tử không đồng dạng thì không gộp.

Tip — Câu “Which expression equals ...” — thử bằng số nhỏ

Khi các lựa chọn là biểu thức, hãy thay một giá trị dễ (như $x = 2$, tránh 0 và 1 vì quá nhiều biểu thức trùng giá trị ở đó) vào để và vào từng lựa chọn. Lựa chọn nào cho cùng số là ứng viên; nếu còn hai ứng viên, thử thêm $x = 3$.

Example 3.3**Khoét góc không đổi chu vi**

The L-shaped figure is a rectangle with sides $3x + 2$ and $2x$ from which a corner rectangle with sides x and $x - 1$ has been removed, as shown. Which expression gives the perimeter of the L-shaped figure?



- (A) $6x + 6$ (B) $10x + 4$ (C) $10x + 6$ (D) $12x + 2$ (E) $14x + 2$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) $10x + 4$

Đẩy hai đoạn của chỗ khoét ra ngoài: đoạn ngang dài x trượt lên trùng với phần thiếu của cạnh trên, đoạn đứng dài $x - 1$ trượt sang phải trùng với phần thiếu của cạnh phải. Chu vi hình chữ L bằng đúng chu vi hình chữ nhật bao ngoài.

Chu vi = $2((3x + 2) + 2x) = 10x + 4$. Đáp án (B).

Kiểm tra bằng cách cộng 6 cạnh: $(3x + 2) + 2x + (2x + 2) + (x - 1) + x + (2x - (x - 1)) = 10x + 4$. Bấy: trừ đi phần khoét $2x + 2(x - 1)$ thì ra $6x + 6$; cộng thêm $2x + 2(x - 1)$ (tưởng chỗ khoét làm chu vi dài ra) thì ra $14x + 2$.

Insight · Khoét một **góc** hình chữ nhật không làm đổi chu vi. Với đáp án là biểu thức, thử $x = 4$ để kiểm tra: hình là 14×8 , chu vi $44 = 10 \cdot 4 + 4$.

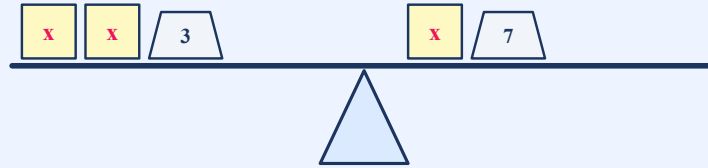
K 3.2 Linear Equations in One Variable

Phương trình bậc nhất một ẩn

Definition – Equation, solution, equivalent equations (phương trình, nghiệm, phương trình tương đương)

An **equation** states that two expressions are equal. A **solution** is a value of the variable that makes it true. Two equations are **equivalent** if they have the same solutions. Adding the same number to both sides, or multiplying both sides by the same **nonzero** number, gives an equivalent equation.

Hãy nghĩ tới một chiếc cân thăng bằng: bỏ đi cùng một thứ ở hai đĩa, cân vẫn thăng bằng. Trong hình, bỏ một hộp x và 3 đơn vị ở mỗi bên, còn lại $x = 4$.



Theorem – Solving $ax + b = cx + d$ (giải phương trình bậc nhất)

Collect the variable on one side: $(a - c)x = d - b$.

- If $a \neq c$: exactly one solution $x = \frac{d - b}{a - c}$.
- If $a = c$ and $b = d$: every number is a solution (an **identity**).
- If $a = c$ and $b \neq d$: no solution.

Ba trường hợp này là lý do để hay hỏi “với giá trị nào của tham số thì phương trình có vô số nghiệm / vô nghiệm”: hãy đưa về dạng $(\dots)x = (\dots)$ rồi cho hệ số của x bằng 0.

Tip – Phương trình có phân số: nhân với mẫu chung ngay từ đầu

Nhân cả hai vế với mẫu số chung nhỏ nhất để xoá hết phân số, **đặt tử số vào ngoặc** trước khi nhân: $\frac{x - 2}{4} \cdot 12 = 3(x - 2)$. Với câu trắc nghiệm, còn một cách nữa: thay thử các đáp án (backsolving) — bắt đầu từ đáp án ở giữa để biết nên đi lên hay đi xuống.

Example 3.4

Xoá mẫu, giữ ngoặc

What value of x satisfies

$$\frac{x + 1}{3} - \frac{x - 2}{4} = 2?$$

- (A) 14 (B) 18 (C) 22 (D) 24 (E) 26

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (A) 14

Nhân hai vế với 12: $4(x + 1) - 3(x - 2) = 24$.

Phá ngoặc: $4x + 4 - 3x + 6 = 24$, tức $x + 10 = 24$, nên $x = 14$. Đáp án (A).

Kiểm tra: $\frac{15}{3} - \frac{12}{4} = 5 - 3 = 2$. ✓ Bẫy: viết $-3x - 6$ (quên đổi dấu số hạng thứ hai trong ngoặc) thì ra $x = 26$.

Insight • Phân số trong phương trình → nhân mẫu chung; dấu trừ đứng trước phân số là dấu trừ trước **cả tử số**.

Example 3.5

Đồng nhất hệ số

For which value of a is the equation

$$4(x + a) - 6 = 2(2x - 3a) + 2a + 6$$

true for every number x ?

(A) $-\frac{3}{2}$

(B) 0

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{3}{2}$

(E) 3

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) $\frac{3}{2}$

Khai triển: vế trái $4x + 4a - 6$, vế phải $4x - 6a + 2a + 6 = 4x - 4a + 6$.

Hệ số của x hai vế đã bằng nhau ($4 = 4$). Phương trình đúng với mọi x khi và chỉ khi phần hằng số cũng bằng nhau: $4a - 6 = -4a + 6$, tức $8a = 12$, $a = \frac{3}{2}$. Đáp án (D).

Với a khác $\frac{3}{2}$, phương trình trở thành " $0 \cdot x = \text{một số khác } 0$ " và vô nghiệm.

Insight · "Đúng với mọi x " nghĩa là hai vế là **cùng một biểu thức**: so sánh hệ số của x và hằng số.

Common Trap — Đừng chia cho thứ có thể bằng 0

Từ $x(x - 3) = 5x$ mà chia hai vế cho x được $x - 3 = 5$, ta **đánh mất** nghiệm $x = 0$. Hãy chuyển vế rồi đặt nhân tử: $x(x - 3) - 5x = x(x - 8) = 0$, nên $x = 0$ hoặc $x = 8$. Tương tự, nhân hai vế với một biểu thức chứa ẩn có thể **sinh thêm** nghiệm lạ — luôn thử lại.

K 3.3 Translating Word Problems into Equations

Chuyển bài toán lời văn thành phương trình

Phần lớn câu "đại số" của AMC 8 thật ra là toán lời văn: tuổi, tiền, số nguyên liên tiếp, điểm thi. Phương trình thường dễ giải; cái khó là **dịch đúng** và **chọn ẩn khéo** để phương trình gọn.

Key Idea — Bốn bước giải bài toán lời văn

(1) **Đặt ẩn** cho đại lượng làm phương trình gọn nhất — không nhất thiết là đại lượng đề hỏi. (2) **Dịch** từng câu thành biểu thức hoặc phương trình. (3) **Giải**. (4) **Trả lời đúng câu hỏi** và kiểm tra ý nghĩa (số người phải nguyên dương, tuổi không âm, ...). Rất nhiều bạn mất điểm ở bước 4: tìm ra x rồi khoanh luôn x trong khi đề hỏi $2x + 1$.

English	Biểu thức	Ghi chú
5 less than x	$x - 5$	thứ tự bị đảo so với chữ
x less than 5	$5 - x$	
twice the sum of x and 3	$2(x + 3)$	khác $2x + 3$
x is 3 more than y	$x = y + 3$	"is" là dấu =
x is 3 times as old as y	$x = 3y$	
the product of two consecutive integers	$n(n + 1)$	
p percent of x	$\frac{p}{100}x$	xem chương 1

Tip — Số liên tiếp: đặt ẩn là số ở giữa

Năm số nguyên liên tiếp nên viết là $n - 2, n - 1, n, n + 1, n + 2$: tổng là $5n$ ngay. Bốn số lẻ liên tiếp: $n - 3, n - 1, n + 1, n + 3$ (tổng $4n$, với n chẵn). Đặt ẩn ở giữa làm các phần $\pm$ triệt tiêu.

Example 3.6

Đặt ẩn ở giữa

The sum of seven consecutive integers is equal to 6 times the largest of them. What is the smallest of the seven integers?

- (A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 21 (E) 24

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 15

Gọi số ở giữa là n : bảy số là $n - 3, \dots, n + 3$, tổng $7n$; số lớn nhất là $n + 3$.

$7n = 6(n + 3) \iff n = 18$. Bảy số là 15, 16, $\dots$, 21; số nhỏ nhất là 15. Đáp án (B).

Kiểm tra: $15 + \dots + 21 = 126 = 6 \cdot 21$. ✓ Bảy: trả lời $n = 18$ (số ở giữa), hoặc 21 (số lớn nhất).

Insight · Dãy cách đều $\rightarrow$ đặt ẩn ở **chính giữa**; tổng bằng (số số hạng) $\times$ (số ở giữa). Xong rồi đọc lại xem để hỏi số nào.

Theorem — The age gap never changes (hiệu số tuổi không đổi)

If A is d years older than B now, then A is d years older than B at **every** time. After t years both ages increase by t ; sums of k people's ages increase by kt .

Bài tuổi thường cho tỉ số tuổi ở hai thời điểm. Tỉ số thay đổi, **hiệu** thì không — vẽ sơ đồ đoạn thẳng với hiệu là một số phần cố định là thấy ngay phương trình.

Example 3.7

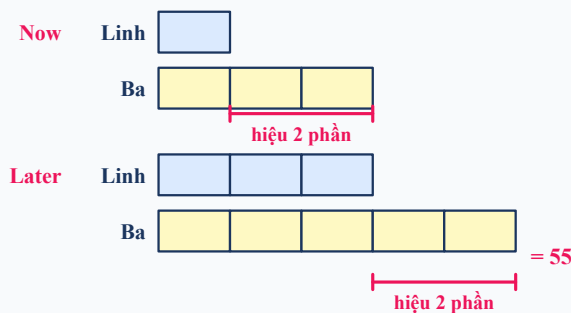
Hiệu tuổi là cầu nối

Uncle Ba is now 3 times as old as his niece Linh. When Linh is as old as Uncle Ba is now, Uncle Ba will be 55 years old. What is the sum of their ages now?

- (A) 33 (B) 40 (C) 44 (D) 48 (E) 55

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 44

Gọi tuổi Linh hiện nay là L (1 phần), chú Ba $3L$ (3 phần). Hiệu tuổi là $2L$ — **luôn luôn** là 2 phần.



Khi Linh đạt $3L$ tuổi thì chú Ba $3L + 2L = 5L$ tuổi. Vậy $5L = 55$, $L = 11$; chú Ba 33 tuổi.

Tổng tuổi hiện nay $11 + 33 = 44$. Đáp án (C).

Bảy: trả lời 33 (tuổi chú Ba) hoặc 55 (tuổi chú Ba sau này).

Insight · Bài tuổi: viết mọi tuổi theo **hiệu tuổi** (không đổi). Sơ đồ đoạn thẳng nhiều khi cho đáp số mà không cần phương trình.

Common Trap — Đơn vị và “trả lời đúng câu hỏi”

- Đổi hết về một đơn vị trước khi lập phương trình (nghìn đồng với đồng, phút với giờ).
- Nghiệm phải có nghĩa: số người, số vé là số nguyên không âm. Nếu ra $x = 7.5$ người, gần như chắc chắn đã dịch sai.
- Để hỏi “tổng tuổi”, “số lớn nhất”, “sau bao nhiêu năm” — gạch chân câu hỏi trước khi giải.

K

3.4 Systems of Equations and Clever Combinations

Hệ phương trình và cách kết hợp khéo

Theorem — Two methods for two unknowns (thế và cộng đại số)

Substitution: solve one equation for one variable and substitute into the other. **Elimination:** add or subtract multiples of the equations to cancel a variable. Example: $x + 2y = 8$, $3x - 2y = 4$; adding gives $4x = 12$, so $x = 3$, $y = \frac{5}{2}$.

Phép cộng đại số hợp lệ vì nếu $P = Q$ và $R = S$ thì $P + R = Q + S$. Chọn hệ số sao cho một ẩn biến mất.

Key Idea — Nhìn câu hỏi trước khi giải hệ

Để hỏi $x + y$ thì chưa chắc phải tìm x và y . Hãy thử **cộng tất cả** các phương trình (khi chúng “xoay vòng”, như $a + b$, $b + c$, $c + a$), hoặc cộng/trừ hai phương trình có hệ số đối xứng. Đại lượng đề hỏi thường hiện ra trực tiếp.

Example 3.8

Cộng tất cả rồi chia

At a café, one coffee and two cakes cost 55 thousand đồng, one cake and two teas cost 51 thousand đồng, and one tea and two coffees cost 68 thousand đồng. How many thousand đồng do one coffee, one cake, and one tea cost together?

- (A) 52 (B) 54 (C) 56 (D) 58 (E) 174

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 58

Gọi giá cà phê, bánh, trà là c, k, t : $c + 2k = 55$, $k + 2t = 51$, $t + 2c = 68$.

Cộng ba phương trình: mỗi món xuất hiện đúng $1 + 2 = 3$ lần, nên $3(c + k + t) = 55 + 51 + 68 = 174$ và $c + k + t = 58$.
Đáp án (D).

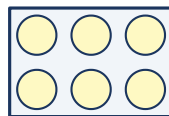
(Nếu cần từng giá: $c = 25$, $k = 15$, $t = 18$ — nhưng đề không hỏi.) Bấy: quên chia 3 thì ra 174.

Insight · Hệ “xoay vòng” (mỗi ẩn xuất hiện với tổng hệ số như nhau) → cộng tất cả phương trình rồi chia cho tổng hệ số.

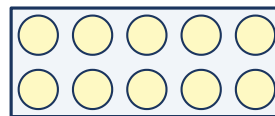
Example 3.9

Giả sử tất cả cùng một loại

A farm packs exactly 200 eggs into 26 cartons. Each carton holds either 6 eggs or 10 eggs, as shown, and every carton is full. How many cartons hold 6 eggs?



6 eggs



10 eggs

- (A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 14 (E) 15

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (E) 15

Cách 1 (phương trình). Gọi số hộp 10 quả là m , số hộp 6 quả là $26 - m$: $10m + 6(26 - m) = 200 \iff 4m = 44 \iff m = 11$. Số hộp 6 quả là $26 - 11 = 15$.

Cách 2 (giả sử). Nếu cả 26 hộp đều là hộp 6 quả thì chỉ chứa 156 quả, thiếu 44 quả. Mỗi lần đổi một hộp 6 thành hộp 10 thêm được 4 quả, nên cần đổi $44 \div 4 = 11$ hộp. Còn 15 hộp 6 quả. Đáp án (E).

Bấy: trả lời 11 (số hộp 10 quả).

Insight · Hai loại đối tượng, biết tổng số và tổng “giá trị” → giả sử tất cả cùng một loại; mỗi lần đổi loại thay đổi một lượng cố định.

Example 3.10

Hệ số đối xứng

If $2x + 5y = 31$ and $5x + 2y = 32$, what is the value of $x + y$?

(A) 1

(B) 7

(C) 9

(D) 10

(E) 63

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 9

Cộng hai phương trình: $7x + 7y = 63$, nên $x + y = 9$. Đáp án (C).

(Trừ hai phương trình còn cho $3x - 3y = 1$; giải ra $x = \frac{14}{3}$, $y = \frac{13}{3}$ — chẳng cần đến.)

Bấy: dừng ở $7x + 7y = 63$ mà khoanh 63.

Insight · Hai phương trình có hệ số “đối chố” cho nhau → cộng để có $x + y$, trừ để có $x - y$.

Common Trap — Hệ “trông như” đủ dữ kiện

Hai phương trình mà một cái là bội của cái kia (như $x + 2y = 5$ và $2x + 4y = 10$) thực chất chỉ là **một** phương trình — không xác định được x , y riêng. Nhưng đừng hoảng: để có thể chỉ hỏi $x + 2y$ hoặc $3x + 6y$, những thứ vẫn tính được.

Tip — Bài “gà-chó” trong phòng thi

Cách giả sử (cách 2 ở ví dụ hộp trứng) thường nhanh hơn lập hệ, và tự kiểm tra được: số lần “đổi loại” phải nguyên. Nếu chia không hết, hãy đọc lại đề.

K

3.5 Linear Relationships, Inequalities and Whole-Number Solutions

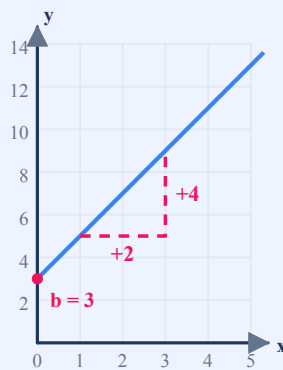
Quan hệ tuyến tính, bất phương trình và nghiệm nguyên

Definition — Linear relationship (quan hệ tuyến tính)

Quantities x and y are in a **linear relationship** if $y = mx + b$ for constants m, b . Here b is the **starting value** (y when $x = 0$) and m is the **rate of change** (slope): each time x increases by 1, y changes by m . The graph is a straight line;

from two points $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

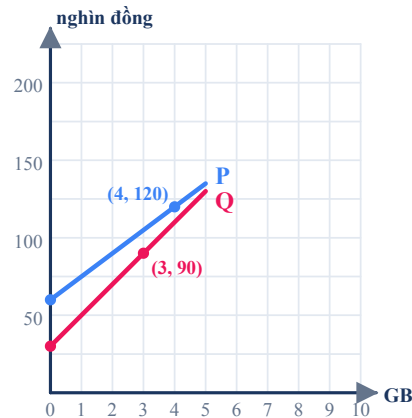
Bảng giá “phí cố định + đơn giá”, nước chảy đều, nến cháy đều, chồng cốc lồng nhau... đều là quan hệ tuyến tính. Trên hình: bắt đầu ở 3, mỗi bước sang phải 2 thì đi lên 4, nên $m = 2$.



Example 3.11

Hai gói cước gặp nhau

The graph shows the monthly cost, in thousands of đồng, of two data plans P and Q for up to 5 GB. Each cost is a fixed fee plus a constant price per GB, and the pattern continues for more GB. For how many GB do the two plans cost the same?



(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 6

(E) 8

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 6

Đọc đồ thị: P đi qua $(0, 60)$ và $(4, 120)$, đơn giá $\frac{120 - 60}{4} = 15$; vậy $P = 60 + 15g$. Q đi qua $(0, 30)$ và $(3, 90)$, đơn giá $\frac{90 - 30}{3} = 20$; vậy $Q = 30 + 20g$.

$60 + 15g = 30 + 20g \iff 5g = 30 \iff g = 6$. Đáp án (D).

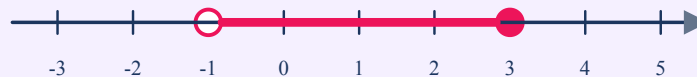
Cách nghĩ nhanh: lúc đầu Q rẻ hơn 30, mỗi GB Q đắt hơn 5, nên sau $30 \div 5 = 6$ GB hai gói bằng nhau.

Insight · So sánh hai quan hệ tuyến tính: **chênh lệch ban đầu** chia cho **chênh lệch tốc độ** là thời điểm gặp nhau.

Theorem — Linear inequalities (bất phương trình bậc nhất)

Inequalities are solved like equations, with one exception: multiplying or dividing both sides by a **negative** number **reverses** the inequality sign. E.g. $-2x < 6 \iff x > -3$.

Lý do: $2 < 5$ nhưng $-2 > -5$ — nhân với số âm làm đảo thứ tự trên trục số. Khi đếm số nguyên thỏa mãn, vẽ trục số và chú ý đầu mút: dấu $<$ là chấm rỗng (không lấy), dấu $\leq$ là chấm đặc (lấy).



Common Trap — Đếm số nguyên giữa hai đầu mút

Số nguyên n với $a \leq n \leq b$ có $b - a + 1$ số (đừng quên “+1”). Với $-1 < x \leq 3$ (hình trên) có 4 số nguyên: 0, 1, 2, 3. Câu “at least / at most” trong lời văn tương ứng với $\geq / \leq$; “more than / fewer than” là $> / <$.

Key Idea — Nghiệm nguyên của $ax + by = c$

Khi x, y là số đồ vật (nguyên, không âm), phương trình một ràng buộc $ax + by = c$ thường có **vài** nghiệm. Tìm một nghiệm, rồi các nghiệm khác có được bằng cách tăng x thêm $\frac{b}{d}$ và giảm y đi $\frac{a}{d}$ (với d là ƯCLN của a, b) — như đổi 3 chiếc ghế 4 chân lấy 4 chiếc ghế đầu 3 chân, tổng số chân không đổi.

Example 3.12

Đổi 3 ghế lấy 4 ghế đầu

A room contains only chairs with 4 legs and stools with 3 legs, at least one of each. Altogether there are 43 legs. How many different possibilities are there for the number of chairs?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 10 (E) 11

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 4

Gọi c là số ghế, s là số ghế đầu: $4c + 3s = 43$ với $c, s \geq 1$.

$43 - 4c$ phải chia hết cho 3: $c = 1$ cho $s = 13$. Đổi 3 ghế (12 chân) lấy 4 ghế đầu (12 chân) và ngược lại: $(c, s) = (1, 13), (4, 9), (7, 5), (10, 1)$. Ghế tiếp theo $c = 13$ thì $s < 1$.

Có 4 khả năng. Đáp án (B).

Bẫy: cho phép $c = 0$ hoặc $s = 0$ không làm tăng số nghiệm ở đây (43 không chia hết cho 4 hay 3), nhưng quên một đầu mút thì ra 3.

Insight · Phương trình nghiệm nguyên $ax + by = c$: tìm một nghiệm rồi “bước” đều; đếm số bước nằm trong miền cho phép.

Tip — Đồ thị trong đề: đọc hai điểm “đẹp”

Khi đề cho đồ thị đường thẳng, chọn hai điểm nằm đúng giao lưới (để thường đánh dấu sẵn), tính đơn giá m rồi viết $y = mx + b$. Dùng ước lượng giao điểm bằng mắt: hình có thể chỉ vẽ một đoạn, hoặc không đúng tỉ lệ.

E Worked Examples — Competition Level

Ví dụ mẫu mức thi đấu

Hai ví dụ cuối ở mức câu 20–25 của AMC 8. Hãy tự giải ít nhất 5 phút trước khi đọc lời giải.

Example 3.13

Tổng nghịch đảo cho ra tích

Positive numbers x and y satisfy

$$x + y = 25 \quad \text{and} \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}.$$

What is $|x - y|$?

- (A) 15 (B) 17 (C) 20 (D) 21 (E) 25

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (A) 15

Quy đồng: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{x + y}{xy} = \frac{25}{xy}$. Vậy $\frac{25}{xy} = \frac{1}{4}$, tức $xy = 100$.

Bây giờ có tổng và tích: $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy = 625 - 400 = 225$, nên $|x - y| = 15$. Đáp án (A).

Kiểm tra: $x = 20, y = 5$ cho $\frac{1}{20} + \frac{1}{5} = \frac{1}{4}$. ✓ Bẫy: dừng ở $xy = 100$, hoặc trả lời 20 (số lớn hơn).

Insight · Tổng các nghịch đảo = $\frac{\text{tổng}}{\text{tích}}$. Biết tổng và tích của hai số là biết hiệu của chúng qua $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$.

Example 3.14

Nhân hai phương trình

Real numbers x and y satisfy

$$x + \frac{1}{y} = 5 \quad \text{and} \quad y + \frac{1}{x} = 6.$$

What is the value of $xy + \frac{1}{xy}$?

- (A) 26 (B) 27 (C) 28 (D) 29 (E) 30

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 28

Giải ra x, y dẫn tới số vô tỉ xấu xí. Nhưng biểu thức cần tính có xy — hãy **nhân** hai phương trình:

$$\left(x + \frac{1}{y}\right) \left(y + \frac{1}{x}\right) = xy + 1 + 1 + \frac{1}{xy} = 30.$$

Vậy $xy + \frac{1}{xy} = 30 - 2 = 28$. Đáp án (C).

Kiểm tra sự tồn tại: thế $x = 5 - \frac{1}{y}$ vào phương trình sau được $5y^2 - 30y + 6 = 0$, có hai nghiệm thực, nên những số x, y như vậy có thật. Bấy: khai triển thiếu hai số hạng 1 (tức $x \cdot \frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y} \cdot y$) thì ra 30.

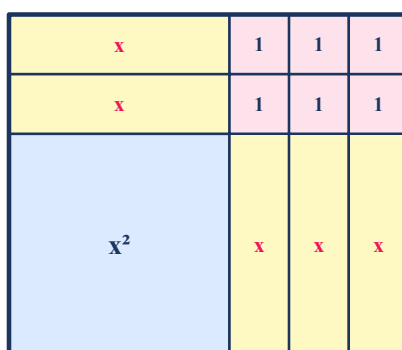
Insight · Biểu thức cần tính chứa tích $xy \rightarrow$ thử **nhân** các phương trình (không chỉ cộng/trừ). Các tích chéo như $x \cdot \frac{1}{x}$ thường bằng 1.

1 Exercises 1 · Foundation

Bài tập 1 · Nền tảng

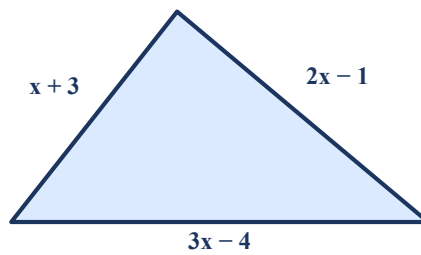


- 3.1** What is the value of $2x^2 - 5x + 1$ when $x = -3$?
 ♦ (A) 4 (B) 16 (C) 28 (D) 34 (E) 52
- 3.2** Which expression is equal to $3(2a - b) - 2(a - 4b)$?
 ♦ (A) $4a + 5b$ (B) $4a - 5b$ (C) $4a - 11b$ (D) $4a + 11b$ (E) $8a + 5b$
- 3.3** What value of x satisfies $7 - 2(x - 3) = 3x - 2$?
 ♦ (A) -3 (B) $\frac{3}{5}$ (C) 1 (D) $\frac{9}{5}$ (E) 3
- 3.4** Five more than twice a number is 13 less than four times the number. What is the number?
 ♦ (A) 4 (B) 9 (C) 12 (D) 15 (E) 18
- 3.5** The rectangle shown is made from one x -by- x square, five 1-by- x strips, and six 1-by-1 squares. Which product is equal to the area of the rectangle?
 ♦



- (A) $(x + 1)(x + 6)$ (B) $(x + 1)(x + 5)$ (C) $(x + 2)(x + 3)$ (D) $(x + 3)(x + 3)$ (E) $(x + 5)(x + 6)$
- 3.6** A box contains only red pens and blue pens. There are twice as many blue pens as red pens. Each red pen costs 3 thousand đồng and each blue pen costs 5 thousand đồng, and all the pens in the box are worth 91 thousand đồng. How many pens are in the box?
 ♦♦ (A) 12 (B) 14 (C) 18 (D) 21 (E) 28
- 3.7** An, Bình, and Chi share 120 thousand đồng. Bình gets twice as much as Chi, and An gets 10 thousand đồng more than Bình. How many thousand đồng does An get?
 ♦♦ (A) 54 (B) 58 (C) 60 (D) 64 (E) 66

- 3.8** ♦♦ The triangle shown has side lengths $x + 3$, $2x - 1$, and $3x - 4$, and its perimeter is 34. What is the length of its longest side?



- (A) 9 (B) 14 (C) 15 (D) 17 (E) 20

- 3.9** ♦♦ The values of x and y in the table follow a linear pattern.

x	1	2	3	4
y	5	8	11	14

What is y when $x = 20$?

- (A) 56 (B) 57 (C) 59 (D) 60 (E) 62

- 3.10** ♦♦ Mai thinks of a number. She adds 7, multiplies the result by 4, subtracts 8, divides by 4, and finally subtracts the number she first thought of. Whatever number Mai starts with, she always gets the same final result. What is it?

- (A) 2 (B) 5 (C) 7 (D) 8 (E) 9

- 3.11** ♦♦ How many integers n satisfy $3n - 7 < 2n + 5 \leq 4n - 1$?

- (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 11

- 3.12** ♦♦ Water drains from a tank at a constant rate. The graph shows the amount of water in the tank during the first 3 minutes. How many minutes after the start will the tank be empty?



- (A) 12 (B) 15 (C) 18 (D) 20 (E) 24

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi



- 3.13** ♦♦ For all numbers x , $(x - 3)(x + 5) = x^2 + kx + m$, where k and m are constants. What is $k - m$?

- (A) -17 (B) -13 (C) 13 (D) 17 (E) 30

- 3.14** ♦♦ Khoa correctly solved the equation $ax - 2 = 3x + b$, where a and b are constants, and found $x = 2$. Linh copied the equation with a and b swapped, solving $bx - 2 = 3x + a$ correctly, and found $x = -7$. What is ab ?

- (A) 6 (B) 10 (C) 14 (D) 15 (E) 21

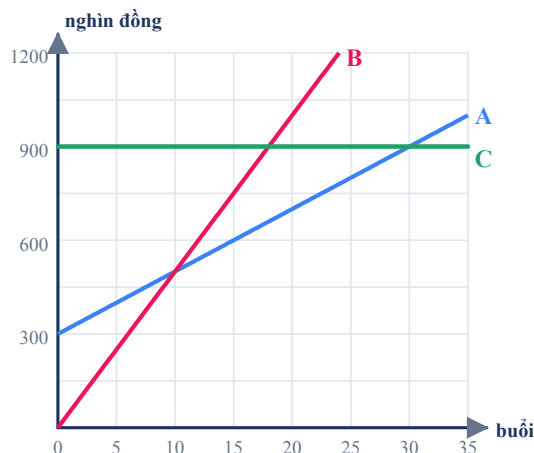
- 3.15** ♦♦ The number $x = 3$ is a solution of the equation $2x + a = ax - 1$. What is the value of a ?

- (A) $\frac{5}{2}$ (B) 3 (C) $\frac{7}{2}$ (D) 4 (E) 7

- 3.16** ♦♦ A child's ticket costs 40% less than an adult's ticket. Three adult tickets and five child tickets cost 540 thousand đồng in total. How many thousand đồng does one adult ticket cost?

(A) 90 (B) 100 (C) 108 (D) 120 (E) 135

- 3.17** ♦♦♦ A gym offers three monthly plans. Plan A: 300 thousand đồng plus 20 thousand đồng per visit. Plan B: 50 thousand đồng per visit. Plan C: 900 thousand đồng with unlimited visits. The graph shows the three plans. For how many whole numbers of visits in a month is Plan A strictly cheaper than both other plans?

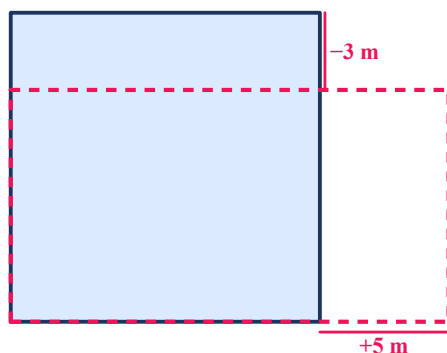


(A) 18 (B) 19 (C) 20 (D) 21 (E) 29

- 3.18** ♦♦ Two pockets contain some coins. If 3 coins are moved from the left pocket to the right pocket, the right pocket will have twice as many coins as the left. If instead 3 coins are moved from the right pocket to the left pocket, the two pockets will have equally many coins. How many coins are there in total?

(A) 24 (B) 30 (C) 33 (D) 36 (E) 42

- 3.19** ♦♦ A square garden is changed into a rectangle by making one pair of opposite sides 5 m longer and the other pair 3 m shorter, as shown. The area of the garden increases by 9 m². What is the area of the new rectangular garden, in m²?



(A) 117 (B) 135 (C) 144 (D) 150 (E) 153

- 3.20** ♦♦ Positive numbers x, y, z satisfy $xy = 12$, $, and $zx = 15$. What is $x + y + z$?$

(A) 12 (B) 14 (C) 16 (D) 20 (E) 47

- 3.21** ♦♦ Two brothers' ages differ by 6 years. Next year, the product of their ages will be 25 more than the product of their ages now. How old is the older brother now?

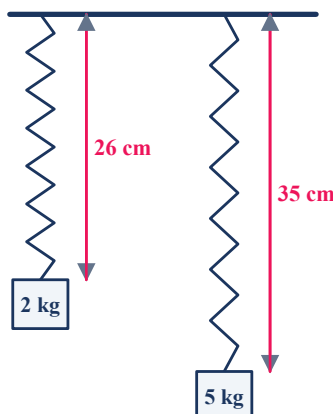
(A) 12 (B) 13 (C) 15 (D) 16 (E) 18

- 3.22** On the calendar page shown, the first day of the month is a Thursday. A 3×3 square of nine dates, like the shaded one, is drawn somewhere on the page, and the nine dates inside it add up to 117. What is the largest date inside the square?

Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat	Sun
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		

- (A) 19 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 25

- 3.23** The length of a spring is a linear function of the load hanging from it. With a 2 kg load the spring is 26 cm long, and with a 5 kg load it is 35 cm long, as shown. How long, in cm, is the spring with a 7 kg load?



- (A) 41 (B) 44 (C) 45 (D) 49 (E) 91

- 3.24** At a party, 100 guests are seated at tables. Some tables seat exactly 3 guests and the others seat exactly 7 guests, and every seat is filled. What is the greatest possible number of tables?

- (A) 26 (B) 28 (C) 30 (D) 32 (E) 33

- 3.25** A test has 25 questions. Each correct answer earns 3 points, each wrong answer loses 1 point, and a blank earns 0. Nam answered exactly 22 questions and left the rest blank. His score was at least 52. What is the least number of questions Nam could have answered correctly?

- (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

- 3.26** One third of a number is 8 more than one fifth of the number. What is the number?

- (A) 30 (B) 40 (C) 60 (D) 75 (E) 120

3 Exercises 3 • Challenge

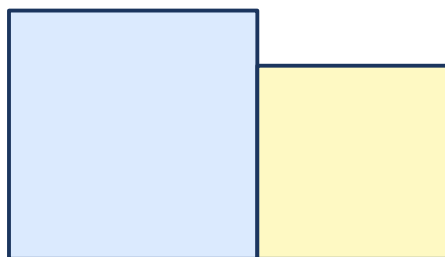
Bài tập 3 • Thử thách



- 3.27** Nonzero numbers a and b satisfy $\frac{2a + 3b}{a - b} = 7$. What is the value of $\frac{a^2 + 3b^2}{ab}$?

- (A) $\frac{3}{2}$ (B) 2 (C) $\frac{5}{2}$ (D) 3 (E) $\frac{7}{2}$

- 3.28** Two squares are placed side by side, as shown. The sum of their perimeters is 64 cm, and the area of the larger square is 32 cm² more than the area of the smaller square. What is the total area of the two squares, in cm²?



- (A) 130 (B) 136 (C) 144 (D) 160 (E) 256

- 3.29** For how many integers n is $\frac{3n+20}{n+2}$ an integer?

Integer answer · Đáp số nguyên

- 3.30** How many integers x satisfy $|x-3| + |x+5| = 8$?

Integer answer · Đáp số nguyên

- 3.31** Numbers a, b, c satisfy $a - b = 3$ and $b - c = 5$. What is the value of

$$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca?$$

- (A) 34 (B) 38 (C) 41 (D) 49 (E) 98

- 3.32** A shop owner bought some identical chairs for a total of 6 000 thousand đồng. Five of the chairs were damaged and thrown away. He sold each remaining chair for 50 thousand đồng more than he had paid for it, and made a total profit of 1 000 thousand đồng. How many chairs did he buy?

- (A) 30 (B) 35 (C) 40 (D) 45 (E) 60

- 3.33** The ages of the 5 members of a family are whole numbers, and their average age is 24 years. Seven years ago, the average age of the family members who were alive at that time was 22 years. How old is the youngest member of the family now?

Integer answer · Đáp số nguyên

- 3.34** What is the sum of all real numbers x that satisfy

$$(x^2 - 5x)^2 + 2(x^2 - 5x) = 48?$$

- (A) 1 (B) 5 (C) 6 (D) 10 (E) 12

- 3.35** The cubes of two consecutive positive integers differ by 919. What is the sum of the two integers?

- (A) 17 (B) 18 (C) 33 (D) 34 (E) 35

- 3.36** A teacher has a bag of candies for her class of girls and boys. If she gives each girl 3 candies and each boy 5 candies, 4 candies are left over. If instead she gives each girl 5 candies and each boy 3 candies, she is 2 candies short. What happens if she gives every child in the class 4 candies?

- (A) 3 candies are left over (B) 2 candies are left over
(C) 1 candy is left over (D) She has exactly enough
(E) She is 1 candy short

Chapter 4

8020 AMC 8 Mastery

Patterns, Sequences & Logical Reasoning

Quy luật, dãy số & suy luận logic

Quy luật và dãy số xuất hiện trong mọi đề AMC 8: dãy hình lớn dần, cấp số cộng trá hình trong bài lời văn, chu kỳ của chữ số tận cùng và của thứ trong tuần, cùng các câu suy luận “ai nói thật”. Chương này dạy cách biến một quy luật nhìn thấy thành công thức có lý do, đếm và cộng cấp số cộng không lệch một, rút gọn chỉ số theo chu kỳ, và tổ chức suy luận bằng bảng, chuỗi thứ tự và bất biến. Học sinh hay mất điểm vì lỗi hàng rào, vì ngoại suy từ vài số đầu mà không kiểm tra, và vì quên phần đầu không tuần hoàn của một dãy.

✓ Lập công thức cho hình thứ n của một dãy hình bằng cách nhìn cấu trúc; kiểm tra bằng bảng hiệu.

✓ Tìm số hạng, đếm số hạng và tính tổng của cấp số cộng; dùng “trung bình = số hạng giữa”.

✓ Làm việc với dãy truy hồi và cấp số nhân; nhận ra cách viết nhị phân trong bài lũy thừa của 2.

✓ Rút gọn chỉ số theo chu kỳ (chữ số tận cùng, thứ trong tuần, dãy tuần hoàn sau vài số hạng đầu).

✓ Giải bài suy luận bằng bảng và chuỗi thứ tự, xét trường hợp nói thật/nói dối, và dùng bất biến để loại khả năng.

pattern · quy luật

sequence, term · dãy số, số hạng

arithmetic sequence · cấp số cộng

common difference · công sai

geometric sequence · cấp số nhân

ratio · công bội (tỉ số)

recursive rule · công thức truy hồi

finite differences · bảng hiệu

periodic, period · tuần hoàn, chu kỳ

remainder · số dư

leap year · năm nhuận

invariant · bất biến

truth-teller / liar · người nói thật / nói dối

fencepost error · lỗi hàng rào (lệch một)

K

4.1 Growing Patterns: Count the Structure

Quy luật hình: đếm theo cấu trúc

Đề AMC 8 thường cho ba hình đầu của một dãy hình (gạch, que diêm, đồng xu...) rồi hỏi về hình thứ 50 hay hình nào dùng đúng 2026 viên. Vẽ tiếp đến hình 50 là không thể; ta cần một **công thức** cho hình thứ n . Có hai con đường: **nhìn cấu trúc** của hình (hình n gồm những khối nào, mỗi khối bao nhiêu viên) và **lập bảng hiệu** (finite differences). Cách thứ nhất cho lời giải đẹp và chắc chắn; cách thứ hai dùng để kiểm tra.

Definition – Linear pattern (quy luật bậc nhất)

A pattern is **linear** if each figure has the same number d of pieces more than the one before. Then Figure n has $a_n = a_1 + (n - 1)d$ pieces, a formula of the form $dn + c$.

Ví dụ: hình chữ T dưới đây có 4, 7, 10, ... viên gạch — mỗi hình thêm 3 viên. Nhìn cấu trúc: hình n có thanh ngang $2n + 1$ viên và chân dọc n viên, tổng $3n + 1$ (hình vẽ ở ví dụ 4.1). Hai cách cho cùng một công thức.

Example 4.1

Đặt công thức rồi giải ngược

Tiles are arranged in T -shapes, as shown. Figure n has a row of $2n + 1$ tiles on top and a column of n tiles below the middle tile of that row. Which figure uses exactly 2026 tiles?

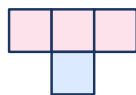


Figure 1

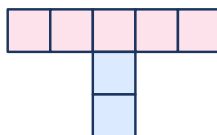


Figure 2

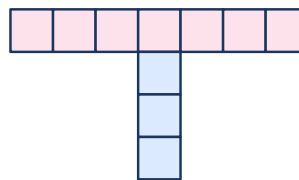


Figure 3

- (A) 674 (B) 675 (C) 676 (D) 1012 (E) 1013

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 675

Hình n có $(2n + 1) + n = 3n + 1$ viên gạch (kiểm tra: hình 1, 2, 3 có 4, 7, 10 viên — khớp với hình vẽ).

Giải $3n + 1 = 2026$: $3n = 2025$, $n = 675$. Đáp án (B).

Bấy: chia thẳng $2026 : 3 \approx 675.3$ rồi làm tròn thành 676; hoặc chỉ đếm thanh ngang $2n + 1$.

Insight · Viết số viên của hình n thành tổng các **khối** nhìn thấy trong hình, rồi kiểm tra công thức với hình 1, 2, 3 trước khi dùng.

Theorem — Method of finite differences (bảng hiệu)

Write the terms in a row and their differences below. If the first differences are constant, the pattern is linear. If the **second** differences are constant and equal to $2a$, then $a_n = an^2 + bn + c$ for some numbers b, c .

Lý do: $an^2 + bn + c$ có hiệu liên tiếp $a(2n + 1) + b$ — một dãy bậc nhất có công sai $2a$. Ngược lại, khi hiệu thứ hai là hằng số, chọn a bằng nửa hiệu thứ hai, trừ an^2 đi thì phần còn lại là dãy bậc nhất.

n	1	2	3	4	5
số đồng xu chạm nhau	0	3	9	18	30
hiệu thứ nhất		3	6	9	12
hiệu thứ hai			3	3	3

Example 4.2

Ba hướng, mỗi hướng một tổng

Coins of the same size are arranged in triangles, as shown: Figure n has n rows with $1, 2, \dots, n$ coins, and neighboring coins touch. (The dots mark the points where two coins touch.) How many touching points are there in Figure 10?



Figure 1

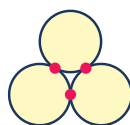


Figure 2

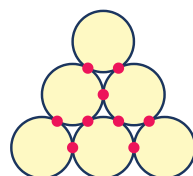


Figure 3

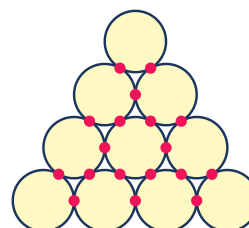


Figure 4

- (A) 108 (B) 120 (C) 135 (D) 150 (E) 165

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 135

Nhìn cấu trúc. Mỗi chỗ chạm nối hai đồng xu theo một trong **ba hướng**: nằm ngang, chéo trái, chéo phải. Theo hướng nằm ngang, hàng có k đồng xu cho $k - 1$ chỗ chạm, nên có $0 + 1 + 2 + \dots + (n - 1)$ chỗ. Hình tam giác đối xứng nên

hai hướng chéo cũng vậy. Tổng $3 \cdot \frac{(n-1)n}{2}$.

Với $n = 10$: $3 \cdot \frac{9 \cdot 10}{2} = 135$. Đáp án (C).

Kiểm tra bằng bảng hiệu (bảng phía trên): 0, 3, 9, 18, 30 có hiệu 3, 6, 9, 12 và hiệu thứ hai là 3 — đúng là bậc hai với $a = \frac{3}{2}$, khớp $\frac{3}{2}n^2 - \frac{3}{2}n$.

Bây: dùng $1 + 2 + \dots + 10$ (số đồng xu) thay cho $1 + \dots + 9$ thì ra 165.

Insight · Đếm các **cặp** (chỗ chạm, cạnh, que nối) thì chia theo **hướng**; mỗi hướng thường là một tổng $1 + 2 + \dots$.

Common Trap — Đừng ngoại suy từ vài số đầu một cách mù quáng

Ba số 1, 2, 4 có thể tiếp tục là 8 (nhân đôi) hoặc 7 (hiệu tăng dần 1, 2, 3). Chỉ dùng bảng hiệu khi để **mô tả rõ** cách hình lớn lên; luôn tìm lý do cấu trúc cho công thức. Và cẩn thận chỗ **dùng chung**: hai ô vuông kề nhau dùng chung một cạnh, nên số que không phải $4 \times$ số ô.

Tip — Kiểm tra bằng $n = 1, 2, 3$

Mọi công thức vừa lập phải cho đúng số viên ở các hình đã vẽ. Mất 10 giây, nhưng bắt được gần như mọi lỗi lệch một (off-by-one).

K 4.2 Arithmetic Sequences

Cấp số cộng

Definition — Arithmetic sequence (cấp số cộng)

A sequence is **arithmetic** if the difference between consecutive terms is a constant d , the **common difference**: $a_{n+1} = a_n + d$. Then $a_n = a_1 + (n-1)d$, and more generally $a_m - a_k = (m-k)d$.

Từ số hạng thứ k đến số hạng thứ m phải đi $m-k$ “bước”, mỗi bước d . Công thức $a_m - a_k = (m-k)d$ giúp tìm d ngay khi biết hai số hạng bất kỳ, không cần biết số hạng đầu.

Theorem — Counting terms and adding them (đếm số hạng và tính tổng)

The arithmetic sequence $a, a+d, \dots, \ell$ (with $d > 0$) has $\frac{\ell-a}{d} + 1$ terms, and its sum is

$$S = \frac{(a + \ell) \cdot (\text{number of terms})}{2} = (\text{average}) \times (\text{number of terms}).$$

Viết tổng hai lần, một lần xuôi và một lần ngược, rồi cộng theo cột: mỗi cột bằng $a + \ell$. Dấu “+1” trong công thức đếm là vì ta đếm **điểm** chứ không đếm **khoảng**: từ a đến ℓ có $\frac{\ell-a}{d}$ khoảng nhưng nhiều hơn một điểm.

Key Idea — Trung bình cộng = số hạng giữa

Các số cách đều nhau thì trung bình cộng bằng số đứng giữa (nếu số số hạng chẵn: trung bình của hai số giữa). Vì vậy tổng của 7 số hạng liên tiếp = $7 \times$ số hạng thứ tư. Hai số hạng đối xứng qua tâm luôn có tổng bằng nhau: $a_2 + a_6 = a_3 + a_5 = 2a_4$.

Example 4.3

Tổng = số hạng giữa $\times$ số số hạng

Seven numbers form an arithmetic sequence. Bao erased all of them except the 2nd and the 5th, as shown. What is the sum of the seven numbers?

?	17	?	?	35	?	?
1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th

(A) 182

(B) 196

(C) 203

(D) 210

(E) 245

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 203

Từ số thứ 2 đến số thứ 5 là 3 bước: $3d = 35 - 17 = 18$, nên $d = 6$.

Số giữa (thứ tư) là $35 - 6 = 29$. Tổng bảy số $= 7 \cdot 29 = 203$. Đáp án (C).

Kiểm tra: dãy là 11, 17, 23, 29, 35, 41, 47, tổng 203. ✓

Bây: lấy trung bình hai số còn lại $\frac{17+35}{2} = 26$ làm số giữa thì ra 182 — nhưng 17 và 35 không đối xứng qua tâm.

Insight · Cần tổng của cặp số cộng có số lẻ số hạng → chỉ cần tìm **số hạng giữa**.

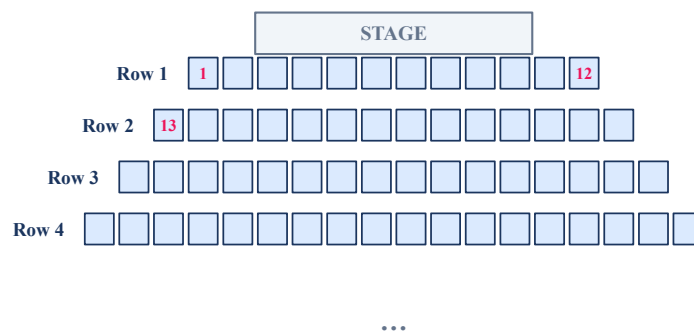
Common Trap — Lỗi “hàng rào” (fencepost error)

Từ 14 đến 98 bước 7 có $\frac{98-14}{7} + 1 = 13$ số, không phải 12. Từ trang 25 đến trang 60 có 36 trang. Mỗi khi đếm số hạng, thử với một ví dụ nhỏ (từ 1 đến 3 có ba số, dù $3 - 1 = 2$).

Example 4.4

Tổng tích lũy của một cấp số cộng

In an auditorium, Row 1 has 12 seats, and each row has 2 more seats than the row in front of it. The seats are numbered 1, 2, 3, ..., starting with Row 1, then Row 2, and so on, as shown. In which row is seat number 500?



(A) 16

(B) 17

(C) 18

(D) 19

(E) 20

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 18

Số ghế các hàng: 12, 14, 16, ...; hàng k có $10 + 2k$ ghế. Tổng n hàng đầu $= \frac{(12 + 10 + 2n)n}{2} = n(n + 11)$.

Ước lượng $n^2 \approx 500$ nên n khoảng 18: $17 \cdot 28 = 476 < 500$ và $18 \cdot 29 = 522 \geq 500$.

Vậy 17 hàng đầu chứa ghế 1 đến 476, còn ghế 477 đến 522 nằm ở hàng 18. Ghế 500 ở hàng 18. Đáp án (C).

Bây: tìm hàng có số ghế gần 500, hoặc dừng ở $n = 17$ vì 476 là tổng gần 500 nhất.

Insight · Hỏi “vật thứ N nằm ở nhóm nào” → lập tổng tích lũy của các nhóm và tìm hai tổng liên tiếp kẹp N .

Tip — Nhận ra cấp số cộng trá hình

Các câu chữ như “mỗi hàng nhiều hơn 2 ghế”, “mỗi tuần tiết kiệm thêm...”, “cứ 7 ngày một lần”, “các số chia 4 dư 1” đều là cấp số cộng. Ghi ngay: số hạng đầu, công sai, số hạng cuối — rồi dùng công thức đếm và công thức tổng.

K

4.3 Recursive and Geometric Sequences

Dãy truy hồi và cấp số nhân

Definition — Recursive rule; geometric sequence (công thức truy hồi; cấp số nhân)

A **recursive** rule gives each term from earlier terms, e.g. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. A sequence is **geometric** if each term is a constant r (the **ratio**) times the previous one: $a_n = a_1 r^{n-1}$.

Công thức truy hồi cho biết cách đi từng bước; công thức “tổng quát” $a_n = \dots$ cho phép nhảy thẳng tới số hạng thứ 100. Kỹ năng chính của chương: tính vài số hạng đầu, đoán quy luật, rồi **giải thích** vì sao quy luật đúng.

Theorem – Sum of a geometric sequence (tổng cấp số nhân)

$$1 + 2 + 4 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1, \quad a + ar + \cdots + ar^{n-1} = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \quad (r \neq 1).$$

Gọi tổng là S . Nhân với r được $rS = ar + ar^2 + \cdots + ar^n$; trừ hai đẳng thức, mọi số hạng giữa triệt tiêu: $rS - S = ar^n - a$. Với $r = 2$: mỗi lũy thừa của 2 lớn hơn tổng tất cả các lũy thừa nhỏ hơn nó.

Example 4.5**Tích thành tổng: theo dõi số mũ**

A sequence begins $a_1 = 2$ and $a_2 = 6$, and each term after the second is the **product** of the two terms before it: $a_3 = 12$, $a_4 = 72$, $a_5 = 864$, ... The 8th term can be written as $a_8 = 2^x \cdot 3^y$. What is $x + y$?

- (A) 21 (B) 26 (C) 34 (D) 42 (E) 55

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 34

Mọi số hạng chỉ có thừa số nguyên tố 2 và 3. Ghi mỗi số hạng bằng cặp số mũ (x_n, y_n) trong $a_n = 2^{x_n} 3^{y_n}$.

Nhân hai lũy thừa cùng cơ số thì **cộng** số mũ, nên $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ và $y_{n+1} = y_n + y_{n-1}$ — mỗi dãy số mũ là dãy “số sau bằng tổng hai số trước”.

$a_1 = 2^1$, $a_2 = 6 = 2^1 3^1$. (x_n) : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21; (y_n) : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13. Vậy $a_8 = 2^{21} \cdot 3^{13}$ và $x + y = 34$. Đáp án (C).

Bấy: lệch một chỉ số (dừng ở $a_7 = 2^{13} 3^8$, ra 21; hoặc tính a_9 , ra 55).

Insight · Quy tắc **nhân** → nhìn vào **số mũ**, phép nhân trở thành phép cộng và ta về một dãy cộng quen thuộc.

Key Idea – Lũy thừa của 2 và cách viết nhị phân

Mỗi số nguyên dương viết được **đúng một cách** thành tổng các lũy thừa khác nhau của 2 (cách viết nhị phân). Tìm cách viết bằng thuật toán tham lam: lấy lũy thừa lớn nhất không vượt quá số đó, trừ đi, lặp lại. Tính duy nhất đến từ định lý trên: $1 + 2 + \cdots + 2^{k-1} < 2^k$, nên không thể bỏ 2^k mà bù bằng các lũy thừa nhỏ hơn.

Example 4.6**Tham lam theo lũy thừa của 2**

Mai has ten boxes of coins. Box 1 contains 1 coin, Box 2 contains 2 coins, Box 3 contains 4 coins, and each box contains twice as many coins as the box before it, as shown. She wants to pay exactly 700 coins by handing over some whole boxes, without opening any box. How many boxes must she hand over?

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512
Box 1	Box 2	Box 3	Box 4	Box 5	Box 6	Box 7	Box 8	Box 9	Box 10

- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 6

Các hộp chứa 1, 2, 4, ..., 512 đồng. Tham lam từ hộp lớn nhất:

$700 - 512 = 188$; $188 - 128 = 60$; $60 - 32 = 28$; $28 - 16 = 12$; $12 - 8 = 4$; $4 - 4 = 0$.

Vậy $700 = 512 + 128 + 32 + 16 + 8 + 4$: Mai đưa **6** hộp. Cách này là duy nhất (mục “key” ở trên), nên đáp án là (C).

Ví dụ: nếu không lấy hộp 512 thì tất cả các hộp còn lại chỉ có $1 + 2 + \cdots + 256 = 511 < 700$ — bắt buộc phải lấy hộp 512.

Insight · Bài “chọn một số hộp 1, 2, 4, 8, ... để được tổng cho trước” chính là viết số đó ở hệ nhị phân.

Common Trap — Hai bẫy với cấp số nhân

- Số hạng thứ n là $a_1 r^{n-1}$, không phải $a_1 r^n$ (số mũ ít hơn chỉ số một đơn vị).
- “Tăng 20% mỗi năm” là nhân với 1.2 mỗi năm (cấp số nhân), không phải cộng thêm 20% của số ban đầu mỗi năm (cấp số cộng).

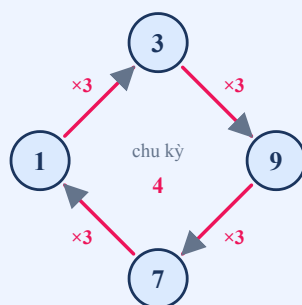
Tip — Bảng vài số hạng đầu

Với một công thức truy hồi lại, hãy tính 6–10 số hạng đầu thật cẩn thận và xếp thành bảng. Nhìn **hiệu** và **tỉ số** của các số hạng liên tiếp: thường một trong hai sẽ có quy luật rõ ràng (hằng số, tuần hoàn, hoặc tăng đều).

K 4.4 Cycles and Periodicity**Chu kỳ và tính tuần hoàn****Definition — Periodic sequence (dãy tuần hoàn)**

A sequence is **periodic** with period p if $a_{n+p} = a_n$ for every n . The smallest such p is the **period**. Some sequences become periodic only after a few terms (they are **eventually periodic**).

Thứ trong tuần có chu kỳ 7; chữ số tận cùng của 3, 9, 27, 81, 243, ... có chu kỳ 4 (vòng $3 \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 1 \rightarrow 3$).

**Theorem — Reducing the index (rút gọn chỉ số)**

If (a_n) has period p and $N = pq + r$ with $1 \leq r \leq p$, then $a_N = a_r$. The sum of the first N terms equals $q \cdot (a_1 + \dots + a_p) + (a_1 + \dots + a_r)$.

Mỗi lần đi hết một chu kỳ ta quay về chỗ cũ, nên chỉ cần phần dư. Lưu ý quy ước: khi N chia hết cho p , lấy $r = p$ (số hạng cuối của chu kỳ), không phải $r = 0$.

Key Idea — Vì sao chu kỳ chắc chắn xuất hiện

Nếu mỗi số hạng chỉ phụ thuộc vào số hạng ngay trước (hoặc vài số hạng trước) và chỉ có **hữu hạn** giá trị có thể (chữ số tận cùng: 10 giá trị; số dư khi chia cho 7: 7 giá trị), thì theo nguyên lý Dirichlet sẽ có lúc một “trạng thái” lặp lại — và từ đó mọi thứ lặp lại.

Example 4.7**Tổng theo chu kỳ**

What is the units digit of

$$3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2026} ?$$

(A) 0**(B)** 2**(C)** 4**(D)** 6**(E)** 8**SOLUTION · LỜI GIẢI** · Answer: **(B)** 2

Chữ số tận cùng của 3^k quay vòng 3, 9, 7, 1 (chu kỳ 4), và tổng một vòng là $3 + 9 + 7 + 1 = 20$, tận cùng 0.

$2026 = 4 \cdot 506 + 2$: có 506 vòng đầy đủ (đóng góp chữ số tận cùng 0) và hai số hạng lẻ $3^{2025}, 3^{2026}$ có tận cùng 3 và 9.

Tận cùng của tổng là tận cùng của $0 + 3 + 9 = 12$, tức là 2. Đáp án (B).

Bẫy: chỉ tính tận cùng của số hạng cuối 3^{2026} (là 9); hoặc lấy phần dư 2 nhưng cộng nhầm hai số hạng cuối của chu kỳ (7 + 1).

Insight • Chữ số tận cùng của lũy thừa có chu kỳ (chia cho 4 là đủ cho mọi cơ số); với **tổng**, cộng theo từng chu kỳ rồi xử lý phần dư.

Example 4.8

Hai chu kỳ chồng lên nhau

A school uses a 6-day timetable: its school days are labeled Day A , B , C , D , E , F , then Day A again, and so on. School meets every Monday through Friday, with no holidays, and Saturdays and Sundays are skipped, as shown. Monday, September 7 is Day A . Which day of the timetable is Friday, October 30?

	Mon	Tue	Wed	Thu	Fri	Sat	Sun
Sep	7 Day A	8 Day B	9 Day C	10 Day D	11 Day E	12	13
	14 Day F	15 Day A	16 Day B	17 Day C	18 Day D	19	20
	21 Day E	22 Day F	23 Day A	24 Day B	25 Day C	26	27

- (A) Day A (B) Day B (C) Day C (D) Day D (E) Day E

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: **(D) Day D**

Có hai chu kỳ: tuần lịch (7 ngày) và thời khoá biểu (6 ngày học). Ta đếm **số ngày học** chứ không đếm số ngày.

Từ thứ Hai 7/9 đến thứ Hai 26/10 là 7 tuần đầy đủ, gồm $7 \cdot 5 = 35$ ngày học. Vậy thứ Hai 26/10 là ngày học thứ 36 (tính 7/9 là ngày học thứ 1), và thứ Sáu 30/10 là ngày học thứ 40.

$40 = 6 \cdot 6 + 4$, nên nó trùng với ngày học thứ 4 của chu kỳ: Day D . Đáp án (D).

Bấy: đếm cả thứ Bảy, Chủ nhật (53 ngày sau, $53 = 6 \cdot 8 + 5$, ra Day F); hoặc quên rằng ngày 7/9 đã là ngày học thứ nhất.

Insight • Khi có hai vòng lặp, xác định vòng nào “đếm” cái gì: ở đây tuần lịch chỉ dùng để **đổi ngày lịch thành số ngày học**.

Tip — Thứ trong tuần qua các năm

$365 = 7 \cdot 52 + 1$: sau một năm thường, cùng một ngày lịch lùi sang thứ **kế tiếp**; nếu khoảng thời gian đó chứa ngày 29/2 thì lùi **hai** thứ. Muốn biết “ N ngày sau” là thứ mấy, chỉ cần N chia 7 dư bao nhiêu.

Common Trap — Chu kỳ không bắt đầu từ số hạng đầu

Chữ số tận cùng của $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ là 1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, $\dots$ — chỉ tuần hoàn **từ số hạng thứ hai** (số 1 ở đầu không bao giờ quay lại). Khi rút gọn chỉ số, phải bỏ phần “đầu” (pre-period) trước rồi mới chia cho chu kỳ. Luôn viết ra đủ số hạng để thấy lần lặp đầu tiên.

K 4.5 Logical Reasoning and Invariants

Suy luận logic và bất biến

Các câu suy luận của AMC 8 không cần kiến thức mới — chỉ cần **tổ chức**: ghi các dữ kiện thành bảng, tìm dữ kiện “mạnh” nhất để bắt đầu, và khi phải đoán thì đoán có hệ thống (giả sử một trường hợp, đi đến mâu thuẫn hoặc đến đáp án).

Key Idea — Chuỗi thứ tự: ghép các dữ kiện “đứng trước / ngay sau”

Dữ kiện dạng “A đứng trước B”, “C ngồi ngay bên phải D” nên được **nối thành chuỗi** trước. Một chuỗi dài gồm k người trong k vị trí sẽ cố định hết; chuỗi ngắn dài bằng số chỗ chỉ còn vài cách đặt.

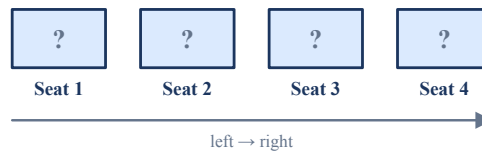
Example 4.9

Nối các dữ kiện thành một chuỗi

An, Bình, Chi, and Dũng sit in four seats in a row, numbered 1 to 4 from left to right. Each of them belongs to a different club: art, chess, music, or robotics.

- Bình sits at one end of the row.
- The art club member sits immediately to the right of An.
- The art club member sits somewhere to the left of the music club member.
- The music club member sits somewhere to the left of the chess club member.
- Chi is not in the art club.

Who is in the art club?



- (A) An (B) Bình
(C) Chi (D) Dũng
(E) It cannot be determined.

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) Dũng

Dữ kiện 2, 3, 4 nối thành một chuỗi từ trái sang phải: **An, (art), ..., (music), ..., (chess)**, trong đó người art ngồi ngay bên phải An. Chuỗi này đã gồm 4 người khác nhau trong 4 ghế, nên: An ghế 1, art ghế 2, music ghế 3, chess ghế 4. An là người còn lại: robotics.

Bình ngồi ở một đầu; ghế 1 là An, nên Bình ngồi ghế 4 và thuộc chess.

Ghế 2 (art) và ghế 3 (music) là Chi và Dũng; Chi không thuộc art nên Chi ghế 3 (music), Dũng ghế 2 (art).

Seat	1	2	3	4
Person	An	Dũng	Chi	Bình
Club	robotics	art	music	chess

Người thuộc câu lạc bộ art là Dũng. Đáp án (D).

Insight · Bắt đầu bằng các dữ kiện so sánh vị trí, nối chúng thành chuỗi; dữ kiện “không phải” để dành cho bước cuối.

Definition – Invariant (bất biến)

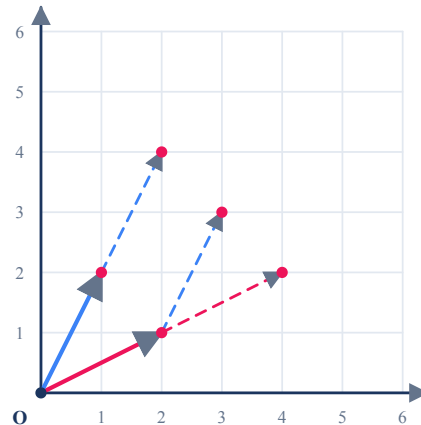
An **invariant** of a process is a quantity that never changes, whatever moves are made. If the start and a proposed end have different values of the invariant, the end can never be reached.

Ví dụ bất biến hay gặp: tổng (hoặc hiệu) các số, tính chẵn lẻ, số dư khi chia cho 3, màu ô trên bàn cờ. Ta tìm bất biến bằng cách hỏi: một bước đi làm thay đổi điều gì, và điều gì giữ nguyên?

Example 4.10

Bất biến chia 3, rồi kiểm tra đủ điều kiện

A robot starts at the origin $(0, 0)$. Each move takes it either 2 units right and 1 unit up, or 1 unit right and 2 units up, as shown. Which of the following points can the robot reach?



- (A) $(14, 29)$ (B) $(20, 31)$ (C) $(25, 25)$ (D) $(30, 12)$ (E) $(41, 10)$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) $(20, 31)$

Bất biến: mỗi bước làm $x + y$ tăng đúng 3, nên $x + y$ luôn chia hết cho 3. Loại $(14, 29)$ (tổng 43) và $(25, 25)$ (tổng 50).

Điều kiện thứ hai: nếu đi a bước loại $(2, 1)$ và b bước loại $(1, 2)$ thì $x = 2a + b$, $y = a + 2b$, nên $a = \frac{2x - y}{3}$, $b = \frac{2y - x}{3}$ phải không âm, tức $\frac{x}{2} \leq y \leq 2x$.

$(30, 12)$: $b = \frac{24 - 30}{3} < 0$ — loại. $(41, 10)$: $b < 0$ — loại. $(20, 31)$: $a = \frac{40 - 31}{3} = 3$, $b = \frac{62 - 20}{3} = 14$ — đi 3 bước $(2, 1)$ và 14 bước $(1, 2)$ là tới. Đáp án (B).

Insight · Bất biến chỉ **loại** được đáp án; muốn khẳng định “tới được” phải chỉ ra cách đi (ở đây: giải ra số bước mỗi loại).

Common Trap — “Bất biến” không chứng minh được điều “có thể”

Biết $x + y$ chia hết cho 3 chưa đủ: điểm $(30, 12)$ có tổng 42 nhưng rô-bốt không tới được vì nó luôn đi lên ít nhất một nửa quãng đi sang phải. Bất biến là điều kiện **cần**; lời giải hoàn chỉnh kiểm tra thêm điều kiện đủ hoặc chỉ ra cách làm.

Tip — Bài “ai nói thật, ai nói dối”

Khi đề cho “đúng một người nói thật” (hoặc “những người về nhất, nhì, ba nói thật”), hãy **giả sử từng trường hợp** — ai là thủ phạm, ai nói thật — và đếm số câu đúng. Thường chỉ có 4–5 trường hợp; viết thành bảng Đ/S (đúng/sai) cho gọn. Hai câu nói **mâu thuẫn** nhau (“X làm” và “X không làm”) thì đúng một trong hai câu đúng — rất hữu ích để rút gọn trường hợp.

E Worked Examples — Competition Level

Ví dụ mẫu mức thi đấu

Hai ví dụ cuối ở mức câu 20–25 của AMC 8. Hãy thử tự giải ít nhất 5 phút trước khi đọc lời giải.

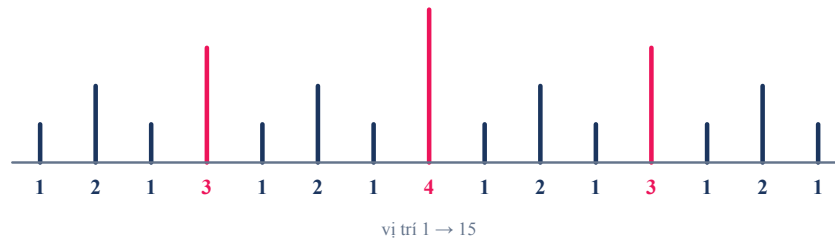
Example 4.11

Dãy tự đồng dạng: đếm theo “tầng”

A list of numbers is built in stages. Stage 1 is the list 1. To build Stage $k + 1$, write the list of Stage k , then the number $k + 1$, then the list of Stage k again:

$$1 \rightarrow 1, 2, 1 \rightarrow 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 \rightarrow 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1 \rightarrow \dots$$

Each stage begins with the previous one, so the stages define one long sequence 1, 2, 1, 3, 1, 2, 1, 4, ... (shown as a ruler in the figure). What is the sum of the first 100 terms of this sequence?



(A) 97

(B) 150

(C) 196

(D) 197

(E) 199

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 197

Quan sát. Số 1 nằm ở mọi vị trí lẻ; số ≥ 2 nằm ở mọi vị trí chẵn; số ≥ 3 nằm ở vị trí chia hết cho 4; số ≥ 4 ở vị trí chia hết cho 8... (nhìn hình thước kẻ: vạch càng cao càng thưa, cách nhau gấp đôi).

Vì sao? Danh sách bước k dài $2^k - 1$, số mới $k + 1$ đứng ở vị trí 2^k . Bỏ các số 1 (ở vị trí lẻ) đi rồi trừ 1 ở mỗi số còn lại, ta được lại đúng danh sách cũ — nên “số hạng thứ n lớn hơn hoặc bằng $j + 1$ ” khi và chỉ khi 2^j chia hết n .

Đếm theo tầng. Tổng 100 số hạng = (số số hạng ≥ 1) + (số số hạng ≥ 2) + (số số hạng ≥ 3) + ... = $100 + 50 + 25 + 12 + 6 + 3 + 1 = 197$. Đáp án (D).

Bây: dùng $\frac{100}{2} + \frac{100}{4} + \dots$ không lấy phần nguyên (≈ 199); quên tầng đầu tiên 100 (ra 97).

Insight · Tổng các số nguyên dương = tổng theo “tầng”: $\sum a_n = \#\{a_n \geq 1\} + \#\{a_n \geq 2\} + \dots$. Hữu ích mỗi khi đếm “bao nhiêu lần chia hết”.

Example 4.12

Tính nhiều số hạng, nhìn vào hiệu

A sequence has $a_1 = 1$ and $a_2 = 2$, and for every $n \geq 3$,

$$a_n = a_{n-1} - a_{n-2} + n.$$

What is a_{100} ?

(A) 96

(B) 100

(C) 101

(D) 102

(E) 106

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 102

Tính một loạt số hạng: $a_3 = 2 - 1 + 3 = 4$, $a_4 = 4 - 2 + 4 = 6$, $a_5 = 7$, $a_6 = 7$, $a_7 = 7$, $a_8 = 8$, $a_9 = 10$, $a_{10} = 12$, $a_{11} = 13$, $a_{12} = 13$, $a_{13} = 13$, $a_{14} = 14, \dots$

Hiệu liên tiếp: 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, ... lặp chu kỳ 6 với tổng 6. Vậy $a_{n+6} = a_n + 6$.

Chứng minh nhanh: đặt $b_n = a_n - n - 1$. Thay vào: $b_n = b_{n-1} - b_{n-2}$, và quy luật này cho $b_{n+3} = -b_n$, nên $b_{n+6} = b_n$. Do đó $a_{n+6} - (n+7) = a_n - (n+1)$, tức $a_{n+6} = a_n + 6$.

$100 = 6 \cdot 16 + 4$, nên $a_{100} = a_4 + 16 \cdot 6 = 6 + 96 = 102$. Đáp án (D).

Bây: tưởng $a_n \approx n$ nên chọn 100; dùng phần dư 4 nhưng lấy a_4 thành a_3 hoặc a_5 thì ra 100 hoặc 101.

Insight · Gặp truy hồi lại: tính 10–15 số hạng, xét **hiệu**; nếu hiệu tuần hoàn thì dãy “tăng đều theo từng chu kỳ”.

1 Exercises 1 • Foundation

Bài tập 1 • Nền tảng



- 4.1** In an arithmetic sequence, the first term is 5 and the third term is 17. What is the 20th term?
♦ (A) 119 (B) 125 (C) 131 (D) 137 (E) 233
- 4.2** The list 1000, 993, 986, 979, ... continues, each number being 7 less than the number before it. How many numbers in the list are positive?
♦ (A) 142 (B) 143 (C) 144 (D) 145 (E) 286
- 4.3** Beads are strung in the repeating pattern red, red, blue, yellow, blue, as shown. How many of the first 48 beads are blue?
♦



- (A) 16 (B) 18 (C) 19 (D) 20 (E) 24
- 4.4** The sequence 1, 6, 4, 9, 7, 12, 10, ... is formed by alternately adding 5 and subtracting 2. What is the 100th term?
♦♦ (A) 148 (B) 150 (C) 151 (D) 153 (E) 298
- 4.5** What is the sum of all the multiples of 4 between 10 and 100, inclusive?
♦♦ (A) 1144 (B) 1188 (C) 1232 (D) 1276 (E) 1288
- 4.6** One year, Lan's birthday, March 13, falls on a Saturday. The next year is a leap year (February has 29 days). On which day of the week is Lan's birthday in that next year?
♦♦ (A) Monday (B) Tuesday (C) Wednesday (D) Saturday (E) Sunday
- 4.7** A sheet of paper is 0.1 mm thick. It is folded in half, then folded in half again, and so on, 10 times in all. How thick, in millimeters, is the folded stack?
♦ (A) 1 (B) 2 (C) 10.24 (D) 51.2 (E) 102.4
- 4.8** In a geometric sequence, the ratio of each term to the previous term is 3, and the fourth term is 54. What is the sum of the first five terms?
♦♦ (A) 162 (B) 242 (C) 324 (D) 486 (E) 726
- 4.9** Unit squares are arranged in plus signs, as shown. Figure n has a center square and four arms, each made of n squares. Which figure has perimeter 100?
♦

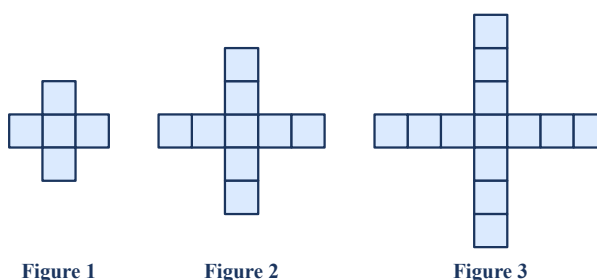


Figure 1

Figure 2

Figure 3

- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 24 (E) 25
- 4.10** The sequence 3, 8, 15, 24, 35, ... continues in the same pattern. What is its 50th term?
♦♦ (A) 2499 (B) 2500 (C) 2550 (D) 2600 (E) 2601
- 4.11** It is now 9:00 a.m. What time will it be 2026 hours from now?
♦ (A) 7:00 p.m. (B) 9:00 p.m. (C) 7:00 a.m. (D) 11:00 a.m. (E) 1:00 a.m.
- 4.12** The number of fish in a pond grows by 50% every year. After how many years will the number of fish first be more than 5 times the starting number?
♦♦ (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 10

2

Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi



- 4.13 In an arithmetic sequence, $a_3 + a_8 = 50$ and $a_5 = 22$. What is a_{20} ?

♦♦

(A) 100 (B) 106 (C) 108 (D) 112 (E) 118

- 4.14 Five integers form an increasing arithmetic sequence. Their sum is 100, and the sum of their squares is 2160. What is the largest of the five integers?

♦♦♦

(A) 20 (B) 22 (C) 24 (D) 26 (E) 28

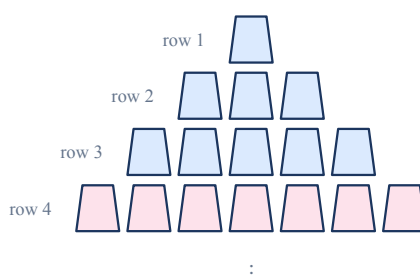
- 4.15 On the first day, Bình eats $\frac{1}{3}$ of a cake. On each following day, he eats $\frac{1}{3}$ of the cake that is left. At the end of which day is less than $\frac{1}{10}$ of the cake left for the first time?

♦♦

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

- 4.16 Paper cups are stacked in rows to make a tower, as shown. The top row has 1 cup, and each row has 2 more cups than the row above it. A tower made in this way uses 400 cups. How many cups are in its bottom row?

♦♦



(A) 20 (B) 39 (C) 40 (D) 41 (E) 79

- 4.17 A sequence is defined by $a_1 = 1$ and $a_{n+1} = \frac{1}{1 + a_n}$ for $n \geq 1$. What is a_{10} ?

♦♦♦

(A) $\frac{3}{5}$ (B) $\frac{21}{34}$ (C) $\frac{55}{89}$ (D) $\frac{89}{144}$ (E) $\frac{34}{55}$

- 4.18 Starting on Day 1, Lan saves 10 thousand đồng on Day 1, 20 thousand on Day 2, 30 thousand on Day 3, and so on. Minh saves 1 thousand đồng on Day 1, 2 thousand on Day 2, 4 thousand on Day 3, doubling each day. At the end of which day does Minh's total savings first exceed Lan's total savings?

♦♦♦

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

- 4.19 One of four friends — An, Bình, Chi, and Dũng — took the last key from the drawer. An says, “Bình took it.” Bình says, “Chi took it.” Chi says, “Bình is lying.” Dũng says, “I did not take it.” Exactly one of the four is telling the truth. Who took the key?

♦♦♦

(A) An (B) Bình
(C) Chi (D) Dũng
(E) It cannot be determined.

- 4.20** Coins are arranged in triangles: Figure n has n rows with $1, 2, \dots, n$ coins. The coins along the three sides of the triangle are grey, and the coins inside are white, as shown for Figure 6. How many white coins are in Figure 12?

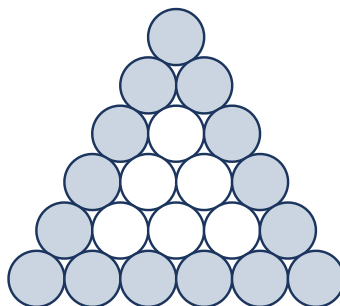
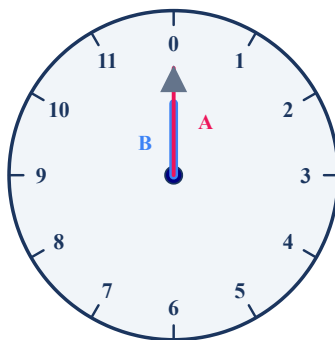


Figure 6

- (A) 45 (B) 55 (C) 66 (D) 78 (E) 91
- 4.21** The positive integers are colored in the repeating pattern red, red, blue, blue, blue: 1 and 2 are red, 3, 4, 5 are blue, 6 and 7 are red, 8, 9, 10 are blue, and so on. What is the sum of all the blue numbers from 1 to 100?
- (A) 3030 (B) 3090 (C) 3120 (D) 3150 (E) 3180
- 4.22** A dial has 12 positions, numbered 0 to 11 clockwise, as shown. Pointers A and B both start at 0. Every second, pointer A moves 5 positions clockwise and pointer B moves 3 positions counterclockwise. At how many of the moments $1, 2, 3, \dots, 60$ seconds after the start do the two pointers point to the same position?



- (A) 5 (B) 10 (C) 12 (D) 15 (E) 20
- 4.23** Today is Monday. What day of the week will it be 2^{100} days from today?
- (A) Saturday (B) Sunday (C) Monday (D) Tuesday (E) Wednesday
- 4.24** Mai writes $1, 2, 3, \dots$ and keeps a running total. She stops as soon as the total is greater than 2026. What is the last number she writes?
- (A) 45 (B) 62 (C) 63 (D) 64 (E) 65
- 4.25** Each year, Ms. Hoa's salary increases by the same amount. Her salary in her 3rd year is 20% more than her salary in her 1st year. By what percent is her salary in her 11th year more than her salary in her 1st year?
- (A) 80% (B) 90% (C) 100% (D) 120% (E) 149%
- 4.26** A knight on a chessboard moves 2 squares in one direction (horizontal or vertical) and then 1 square in a perpendicular direction. A knight makes exactly n moves and ends on the square where it started. Which of the following could be n ?
- (A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 15 (E) 2025

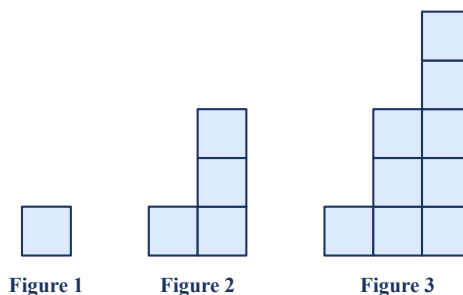
3

Exercises 3 • Challenge

Bài tập 3 • Thử thách



- 4.27** In an arithmetic sequence, the 7th term is twice the 3rd term, and the terms are not all zero. Let S_k be the sum of the first k terms. What is $\frac{S_{13}}{S_5}$?
- (A) 2 (B) $\frac{13}{5}$ (C) $\frac{26}{5}$ (D) 6 (E) $\frac{52}{5}$
- 4.28** Start with 2026. To get the next number, take the number formed by all digits except the last one, and add 4 times the last digit. (For example, from 2026 we get $202 + 4 \cdot 6 = 226$, and from 53 we get $5 + 4 \cdot 3 = 17$.) Continuing in this way, 2026 is the 1st number. What is the 2026th number?
- (A) 7 (B) 19 (C) 22 (D) 28 (E) 31
- 4.29** Five children — Khoa, Linh, Mai, Nam, and Tú — all have different heights. Mai always tells the truth. Every child who is taller than Mai also tells the truth, and every child who is shorter than Mai lies.
- Khoa: "I am taller than Tú."
 Linh: "Tú is taller than me."
 Mai: "Exactly two of us are taller than me."
 Nam: "Khoa is the next taller child after me."
 Tú: "Linh is the next taller child after Nam."
 Who is the tallest?
- (A) Khoa (B) Linh (C) Mai (D) Nam (E) Tú
- 4.30** Figure n is made of n columns of unit squares standing side by side on a line, with heights $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$ from left to right, as shown. What is the smallest n for which the area of Figure n is more than 10 times its perimeter?



- (A) 56 (B) 57 (C) 58 (D) 59 (E) 60
- 4.31** A sequence of positive integers has the property that each term after the second is the sum of the two terms before it. The 8th term is 2026. How many such sequences are there?
- (A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 40 (E) 77
- 4.32** A digital clock shows times from 1:00 to 12:59, with no leading zero for the hour (for example, 2:46 as shown, and 12:34). For how many of these times do the digits, read from left to right, form an arithmetic sequence? (The common difference may be positive, negative, or zero, as in 2:46, 5:31, and 4:44.)

Integer answer • Đáp số nguyên

4.33 The fractions

♦♦♦♦

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \dots$$

are listed in groups: for each denominator $q = 2, 3, 4, \dots$, the fractions $\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}$ are listed in order (fractions are not reduced). What is the sum of the first 100 fractions in the list?

- (A) 45 (B) 47 (C) $\frac{97}{2}$ (D) 49 (E) 50

4.34 How many increasing arithmetic sequences of three terms have all three terms in the set $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ and a sum that is a multiple of 9?

♦♦♦♦

Integer answer · Đáp số nguyên

4.35 January 1, 2027, is a Friday, and 2027 is not a leap year. In which year will the calendar of 2027 next be used again exactly, that is, the next year that also begins on a Friday and is not a leap year? (Leap years between 2027 and 2099 are the years divisible by 4.)

♦♦♦♦

- (A) 2032 (B) 2033 (C) 2034 (D) 2038 (E) 2055

4.36 The positive integers whose digits strictly increase from left to right are listed in increasing order:

♦♦♦♦

$1, 2, \dots, 9, 12, 13, \dots, 19, 23, 24, \dots, 89, 123, 124, \dots$ What is the 200th number in the list?

- (A) 2379 (B) 2389 (C) 2456 (D) 2479 (E) 3589

Chapter 5

8020 AMC 8 Mastery

Number Theory — Divisibility, Primes & Factors

Số học — chia hết, số nguyên tố & ước

Số học (number theory) có mặt trong mọi đề AMC 8, thường 3–5 câu, và nhiều câu khó cuối đề cũng dựa trên nó.

Chương này xây bộ công cụ cốt lõi: dấu hiệu chia hết và quy tắc tổ hợp tuyến tính, số nguyên tố và phân tích ra thừa số, đếm ước và tổng các ước, ƯCLN – BCNN (kể cả thuật toán Euclid), giai thừa, chữ số 0 tận cùng và số chính phương. Học sinh hay mất điểm vì không phân tích đến tận số nguyên tố, quên số 25 gộp hai thừa số 5, hay nhầm BCNN với tích. Số dư và câu đố chữ số học ở Chương 6.

✓ Dùng thành thạo dấu hiệu chia hết cho 2, 3, 4, 5, 8, 9, 11 và ghép chúng cho số chia hợp số.

✓ Phân tích ra thừa số nguyên tố; dùng tính chẵn lẻ của số nguyên tố.

✓ Tìm ƯCLN, BCNN qua số mũ; nhận dạng bài ƯCLN/BCNN trong lời văn.

✓ Dùng quy tắc “chia hết hai số thì chia hết tổ hợp” để khử ẩn và tìm ƯCLN của biểu thức chứa n .

✓ Đếm ước, tính tổng ước, giải bài toán ngược “có đúng k ước”, dùng ghép cặp ước.

✓ Đếm số mũ của số nguyên tố trong $n!$ và số chữ số 0 tận cùng; xử lý điều kiện chính phương, lập phương.

divisor / factor · ước

multiple · bội

divisible by · chia hết cho

prime · số nguyên tố

composite · hợp số

prime factorization · phân tích ra thừa số nguyên tố

greatest common divisor (gcd) · ước chung lớn nhất

least common multiple (lcm) · bội chung nhỏ nhất

relatively prime · nguyên tố cùng nhau

perfect square / cube · số chính phương / lập phương

factorial · giai thừa

trailing zeros · chữ số 0 tận cùng

proper divisor · ước thực sự

Euclidean algorithm · thuật toán Euclid

K 5.1 Divisibility and Divisibility Tests

Chia hết và dấu hiệu chia hết

Số học (number theory) chiếm 3–5 câu mỗi đề AMC 8. Hầu hết các câu ấy không đòi hỏi định lý cao siêu mà đòi hỏi ba thói quen: **phân tích ra thừa số nguyên tố** trước khi làm gì khác, **dùng dấu hiệu chia hết** thay cho phép chia dài, và **biến điều kiện “chia hết” thành phương trình** để suy luận. Chương này xây đủ bộ công cụ đó; số dư, đồng dư và câu đố chữ số để dành cho Chương 6.

Definition — Divisibility (chia hết)

For integers $a \neq 0$ and b , we say a **divides** b , written $a \mid b$, if $b = ak$ for some integer k . Then a is a **divisor** (factor) of b and b is a **multiple** of a .

Đọc $a \mid b$ là “ a là ước của b ” hay “ b chia hết cho a ”. Chú ý: 0 chia hết cho mọi số khác 0 ($0 = a \cdot 0$), và 1 là ước của mọi số.

Theorem — Two rules that do most of the work

(1) If $a \mid b$ and $b \mid c$, then $a \mid c$. (2) If $a \mid b$ and $a \mid c$, then $a \mid (mb + nc)$ for all integers m, n — in particular $a \mid b + c$ and $a \mid b - c$.

Chứng minh (2): $b = ak$, $c = al$ nên $mb + nc = a(mk + nl)$. Quy tắc (2) là vũ khí mạnh nhất của mục này: nếu 7 chia hết hai biểu thức thì 7 chia hết mọi tổ hợp của chúng — ta được phép **nhân lên rồi cộng/trừ** để khử bớt ẩn.

Example 5.1

Nhân lên để khử ẩn

Positive integers a and b are such that $2a + 3b$ is a multiple of 7. Which of the following must also be a multiple of 7?

- (A) $a + b$ (B) $a + 5b$ (C) $3a + 2b$ (D) $4a + b$ (E) $5a + 3b$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) $a + 5b$

Ta muốn khử bớt một ẩn. Nhân $2a + 3b$ với 4: $8a + 12b$ cũng chia hết cho 7 (quy tắc 2). Trừ đi $7a + 7b$ (hiển nhiên chia hết cho 7): $8a + 12b - 7a - 7b = a + 5b$ chia hết cho 7. Đáp án (B).

Các lựa chọn khác không bắt buộc: thử $a = 2, b = 1$ thì $2a + 3b = 7$, nhưng $a + b = 3, 3a + 2b = 8, 4a + b = 9, 5a + 3b = 13$ đều không chia hết cho 7.

Insight · Muốn biết “biểu thức nào cũng chia hết”, hãy **nhân biểu thức đã biết với một số rồi trừ bội của 7** — đừng thử từng cặp số.

Divisor	Test (dấu hiệu)	Vì sao
2, 5, 10	last digit	10 chia hết cho 2, 5, 10
4, 25	last two digits	100 chia hết cho 4 và 25
8, 125	last three digits	$1000 = 8 \cdot 125$
3, 9	sum of digits	$10^k - 1 = 99 \dots 9$ chia hết cho 9
11	alternating sum of digits (from the right: +, −, +, ...)	$10 \equiv -1: 10^k + 1$ hoặc $10^k - 1$ chia hết cho 11

Theorem — Why the digit-sum test works

$N = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = (a + b + c + d) + (999a + 99b + 9c)$. The bracket $999a + 99b + 9c$ is a multiple of 9, so N and $a + b + c + d$ differ by a multiple of 9: $9 \mid N \iff 9 \mid a + b + c + d$ (and the same for 3).

Tương tự với 11: $N = (d - c + b - a) + (11c + 99b + 1001a)$ và $11 \mid 11, 99, 1001$, nên $11 \mid N \iff 11 \mid (d - c + b - a)$ — **tổng đan dấu** tính từ hàng đơn vị.

Key Idea — Composite divisors: split into coprime parts

If $\gcd(m, n) = 1$, then $mn \mid N \iff m \mid N$ and $n \mid N$. So test 12 as 3 and 4; 36 as 4 and 9; 88 as 8 and 11; 72 as 8 and 9. Hai phần phải **nguyên tố cùng nhau** (không có ước chung lớn hơn 1). Cách chắc nhất: tách số chia thành các lũy thừa của những số nguyên tố khác nhau, ví dụ $360 = 8 \cdot 9 \cdot 5$.

Common Trap — Chia hết cho 4 và cho 6 KHÔNG suy ra chia hết cho 24

Số 36 chia hết cho 4 và cho 6 nhưng không chia hết cho 24. Lý do: 4 và 6 có chung thừa số 2, nên từ hai điều kiện chỉ suy ra được $\text{lcm}(4, 6) = 12 \mid N$. Muốn thử 24 phải thử **8 và 3**.

Example 5.2

Ghép hai dấu hiệu

Which of the following numbers is divisible by 88?

- (A) 530 184 (B) 531 520 (C) 532 356 (D) 536 646 (E) 538 600

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 531 520

$88 = 8 \cdot 11$ với $\gcd(8, 11) = 1$, nên thử riêng 8 (ba chữ số cuối) và 11 (tổng đan dấu từ hàng đơn vị).

Số	3 chữ số cuối : 8	Tổng đơn dấu	Kết luận
530 184	$184 = 8 \cdot 23 \checkmark$	$4 - 8 + 1 - 0 + 3 - 5 = -5 \times$	không
531 520	$520 = 8 \cdot 65 \checkmark$	$0 - 2 + 5 - 1 + 3 - 5 = 0 \checkmark$	CÓ
532 356	356 chỉ chia hết cho 4 $\times$	0 $\checkmark$	không
536 646	số chẵn nhưng 46 không chia hết cho 4 $\times$	0 $\checkmark$	không
538 600	$600 = 8 \cdot 75 \checkmark$	$0 - 0 + 6 - 8 + 3 - 5 = -4 \times$	không

Đáp án (B). Bấy: (C) đạt dấu hiệu 4 và 11 (tức chia hết cho 44, chưa đủ 88); (E) có tổng chữ số 22 chia hết cho 11 — nhằm tổng thường với tổng đơn dấu.

Insight • Số chia hợp số $\rightarrow$ tách thành **các lũy thừa nguyên tố rời nhau** rồi thử từng dấu hiệu; với 11 luôn dùng tổng **đơn dấu**.

Tip — Không chia dài trong phòng thi

AMC 8 không cho máy tính. Khi gặp “ N có chia hết cho k không”, hãy (1) tách k thành lũy thừa nguyên tố, (2) dùng dấu hiệu chữ số, (3) nếu N là tích hay tổng có cấu trúc thì dùng quy tắc (2): ví dụ $7 \mid 7000 + 21$ nên $7 \mid 7021$ mà không cần chia.

K 5.2 Primes and Prime Factorization

Số nguyên tố và phân tích ra thừa số nguyên tố

Definition — Prime and composite (số nguyên tố, hợp số)

An integer $p > 1$ is **prime** if its only positive divisors are 1 and p . An integer $n > 1$ that is not prime is **composite**. The number 1 is neither prime nor composite.

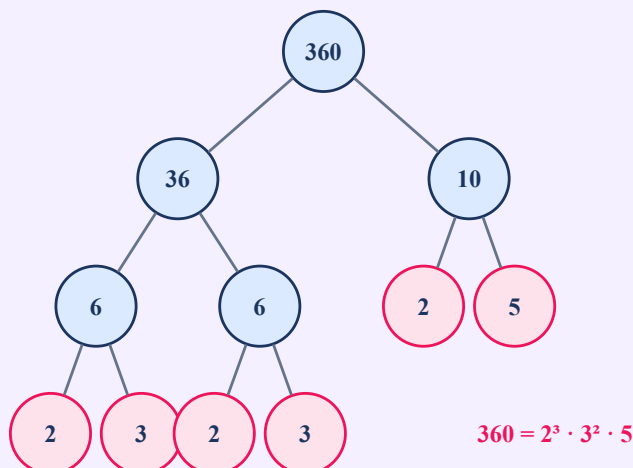
25 số nguyên tố nhỏ hơn 100: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Nên thuộc lòng — AMC 8 hỏi chúng rất thường xuyên.

Theorem — Fundamental Theorem of Arithmetic (định lý cơ bản của số học)

Every integer $n > 1$ can be written as a product of primes, $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ with $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, and this **prime factorization** is unique.

Cách tìm: tách dần bằng **cây thừa số** (factor tree). Tách cách nào cũng ra cùng một bộ lá — đó là nội dung của chữ “duy nhất”.

Hình: $360 = 36 \cdot 10 = (6 \cdot 6)(2 \cdot 5) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.



Theorem — Testing whether n is prime

If $n > 1$ has no prime divisor p with $p \leq \sqrt{n}$, then n is prime.

Lý do: nếu $n = ab$ với $1 < a \leq b$ thì $a^2 \leq ab = n$, nên $a \leq \sqrt{n}$, và một ước nguyên tố của a cũng $\leq \sqrt{n}$. Vậy để kiểm tra $n < 100$ chỉ cần thử 2, 3, 5, 7; với $n < 400$ thử thêm 11, 13, 17, 19. Gạch dẫn bội của 2, 3, 5, 7 trong bảng 1–50 là được **sàng Eratosthenes** (hình).

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

Common Trap — “Số nguyên tố giả”

Những số lẻ không chia hết cho 5 trông “có vẻ nguyên tố” nhưng không phải: $51 = 3 \cdot 17$, $57 = 3 \cdot 19$, $87 = 3 \cdot 29$, $91 = 7 \cdot 13$, $119 = 7 \cdot 17$, $133 = 7 \cdot 19$, $143 = 11 \cdot 13$. Luôn thử 3 (tổng chữ số) và 7 trước khi kết luận.

Key Idea — 2 is the only even prime — parity arguments

If a sum or difference of primes has the “wrong” parity, one of the primes must be 2.

Mọi số nguyên tố khác 2 đều lẻ. Tổng hai số lẻ là số chẵn, nên nếu tổng (hoặc hiệu) của hai số nguyên tố là **số lẻ** thì một trong hai số phải là 2. Đây là mẹo “mở khoá” của rất nhiều bài về số nguyên tố.

Example 5.3**Tính chẵn lẻ của số nguyên tố**

Primes p and q satisfy $3p + 5q = 61$. What is the sum of all possible values of $p + q$?

- (A) 13 (B) 19 (C) 30 (D) 32 (E) 36

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 32

61 lẻ. Nếu p, q đều lẻ thì $3p$ và $5q$ đều lẻ và tổng là số chẵn — vô lý. Vậy $p = 2$ hoặc $q = 2$.

- $p = 2$: $5q = 55$, $q = 11$ (nguyên tố) ✓, $p + q = 13$.
- $q = 2$: $3p = 51$, $p = 17$ (nguyên tố) ✓, $p + q = 19$.

Tổng các giá trị: $13 + 19 = 32$. Đáp án (D).

Bẫy: chỉ thấy một nghiệm (thường là $p = 2$) rồi dừng, được 13 hoặc 19.

Insight · Phương trình với số nguyên tố mà về kia có **tính chẵn lẻ “lạ”** → một ẩn bằng 2; nhớ xét **cả hai** vị trí của số 2.

Example 5.4**Phân tích rồi ghép lại**

The product of the ages of several teenagers (each age is an integer from 13 to 19) is 55 692. What is the sum of their ages?

- (A) 48 (B) 58 (C) 62 (D) 64 (E) 66

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 62

Phân tích: $55\,692 = 4 \cdot 13\,923 = 4 \cdot 9 \cdot 1547 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$ (vì $1547 = 7 \cdot 221 = 7 \cdot 13 \cdot 17$).

Các tuổi từ 13 đến 19 có dạng: 13, $14 = 2 \cdot 7$, $15 = 3 \cdot 5$, $16 = 2^4$, $17, 18 = 2 \cdot 3^2$, 19. Thừa số 13 và 17 phải là chính tuổi 13 và 17. Thừa số 7 chỉ có trong 14, nên có một bạn 14 tuổi. Còn lại $2 \cdot 3^2 = 18$ — đúng là một tuổi. Không có thừa số 5

nên không ai 15 tuổi.

Các tuổi: 13, 14, 17, 18; tổng 62. Đáp án (C).

Insight · Bài “tích các số là ...” → **phân tích ra thừa số nguyên tố**, rồi đặt những thừa số nguyên tố “hiếm” (chỉ xuất hiện ở một số) trước.

Tip — Phân tích nhanh các số “năm thi”

Để AMC hay dùng số của năm: $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$, $2025 = 3^4 \cdot 5^2 = 45^2$, $2026 = 2 \cdot 1013$ (1013 nguyên tố), 2027 nguyên tố. Cũng nên nhớ $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, $1547 = 7 \cdot 13 \cdot 17$, $9999 = 3^2 \cdot 11 \cdot 101$.

K 5.3 Counting and Adding Divisors

Đếm ước và tính tổng các ước

Khi đã có phân tích $n = p^a q^b r^c \dots$, mọi câu hỏi về ước của n trở thành bài toán **chọn số mũ**: một ước của n chính là $p^x q^y r^z \dots$ với $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, ... Đếm ước = đếm số cách chọn số mũ (quy tắc nhân, Chương 7 sẽ học kỹ).

Theorem — Number of divisors (số ước)

If $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$, then n has $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$ positive divisors.

Số mũ của p_1 trong một ước có $a_1 + 1$ lựa chọn $(0, 1, \dots, a_1)$, tương tự với các số nguyên tố khác. Bảng dưới liệt kê đủ $4 \cdot 3 = 12$ ước của $72 = 2^3 \cdot 3^2$: cột là lũy thừa của 2, hàng là lũy thừa của 3.

×	1	2	4	8
1	1	2	4	8
3	3	6	12	24
9	9	18	36	72

Theorem — Sum of divisors (tổng các ước)

$\sigma(n) = (1 + p_1 + \dots + p_1^{a_1})(1 + p_2 + \dots + p_2^{a_2}) \dots (1 + p_k + \dots + p_k^{a_k})$.

Khai triển tích này, mỗi số hạng là đúng một ước của n , mỗi ước xuất hiện đúng một lần. Ví dụ với bảng của 72: tổng mỗi hàng là $(1 + 2 + 4 + 8) \cdot 3^j$, cộng ba hàng được $15 \cdot (1 + 3 + 9) = 195$.

Example 5.5

Ước có điều kiện → rút phần bắt buộc ra

How many positive divisors of 3600 are multiples of 10?

(A) 12

(B) 18

(C) 24

(D) 30

(E) 36

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 24

$3600 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. Ước là bội của 10 phải có ít nhất một thừa số 2 và một thừa số 5, nên có dạng $10k$ với $k \mid 3600/10 = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Số ước của 360: $(3 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 24$. Đáp án (C).

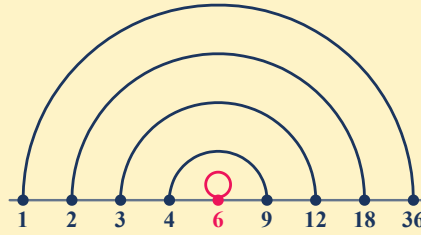
Bẫy: chỉ bắt buộc thừa số 5 mà quên thừa số 2 (cho số mũ của 2 chạy từ 0 đến 4) được $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$.

Insight · “Ước của n chia hết cho m ” ↔ “ước của n/m ” — **rút phần bắt buộc ra** rồi đếm ước của phần còn lại.

Key Idea — Divisors come in pairs

The divisors of n pair up as $d \leftrightarrow n/d$, and the two numbers in a pair multiply to n . A divisor is paired with itself only when $d = \sqrt{n}$. Hence $d(n)$ is **odd exactly when n is a perfect square**.

Hình: các ước của 36 ghép thành 4 cặp và ước 6 đứng một mình, nên 36 có 9 ước. Hệ quả hữu ích: nếu xếp các ước tăng dần $d_1 < d_2 < \dots < d_m$ thì $d_i \cdot d_{m+1-i} = n$; và đúng một nửa số ước (với n không chính phương) nhỏ hơn $\sqrt{n}$.

**Common Trap — Phải phân tích HẾT về số nguyên tố trước khi dùng công thức**

12^3 không có $3 + 1 = 4$ ước! Viết $12^3 = 2^6 \cdot 3^3$ nên $d = (6 + 1)(3 + 1) = 28$. Tương tự $6^2 \cdot 4 = 2^4 \cdot 3^2$ có 15 ước, không phải $(2 + 1)(1 + 1) = 6$. Công thức chỉ đúng khi các cơ số là **số nguyên tố khác nhau**.

Tip — Bài toán ngược: biết số ước, tìm dạng của n

Viết số ước thành tích các thừa số > 1 ; mỗi cách viết cho một “khuôn” số mũ. Ví dụ $d(n) = 12$: $12 = 12 \cdot 1$, $6 \cdot 2$, $4 \cdot 3$, $3 \cdot 2 \cdot 2$ ứng với $n = p^{11}$, $p^5 q$, $p^3 q^2$, $p^2 q r$. $d(n) = 3$ chỉ có p^2 ; $d(n) = 4$ có p^3 hoặc $p q$. Số nhỏ nhất theo một khuôn: gán số mũ lớn cho số nguyên tố nhỏ.

Example 5.6**Bài toán ngược: cùng số ước, nhiều khuôn**

A positive integer n has exactly 10 positive divisors. What is the sum of all possible values of the number of positive divisors of n^2 ?

- (A) 19 (B) 20 (C) 27 (D) 46 (E) 100

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (D) 46

$10 = 10$ hoặc $10 = 5 \cdot 2$, nên chỉ có hai khuôn: $n = p^9$ hoặc $n = p^4 q$ ($p \neq q$ nguyên tố).

- $n = p^9$: $n^2 = p^{18}$ có 19 ước.
- $n = p^4 q$: $n^2 = p^8 q^2$ có $9 \cdot 3 = 27$ ước.

Hai giá trị khả dĩ là 19 và 27; tổng 46. Đáp án (D).

Bấy: tưởng “bình phương thì số ước cũng bình phương” được 100; hoặc chỉ xét khuôn $p^4 q$ (khuôn quen) được 27.

Insight • Biết số ước $\rightarrow$ liệt kê đủ các khuôn số mũ (mỗi cách phân tích $d(n)$ thành tích các thừa số > 1), rồi xử lý từng khuôn.

K**5.4 Greatest Common Divisor and Least Common Multiple**

Ước chung lớn nhất và bội chung nhỏ nhất

Definition — gcd and lcm (ƯCLN, BCNN)

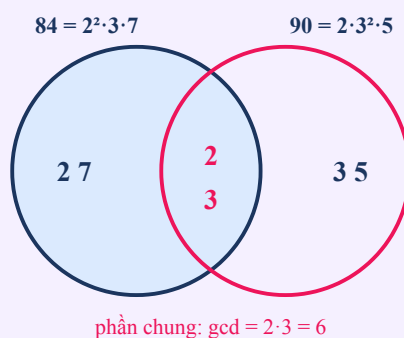
$\gcd(a, b)$ is the largest positive integer dividing both a and b ; $\text{lcm}(a, b)$ is the smallest positive integer that is a multiple of both. If $\gcd(a, b) = 1$, then a and b are **relatively prime**.

“Nguyên tố cùng nhau” (relatively prime, coprime) không có nghĩa là hai số đều nguyên tố: 8 và 15 nguyên tố cùng nhau.

Theorem – gcd and lcm from prime factorizations

Write a and b with the same primes (allowing exponent 0). Then $\gcd(a, b)$ takes the **smaller** exponent of each prime, and $\text{lcm}(a, b)$ takes the **larger** one.

Ví dụ $84 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7$, $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$: $\gcd = 2 \cdot 3 = 6$, $\text{lcm} = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1260$. Sơ đồ Venn: phần chung là ƯCLN, cả hai hình tròn gộp lại là BCNN.

**Theorem – $\gcd \times \text{lcm} = \text{product}$ (for two numbers)**

For positive integers a, b : $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = ab$.

Với từng số nguyên tố, $\min(x, y) + \max(x, y) = x + y$. Kiểm tra: $6 \cdot 1260 = 7560 = 84 \cdot 90 \checkmark$.

Theorem – Euclidean algorithm (thuật toán Euclid)

$\gcd(a, b) = \gcd(a - b, b)$; repeating, $\gcd(a, b) = \gcd(b, r)$ where r is the remainder when a is divided by b .

Mọi ước chung của a và b cũng chia hết $a - b$ (quy tắc 2 ở mục 5.1), và ngược lại. Hình học: cắt hình chữ nhật 30×12 thành các hình vuông lớn nhất có thể; hình vuông cuối cùng có cạnh $\gcd(30, 12) = 6$. Thuật toán này mạnh nhất khi các số có **chữ**: $\gcd(n, n + 12) = \gcd(n, 12)$.

**Example 5.7****Thuật toán Euclid với biểu thức chứa n**

For how many integers n with $1 \leq n \leq 60$ is $\gcd(n, n + 12) = 4$?

(A) 5

(B) 10

(C) 12

(D) 15

(E) 20

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 10

Theo thuật toán Euclid, $\gcd(n, n + 12) = \gcd(n, 12)$. Cần $\gcd(n, 12) = 4$, tức là $4 \mid n$ nhưng $3 \nmid n$ (nếu $3 \mid n$ thì ƯCLN là 12; 8 không phải ước của 12 nên không cần xét).

Bội của 4 trong $[1, 60]$: 15 số; trong đó bội của 12: 5 số. Còn $15 - 5 = 10$. Đáp án (B).

Bây: chỉ đếm bội của 4 được 15, quên loại các bội của 12 (khi đó ƯCLN bằng 12, không phải 4).

Insight · Gặp $\gcd$ của hai biểu thức chứa n : **trừ bội của nhau** cho tới khi một bên là hằng số.

Example 5.8

BCNN trong bài toán lịch

Starting on Sunday, January 1 (day 1), Hà waters the garden every 4 days (days 1, 5, 9, ...) and cleans the fish tank every 6 days (days 1, 7, 13, ...). In the 365 days of the year, on how many Sundays does she do both jobs?



(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 7

(E) 15

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 5

Hai việc trùng nhau khi $d - 1$ là bội chung của 4 và 6, tức bội của $\text{lcm}(4, 6) = 12$. Ngày Chủ nhật khi $d - 1$ là bội của 7. Cả ba điều kiện: $d - 1$ là bội của $\text{lcm}(12, 7) = 84$.

$d - 1 \in \{0, 84, 168, 252, 336\}$ (số tiếp theo $420 > 364$): ngày 1, 85, 169, 253, 337 — có 5 ngày. Đáp án (C).

Bẫy: dùng $4 \cdot 6 = 24$ thay cho BCNN 12, được $\text{lcm}(24, 7) = 168$ và chỉ 3 ngày; quên ngày 1 được 4.

Insight · “Lặp lại theo chu kỳ, khi nào trùng nhau?” → BCNN của các chu kỳ (không phải tích, trừ khi chúng nguyên tố cùng nhau).

Common Trap — Công thức tích chỉ đúng cho HAI số

Với ba số 2, 4, 6: $\text{gcd} = 2$, $\text{lcm} = 12$, tích $\text{gcd} \cdot \text{lcm} = 24$ nhưng $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$. Với ba số trở lên, quay về cách “số mũ nhỏ nhất / lớn nhất” cho từng số nguyên tố.

Tip — Nhận dạng ƯCLN hay BCNN qua lời văn

“Cắt thành các phần bằng nhau, lớn nhất có thể”, “chia đều thành nhiều nhóm nhất”, “lát gạch vuông lớn nhất” → ƯCLN. “Lần tiếp theo cùng lúc”, “trùng nhau lần đầu”, “hình vuông nhỏ nhất ghép từ các viên gạch” → BCNN.

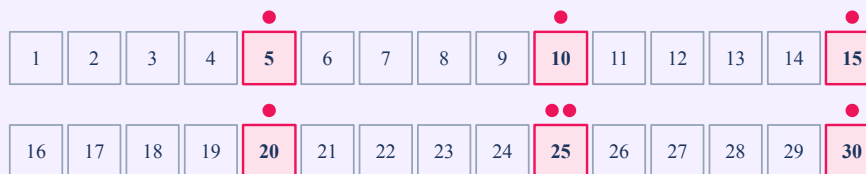
K 5.5 Factorials, Perfect Powers and Trailing Zeros

Giai thừa, số chính phương – lập phương và chữ số 0 tận cùng

Theorem — Exponent of a prime in $n!$ (công thức Legendre)

The exponent of the prime p in $n! = 1 \cdot 2 \cdots n$ is $\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^3} \right\rfloor + \cdots$

$\lfloor n/p \rfloor$ đếm các bội của p (mỗi số góp ít nhất một thừa số p), $\lfloor n/p^2 \rfloor$ đếm các bội của p^2 (góp thêm một thừa số nữa), ... Hình: trong 30! có 6 bội của 5, riêng 25 góp hai, nên số mũ của 5 là $6 + 1 = 7$.



Key Idea — Trailing zeros (số chữ số 0 tận cùng)

The number of zeros at the end of a positive integer N is the smaller of the exponents of 2 and 5 in N . For $N = n!$ the exponent of 5 is always the smaller one.

Mỗi chữ số 0 tận cùng là một thừa số $10 = 2 \cdot 5$. Trong $n!$ số chẵn nhiều hơn hẳn bội của 5, nên chỉ cần đếm thừa số 5. Ví dụ 30! tận cùng bởi đúng 7 chữ số 0.

Common Trap — Hai cái bẫy về chữ số 0

(1) Quên số 25, 50, 75, 100 góp **hai** thừa số 5 (125 góp ba): $100!$ có $20 + 4 = 24$ chữ số 0, không phải 20. (2) Với tích **không phải giai thừa** thì phải đếm cả 2 và 5: tích $5 \cdot 15 \cdot 25 \cdot 35$ toàn số lẻ nên **không** có chữ số 0 nào ở cuối.

Example 5.9**Tách thừa số chung trước khi đếm**

How many zeros are at the end of the number $100! - 99!$?

(A) 2 (B) 21 (C) 22 (D) 23 (E) 24

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 22

Đặt thừa số chung: $100! - 99! = 99! \cdot (100 - 1) = 99! \cdot 99$.

$99 = 3^2 \cdot 11$ không có thừa số 2 hay 5, nên số chữ số 0 tận cùng bằng của $99!$: số mũ của 5 là $\lfloor 99/5 \rfloor + \lfloor 99/25 \rfloor = 19 + 3 = 22$ (thừa số 2 dư dả). Đáp án (C).

Bẫy: trả lời số chữ số 0 của $100!$ là 24.

Insight · Hiệu/tổng của các giai thừa → **đặt giai thừa nhỏ nhất làm thừa số chung**, phần còn lại thường là một số nhỏ.

Theorem — Perfect squares and cubes (số chính phương, số lập phương)

A positive integer is a perfect square if and only if every exponent in its prime factorization is even; a perfect cube if and only if every exponent is a multiple of 3.

Vì $(p^a q^b)^2 = p^{2a} q^{2b}$, và ngược lại nếu mọi số mũ chẵn thì lấy một nửa số mũ sẽ được căn bậc hai. Ví dụ $2025 = 3^4 \cdot 5^2 = (3^2 \cdot 5)^2 = 45^2$.

Example 5.10**Điều kiện số mũ của hai lũy thừa bằng nhau**

How many ordered pairs (a, b) of positive integers satisfy $a^2 = b^3$ and $a < 1000$?

(A) 3 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 31

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 9

Với mỗi số nguyên tố p , gọi số mũ của p trong a và b là x và y . Từ $a^2 = b^3$: $2x = 3y$, nên x chia hết cho 3 và y chia hết cho 2. Vậy a là **lập phương**, b là **chính phương**: $a = t^3$, $b = t^2$ với cùng một số nguyên dương t (vì $x = 3s$, $y = 2s$ với cùng s).
 $t^3 < 1000 \iff t \leq 9$. Có 9 cặp: $(1, 1), (8, 4), (27, 9), \dots, (729, 81)$. Đáp án (C).

Bẫy: quên cặp $(1, 1)$ được 8; đếm các số chính phương nhỏ hơn 1000 (vì " a^2 ") được 31.

Insight · Đẳng thức giữa các lũy thừa → so sánh **số mũ của từng số nguyên tố**; $2x = 3y$ buộc x là bội của 3 và y là bội của 2.

Tip — Số nhân (chia) nhỏ nhất để được lũy thừa

Muốn kN là số chính phương với k nhỏ nhất: làm tròn **lên** mỗi số mũ tới số chẵn gần nhất, k là phần bù. Muốn N/k chính phương: làm tròn **xuống**. Ví dụ $N = 2^5 \cdot 3 \cdot 7^2$: nhân thêm $2 \cdot 3 = 6$ (được $2^6 \cdot 3^2 \cdot 7^2$) hoặc chia cho 6 (được $2^4 \cdot 7^2$).

E Worked Examples — Competition Level**Ví dụ mẫu mức thi đấu**

Hai ví dụ dưới ở mức câu 21–25 của AMC 8 (và một chút AMC 10). Hãy tự làm ít nhất 10 phút trước khi đọc lời giải.

Example 5.11**Ghép cặp để tính tổng**

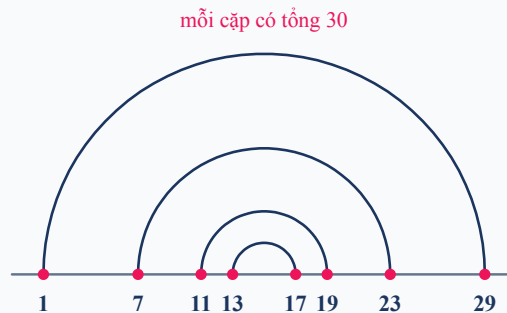
What is the sum of all positive integers less than 300 that are relatively prime to 300?

(A) 6000 (B) 9000 (C) 11 700 (D) 12 000 (E) 24 000

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 12 000

Đếm. $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$. Số nguyên tố cùng nhau với 300 là số không chia hết cho 2, 3, 5. Trong 1–300: bỏ số chẵn còn 150; trong 150 số lẻ, một phần ba chia hết cho 3, còn 100; trong 100 số này, một phần năm chia hết cho 5, còn 80 số. (Mỗi bước đúng vì 300 chia hết cho $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$, nên các số dư phân bố đều.)

Ghép cặp. Nếu k nguyên tố cùng nhau với 300 thì $300 - k$ cũng vậy (một ước chung của $300 - k$ và 300 sẽ chia hết k). Ghép k với $300 - k$: 80 số tạo thành 40 cặp, mỗi cặp có tổng 300 (không số nào tự ghép với mình vì 150 chia hết cho 2). Tổng = $40 \cdot 300 = 12\,000$. Đáp án (D). Hình minh họa cùng ý tưởng với 30: tám số 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 ghép thành 4 cặp tổng 30.



Bây: đếm đúng 80 số rồi nhân với 300 (quên rằng mỗi **cặp** mới có tổng 300) được 24 000.

Insight · Tập số đối xứng qua $n/2$ (vì $\gcd(k, n) = \gcd(n - k, n)$) → **ghép k với $n - k$** : tổng = (số phần tử) $\times n/2$.

Example 5.12

Tách theo từng số nguyên tố

How many ordered triples (a, b, c) of positive integers satisfy $\text{lcm}(a, b) = 12$, $\text{lcm}(b, c) = 18$, and $\text{lcm}(a, c) = 36$?

(A) 4

(B) 9

(C) 12

(D) 16

(E) 27

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 9

Mọi số đều là ước của 36, nên $a = 2^{x_1}3^{y_1}$, $b = 2^{x_2}3^{y_2}$, $c = 2^{x_3}3^{y_3}$. BCNN lấy số mũ lớn nhất, nên điều kiện **tách rời** thành một hệ cho số mũ của 2 và một hệ cho số mũ của 3; nhân số nghiệm hai hệ.

Số mũ của 2 ($12 = 2^2 \cdot 3$, $18 = 2 \cdot 3^2$, $36 = 2^2 \cdot 3^2$): $\max(x_1, x_2) = 2$, $\max(x_2, x_3) = 1$, $\max(x_1, x_3) = 2$. Hệ thứ hai cho $x_2, x_3 \leq 1$, nên từ hệ thứ nhất $x_1 = 2$. Còn $\max(x_2, x_3) = 1$: $(x_2, x_3) \in \{(0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$ — 3 cách.

Số mũ của 3: $\max(y_1, y_2) = 1$, $\max(y_2, y_3) = 2$, $\max(y_1, y_3) = 2$. Hệ thứ nhất cho $y_1, y_2 \leq 1$, nên $y_3 = 2$; còn $\max(y_1, y_2) = 1$: 3 cách.

Tổng cộng $3 \cdot 3 = 9$ bộ. Đáp án (B).

Bây: thấy $x_1 = 2$, $y_3 = 2$ rồi tưởng các số mũ còn lại tùy ý trong $\{0, 1\}$ được $4 \cdot 4 = 16$, quên điều kiện “lớn nhất phải bằng đúng 1”.

Insight · Điều kiện về ƯCLN/BCNN **tách rời theo từng số nguyên tố**: giải từng hệ số mũ nhỏ rồi nhân kết quả (quy tắc nhân).

1 Exercises 1 · Foundation

Bài tập 1 · Nền tảng



5.1 Which of the following numbers has exactly 3 positive divisors?

- ♦ (A) 49 (B) 50 (C) 64 (D) 81 (E) 98

5.2 What is the largest prime factor of 2431?

- ♦ (A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 19 (E) 23

5.3 How many positive divisors does 6^4 have?

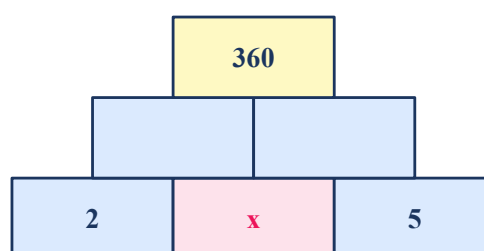
- ♦ (A) 5 (B) 8 (C) 16 (D) 25 (E) 36

- 5.4** ♦♦ Linh crosses out every number in the chart that is a multiple of 2, a multiple of 3, or a multiple of 5 (this includes 2, 3, and 5 themselves). She also crosses out 1. How many numbers are not crossed out?

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

- 5.5** ♦ In the pyramid shown, each number in the upper rows is the product of the two numbers directly below it. What is the missing number x in the bottom row?



- (A) 6 (B) 8 (C) 9 (D) 12 (E) 18

- 5.6** ♦ What is the smallest prime number that divides $3^{11} + 5^{13}$?

- (A) 2 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 11

- 5.7** ♦ How many zeros are at the end of $45!$?

- (A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

- 5.8** ♦♦ Let $N = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$. What is the least positive integer k such that $\frac{N}{k}$ is a perfect square?

- (A) 2 (B) 5 (C) 10 (D) 15 (E) 30

- 5.9** ♦ Which of the following numbers is the product of three different primes?

- (A) 60 (B) 66 (C) 75 (D) 98 (E) 99

- 5.10** ♦♦ A proper divisor of n is a positive divisor other than n itself. Which of the following numbers is **less** than the sum of its proper divisors?

- (A) 16 (B) 21 (C) 25 (D) 32 (E) 36

- 5.11** ♦♦ How many of the integers from 2 to 50 have no prime factor other than 2 and 3?

- (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

- 5.12** ♦♦ Which of the following pairs could **not** be the greatest common divisor and the least common multiple, in that order, of two positive integers?

- (A) (4, 24) (B) (5, 60) (C) (6, 36) (D) (8, 36) (E) (9, 45)

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trạng tâm kỳ thi



- 5.13** ♦♦ Which of the following numbers is **not** a divisor of $\frac{30!}{28!}$?

- (A) 58 (B) 87 (C) 116 (D) 145 (E) 174

5.14 Which of the following numbers has the greatest number of positive divisors?

- ♦♦ (A) 96 (B) 100 (C) 108 (D) 120 (E) 125

5.15 For how many integers n with $1 \leq n \leq 100$ do n and 100 have exactly two positive divisors in common?

- ♦♦♦ (A) 20 (B) 25 (C) 28 (D) 30 (E) 40

5.16 Positive integers a , b , and c satisfy $ab = 24$, $bc = 54$, and $ca = 36$. What is $a + b + c$?

- ♦♦ (A) 19 (B) 20 (C) 21 (D) 23 (E) 25

5.17 How many three-digit positive integers are odd multiples of 77?

- ♦♦ (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 10 (E) 11

5.18 The table shows all twelve positive divisors of 200, arranged in rows and columns. What is the sum of the twelve numbers in the table?

×	1	2	4	8
1	1	2	4	8
5	5	10	20	40
25	25	50	100	200

- (A) 400 (B) 420 (C) 450 (D) 455 (E) 465

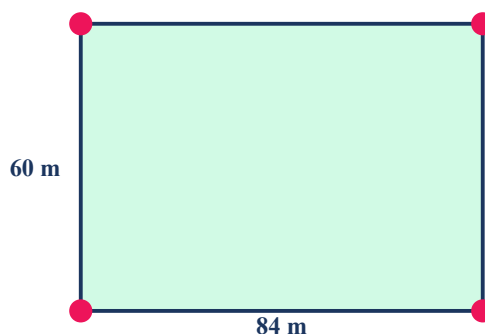
5.19 Which of the following could be the number of positive divisors of a perfect square?

- ♦♦ (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 10

5.20 For how many positive integers n does $n!$ end in exactly 5 zeros?

- ♦♦♦ (A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5 (E) 6

5.21 A rectangular garden measures 84 m by 60 m. Posts are placed along the edge of the garden, equally spaced, with a post at each corner. The distance between neighboring posts is a whole number of meters and is as large as possible. How many posts are used?



- (A) 20 (B) 24 (C) 25 (D) 28 (E) 30

5.22 The positive divisors of 360 are listed in increasing order: $d_1 < d_2 < d_3 < \dots$. What is $d_7 \cdot d_{18}$?

- ♦♦ (A) 120 (B) 180 (C) 240 (D) 360 (E) 720

5.23 One of the integers $1, 2, 3, \dots, 10$ is removed, and the least common multiple of the remaining nine integers is computed. What is the smallest possible value of this least common multiple?

- (A) 360 (B) 504 (C) 840 (D) 1260 (E) 2520

5.24 Primes p and q with $p > q$ satisfy $p^2 - q^2 = 72$. What is the sum of all possible values of p ?

- ♦♦♦ (A) 11 (B) 19 (C) 21 (D) 28 (E) 30

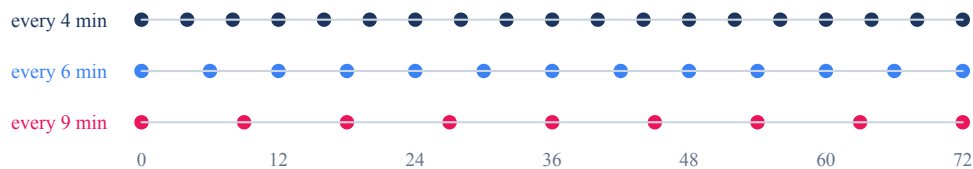
- 5.25** For how many positive divisors d of $10!$ is the quotient $\frac{10!}{d}$ an odd number?
 (A) 15 (B) 24 (C) 30 (D) 60 (E) 270
- 5.26** The product of the digits of a positive integer N is 2520. For the smallest such N , what is the sum of the digits of N ?
 (A) 22 (B) 24 (C) 26 (D) 27 (E) 29

3 Exercises 3 • Challenge

Bài tập 3 • Thử thách



- 5.27** How many positive integers less than 300 are multiples of 20 and have exactly 12 positive divisors?
 (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8
- 5.28** For how many integers n with $1 \leq n \leq 100$ is the number of positive divisors of n a prime number?
 (A) 25 (B) 29 (C) 30 (D) 31 (E) 32
- 5.29** What is the largest integer k such that 6^k divides the product $1! \cdot 2! \cdot 3! \cdots 10!$?
 Integer answer • Đáp số nguyên
- 5.30** How many composite numbers less than 100 are divisible by neither 2 nor 3?
 (A) 7 (B) 8 (C) 9 (D) 10 (E) 32
- 5.31** Three bells ring every 4 minutes, every 6 minutes, and every 9 minutes, respectively. They all ring together at noon. During the next 6 hours (up to and including 6:00 p.m.), how many times do **exactly two** of the bells ring together?



- (A) 30 (B) 40 (C) 50 (D) 60 (E) 70
- 5.32** How many positive divisors of 10^{10} are less than 10^5 ?
 Integer answer • Đáp số nguyên
- 5.33** For how many integers n with $1 \leq n \leq 200$ is the number of positive divisors of n that are multiples of 3 an odd number?
 Integer answer • Đáp số nguyên
- 5.34** A bakery sells cookies only in closed boxes of 6, 10, and 15. How many of the numbers $1, 2, 3, \dots, 50$ are numbers of cookies that *cannot* be bought exactly?
 (A) 4 (B) 11 (C) 15 (D) 29 (E) 36
- 5.35** What is the least positive integer n such that $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ is a multiple of 1000?
 Integer answer • Đáp số nguyên
- 5.36** How many three-digit positive integers have exactly 3 odd positive divisors?
 (A) 10 (B) 24 (C) 28 (D) 31 (E) 34

Chapter 6

8020 AMC 8 Mastery

Digits, Remainders & Number Puzzles

Chữ số, số dư & câu đố số

Chữ số và số dư là “đặc sản” của AMC 8: gần như đề nào cũng có câu đố chữ số, tìm chữ số bị che, chữ số tận cùng của một lũy thừa khổng lồ hay phép cộng bằng chữ. Chương này biến các câu đố đó thành đại số: viết số theo giá trị vị trí, đọc số dư bằng phép chia có dư và đồng dư, dùng tổng chữ số (phép thử 9 và 11), rồi giải phép tính bằng chữ theo từng cột. Học sinh hay mất điểm vì quên miền giá trị của chữ số, nhầm “đồng dư” với “bằng nhau”, và quên số nhỏ.

✓ Viết số dưới dạng $100a + 10b + c$, gom khối chữ số, dùng các đẳng thức đảo chữ số ($9(a - b)$, $99(a - c)$, 101 , 1001).

✓ Tính số dư và một/hai chữ số tận cùng của lũy thừa lớn bằng đồng dư, đưa cơ số về ± 1 và tìm chu kỳ.

✓ Giải phép tính bằng chữ và bài ô trống bằng phương trình từng cột, chặn chữ số đầu và ước lượng.

✓ Dùng phép chia có dư và quy tắc số dư của tổng, tích; giải hệ điều kiện “chia ... dư ...” bằng cách sàng và loại.

✓ Dùng $n \equiv S(n) \pmod{9}$ và tổng đan dấu modulo 11 để lọc ứng viên và tìm chữ số bị che.

place value · giá trị theo vị trí

digit · chữ số

units / tens / hundreds digit · chữ số hàng đơn vị / chục / trăm

leading digit · chữ số đầu tiên

quotient · thương

remainder · số dư

division algorithm · phép chia có dư

congruent modulo m · đồng dư theo môđun m

digit sum · tổng các chữ số

casting out nines · phép thử 9

alternating sum · tổng đan dấu

cryptarithm · phép tính bằng chữ

carry · số nhỏ

last two digits · hai chữ số tận cùng

K 6.1 Place Value — Turning Digits into Algebra

Giá trị theo vị trí — biến chữ số thành đại số

Mỗi đề AMC 8 thường có 2–4 câu về chữ số và số dư. Chúng trông như câu đố mẹo, nhưng hầu hết được giải bằng **một** thói quen: viết số thành tổng theo **giá trị vị trí** (place value), rồi giải phương trình với các chữ số là ẩn nguyên từ 0 đến 9. Điều kiện “là chữ số” cực kỳ mạnh: nó biến một phương trình nhiều ẩn thành vài trường hợp đếm được trên đầu ngón tay.

Definition — Decimal notation (cách viết thập phân)

$\overline{abc}$ denotes the number whose digits are a, b, c : $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, where $a, b, c \in \{0, 1, \dots, 9\}$ and the leading digit $a \neq 0$. Similarly $\overline{ab} = 10a + b$ and $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$.

Dấu gạch ngang trên đầu để phân biệt với tích: $\overline{ab}$ là số có hai chữ số, còn ab là a nhân b . Chữ số đầu tiên khác 0; các chữ số còn lại được phép bằng 0.

trăm	chục	đơn vị	
4	7	2	$472 = 4 \cdot 100 + 7 \cdot 10 + 2$
$\times 100$	$\times 10$	$\times 1$	$\overline{abc} = 100a + 10b + c$

Theorem – Five identities worth memorising

$$\overline{ab} + \overline{ba} = 11(a + b), \quad \overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b), \quad \overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c), \quad \overline{abab} = 101 \cdot \overline{ab}, \quad \overline{abcabc} = 1001 \cdot \overline{abc} = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot \overline{abc}.$$

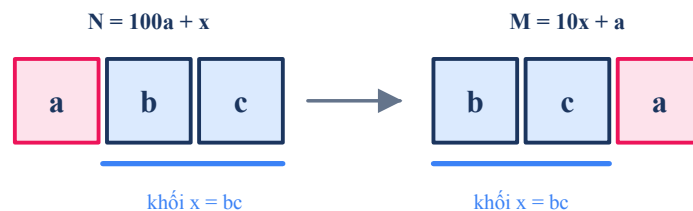
Chỉ cần khai triển: $\overline{abc} - \overline{cba} = (100a + 10b + c) - (100c + 10b + a) = 99a - 99c$ (chữ số giữa triệt tiêu). $\overline{abab} = 1000a + 100b + 10a + b = 101(10a + b)$. Nhờ vậy, hiệu của một số và số đảo ngược luôn chia hết cho 9, còn tổng của số hai chữ số và số đảo luôn chia hết cho 11.

Key Idea – Gom các chữ số thành khối (block)

Không nhất thiết mỗi chữ số là một ẩn. Nếu một nhóm chữ số đi cùng nhau trong cả hai số, hãy đặt cả khối là một ẩn: với $\overline{abc}$ và $\overline{bca}$, đặt $x = \overline{bc}$ thì $\overline{abc} = 100a + x$ và $\overline{bca} = 10x + a$. Phương trình chỉ còn hai ẩn, và điều kiện $0 \leq x \leq 99$ thay cho hai điều kiện riêng của b và c .

Example 6.1**Gom khối rồi chặn miền**

When the hundreds digit of a three-digit number is moved to the end (for example, 472 becomes 724), the new number is 459 greater than the original number. How many three-digit numbers have this property?



(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

(E) 6

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 4

Gọi số ban đầu là $N = 100a + x$ với $x = \overline{bc}$ ($0 \leq x \leq 99, 1 \leq a \leq 9$). Số mới là $M = 10x + a$ (hình).

$M - N = 9x - 99a = 459$, chia cả hai vế cho 9: $x - 11a = 51$, tức $x = 51 + 11a$.

Vì $x \leq 99$ nên $11a \leq 48, a \leq 4$. Với $a = 1, 2, 3, 4$ ta được $x = 62, 73, 84, 95$, tức các số 162, 273, 384, 495 (thử lại: $621 - 162 = 459$ ✓). Có 4 số. Đáp án (C).

Bẫy: quên điều kiện $x \leq 99$ và nhận cả $a = 5$ ($x = 106$ không phải khối hai chữ số) sẽ ra 5.

Insight · Khi một khối chữ số giữ nguyên thứ tự trong cả hai số, đặt cả khối là **một ẩn**; điều kiện “là khối hai chữ số” ($0 \leq x \leq 99$) chặn số trường hợp.

Common Trap – Ba lỗi khi dịch chữ số sang đại số

(1) Viết $\overline{ab}$ thành ab (tích) hoặc $a + b$. (2) Quên rằng chữ số đầu khác 0 nhưng chữ số giữa/cuối **được** bằng 0 — đảo ngược 70 được 07 = 7. (3) Giải ra $x = 106$ rồi vẫn nhận, quên rằng một “chữ số” hay một “khối” có giới hạn trên. Luôn ghi rõ miền giá trị của từng ẩn ngay khi đặt ẩn.

Example 6.2**Tổng mọi hoán vị: 222 lần tổng chữ số**

Khoa chose three different nonzero digits and planned to write all six three-digit numbers that use each of the three digits exactly once. He wrote only five of them, and the sum of those five numbers is 3194. Which number did he forget?

(A) 358

(B) 385

(C) 538

(D) 583

(E) 835

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (A) 358

Trong sáu hoán vị, mỗi chữ số đứng ở mỗi vị trí đúng 2 lần. Nếu tổng ba chữ số là s thì tổng sáu số là $2s \cdot 100 + 2s \cdot 10 + 2s \cdot 1 = 222s$.

Số bị quên là $m = 222s - 3194$, và $100 \leq m \leq 999$ nên $3294 \leq 222s \leq 4193$, tức $s \in \{15, 16, 17, 18\}$.

Số bị quên dùng đúng ba chữ số đó nên tổng chữ số của m phải bằng s :

$s = 15: m = 136$ (tổng chữ số 10 ✗); $s = 16: m = 358$ (tổng 16 ✓); $s = 17: m = 580$ (có chữ số 0 ✗); $s = 18: m = 802$ ✗.
 Vậy Khoa quên 358 (thử lại: $385 + 538 + 583 + 835 + 853 = 3194$ ✓). Đáp án (A).

Insight • Tổng của mọi hoán vị chữ số chỉ phụ thuộc **tổng các chữ số**; kết hợp chặn miễn với điều kiện “tổng chữ số của số còn thiếu phải khớp”.

Tip — Chặn trước, liệt kê sau

Trong phòng thi, sau khi lập phương trình chữ số, đừng thử mò. Dùng $0 \leq \text{chữ số} \leq 9$ (hoặc $10 \leq \overline{ab} \leq 99$) để **chặn** một ẩn vào vài giá trị, rồi mới liệt kê. Với AMC 8, số trường hợp sau khi chặn hầu như luôn dưới 10.

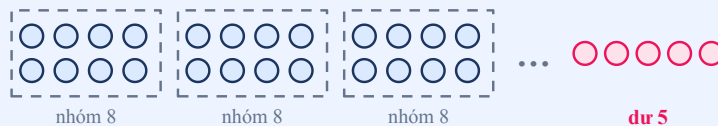
K 6.2 Remainders and the Division Algorithm

Số dư và phép chia có dư

Definition — Division algorithm (phép chia có dư)

For any integer a and positive integer b there are unique integers q (the **quotient**) and r (the **remainder**) with $a = bq + r$ with $0 \leq r < b$.

Hình: chia bút thành từng nhóm 8 chiếc; q là số nhóm đủ, r là số bút lẻ, luôn ít hơn 8. Hai điều kiện “ $0 \leq r$ ” và “ $r < b$ ” là một phần của định nghĩa: “29 chia 8 được 2 dư 13” là sai, vì $13 \geq 8$.



Theorem — Remainders of sums and products

If a leaves remainder r_1 and b leaves remainder r_2 when divided by m , then $a + b$, $a - b$ and ab leave the same remainders as $r_1 + r_2$, $r_1 - r_2$ and $r_1 r_2$ (after reducing these modulo m).

Chứng minh: $a = mq_1 + r_1$, $b = mq_2 + r_2$ nên $ab = m(mq_1q_2 + q_1r_2 + q_2r_1) + r_1r_2$ — phần trong ngoặc là bội của m . Nghĩa là: muốn biết số dư của một tổng/tích, chỉ cần làm việc với **các số dư**.

Example 6.3

Thay số bằng số dư

Ms. Lan has a box of pencils. When she puts the pencils into groups of 8, there are 5 pencils left over. She buys 3 more boxes, each holding exactly as many pencils as the first box. When she puts all of her pencils into groups of 8, how many pencils are left over?

(A) 0 (B) 1 (C) 4 (D) 5 (E) 7

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (C) 4

Gọi số bút một hộp là $N = 8q + 5$. Bốn hộp có $4N = 32q + 20$ chiếc.

$32q$ chia hết cho 8, còn $20 = 8 \cdot 2 + 4$. Vậy $4N$ chia 8 dư 4 (tức là $4 \cdot 5 = 20$ rồi rút gọn). Đáp án (C).

Bấy: nghĩ “số dư vẫn là 5” (quên nhân), hoặc chỉ tính số bút của 3 hộp mới mua ($3 \cdot 5 = 15$, dư 7) mà quên hộp ban đầu.

Insight • Số dư của tích = số dư của **tích các số dư**; luôn rút gọn kết quả về khoảng $0 \leq r < m$.

Theorem — Two ways to read “remainder r ”

(1) a and b leave the same remainder when divided by $m \iff m \mid a - b$. (2) N leaves remainder r when divided by $d \iff d \mid N - r$ and $d > r$.

(1) là lý do số dư lặp lại có chu kỳ m . (2) biến bài “chia dư” thành bài “chia hết” của Chương 5 — nhưng **đừng quên điều kiện** $d > r$: số chia luôn lớn hơn số dư.

Common Trap — Số dư theo 8 cho biết số dư theo 4, nhưng không ngược lại

Nếu N chia 8 dư 5 thì $N = 8q + 5 = 4(2q + 1) + 1$ chia 4 dư 1: số dư theo một **ước** của 8 suy ra được. Ngược lại, biết N chia 4 dư 1 thì N chia 8 có thể dư 1 hoặc 5 — chưa đủ thông tin. Tương tự, biết số dư khi chia cho 5 và cho 7 thì biết số dư khi chia cho 35, nhưng biết số dư khi chia cho 35 thì không biết số dư khi chia cho 4.

Example 6.4**Sàng từ số chia lớn nhất**

Starting at 6:00 a.m., buses of line X arrive at a stop every 5 minutes, the first one at 6:03 a.m., and buses of line Y arrive at the same stop every 7 minutes, the first one at 6:04 a.m. At what time do buses of both lines arrive at the stop together for the third time?

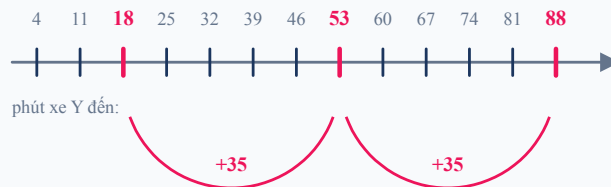
- (A) 6:53 a.m. (B) 7:10 a.m. (C) 7:28 a.m. (D) 7:45 a.m. (E) 8:03 a.m.

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(C) 7:28 a.m.**

Đo thời gian bằng số phút sau 6:00. Xe X đến ở các phút 3, 8, 13, ... — các số **chia 5 dư 3**; xe Y đến ở các phút 4, 11, 18, ... — các số **chia 7 dư 4**.

Sàng theo số chia lớn nhất (ít số cần thử nhất): trong dãy 4, 11, 18, số đầu tiên chia 5 dư 3 là 18.

Hai thời điểm trùng nhau liên tiếp có hiệu chia hết cho cả 5 và 7, tức cho 35. Vậy các lần trùng là phút 18, 53, 88, ... (hình).



Lần thứ ba là phút 88, tức 1 giờ 28 phút sau 6:00: lúc 7:28 a.m. Đáp án (C).

Bẫy: lấy luôn bội của 35 mà quên độ lệch ban đầu (phút 70 hay 105, tức 7:10 hay 7:45); đếm nhầm lần trùng thứ hai (6:53) là lần thứ ba.

Insight · Hệ “chia m dư r , chia n dư s ” (m, n nguyên tố cùng nhau): liệt kê theo số chia lớn nhất tới nghiệm đầu tiên, rồi cộng dần mn .

Tip — Mẹo “thiếu một chút”

Khi số dư luôn kém số chia đúng một lượng như nhau — chia 4 dư 3, chia 5 dư 4, chia 6 dư 5 — thì $N + 1$ chia hết cho cả 4, 5, 6, nên $N + 1$ là bội của $\text{lcm}(4, 5, 6) = 60$. Tương tự, “chia 6 dư 2, chia 8 dư 2” cho $N - 2$ chia hết cho 24. Hãy nhìn các số dư trước khi bắt đầu liệt kê.

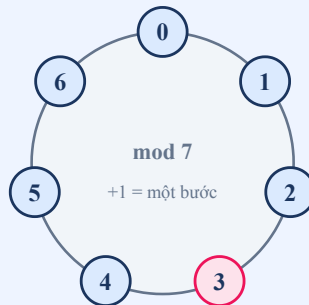
K 6.3 Congruences — Remainders of Huge Numbers

Đồng dư — số dư của những số rất lớn

Definition — Congruence modulo m (đồng dư)

For a positive integer m , we write $a \equiv b \pmod{m}$ (read “ a is congruent to b modulo m ”) if $m \mid a - b$, that is, a and b leave the same remainder when divided by m .

Hãy hình dung một “đồng hồ” có m vạch: đi tới a hay tới b đều dừng ở cùng một vạch. Ví dụ $24 \equiv 17 \equiv 10 \equiv 3 \pmod{7}$. Số âm cũng được: $-1 \equiv 6 \pmod{7}$.



3, 10, 17, 24, ...

Theorem — Congruences behave like equations

If $a \equiv b$ and $c \equiv d \pmod{m}$, then $a + c \equiv b + d$, $a - c \equiv b - d$, $ac \equiv bd \pmod{m}$, and $a^k \equiv b^k \pmod{m}$ for every positive integer k .

Đây chính là định lý số dư của tổng và tích ở mục 6.2, viết gọn lại; lũy thừa là nhân lặp. Hệ quả: trong một biểu thức, có thể thay bất kỳ số nào bằng một số đồng dư với nó — nhất là bằng một số nhỏ hoặc bằng ± 1 .

Key Idea — Tìm số đồng dư với ± 1

$10 \equiv 1 \pmod{9}$, $10 \equiv -1 \pmod{11}$, $100 \equiv 1 \pmod{99}$, $13 \equiv -1 \pmod{14}$, $2^3 = 8 \equiv 1 \pmod{7}$, $3^3 = 27 \equiv -1 \pmod{7}$. Mỗi khi cơ số (hoặc một lũy thừa nhỏ của nó) đồng dư với ± 1 , cả lũy thừa khổng lồ sụp về ± 1 : $(-1)^{\text{chẵn}} = 1$, $(-1)^{\text{lẻ}} = -1$.

Example 6.5

Đưa cơ số về ± 1

What is the remainder when $13^{2026} + 15^{2025}$ is divided by 14?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 12

(E) 13

SOLUTION • LỜI GIẢI · Answer: (C) 2

$13 \equiv -1 \pmod{14}$ nên $13^{2026} \equiv (-1)^{2026} = 1$ (số mũ chẵn).

$15 \equiv 1 \pmod{14}$ nên $15^{2025} \equiv 1$.

Tổng đồng dư $1 + 1 = 2$. Đáp án (C).

Bẫy: coi $13^{2026} \equiv -1$ (quên số mũ chẵn) sẽ ra 0; viết số dư âm -1 thành 1 một cách tùy tiện cũng dễ sai — luôn đổi số dư âm về khoảng 0 đến 13: $-1 \equiv 13$.

Insight · Trước khi tính lũy thừa, hãy rút gọn cơ số theo modulo; nếu cơ số đồng dư ± 1 thì xong ngay.

Theorem – Last digits are remainders

The units digit of N is $N \bmod 10$; the number formed by the last two digits is $N \bmod 100$. Since $a^k \bmod m$ depends only on $a \bmod m$ and there are only m possible remainders, the sequence $a, a^2, a^3, \dots$ taken modulo m is eventually periodic.

Chương 4 đã dùng điều này cho chữ số tận cùng (chu kỳ 4). Với **hai** chữ số tận cùng, chỉ cần theo dõi số dư khi chia cho 100: nhân hai chữ số cuối với cơ số, bỏ phần hàng trăm trở lên. Viết ra cho tới khi thấy một giá trị lặp lại.

Example 6.6**Hai chữ số tận cùng qua chu kỳ**

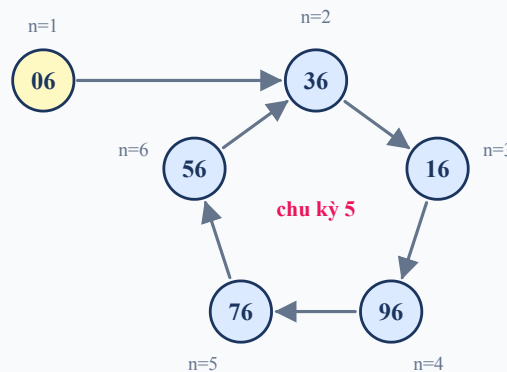
What is the tens digit of $5^{2026} + 6^{2026}$?

(A) 0**(B)** 2**(C)** 4**(D)** 6**(E)** 8

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(E)** 8

Phần 5^n : $5^2 = 25$, và $25 \cdot 5 = 125$ lại tận cùng 25. Vậy với mọi $n \geq 2$, 5^n tận cùng 25.

Phần 6^n : theo dõi hai chữ số cuối: 06, 36, 16, 96, 76, 56, 36, ... (ví dụ $56 \cdot 6 = 336 \rightarrow 36$). Từ $n = 2$ trở đi lặp với chu kỳ 5 (hình).



$2026 - 2 = 2024 = 5 \cdot 404 + 4$, nên 6^{2026} có cùng hai chữ số cuối với $6^{2+4} = 6^6$: là 56.

Tổng tận cùng $25 + 56 = 81$: chữ số hàng chục là 8. Đáp án (E).

Bẫy: chỉ nhìn chữ số hàng đơn vị ($5 + 6 = 11$, tận cùng 1) chẳng nói gì về hàng chục; hay chia 2026 cho 5 (dư 1) mà quên rằng chu kỳ bắt đầu từ $n = 2$, lấy nhầm 36 và được $25 + 36 = 61$, hàng chục 6.

Insight · Muốn biết hàng chục, làm việc theo **modulo 100**: chỉ giữ hai chữ số cuối sau mỗi lần nhân, tìm chu kỳ, cẩn thận điểm bắt đầu chu kỳ.

Common Trap – Không rút gọn số mũ theo modulo

$2^{10} \bmod 7$ **không** bằng $2^{10 \bmod 7} = 2^3$. Cơ số được rút gọn theo m , còn số mũ chỉ được rút gọn theo **độ dài chu kỳ** của dãy lũy thừa: $2^3 \equiv 1 \pmod{7}$ nên chu kỳ là 3, và $2^{10} = 2^9 \cdot 2 \equiv 2 \pmod{7}$.

Tip – Tìm lũy thừa “về 1” nhanh

Tính lần lượt $a, a^2, a^3, \dots$ theo modulo m , mỗi bước chỉ nhân số dư trước với a . Thường chỉ sau vài bước sẽ gặp 1 hoặc -1 ($m - 1$). Khi gặp -1 ở bước k thì chu kỳ là $2k$. Ví dụ modulo 7: $3, 2, 6 \equiv -1$ nên $3^3 \equiv -1, 3^6 \equiv 1$.

K 6.4 Digit Sums and Casting Out Nines**Tổng các chữ số và phép thử 9**

Kí hiệu $S(n)$ là tổng các chữ số của n , ví dụ $S(2026) = 10$. Chương 5 đã dùng tổng chữ số để kiểm tra chia hết cho 3 và 9. Mục này dùng một khẳng định mạnh hơn: n và $S(n)$ có **cùng số dư** khi chia cho 9, kể cả khi không chia hết.

Theorem – A number and its digit sum

For every positive integer n , $n \equiv S(n) \pmod{9}$ (and hence also modulo 3). In particular, $n - S(n)$ is always a multiple of 9.

Vì $10 \equiv 1 \pmod{9}$ nên $10^k \equiv 1$ với mọi k . Do đó $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d \equiv a + b + c + d \pmod{9}$. Ví dụ $4519 \equiv 19 \equiv 10 \equiv 1 \pmod{9}$, và thật vậy $4519 = 9 \cdot 502 + 1$.

Key Idea – Phép thử 9 (casting out nines)

Muốn kiểm tra $A \times B = C$ hoặc $A + B = C$, so sánh tổng chữ số (rút gọn theo 9) hai vế: nếu không khớp thì phép tính chắc chắn sai. Đây là cách tìm nhanh chữ số bị che hoặc loại nhanh đáp án trong AMC 8: chỉ một đáp án có số dư đúng theo 9.

Example 6.7**Chặn miễn + đồng dư 9**

For a positive integer n , let $S(n)$ denote the sum of the digits of n . What is the sum of all positive integers n such that $n + S(n) = 2027$?

(A) 1999

(B) 2017

(C) 4016

(D) 4025

(E) 6024

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (C) 4016

Chặn miễn. Ta có $n < 2027$. Trong các số nhỏ hơn 2027, tổng chữ số lớn nhất là $S(1999) = 28$, nên $n = 2027 - S(n) \geq 1999$.

Lọc bằng modulo 9. $n + S(n) \equiv 2n \pmod{9}$, còn $2027 \equiv 2 + 0 + 2 + 7 = 11 \equiv 2$. Từ $2n \equiv 2$ suy ra $9 \mid 2(n - 1)$, mà $\gcd(2, 9) = 1$ nên $n \equiv 1 \pmod{9}$.

Các số từ 1999 đến 2026 chia 9 dư 1 là 1999, 2008, 2017, 2026. Thử từng số (hình):

1999	2008	2017	2026
$1999 + 28 = 2027$	$2008 + 10 = 2018$	$2017 + 10 = 2027$	$2026 + 10 = 2036$

Chỉ có 1999 và 2017 thỏa. Tổng $1999 + 2017 = 4016$. Đáp án (C).

Bây: dừng lại sau khi tìm được một nghiệm (ra 1999 hoặc 2017), hoặc nhận cả bốn ứng viên của bước lọc mà không thử lại — đồng dư chỉ là điều kiện **cần**.

Insight • $n + S(n)$, $n - S(n)$ là “vân tay” modulo 9 của n : dùng chúng để **lọc** ứng viên, rồi kiểm tra trực tiếp vài số còn lại.

Theorem – Casting out elevens

Since $10 \equiv -1 \pmod{11}$, a number is congruent modulo 11 to its **alternating digit sum** taken from the units digit: $\overline{abcde} \equiv e - d + c - b + a \pmod{11}$.

Chương 5 dùng tổng đan dấu để thử chia hết cho 11; ở đây nó cho cả **số dư**. Ví dụ $739 \equiv 9 - 3 + 7 = 13 \equiv 2 \pmod{11}$.

Example 6.8**Hai phép thử hợp sức**

Minh multiplied 2026 by 739 and wrote the correct product, but two of its digits were later smudged, as shown. The smudged digits are x (the second digit from the left) and y (the fifth digit from the left). What is the two-digit number $\overline{xy}$?

$$2026 \times 739 = \begin{array}{r} 1 \quad \text{●} \quad 9 \quad 7 \quad \text{●} \quad 1 \quad 4 \\ \phantom{1 \quad \text{●} \quad 9 \quad 7 \quad \text{●} \quad 1 \quad 4} x y \end{array}$$

(A) 15

(B) 24

(C) 33

(D) 42

(E) 51

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (D) 42

Modulo 9. $2026 \equiv 1, 739 \equiv 19 \equiv 1$, nên tích $\equiv 1 \pmod{9}$. Các chữ số đã biết có tổng $1 + 9 + 7 + 1 + 4 = 22$, nên $22 + x + y \equiv 1$, tức $x + y \equiv 6 \pmod{9}$: $x + y = 6$ hoặc $x + y = 15$.

Chú ý: cả năm đáp án đều có tổng chữ số bằng 6 — phép thử 9 **không** phân biệt được chúng.

Modulo 11. $2026 \equiv 6 - 2 + 0 - 2 = 2, 739 \equiv 2$, nên tích $\equiv 4 \pmod{11}$. Tổng đan dấu của $\overline{1x97y14}$ tính từ hàng đơn vị: $4 - 1 + y - 7 + 9 - x + 1 = 6 + y - x$. Vậy $6 + y - x \equiv 4$, tức $y - x \equiv -2 \pmod{11}$: $y - x = -2$ hoặc $y - x = 9$.

Ghép: $x + y = 6, y - x = -2$ cho $x = 4, y = 2$. Các tổ hợp còn lại cho x hoặc y không nguyên hoặc lớn hơn 9. Vậy $\overline{xy} = 42$ (thật vậy $2026 \cdot 739 = 1\,497\,214$). Đáp án (D).

Insight • Phép thử 9 cho **tổng** hai chữ số bị che, phép thử 11 cho **hiệu** của chúng (khi chúng nằm ở vị trí khác tính chẵn lẻ) — hai phương trình, hai ẩn.

Common Trap — Phép thử 9 bỏ sót lỗi đổi chỗ

Viết nhầm $1\,497\,214$ thành $1\,479\,214$ (đổi chỗ hai chữ số) không làm thay đổi tổng chữ số, nên phép thử 9 vẫn “đúng”. Phép thử 9 chỉ khẳng định được **sai**, không khẳng định được **đúng**. Khi cần phân biệt các số có cùng tổng chữ số, hãy dùng thêm phép thử 11 hoặc chữ số tận cùng.

Tip — Loại đáp án bằng số dư

Gặp câu hỏi “giá trị của biểu thức lớn là bao nhiêu” với năm đáp án số lớn, hãy tính nhanh số dư của biểu thức khi chia cho 9 (hoặc chữ số tận cùng) rồi so với từng đáp án. Thường chỉ một đáp án còn sống — mất chưa tới 30 giây.

K 6.5 Digit Puzzles — Cryptarithms and Missing Digits

Câu đố chữ số — phép tính bằng chữ và ô trống

Definition — Cryptarithm (phép tính bằng chữ)

In a **cryptarithm** each letter stands for a digit: the same letter always means the same digit, different letters mean different digits, and no number begins with 0. In a **missing-digit** puzzle each box hides a digit, and different boxes *may* hide equal digits.

Đọc kỹ luật chơi: “chữ khác nhau $\rightarrow$ chữ số khác nhau” chỉ áp dụng cho chữ cái, không áp dụng cho các ô trống trừ khi để nói rõ.

Theorem — Carries are small

When two numbers are added, every carry is 0 or 1, since $9 + 9 + 1 = 19$. When k numbers are added, every carry is at most $k - 1$. In particular, if the sum of two n -digit numbers has $n + 1$ digits, its leading digit is 1.

Ở mỗi cột: (tổng các chữ số trong cột) + (nhớ từ cột phải) = (chữ số kết quả) + $10 \cdot$ (nhớ sang cột trái). Viết phương trình này cho từng cột là cách giải chính quy của mọi bài phép cộng bằng chữ.

Key Idea — Ba điểm tựa: hàng đơn vị, chữ số đầu, ước lượng

(1) **Hàng đơn vị** không nhận nhớ từ đầu — điều kiện ở đây chặt nhất. (2) **Chữ số đầu** bị chặn bởi độ lớn (tổng hai số ba chữ số không vượt quá 1998). (3) **Ước lượng**: nếu biết hai chữ số đầu của tích và biết thừa số kia, chia ra để khoanh vùng thừa số còn thiếu.

Example 6.9

Phương trình từng cột

In the addition shown, each letter represents a digit, different letters represent different digits, and no number begins with 0. What is the four-digit number $PAGE$?

$$\begin{array}{r} \text{E G G} \\ + \text{E G G} \\ \hline \text{P A G E} \end{array}$$

- (A) 1598 (B) 1798 (C) 1898 (D) 1978 (E) 1998

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 1798

Tổng hai số ba chữ số có bốn chữ số nên $P = 1$. Gọi c_1, c_2 là số nhớ từ cột đơn vị và cột chục (mỗi số là 0 hoặc 1).

Cột đơn vị: $2G = E + 10c_1$. **Cột chuc:** $2G + c_1 = G + 10c_2$, tức $G + c_1 = 10c_2$.

Nếu $c_2 = 0$ thì $G = c_1 = 0$, khi đó $E = 0 = G$ — vô lý. Vậy $c_2 = 1$ và $G = 10 - c_1$, mà $G \leq 9$ nên $c_1 = 1$, $G = 9$. Cột đơn vị cho $E = 18 - 10 = 8$.

Cột trăm: $2E + c_2 = 17 = A + 10 \cdot 1$, nên $A = 7$ và nhớ 1 sang hàng nghìn, khớp với $P = 1$.

$PAGE = 1798$ (thử lại: $899 + 899 = 1798 \checkmark$). Đáp án (B).

Insight - Viết phương trình **cho từng cột** với biến nhỏ 0/1; cột nào có cùng một chữ cái ở cả trên và dưới thường “khóa” được chữ số đó ngay.

Example 6.10

Ô trống: hàng đơn vị rồi ước lượng

In the multiplication shown, each box hides a digit (the hidden digits need not be different). What is the product?

$$\begin{array}{r} \square 7 \\ \times 3 \square \\ \hline \square \square 2 \\ \square \square \square \\ \hline 24 \square \square \end{array}$$

- (A) 2052 (B) 2412 (C) 2442 (D) 2472 (E) 2772

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 2412

Goi thừa số trên là $\overline{t7}$ và thừa số dưới là $\overline{3d}$.

Hàng đơn vị của tích riêng thứ nhất: $7 \cdot d$ tận cùng bằng 2. Các bội $7 \cdot 0, 7 \cdot 1, \dots, 7 \cdot 9$ có tận cùng đôi một khác nhau, và chỉ $7 \cdot 6 = 42$ tận cùng 2. Vậy $d = 6$, thừa số dưới là 36.

Ước lượng: tích nằm trong khoảng 2400 đến 2499, nên $\overline{t7}$ nằm giữa $\frac{2400}{36} \approx 66,7$ và $\frac{2499}{36} \approx 69,4$. Số duy nhất tận cùng 7 trong khoảng đó là 67.

Tích $67 \cdot 36 = 2412$; kiểm tra các tích riêng: $67 \cdot 6 = 402$ (ba chữ số, tận cùng 2 ✓) và $67 \cdot 3 = 201$ (ba chữ số ✓). Đáp án (B).

Insight • Ở tổng trong phép nhân: **hàng đơn vị** cho thừa số nhỏ, **các chữ số đầu của tích** cho một khoảng ước lượng — chia để khám vùng.

Common Trap — Đừng bỏ sót “nhớ” và trường hợp 0

Hai lỗi hay gặp: (1) viết phương trình cột chục mà quên số nhớ từ cột đơn vị; (2) loại trường hợp một chữ số bằng 0 quá sớm (chữ số 0 được phép ở giữa hoặc cuối). Ở Ví dụ 6.9, trường hợp $c_2 = 0$ phải được **xét rồi loại**, không được bỏ qua.

Tip — Dùng phép thử 9 cho câu đố chữ số

Với phép cộng dùng hết các chữ số 1–9 (mỗi chữ số một lần), tổng các chữ số cố định bằng 45, nên modulo 9 cho ngay một ràng buộc giữa các chữ số của tổng và của các số hạng — xem ví dụ cuối chương.

K 6.6 Extremal Digit Problems — Greedy with a Check**Bài toán lớn nhất, nhỏ nhất về chữ số — tham lam có kiểm tra**

AMC 8 rất hay hỏi “số lớn nhất / nhỏ nhất có tính chất ...”. Các bài này không cần công thức, chỉ cần hiểu cách so sánh hai số và một chiến lược chọn chữ số có kỷ luật.

Key Idea — How numbers are compared

Among positive integers, one with more digits is larger. If two numbers have the same number of digits, the first position (from the left) where they differ decides which is larger.

Vì vậy muốn số **lớn nhất**: ưu tiên (nếu được tự do) nhiều chữ số, rồi chữ số đầu lớn nhất, rồi chữ số thứ hai lớn nhất, ... Muốn số **nhỏ nhất**: ít chữ số nhất, rồi chữ số đầu nhỏ nhất (khác 0), rồi lần lượt các chữ số sau.

Theorem — Greedy principle (nguyên tắc tham lam)

To build the largest number with a given property, choose the digits from left to right; at each position take the largest digit for which the remaining positions **can still be completed** so that the property holds.

Đúng vì cách so sánh ở trên: một chữ số lớn hơn ở vị trí sớm hơn thắng mọi thứ phía sau. Phần in đậm là điều kiện bắt buộc — thiếu nó, “tham lam” sẽ dẫn vào ngõ cụt.

Example 6.11**Tham lam, rồi lùi một bước**

Each of the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5 is used exactly once to write a six-digit number that is a multiple of 8. What is the largest such number?

(A) 534 120 (B) 541 320 (C) 543 102 (D) 543 120 (E) 543 210

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 543 120

Chia hết cho 8 chỉ phụ thuộc **ba chữ số cuối**. Ba chữ số đầu “tự do”, nên ta muốn chúng lớn nhất có thể.

Thử 5 4 3 2 _ _: ba chữ số cuối là 2 và hai chữ số 0, 1: 210, 201 — không cái nào chia hết cho 8. Ngõ cụt.

Lùi một bước, thử 5 4 3 1 _ _: ba chữ số cuối bắt đầu bằng 1, dùng 0, 2: $120 = 8 \cdot 15$ ✓ (còn 102 ✗). Được 543 120.

Không thể lớn hơn: mọi số lớn hơn phải bắt đầu bằng 5432, mà ta đã thấy không hoàn thành được. Đáp án (D).



tự do: lớn nhất trước

$$120 = 8 \cdot 15$$

Bấy: 543 210 (xếp giảm dần) không chia hết cho 8; 541 320 chia hết cho 8 nhưng nhỏ hơn.

Insight · Điều kiện chia hết cho 2, 4, 8, 5, 25 chỉ “dính” vào vài chữ số cuối: xếp phần đầu tự do giảm dần, rồi **kiểm tra khả năng hoàn thành** và lùi khi cần.

Common Trap — Tham lam mù quáng

Ở Ví dụ trên, chọn 5, 4, 3, 2 cho bốn vị trí đầu trông rất “tham lam” nhưng làm phần đuôi không thể chia hết cho 8. Trước khi chốt một chữ số, luôn hỏi: *phần còn lại còn hoàn thành được không?* Nếu không, giảm chữ số đó đi một bậc.

Tip — Bài “nhỏ nhất”: đếm số chữ số trước

Với “số nhỏ nhất có tổng chữ số s ”: số chữ số tối thiểu là $\lceil s/9 \rceil$, và các chữ số 9 dồn về cuối (ví dụ tổng 30: 3999). Nếu thêm điều kiện “các chữ số khác nhau”, hãy kiểm tra tổng lớn nhất có thể với k chữ số khác nhau để biết cần bao nhiêu chữ số.

E Worked Examples — Competition Level**Ví dụ mẫu mức thi đấu**

Hai ví dụ cuối ở mức câu 20–25 của AMC 8, mỗi ví dụ kết hợp hai công cụ của chương. Hãy tự giải ít nhất 8 phút trước khi đọc lời giải.

Example 6.12**Tổng các số dư đạt giá trị lớn nhất**

When a positive integer N is divided by 4, by 5, and by 6, the three remainders add up to 12. How many such integers N are less than 1000?

- (A) 8 (B) 15 (C) 16 (D) 17 (E) 33

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 16

Các số dư lần lượt không vượt quá 3, 4, 5, nên tổng lớn nhất là $3 + 4 + 5 = 12$. Tổng bằng 12 buộc **cả ba** số dư đều lớn nhất: N chia 4 dư 3, chia 5 dư 4, chia 6 dư 5.

Mỗi số dư kém số chia đúng 1 (mẹo “thiếu một chút”), nên $N + 1$ chia hết cho 4, 5 và 6, tức chia hết cho $\text{lcm}(4, 5, 6) = 60$. Vậy $N = 60k - 1$ với $k \geq 1$.

$N < 1000 \iff 60k \leq 1000 \iff k \leq 16$ (vì $60 \cdot 16 - 1 = 959$, còn $60 \cdot 17 - 1 = 1019$). Có 16 số. Đáp án (C).

Bây: lấy bội chung là tích $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ (ra 8); hoặc tính cả $k = 0$ (ra 17, nhưng $N = -1$ không dương).

Insight · Khi một tổng đạt **giá trị lớn nhất có thể**, mọi thành phần đều phải lớn nhất — điều kiện “tổng” biến thành nhiều điều kiện bằng nhau.

Example 6.13**Đồng dư 9 trong câu đố dùng đủ chín chữ số**

Each of the digits 1 through 9 is used exactly once to fill the nine boxes shown so that the addition of the three two-digit numbers is correct. What is the largest possible value of the three-digit sum?

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}$$

- (A) 216 (B) 225 (C) 234 (D) 243 (E) 252

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 243

Gọi T là tổng ba chữ số hàng chục và U là tổng ba chữ số hàng đơn vị của ba số hạng. Tổng là $10T + U$, còn ba chữ số G, H, I của tổng có $G + H + I = 45 - (T + U)$.

Modulo 9: $10T + U \equiv T + U$ và $\overline{GHI} \equiv G + H + I = 45 - (T + U)$. Vậy $T + U \equiv 45 - (T + U)$, tức $2(T + U) \equiv 0$, nên $9 \mid T + U$. Vì $21 \leq T + U \leq 39$ nên $T + U \in \{27, 36\}$, và $G + H + I \in \{18, 9\}$.

Chặn trên: $T \leq 9 + 8 + 7 = 24$ và $T + U \leq 39$, nên $10T + U = 9T + (T + U) \leq 216 + 39 = 255$. Do đó $G \leq 2$.

Thử $G = 2$: $H + I = 7$ hoặc 16. Vì tổng ≤ 255 nên $H \leq 5$, loại $H + I = 16$. Với $H + I = 7$, $H \leq 5$, các chữ số khác nhau và khác 2: $(H, I) \in \{(1, 6), (3, 4), (4, 3)\}$; lớn nhất là 243.

Kiểm tra có thực hiện được: 243 có $G + H + I = 9$ nên $T + U = 36$, $10T + U = 243$, suy ra $T = 23$, $U = 13$. Sáu chữ số còn lại $\{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$: hàng chục 9, 8, 6 (tổng 23), hàng đơn vị 1, 5, 7 (tổng 13): $91 + 85 + 67 = 243$ ✓. Đáp án (D).

Bây: 252 thỏa điều kiện modulo 9 nhưng lặp chữ số 2; 255 là cận trên “ngây thơ” chưa kiểm tra điều kiện chữ số.

$$\begin{array}{r}
 91 \\
 85 \\
 + 67 \\
 \hline
 243
 \end{array}$$

Insight • Câu đố “dùng mỗi chữ số đúng một lần”: tổng các chữ số cố định (45) + đồng dư 9 cho ngay một điều kiện; sau đó chặn và **dựng ví dụ** để xác nhận.

1 Exercises 1 • Foundation

Bài tập 1 • Nền tảng



- 6.1** When the units digit of a three-digit number is erased, the resulting two-digit number is 345 less than the original number. What is the original number?

(A) 343 (B) 373 (C) 383 (D) 384 (E) 393

- 6.2** Exactly one of the following calculations is correct. Which one?

♦♦ (A) $347 \times 29 = 10\,073$ (B) $268 \times 37 = 9926$ (C) $586 \times 47 = 27\,532$ (D) $419 \times 53 = 22\,207$ (E) $733 \times 64 = 46\,812$

- 6.3** In the addition shown, each letter represents a digit, different letters represent different digits, and no number begins with 0. What is $A + B + C$?

$$\begin{array}{r}
 A \quad B \\
 + \quad B \quad A \\
 \hline
 C \quad A \quad C
 \end{array}$$

(A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14

- 6.4** The sum of the digits of a positive integer N is 41. What is the remainder when $2N$ is divided by 9?

♦ (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 8

- 6.5** For a two-digit number, reversing its digits gives a new number (for example, reversing 70 gives $07 = 7$). What is the sum of all two-digit numbers that are exactly 45 greater than the number obtained by reversing their digits?

♦♦ (A) 310 (B) 360 (C) 405 (D) 450 (E) 495

- 6.6** What is the remainder when $10^{2025} + 2026$ is divided by 11?

♦♦ (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 10

- 6.7** What is the remainder when $1! + 2! + 3! + \cdots + 50!$ is divided by 40?

♦♦ (A) 1 (B) 9 (C) 13 (D) 24 (E) 33

- 6.8** For how many integers n with $1 \leq n \leq 100$ is $n^2 + 1$ divisible by 5?

♦♦ (A) 20 (B) 40 (C) 50 (D) 60 (E) 80

- 6.9** The positive integers are written in a table with five columns A, B, C, D, E , snaking back and forth as shown: row 1 holds 1 to 5 from left to right, row 2 holds 6 to 10 from right to left, and so on. In which column does 2026 appear?

A	B	C	D	E	
1	2	3	4	5	→
10	9	8	7	6	←
11	12	13	14	15	→
20	19	18	17	16	←
					⋮

- (A) Column A (B) Column B (C) Column C (D) Column D (E) Column E
- 6.10** When the digits of a certain two-digit number are reversed, the new number is 75% greater than the original number. What is the sum of all two-digit numbers with this property?
- (A) 72 (B) 96 (C) 108 (D) 120 (E) 132
- 6.11** What is the remainder when $9^1 + 9^2 + 9^3 + \cdots + 9^{2026}$ is divided by 8?
- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 7
- 6.12** A three-digit number has the property that its middle digit equals the sum of its other two digits (for example, 583). Which of the following numbers must divide every such three-digit number?
- (A) 11 (B) 13 (C) 17 (D) 37 (E) 101

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi



- 6.13** For every two-digit number $\overline{ab}$, the six-digit number $\overline{ababab}$ (for example, 474747) is divisible by which of the following?
- (A) 11 (B) 17 (C) 19 (D) 23 (E) 37
- 6.14** Which of the following could be the sum of the digits of a perfect square?
- (A) 15 (B) 17 (C) 20 (D) 21 (E) 22
- 6.15** What is the sum of the digits of $99\,999 \times 2026$?
- (A) 45 (B) 46 (C) 50 (D) 54 (E) 63
- 6.16** In the addition shown, each letter represents a digit, different letters represent different digits, and no number begins with 0. How many different values can the three-digit number SUN have?

$$\begin{array}{r}
 S U N \\
 + S U N \\
 \hline
 M O O N
 \end{array}$$

- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
- 6.17** In the multiplication $\overline{AB} \times C = \overline{DDD}$, different letters represent different digits and $A \neq 0$. What is the largest possible value of $\overline{DDD}$?

$$\begin{array}{r}
 A B \\
 \times C \\
 \hline
 D D D
 \end{array}$$

- (A) 222 (B) 444 (C) 555 (D) 666 (E) 888

- 6.18** For how many integers n with $1 \leq n \leq 1000$ is $n^2 + n + 1$ divisible by 7?
 ♦♦♦ (A) 142 (B) 143 (C) 284 (D) 285 (E) 286
- 6.19** For how many integers n with $1 \leq n \leq 2026$ is the sum of the digits of n a multiple of 9?
 ♦♦ (A) 224 (B) 225 (C) 226 (D) 252 (E) 675
- 6.20** What is the largest four-digit multiple of 45 whose digits are all odd?
 ♦♦♦ (A) 9135 (B) 9315 (C) 9513 (D) 9735 (E) 9915
- 6.21** Mai writes down a four-digit number. Then she repeatedly erases the last digit of the most recent number and writes down the result, until a one-digit number appears (from 3507 she would write 3507, 350, 35, 3). The four numbers she writes add up to 2026. What is the sum of the digits of her four-digit number?
 ♦♦♦

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \square \\
 \square \square \square \\
 \square \square \\
 + \square \\
 \hline
 2 \quad 0 \quad 2 \quad 6
 \end{array}$$

- (A) 13 (B) 14 (C) 15 (D) 16 (E) 17
- 6.22** Of the 100 three-digit multiples of 9, how many have digit sum exactly 18?
 ♦♦♦ (A) 54 (B) 55 (C) 56 (D) 64 (E) 90
- 6.23** Bảo was asked to multiply a two-digit number by 4. By mistake, he first reversed the digits of the number and then multiplied by 4. His answer was 108 more than the correct answer. How many two-digit numbers could Bảo have been given?
 ♦♦ (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 9
- 6.24** The 20-digit number shown is formed by writing 2026 five times. Hoa erases 12 of its digits, so that an 8-digit number remains (the remaining digits keep their order). What is the largest number she can obtain?
 ♦♦♦

2 0 2 6 2 0 2 6 2 0 2 6 2 0 2 6 2 0 2 6

- (A) 62 662 026 (B) 66 262 026 (C) 66 626 026 (D) 66 662 026 (E) 66 666 226
- 6.25** When 2026 is divided by a positive integer n , the quotient is 12. How many values of n are possible?
 ♦♦♦ (A) 11 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15
- 6.26** What is the tens digit of $76^{2026} + 24^{2026}$?
 ♦♦♦ (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

3 Exercises 3 • Challenge

Bài tập 3 • Thử thách



- 6.27** What is the last nonzero digit of $15!$?
 ♦♦♦♦ (A) 2 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 8

- 6.28** In the multiplication shown, each letter represents a digit, different letters represent different digits, and no number begins with 0. What is the four-digit number $SPOT$?

$$\begin{array}{r}
 \text{T O P} \\
 \times \quad \quad 4 \\
 \hline
 \text{S P O T}
 \end{array}$$

Integer answer · Đáp số nguyên

- 6.29** How many four-digit positive integers have digits that strictly increase from left to right and are divisible by 9? (For example, 1269 is one such number.)

Integer answer · Đáp số nguyên

- 6.30** How many four-digit numbers $\overline{abcd}$ satisfy $a + b = c + d$ and are divisible by 11?

♦♦♦♦ (A) 90 (B) 99 (C) 100 (D) 162 (E) 615

- 6.31** For how many integers n with $1 \leq n \leq 600$ are the four remainders obtained when n is divided by 3, by 4, by 5, and by 6 all different?

♦♦♦♦ (A) 100 (B) 120 (C) 144 (D) 150 (E) 200

- 6.32** For how many integers n with $1 \leq n \leq 1000$ is $2^n - n^2$ divisible by 7?

♦♦♦♦ (A) 282 (B) 285 (C) 286 (D) 287 (E) 288

- 6.33** Positive integers a and b satisfy $a + b = 2026$. Let $S(n)$ denote the sum of the digits of n . What is the largest possible value of $S(a) + S(b)$?

Integer answer · Đáp số nguyên

- 6.34** How many four-digit positive integers $\overline{abcd}$ are divisible by the two-digit number $\overline{ab}$? (For example, 1236 is one such number, since $1236 = 12 \cdot 103$.)

Integer answer · Đáp số nguyên

- 6.35** What is the smallest positive multiple of 11 whose digits add up to 30?

♦♦♦♦ (A) 3999 (B) 5898 (C) 6699 (D) 6798 (E) 9966

- 6.36** Start with the number 2026. In each step, replace the current number n by $n + S(n)$, where $S(n)$ is the sum of the digits of n . (The first step gives $2026 + 10 = 2036$.) What is the remainder when the number obtained after 100 steps is divided by 9?

♦♦♦♦ (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 5 (E) 7

Chapter 7

8020 AMC 8 Mastery

Counting I — Lists, Rules & Casework

Đếm 1 — liệt kê, quy tắc đếm & chia trường hợp

Mỗi đề AMC 8 có khoảng 4–6 câu đếm, và đây là mảng học sinh mất điểm “oan” nhiều nhất: lệch một khi đếm danh sách, sót một trường hợp, đếm trùng phần chung, nhầm “và” với “hoặc”. Chương này xây bộ công cụ nền: đếm số phần tử của danh sách, liệt kê có hệ thống và sơ đồ cây, quy tắc cộng và quy tắc nhân với sơ đồ ô, chia trường hợp, đếm hình và đếm đường đi bằng cách ghi số. Chương 8 sẽ dùng nền này để học hoán vị, tổ hợp và phần bù.

✓ Đếm đúng số phần tử của một danh sách cách đều, số bội trong một đoạn; tránh lỗi lệch một (đường thẳng và vòng kín).

✓ Liệt kê có thứ tự (tăng dần, theo phần tử nhỏ nhất) và vẽ sơ đồ cây cho quá trình có luật dừng.

✓ Chia trường hợp rời nhau, phủ hết, chọn đúng biến để chia.

✓ Đọc biểu đồ Venn hai, ba tập và trừ đúng phần đếm trùng.

✓ Phân biệt khi nào cộng, khi nào nhân; điền sơ đồ ô từ ô bị ràng buộc nhiều nhất.

✓ Đếm hình theo đặc trưng (kích thước + góc, số mảnh, ba cạnh) và đếm đường đi bằng phương pháp ghi số.

list · danh sách, dãy

inclusive · tính cả hai đầu

off-by-one error · lỗi lệch một

multiple · bội

Venn diagram · biểu đồ Venn

tree diagram · sơ đồ cây

Addition Principle · quy tắc cộng

Multiplication Principle · quy tắc nhân

casework · chia trường hợp

disjoint · rời nhau

ordered pair · cặp có thứ tự

distinct / different · khác nhau

route, path · đường đi

non-congruent · không bằng nhau (không trùng khít)

K 7.1 Counting the Numbers in a List

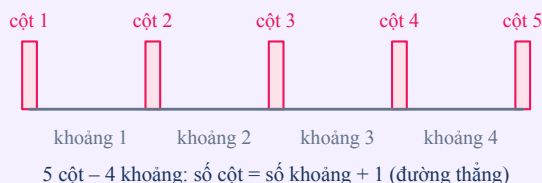
Đếm số phần tử của một danh sách

Câu hỏi đếm đơn giản nhất ở AMC 8 là “danh sách này có bao nhiêu số?”. Nghe thì dễ, nhưng đây là nơi học sinh mất điểm vì **lệch một** (off-by-one): đếm thiếu hoặc thừa đúng một số. Cách chắc chắn nhất là **biến danh sách đã cho thành danh sách** $1, 2, 3, \dots, n$ bằng vài phép cộng/trừ/nhân/chia, rồi đọc ngay n .

Theorem — Counting an arithmetic list

The list $a, a + d, a + 2d, \dots, b$ (with common difference $d > 0$) contains exactly $\frac{b-a}{d} + 1$ numbers.

Lý do: trừ a ở mọi số được $0, d, 2d, \dots, b-a$; chia cho d được $0, 1, 2, \dots, \frac{b-a}{d}$; cộng 1 được $1, 2, \dots, \frac{b-a}{d} + 1$. Số $\frac{b-a}{d}$ là số khoảng giữa hai số liên tiếp; số phần tử nhiều hơn số khoảng đúng 1 — giống hàng cột (hình).



Common Trap — Lỗi lệch một (fencepost error)

Từ 15 đến 40 (tính cả hai đầu) có $40 - 15 + 1 = 26$ số, không phải 25. Rào thẳng dài 60 m, cọc cách nhau 5 m, có cọc ở hai đầu: $\frac{60}{5} + 1 = 13$ cọc. Nhưng nếu rào là một **vòng kín** thì cọc đầu trùng cọc cuối: chỉ còn $\frac{60}{5} = 12$ cọc. Luôn tự hỏi: có tính cả hai đầu không? đường thẳng hay vòng kín?

Example 7.1

Biến đổi danh sách về 1, 2, ..., n

How many of the numbers in the list

$$-17, -12.5, -8, -3.5, \dots, 149.5, 154$$

are integers?

(A) 19

(B) 20

(C) 21

(D) 38

(E) 39

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 20

Danh sách tăng đều 4,5. Viết số thứ k (đếm từ $k = 0$) là $-17 + 4,5k$. Số cuối: $-17 + 4,5k = 154$ cho $k = 38$, nên danh sách có $k = 0, 1, \dots, 38$, tức 39 số.

$-17 + 4,5k$ là số nguyên khi và chỉ khi $4,5k = \frac{9k}{2}$ nguyên, tức k chẵn: $k = 0, 2, 4, \dots, 38$. Chia đôi: $0, 1, \dots, 19$ — có 20 giá trị. Đáp án (B).

Bây: trả lời số phần tử của cả danh sách (39), hoặc quên “+1” và được 38.

Insight · Đặt chỉ số k cho từng phần tử; điều kiện trên phần tử trở thành điều kiện trên k , và đếm k thì dễ hơn đếm số lẻ.

Theorem — Multiples in a range

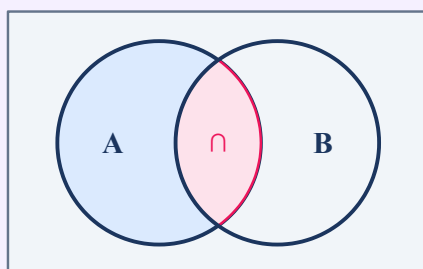
The number of multiples of k among $1, 2, \dots, n$ is $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$ (the whole-number part of n/k). Among $a, a+1, \dots, b$ it is $\left\lfloor \frac{b}{k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{a-1}{k} \right\rfloor$.

Các bội của k là $k, 2k, 3k, \dots$; bội lớn nhất không vượt n là mk với $m = \lfloor n/k \rfloor$, và danh sách $k, 2k, \dots, mk$ có đúng m số. Muốn đếm trong đoạn $[a, b]$: đếm tới b rồi bỏ đi những bội nằm trước a — trừ $\lfloor (a-1)/k \rfloor$, **không phải** $\lfloor a/k \rfloor$ (nếu chính a là bội thì nó phải được giữ lại).

Theorem — Two overlapping lists (biểu đồ Venn)

For two sets A and B : $|A \text{ or } B| = |A| + |B| - |A \text{ and } B|$.

Khi cộng $|A| + |B|$, mỗi phần tử nằm trong **cả hai** tập (vùng chồng) bị đếm hai lần, nên phải trừ đi một lần. Chương 8 sẽ mở rộng cho ba tập và cho phần bù; ở đây ta chủ yếu đọc biểu đồ Venn và tránh đếm trùng.



Example 7.2

Hai danh sách chồng lên nhau

A bus route is 9.6 km long. There is a stop at the start, at the end, and every 400 meters along the route. The city adds new stops so that there is also a stop every 300 meters, measured from the start; no new stop is built where a stop already exists. How many stops does the route have now?



(A) 47

(B) 48

(C) 49

(D) 57

(E) 58

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 49

Đổi ra mét: tuyến dài 9600 m. Trạm cũ ở các mốc 0, 400, ..., 9600: $\frac{9600}{400} + 1 = 25$ trạm. Các mốc bội của 300 là 0, 300, ..., 9600: $\frac{9600}{300} + 1 = 33$ mốc.

Mốc vừa là bội của 400 vừa là bội của 300 là bội của BCNN(400, 300) = 1200: 0, 1200, ..., 9600 — có $\frac{9600}{1200} + 1 = 9$ mốc, bị đếm hai lần.

Tổng số trạm: $25 + 33 - 9 = 49$. Đáp án (C).

Bây: không trừ phần chung ra 58; quên "+1" ở cả ba danh sách ra $24 + 32 - 8 = 48$.

Insight · "Mỗi a mét" và "mỗi b mét" cùng lúc → hai danh sách cấp số cộng; phần chung là danh sách các bội của BCNN.

Example 7.3

Số chính phương hoặc lập phương

How many integers from 1 to 2026, inclusive, are perfect squares or perfect cubes (or both)?

(A) 51

(B) 53

(C) 54

(D) 57

(E) 60

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 54

Số chính phương: $1^2, 2^2, \dots, 45^2$ vì $45^2 = 2025 \leq 2026 < 46^2 = 2116$ — có 45 số.

Số lập phương: $1^3, \dots, 12^3$ vì $12^3 = 1728 \leq 2026 < 13^3 = 2197$ — có 12 số.

Vừa chính phương vừa lập phương là lũy thừa bậc sáu: $1^6 = 1, 2^6 = 64, 3^6 = 729$ ($4^6 = 4096$ quá lớn) — có 3 số.

Theo biểu đồ Venn: $45 + 12 - 3 = 54$. Đáp án (C). Bây: không trừ phần chung ra 57; tưởng 45^2 vượt 2026 ra 53.

Insight · Một số vừa là a^2 vừa là b^3 thì là lũy thừa bậc 6 — phần giao của hai danh sách luôn là một danh sách "đều" hơn.

Tip — Danh sách "lạ" → dịch rồi co

Gặp danh sách như 7, 13, 19, ..., 601: trừ đi 1 được 6, 12, ..., 600, chia 6 được 1, 2, ..., 100 — có 100 số. Mọi danh sách cách đều đều xử lý được bằng hai bước "dịch" và "co" này, không cần nhớ công thức.

K 7.2 Systematic Listing and Tree Diagrams

Liệt kê có hệ thống và sơ đồ cây

Khi số đối tượng chỉ vài chục, **liệt kê** là cách nhanh và an toàn nhất — với điều kiện liệt kê **có trật tự**. Liệt kê lung tung gần như chắc chắn sót hoặc trùng. Bí quyết là chọn trước một **thứ tự** và giữ đúng thứ tự đó tới cuối.

Key Idea — Cố định thứ tự trước khi liệt kê

Với các bộ **không xét thứ tự** (tập hợp, tổng không kể thứ tự), luôn viết các thành phần theo thứ tự tăng dần $a < b < c$ (hoặc $a \leq b \leq c$ nếu cho phép bằng nhau). Sau đó liệt kê theo a nhỏ nhất trước, trong mỗi a lại theo b tăng dần — giống thứ tự từ điển. Mỗi bộ xuất hiện đúng một lần.

Example 7.4

Liệt kê theo thành phần nhỏ nhất

In how many ways can 16 be written as the sum of four different positive integers, if the order of the integers does not matter?

(A) 7

(B) 8

(C) 9

(D) 12

(E) 34

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 9

Viết $16 = a + b + c + d$ với $a < b < c < d$. Liệt kê theo a , rồi theo b ; với mỗi cặp (a, b) , cặp (c, d) có $b < c < d$ và $c + d$ cố định.

(a, b)	$c + d$	các cặp (c, d)	số bộ
(1, 2)	13	(3, 10) (4, 9) (5, 8) (6, 7)	4
(1, 3)	12	(4, 8) (5, 7)	2

(1,4)	11	(5,6)	1
(2,3)	11	(4,7) (5,6)	2
(2,4)	10	— (cần $5 \leq c < d$)	0

Với $a = 3$: nhỏ nhất là $3 + 4 + 5 + 6 = 18 > 16$, không còn bộ nào. Tổng $4 + 2 + 1 + 2 = 9$. Đáp án (C).

Bây: cho phép các số bằng nhau thì có 34 cách; coi thứ tự là quan trọng thì mỗi bộ bị đếm $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ lần.

Insight • Bộ không thứ tự $\rightarrow$ viết tăng dần rồi liệt kê theo phần tử nhỏ nhất; dừng mỗi nhóm khi điều kiện “tăng dần” bị phá. Tổng nhỏ nhất có thể ($1 + 2 + 3 + 4, 3 + 4 + 5 + 6 \dots$) cho biết khi nào dừng hẳn.

Definition – Tree diagram (sơ đồ cây)

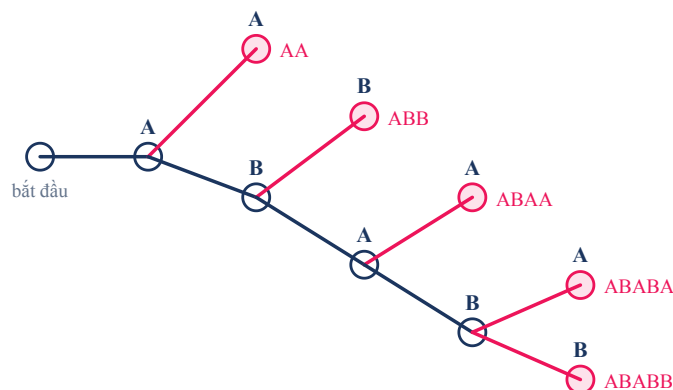
A tree diagram lists the outcomes of a process step by step: each branch at a node is one possible choice at that step, and each complete path from the root to a leaf is one outcome.

Sơ đồ cây đặc biệt hữu ích khi quá trình **dừng ở những thời điểm khác nhau** (trận đấu kết thúc sớm, trò chơi có luật dừng), vì khi đó các kết quả có độ dài khác nhau và không áp dụng thẳng quy tắc nhân được.

Example 7.5

Sơ đồ cây cho quá trình có luật dừng

Ann and Bo play a series of games; each game is won by one of them (no ties). The series ends as soon as someone wins two games in a row, or as soon as someone has won 3 games in total. A possible series is ABB (A wins game 1, B wins games 2 and 3). How many different series are possible?



(A) 5

(B) 6

(C) 10

(D) 12

(E) 32

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 10

Vẽ sơ đồ cây cho các loạt trận bắt đầu bằng A (hình). Sau A : nếu A thắng tiếp (AA) thì dừng. Nếu AB : thắng tiếp là B thì ABB dừng; còn lại ABA . Từ ABA : $ABAA$ dừng; còn $ABAB$ — lúc này mỗi người đã thắng 2 trận, nên ván thứ năm chắc chắn kết thúc: $ABABA$ (A đủ 3 trận và cũng thắng 2 trận liền) hoặc $ABABB$.

Có 5 loạt bắt đầu bằng A : $AA, ABB, ABAA, ABABA, ABABB$. Đổi vai $A \leftrightarrow B$ cho 5 loạt bắt đầu bằng B . Tổng 10. Đáp án (C).

Bây: tưởng mọi loạt đều dài 5 ván rồi tính $2^5 = 32$; chỉ đếm một nửa (một người mở màn) ra 5; quên hai loạt dài 5 ván ($ABABA, ABABB$ và hai loạt đối xứng) ra 6.

Insight • Quá trình dừng sớm $\rightarrow$ vẽ cây, đánh dấu lá ngay khi điều kiện dừng xảy ra; dùng đối xứng để chỉ vẽ một nửa.

Common Trap — Có thứ tự hay không có thứ tự?

“Viết 10 thành tổng của hai số nguyên dương” có 5 cách nếu $3 + 7$ và $7 + 3$ là một ($1 + 9, 2 + 8, 3 + 7, 4 + 6, 5 + 5$), nhưng có 9 cách nếu thứ tự quan trọng ($1 + 9, 2 + 8, \dots, 9 + 1$). Đọc kỹ đề: “order does not matter”, “ordered pairs”, “different” (khác nhau) hay “not necessarily different”. Ba chữ đó thay đổi đáp số.

Tip — Liệt kê vừa đủ để thấy quy luật

Trong bảng ở Ví dụ 7.4, khi a, b cố định, số cặp (c, d) với $c + d = m$ và $b < c < d$ được ngay: c chạy từ $b + 1$ tới trước $\frac{m}{2}$. Với bài lớn hơn, chỉ cần liệt kê vài nhóm đầu, nhận ra quy luật số lượng (thường giảm đều), rồi tính tổng.

K 7.3 The Addition and Multiplication Principles**Quy tắc cộng và quy tắc nhân**

Hai quy tắc này là nền móng của mọi bài đếm. Câu hỏi then chốt luôn là: các lựa chọn của mình nối với nhau bằng chữ **“hoặc”** (chọn một trong nhiều nhóm rời nhau) hay bằng chữ **“và”** (làm bước này rồi làm tiếp bước kia)?

Definition — Addition Principle (quy tắc cộng)

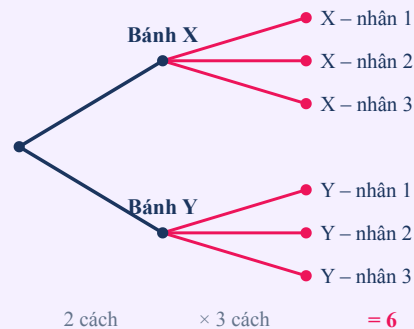
If the objects to be counted are split into groups with no object in two groups, and the groups contain $n_1, n_2, \dots, n_k$ objects, then there are $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ objects in all.

Dấu hiệu: **“hoặc”**. Điều kiện bắt buộc: các nhóm **rời nhau** — nếu có đối tượng thuộc hai nhóm thì phải trừ phần chung (mục 7.1).

Theorem — Multiplication Principle (quy tắc nhân)

If a task is done in k steps, and step i can be done in n_i ways **no matter how the earlier steps were done**, then the task can be done in $n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_k$ ways.

Lý do: vẽ sơ đồ cây — mỗi nhánh của bước 1 tách thành n_2 nhánh, mỗi nhánh đó lại tách thành n_3 nhánh... nên số lá là tích. Hình: 2 loại bánh, mỗi loại có 3 nhân, được $2 \cdot 3 = 6$ chiếc bánh khác nhau.

**Example 7.6****“Hoặc” bên trong “và”**

A lunch box contains one main dish and one drink. The main dish is either one of 3 rice dishes or one of 4 noodle dishes. A rice dish also comes with one of 2 soups; a noodle dish comes with no soup. There are 3 drinks. How many different lunch boxes are possible?

(A) 18**(B)** 21**(C)** 27**(D)** 30**(E)** 72**SOLUTION • LỜI GIẢI** · Answer: **(D)** 30

Đếm phần “món chính (kèm canh nếu có)” trước, theo quy tắc cộng: **cơm**: $3 \cdot 2 = 6$ cách (chọn món cơm và chọn canh); **mì**: 4 cách. Tổng $6 + 4 = 10$ cách.

Rồi chọn đồ uống (3 cách): $10 \cdot 3 = 30$. Đáp án (D).

Bẫy: nhân tất cả các số $3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ (biến “hoặc” thành “và”); quên canh ra $(3 + 4) \cdot 3 = 21$; cộng cả canh như một món riêng ra $(3 + 2 + 4) \cdot 3 = 27$.

Insight · Viết ra câu mô tả một đối tượng bằng “và/hoặc”, rồi dịch: “và” → nhân, “hoặc” → cộng.

Tip — Sơ đồ ô: điền ô bị ràng buộc nhiều nhất trước

Kẻ một ô cho mỗi vị trí (mỗi chữ số, mỗi chữ cái). Điền trước ô có điều kiện khắt khe nhất (chữ số đầu khác 0, chữ số cuối lẻ...), rồi mới tới các ô tự do. Nếu hai điều kiện “giảm chân” nhau, tách trường hợp theo ô gây rắc rối.

Example 7.7

Hai ràng buộc giảm chân nhau

How many four-digit numbers have four different digits, a first digit that is a prime number, and a last digit that is odd?

Đầu $\in \{3, 5, 7\}$

Đầu = 2



(A) 896

(B) 952

(C) 1008

(D) 1120

(E) 1260

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 952

Chữ số đầu thuộc $\{2, 3, 5, 7\}$, chữ số cuối thuộc $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Hai tập này **chung nhau** $\{3, 5, 7\}$, nên số lựa chọn cho chữ số cuối phụ thuộc chữ số đầu — tách hai trường hợp (sơ đồ ô).

Đầu là 3, 5 hoặc 7: chữ số cuối là một trong 4 chữ số lẻ còn lại; hai chữ số giữa lấy từ 8 chữ số còn lại, khác nhau: $8 \cdot 7$. Được $3 \cdot 4 \cdot 8 \cdot 7 = 672$.

Đầu là 2: chữ số cuối có đủ 5 cách; hai chữ số giữa $8 \cdot 7$. Được $1 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 = 280$.

Tổng $672 + 280 = 952$. Đáp án (B).

Bây: coi chữ số cuối luôn có 5 cách ra $4 \cdot 5 \cdot 56 = 1120$; luôn có 4 cách ra $4 \cdot 4 \cdot 56 = 896$.

Insight · Khi tập lựa chọn của hai ô **giao nhau**, số cách ở ô sau phụ thuộc ô trước → tách trường hợp theo phần giao để mỗi trường hợp nhân thẳng được.

Common Trap — Số lựa chọn phải cố định

Quy tắc nhân chỉ đúng khi **số** lựa chọn ở mỗi bước không đổi (nội dung lựa chọn được phép thay đổi). Ở Ví dụ 7.7, nói “chữ số cuối có 4 hoặc 5 cách” rồi nhân bừa một con số là sai — đó chính là hai đáp án nhiễu (A) và (D).

Key Idea — Ai chọn ai? — đếm theo phía có lựa chọn độc lập

Gửi 3 bức thư khác nhau vào 5 hộp thư (mỗi hộp nhận bao nhiêu thư cũng được): **mỗi bức thư** chọn một hộp, 5 cách, độc lập — được $5^3 = 125$, không phải 3^5 . Luôn đếm theo phía mà mỗi đối tượng có số lựa chọn cố định và không ràng buộc nhau.

K 7.4 Casework

Chia trường hợp

Chia trường hợp (casework) là kỹ năng đếm được dùng nhiều nhất ở AMC 8: cố định giá trị của một đại lượng then chốt, đếm trong từng trường hợp (thường bằng quy tắc nhân hoặc liệt kê), rồi cộng lại. Chọn đúng đại lượng để chia quyết định bài làm 1 phút hay 5 phút.

Key Idea — Các trường hợp phải tạo thành một phân hoạch

Cases must be **disjoint** (no object in two cases) and **exhaustive** (every object in some case).

Trước khi cộng, tự kiểm tra hai câu: có đối tượng nào thuộc hai trường hợp không? và có đối tượng nào không thuộc trường hợp nào không? Chia theo **giá trị của một biến** (chữ số giữa bằng 1, 2, ..., 9) tự động thoả cả hai điều kiện.

Tip – Chia theo biến nào?

Chọn biến mà khi biết giá trị của nó, phần còn lại đếm thẳng được: chữ số bị ràng buộc nhiều nhất, số lớn nhất trong bộ, một toạ độ, tổng hay hiệu của hai đại lượng. Biến có ít giá trị nhất thường là lựa chọn tốt.

Example 7.8**Chia theo chữ số bị ràng buộc nhiều hơn**

How many two-digit numbers have a tens digit that is at least twice the units digit? (For example, 84 and 30 qualify, but 73 does not.)

(A) 29**(B)** 30**(C)** 33**(D)** 36**(E)** 45**SOLUTION • LỜI GIẢI** · Answer: **(A)** 29

Gọi số là $\overline{tu}$ với $t \geq 1$ và $t \geq 2u$. Chia theo chữ số hàng đơn vị u (khi biết u , các giá trị của t là một danh sách liên tiếp từ $\max(1, 2u)$ tới 9):

u	0	1	2	3	4	5
t từ ... tới 9	1	2	4	6	8	10 (không có)
số giá trị t	9	8	6	4	2	0

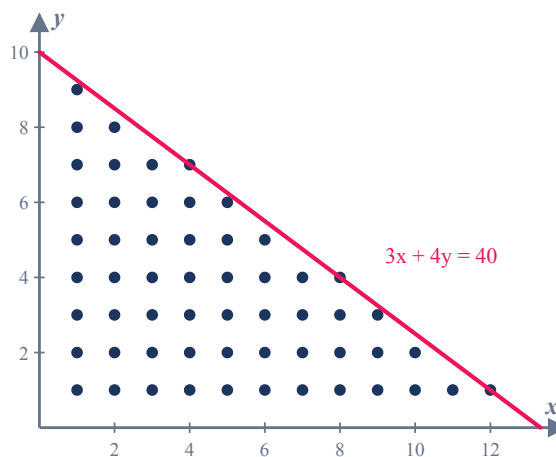
Tổng $9 + 8 + 6 + 4 + 2 = 29$. Đáp án (A).

Nếu chia theo t thì mỗi trường hợp phải tính $\lfloor t/2 \rfloor + 1$ — vẫn ra 29 nhưng chín trường hợp thay vì năm.

Insight · Chia theo biến có ít giá trị hơn (ở đây $u \leq 4$); mỗi trường hợp là một danh sách liên tiếp, đếm bằng “cuối – đầu + 1”.

Example 7.9**Chia theo một toạ độ**

How many points (x, y) , where x and y are both positive integers, satisfy $3x + 4y \leq 40$?

**(A)** 48**(B)** 52**(C)** 57**(D)** 60**(E)** 64**SOLUTION • LỜI GIẢI** · Answer: **(C)** 57

Chia theo y (vì $4y$ “nặng” hơn nên y có ít giá trị hơn): $y \geq 1$ và $4y \leq 40 - 3 = 37$ nên $y \in \{1, \dots, 9\}$. Với mỗi y , x chạy từ 1 tới $\lfloor \frac{40-4y}{3} \rfloor$:

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$40 - 4y$	36	32	28	24	20	16	12	8	4
số giá trị x	12	10	9	8	6	5	4	2	1

Tổng $12 + 10 + 9 + 8 + 6 + 5 + 4 + 2 + 1 = 57$. Đáp án (C).

Kiểm tra bằng hình: các điểm là chấm nằm dưới (hoặc trên) đường thẳng $3x + 4y = 40$, đếm theo từng hàng ngang.

Insight • Đếm điểm nguyên trong một miền: chia theo một tọa độ, mỗi hàng là một danh sách $1, 2, \dots, m$ — hàng nào cũng chỉ cần một phép chia.

Common Trap — Chia theo vị trí để đếm trùng

Đếm số có hai chữ số chứa chữ số 7: “hàng chục là 7: 10 số; hàng đơn vị là 7: 9 số; tổng 19” — sai, vì 77 nằm trong cả hai trường hợp. Đúng là 18. Khi chia theo *vị trí xuất hiện*, các trường hợp thường chồng nhau; hãy chia theo **số lần xuất hiện** (đúng một chữ số 7, đúng hai chữ số 7) để các trường hợp rời nhau.

K 7.5 Counting Figures and Paths

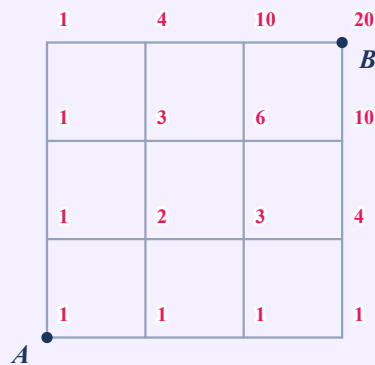
Đếm hình và đếm đường đi

Hai dạng đếm “có hình” xuất hiện gần như mọi năm ở AMC 8: đếm số hình (hình vuông, hình chữ nhật, tam giác) trong một hình vẽ, và đếm số đường đi trên một lưới hoặc một mạng đường. Cả hai đều là quy tắc cộng được tổ chức khéo.

Theorem — Path counting by labelling (phương pháp ghi số)

If every path to point P arrives from one of the points $Q_1, Q_2, \dots$ (the last step before P), then $\text{paths}(P) = \text{paths}(Q_1) + \text{paths}(Q_2) + \dots$.

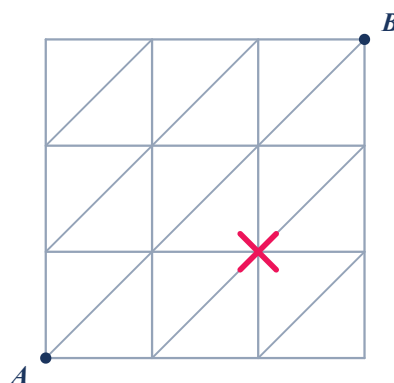
Đây chính là quy tắc cộng: chia các đường tới P theo **bước cuối cùng**. Ghi số 1 ở điểm xuất phát, rồi lần lượt ghi tại mỗi điểm tổng các số ở những điểm dẫn vào nó. Hình: đi sang phải hoặc lên trên, mỗi số bằng tổng số bên trái và số bên dưới; trên lưới 3×3 có 20 đường từ A tới B .



Example 7.10

Ghi số với ba hướng đi và một điểm cấm

A token moves along the segments of the figure from A to B . Each move goes one unit to the right, one unit up, or along one diagonal segment up and to the right. The point marked $\times$ is closed. How many different routes are there from A to B ?



(A) 25

(B) 38

(C) 45

(D) 63

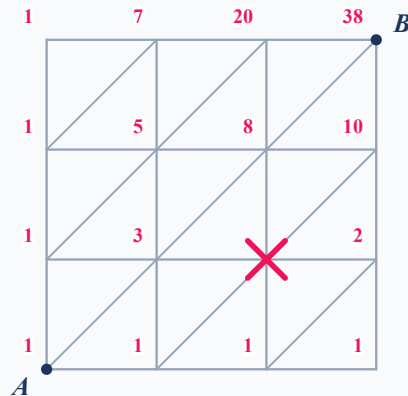
(E) 101

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (B) 38

Mỗi điểm nhận đường đi từ ba điểm: bên trái, bên dưới, và chéo dưới-trái. Ghi 1 tại A , ghi 0 tại điểm bị chặn, rồi ghi từng hàng từ dưới lên (hình trong lời giải):

Hàng $y = 0$: 1, 1, 1, 1. Hàng $y = 1$: 1, $1 + 1 + 1 = 3$, 0, $0 + 1 + 1 = 2$. Hàng $y = 2$: 1, $1 + 3 + 1 = 5$, $5 + 0 + 3 = 8$, $8 + 2 + 0 = 10$. Hàng $y = 3$: 1, $1 + 5 + 1 = 7$, $7 + 8 + 5 = 20$, $20 + 10 + 8 = 38$.

Có 38 đường. Đáp án (B).

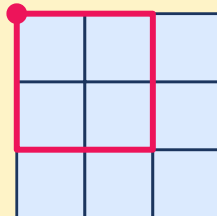


Bây: quên điểm cấm ra 63.

Insight • Ghi số chạy với mọi luật đi “một chiều” (không quay lại): số ở mỗi điểm = tổng số ở mọi điểm có thể đi thẳng tới nó; điểm cấm ghi 0.

Key Idea — Đếm hình theo một đặc trưng xác định hình

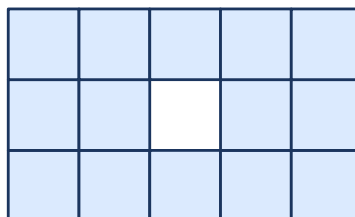
Mỗi hình vuông trên lưới được xác định bởi **kích thước** và **góc trên bên trái** (chấm hồng). Đếm theo kích thước: với mỗi kích thước, đếm số vị trí đặt được góc. Lưới $n \times n$ có $(n - k + 1)^2$ hình vuông $k \times k$; lưới 3×3 có $9 + 4 + 1 = 14$ hình vuông.



Example 7.11

Hình vuông tránh một lỗ

A 3×5 grid of unit squares has its center square cut out, leaving a hole, as shown. How many squares of any size, with sides along the grid lines, do not cover any part of the hole?



(A) 14

(B) 16

(C) 18

(D) 22

(E) 26

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (C) 18

Đếm **tất cả** hình vuông trong lưới 3×5 đầy đủ, rồi bỏ những hình chứa ô bị khoét. Đánh dấu hình vuông bằng ô ở góc dưới bên trái (x, y) với $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 2$; ô bị khoét là $(2, 1)$.

Lưới đầy đủ: $1 \times 1: 5 \cdot 3 = 15$; $2 \times 2: 4 \cdot 2 = 8$; $3 \times 3: 3 \cdot 1 = 3$. Cộng 26.

Chứa ô (2, 1): $1 \times 1: 1 \cdot 2 \times 2$: góc có $x \in \{1, 2\}$, $y \in \{0, 1\} \rightarrow 4$. $3 \times 3: y = 0$ và $x \in \{0, 1, 2\} \rightarrow 3$. Cộng 8.

Đáp số $26 - 8 = 18$. Đáp án (C).

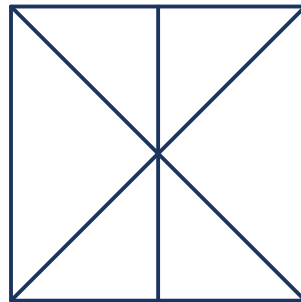
Bây: chỉ bỏ ô bị khoét và ba hình 3×3 , quên bốn hình 2×2 chứa lỗ, được $26 - 1 - 3 = 22$; quên khoét lỗ được 26. Lưu ý cả 3 hình 3×3 đều chứa ô giữa.

Insight · Đếm hình theo kích thước; với mỗi kích thước đếm vị trí của một góc cố định. Có “lỗ” thì đếm tất cả rồi trừ những hình chạm lỗ — những hình này cũng đếm được theo vị trí góc.

Example 7.12

Đếm tam giác theo số mảnh ghép

How many triangles of any size are in the figure, which shows a square with both of its diagonals and the segment joining the midpoints of two opposite sides?



(A) 8

(B) 10

(C) 12

(D) 14

(E) 16

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 12

Các đoạn thẳng chia hình vuông thành 6 mảnh: hai tam giác trên–dưới (giữa hai đường chéo) mỗi tam giác bị đoạn giữa cắt đôi thành 2 mảnh, và hai tam giác trái–phải. Đếm tam giác theo **số mảnh** nó chứa.

1 mảnh: cả 6 mảnh đều là tam giác: 6.

2 mảnh: tam giác trên và tam giác dưới (mỗi cái gồm 2 nửa): 2.

3 mảnh: bốn nửa hình vuông cắt bởi một đường chéo; mỗi nửa gồm tam giác trên hoặc dưới (2 mảnh) cộng một tam giác bên (1 mảnh): 4.

Các nhóm mảnh khác không ghép thành tam giác.

Tổng $6 + 2 + 4 = 12$. Đáp án (C).

Bây: chỉ đếm như hình vuông có hai đường chéo ra 8, quên các tam giác nhỏ bị đoạn giữa tạo ra.

Insight · Đếm tam giác trong hình vẽ: đánh số các mảnh nhỏ, rồi chia trường hợp theo số mảnh ghép thành tam giác — không sót, không trùng.

Common Trap — Hai lỗi kinh điển khi đếm hình

(1) Đếm theo kích thước nhưng quên cả hai chiều: hình chữ nhật 1×2 và 2×1 là hai loại khác nhau. (2) Trong lưới tam giác, quên các tam giác **úp ngược**. Luôn đặt câu hỏi: hình này có thể nằm theo những hướng nào?

Tip — Nhận dạng nhanh trong phòng thi

“đi theo mũi tên / chỉ sang phải và lên” → **ghi số**. “bao nhiêu hình...” → chọn **đặc trưng** (kích thước + góc, hoặc số mảnh). “bao nhiêu số...” với điều kiện trên chữ số → **sơ đồ ô**, tách trường hợp khi ô ràng buộc nhau. “liệt kê được” (dưới khoảng 30 đối tượng) → **liệt kê có thứ tự**.

E Worked Example — Competition Level

Ví dụ mẫu mức thi đấu

Ví dụ cuối kết hợp liệt kê, chia trường hợp và quy tắc nhân ở mức câu 21–25 của AMC 8. Hãy tự làm ít nhất 5 phút trước khi đọc lời giải.

Example 7.13

Chia trường hợp theo cấu trúc, rồi đếm cách sắp

How many three-digit numbers have the property that one of their digits is the product of the other two digits? (For example, 236, 919, and 700 have this property.)

- (A) 43 (B) 46 (C) 51 (D) 52 (E) 76

SOLUTION • LỜI GIẢI · Answer: (D) 52

Gọi ba chữ số là x, y, z với $z = xy$. Chia trường hợp theo cấu trúc của bộ chữ số, rồi đếm số cách sắp thành số có ba chữ số.

Có chữ số 0. Nếu $z = 0$ thì $x = 0$ hoặc $y = 0$: bộ chữ số chứa ít nhất hai số 0, dạng $\{0, 0, a\}$. Nếu một trong x, y bằng 0 thì $z = 0$, lại về dạng đó. Chữ số đầu khác 0 nên chỉ có số $a00$, $a = 1, \dots, 9$: 9 số.

Không có 0, có chữ số 1. $1 \cdot a = a$: bộ $\{1, a, a\}$. Với $a = 1$: chỉ số 111. Với $a = 2, \dots, 9$: mỗi bộ có 3 cách sắp (chọn chỗ cho chữ số 1): $8 \cdot 3 = 24$.

Không có 0 và 1. $2 \leq x \leq y, xy \leq 9$: $(2, 2, 4), (2, 3, 6), (2, 4, 8), (3, 3, 9)$. Bộ có hai chữ số bằng nhau cho 3 số, bộ ba chữ số khác nhau cho 6 số: $3 + 6 + 6 + 3 = 18$.

Tổng $9 + 1 + 24 + 18 = 52$. Đáp án (D).

Bây: quên các số $a00$ ra 43; quên 111 ra 51; cho mọi bộ $\{1, a, a\}$ có 6 cách sắp ra 76.

Insight · Điều kiện “không thứ tự” trên các chữ số → đếm **bộ chữ số** trước (chia theo cấu trúc: có 0, có 1, còn lại), rồi nhân với số cách sắp; bộ có chữ số 0 hoặc chữ số lặp phải tính riêng.

1 Exercises 1 • Foundation

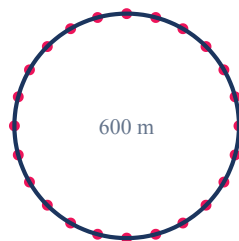
Bài tập 1 • Nền tảng



7.1 The list 17, 24, 31, 38, $\dots$, 500 continues by adding 7 each time. How many numbers in the list are odd?

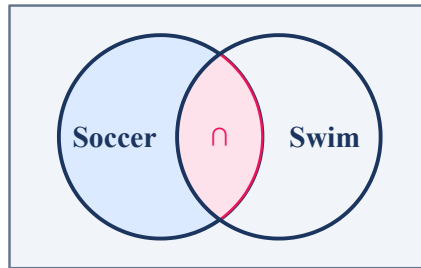
- ♦ (A) 35 (B) 36 (C) 37 (D) 69 (E) 70

7.2 A circular running track is 600 meters long, and a straight path next to it is also 600 meters long. Markers are placed every 25 meters along the track, starting at the finish line, and every 25 meters along the path, including one at each end. How many markers are there in all?



- (A) 47 (B) 48 (C) 49 (D) 50 (E) 51

- 7.3** In a class of 35 students, 21 play soccer, 17 swim, and 6 do neither. How many students do exactly one of the two activities?

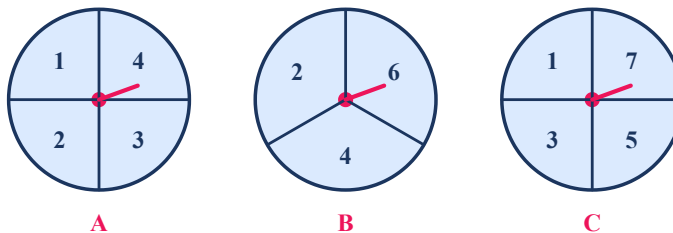


(A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 20 (E) 29

- 7.4** How many rectangles with whole-number side lengths have area 60 and perimeter less than 50? (Rectangles with the same two side lengths count as the same.)

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 12

- 7.5** Three spinners are shown. Spinner *A* shows 1, 2, 3, 4; spinner *B* shows 2, 4, 6; and spinner *C* shows 1, 3, 5, 7. Each spinner is spun once. In how many of the possible outcomes is the sum of the three numbers equal to 10?



(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 48

- 7.6** In a 100-meter hurdles race, the first hurdle is 13 meters from the start, the hurdles are 8.5 meters apart, and the last hurdle is 10.5 meters before the finish line. How many hurdles are there?

(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13

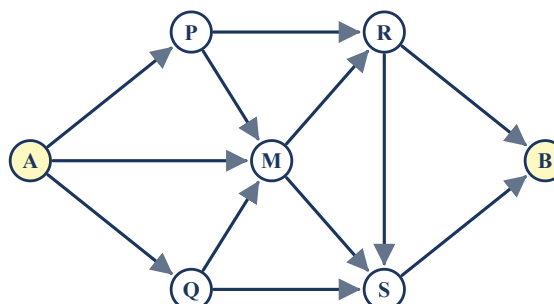
- 7.7** Lan has 5 shirts, 3 pairs of pants, and 2 jackets. An outfit is one shirt, one pair of pants, and either one jacket or no jacket. Her striped shirt is never worn with a jacket. How many different outfits can Lan make?

(A) 39 (B) 40 (C) 45 (D) 60 (E) 90

- 7.8** How many positive integers less than 1000 have exactly one digit equal to 7?

(A) 217 (B) 225 (C) 243 (D) 271 (E) 300

- 7.9** The figure shows one-way roads; each road can be used only in the direction of its arrow. How many different routes are there from *A* to *B*?

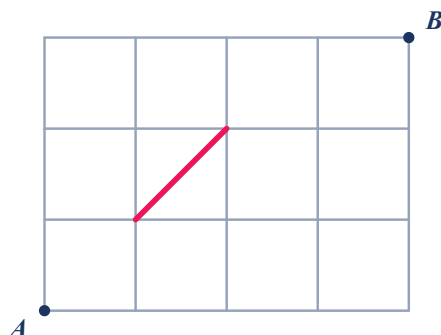


(A) 8 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 16

- 7.10** How many two-digit numbers have the product of their digits greater than the sum of their digits?

(A) 36 (B) 45 (C) 54 (D) 56 (E) 63

- 7.11** The figure shows a 4×3 grid of streets with one extra diagonal street. Moving from A to B , each step goes one block to the right, one block up, or along the diagonal street (upward). How many different routes are there?



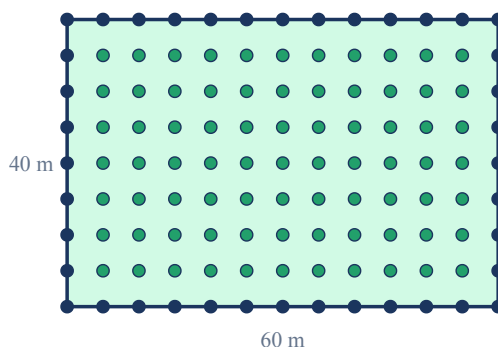
- (A) 35 (B) 38 (C) 41 (D) 44 (E) 47
- 7.12** How many three-digit numbers have digits that are strictly increasing from left to right and add up to 12? (For example, 129 is one such number.)
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi



- 7.13** How many integers n satisfy $100 < n^2 < 1000$?
- (A) 20 (B) 21 (C) 22 (D) 41 (E) 42
- 7.14** Exactly 10 coins, each a nickel (5 cents), a dime (10 cents), or a quarter (25 cents), are worth exactly 1 dollar in total. How many different combinations of coins are possible?
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- 7.15** Each of the 40 members of a club plays chess or go, or both. Twice as many members play chess as play go, and 5 members play both games. How many members play only chess?
- (A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 30
- 7.16** In a certain game, a team can score 2, 3, or 7 points at a time. A team finished with 23 points. How many different combinations of scoring plays could give exactly 23 points? (Only the numbers of 2-, 3-, and 7-point plays matter, not their order.)
- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 14
- 7.17** A rectangular field measures 60 m by 40 m. Trees are planted at every point of a square grid with spacing 5 m that covers the field, with trees at the four corners and along the edges, as shown. How many trees are strictly inside the field (not on its edge)?

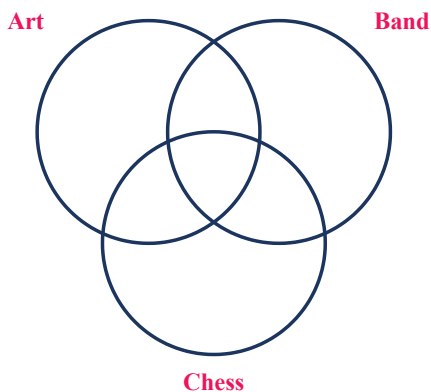


- (A) 70 (B) 77 (C) 88 (D) 96 (E) 117
- 7.18** How many ordered pairs (x, y) of positive integers satisfy $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{4}$?
- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 9

- 7.19** How many positive integers have all of their digits different and a digit sum of 6? (For example, 105 and 6 are two such integers.)

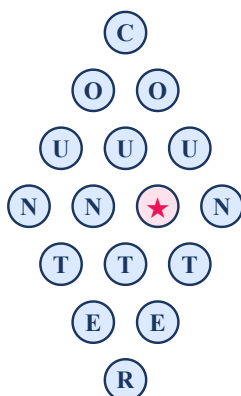
(A) 20 (B) 26 (C) 32 (D) 38 (E) 44

- 7.20** Each of the 50 members of a club takes at least one of three classes: Art, Band, and Chess. Art has 25 members, Band has 22, and Chess has 21. Exactly 8 members take exactly two of the classes. How many members take all three classes?



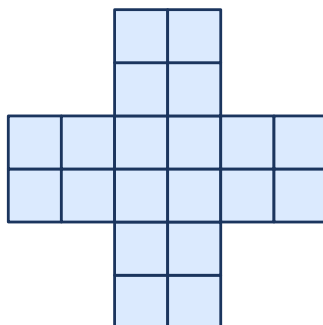
(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 9

- 7.21** The letters are arranged as shown. A path starts at the top *C* and moves down one row at each step, to one of the (at most two) letters touching it diagonally in the next row, so that it spells COUNTER. The star cannot be used. How many paths are there?



(A) 11 (B) 13 (C) 14 (D) 16 (E) 20

- 7.22** The figure is a cross made of 20 unit squares: a 2×6 horizontal bar and a 6×2 vertical bar that overlap in a 2×2 square at the center. How many rectangles (squares included), with sides along the grid lines, lie entirely inside the cross?



(A) 108 (B) 117 (C) 126 (D) 135 (E) 144

-

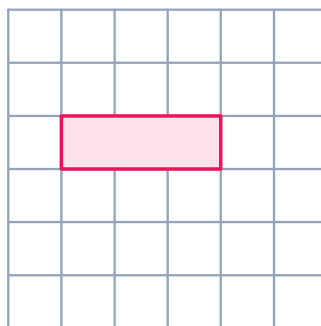
- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 14

★ ★ ★

-
- A 4x4 grid with a red path from point A to point B. The path starts at A (bottom-left), goes up 2 units, right 2 units, down 2 units, and right 2 units to B (top-right).

- (A) 35 (B) 64 (C) 125 (D) 210 (E) 256

- 7.29** How many positive integers less than 1000 can be written in the form $2^a \cdot 3^b$, where a and b are nonnegative integers? (For example, $1 = 2^0 \cdot 3^0$ and $72 = 2^3 \cdot 3^2$.)
♦♦♦♦ (A) 33 (B) 38 (C) 39 (D) 40 (E) 46
- 7.30** How many four-digit positive integers have four different digits whose sum is 10?
♦♦♦♦ (A) 96 (B) 102 (C) 108 (D) 120 (E) 144
- 7.31** How many positive integers less than 500 are divisible by 4 and have digit sum 9?
♦♦♦♦ (A) 8 (B) 10 (C) 11 (D) 12 (E) 13
- 7.32** A 6×6 grid of unit squares is drawn. How many rectangles (squares included) with sides along the grid lines have an odd area? One such rectangle, with area 3, is shaded.
♦♦♦♦



- (A) 100 (B) 121 (C) 144 (D) 225 (E) 297
- 7.33** How many positive integers less than 1000 are divisible by 3 and have only odd digits?
♦♦♦♦ (A) 41 (B) 49 (C) 51 (D) 55 (E) 63
- 7.34** The integers from 1 to 2026 are written one after another to form a single long string of digits:
♦♦♦♦ 123456789101112...20252026.

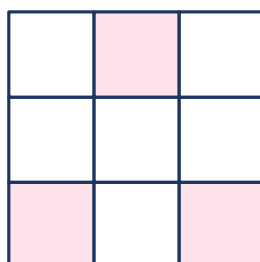
How many times does the two-digit block 12 (a digit 1 immediately followed by a digit 2) appear in the string?

Integer answer · Đáp số nguyên

- 7.35** How many positive integers less than 1000 have no digit 0 and have a product of digits that is a perfect square? (For example, 49 and 824 qualify, since $4 \cdot 9 = 36$ and $8 \cdot 2 \cdot 4 = 64$.)
♦♦♦♦

Integer answer · Đáp số nguyên

- 7.36** Some of the 9 squares of a 3×3 board are chosen so that no two chosen squares share a side. Choosing no squares at all is allowed. One choice of 3 squares is shown. How many choices are possible?
♦♦♦♦



Integer answer · Đáp số nguyên

Chapter 8

8020 AMC 8 Mastery

Counting II — Arrangements, Choices & Complements

Đếm 2 — sắp xếp, chọn & phần bù

Chương 7 dạy quy tắc cộng, quy tắc nhân và chia trường hợp. Chương này biến những phép nhân lặp đi lặp lại thành công cụ có tên: giai thừa, chỉnh hợp $P(n, k)$, tổ hợp $\binom{n}{k}$, hoán vị lặp, sao và vạch — cùng các kỹ thuật xử lý điều kiện: gom khối, chèn khe, thứ tự tương đối, bàn tròn, phần bù và bao hàm–loại trừ. Lỗi mất điểm hay gặp nhất: nhầm có thứ tự với không thứ tự, quên hoán vị bên trong khối, và đếm “ít nhất một” trực tiếp nên bị trùng.

✓ Tính nhanh giai thừa, $P(n, k)$, $\binom{n}{k}$; biết khi nào thứ tự quan trọng.

✓ Xếp có điều kiện bằng gom khối, chèn khe, chia cho thứ tự tương đối; xếp quanh bàn tròn.

✓ Đếm nhóm, đếm hình (tam giác, hình bình hành, giao điểm) bằng cách chọn điểm hoặc chọn đường.

✓ Xếp vật giống nhau, đếm đường đi bằng $\binom{m+n}{m}$, chia vật giống nhau bằng sao và vạch.

✓ Dùng phần bù cho “ít nhất một”, “ít nhất hai giống nhau”, “có hai cái cạnh nhau”; bao hàm–loại trừ với hai, ba điều kiện.

factorial · giai thừa

permutation · hoán vị / chỉnh hợp

combination · tổ hợp

n choose k · tổ hợp chập k của n

adjacent / next to · kề nhau, cạnh nhau

block · khối (gom lại)

gap · khe

relative order · thứ tự tương đối

rotation · phép quay

identical · giống hệt nhau

distinct / different · khác nhau

complementary counting · đếm phần bù

inclusion–exclusion · bao hàm–loại trừ

collinear · thẳng hàng

K 8.1 Factorials and Permutations

Giai thừa và hoán vị

Ở Chương 7, mỗi bài đếm là một chuỗi bước “chọn cái này, rồi chọn cái kia” với quy tắc nhân. Rất nhiều bài lặp lại cùng một kiểu bước: **xếp các vật khác nhau vào các vị trí khác nhau**. Kiểu bước này có tên riêng và có ký hiệu riêng, giúp ta viết nhanh và không nhầm.

Definition — Factorial (giai thừa)

For a positive integer n , $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$. By convention $0! = 1$.

$n!$ là số cách xếp n vật **khác nhau** thành một hàng: vị trí đầu có n lựa chọn, vị trí thứ hai còn $n-1$, ... Vài giá trị nên thuộc: $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, $7! = 5040$. Mẹo tính: $\frac{n!}{(n-1)!} = n$, nên $\frac{10!}{8!} = 10 \cdot 9 = 90$ — đừng bao giờ khai triển hết rồi mới chia.

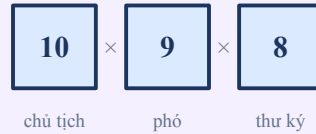
Theorem — Permutations — arranging k of n (chỉnh hợp)

The number of ways to choose k of n different objects and arrange them in order is

$$P(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Đây chỉ là quy tắc nhân với k ô: ô thứ nhất n cách, ô thứ hai $n-1$ cách, ..., ô thứ k còn $n-k+1$ cách. Ví dụ: chọn chủ tịch, phó chủ tịch, thư ký (ba chức khác nhau) trong 10 người: $P(10, 3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Hình: sơ đồ ô cho $P(10, 3)$.

Ba chức vụ khác nhau

**Example 8.1**

Điền ô bị ràng buộc trước

A coach must choose 4 of her 7 sprinters and assign them to the four legs of a relay race (first, second, third, and last leg). Her fastest sprinter, Hùng, may be left out, but if he is chosen he must run the last leg. How many different assignments are possible?

(A) 35 (B) 120 (C) 360 (D) 480 (E) 840

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 480

Chia hai trường hợp theo Hùng (Chương 7: các trường hợp phải rời nhau và phủ hết).

Không có Hùng: xếp 4 trong 6 bạn còn lại vào 4 chặng: $P(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Có Hùng: Hùng bị ép chạy chặng cuối (1 cách); ba chặng đầu xếp 3 trong 6 bạn còn lại: $P(6, 3) = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Tổng $360 + 120 = 480$. Đáp án (D).

Bây: chỉ đếm một trường hợp ra 360 hoặc 120; quên rằng thứ tự chặng quan trọng và đếm “chọn đội” ra $\binom{7}{4} = 35$.

Insight · Một người có điều kiện đặc biệt → chia trường hợp “có / không có người đó”, và trong mỗi trường hợp điền ô bị ràng buộc trước.

Common Trap — Thứ tự có quan trọng không?

Trước khi tính, tự hỏi: *đổi chỗ hai vật đã chọn có tạo ra kết quả khác không?* Ba chức vụ khác nhau, các chặng tiếp sức, các chữ số trong một số — **có** thứ tự, dùng $P(n, k)$. Một nhóm, một đội, một tập — **không** thứ tự, dùng $\binom{n}{k}$ (mục 8.3). Nhầm hai loại này là nguồn đáp án nhiễu phổ biến nhất của các câu đếm.

Tip — Viết sơ đồ ô ra giấy nháp

Với mọi bài “xếp”, vẽ nhanh một hàng ô, ghi số lựa chọn dưới mỗi ô, bắt đầu từ ô bị ràng buộc nhiều nhất (chữ số đầu khác 0, người phải đứng giữa, chặng cuối...). Mười giây vẽ ô tiết kiệm được một phút nghĩ lại.

K 8.2 Arrangements with Restrictions

Sắp xếp có điều kiện: gom khối, chèn khe, thứ tự, bàn tròn

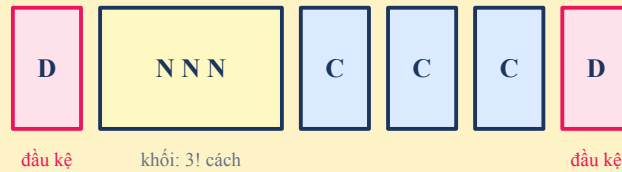
Để AMC 8 hiếm khi hỏi “xếp n người thành hàng” trơn — luôn có điều kiện: hai người phải đứng cạnh nhau, không được đứng cạnh nhau, người này đứng trước người kia, ngồi quanh bàn tròn. Mỗi điều kiện có một công cụ chuẩn.

Key Idea — Block method — “must be together” (gom khối)

To count arrangements in which certain objects must be adjacent, glue them into one block, arrange the block together with the other objects, then multiply by the number of orders inside the block.

Hình: hai từ điển D ở hai đầu kệ, ba tiểu thuyết N gom thành một khối; giữa kệ còn 4 đơn vị (khối N và ba truyện tranh C).

4 đơn vị ở giữa $\rightarrow 4!$ cách

**Example 8.2****Gom khối và vị trí cố định**

Eight different books — 2 dictionaries, 3 novels, and 3 comic books — are placed in a row on a shelf. The two dictionaries must be at the two ends of the row, and the three novels must be next to each other. In how many ways can the books be arranged?

- (A) 48 (B) 144 (C) 288 (D) 1440 (E) 4320

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 288

Hai đầu kệ dành cho hai từ điển: 2 cách (từ điển nào bên trái).

Sáu chỗ ở giữa: gom 3 tiểu thuyết thành một khối, cùng 3 truyện tranh thành 4 đơn vị, xếp được $4! = 24$ cách. Trong khối, 3 tiểu thuyết xếp $3! = 6$ cách.

Tổng $2 \cdot 24 \cdot 6 = 288$. Đáp án (C).

Bây: quên hoán vị trong khối ra $2 \cdot 24 = 48$; quên đổi chỗ hai từ điển ra 144.

Insight · Ràng buộc “ở đúng chỗ” xử lý trước, ràng buộc “đứng cạnh nhau” gom khối sau — và đừng quên nhân số thứ tự **bên trong** khối.

Key Idea — Gap method — “no two together” (chèn khe)

To arrange objects so that no two of a certain kind are adjacent, first place the other objects; then put the restricted objects into different gaps between them (including the two ends). With m objects placed first, there are $m + 1$ gaps.

Đừng cố đếm trực tiếp “không cạnh nhau”. Đặt những vật **tự do** trước, chúng tạo ra các khe; mỗi khe nhận nhiều nhất một vật bị ràng buộc — thế là tự động không có hai vật nào kề nhau.

5 chỗ trống tạo 6 khe — mỗi khe nhận nhiều nhất 1 xe

**Example 8.3****Chèn khe với chỗ trống**

A parking lot has 9 spaces in a row. Four cars of different colors park in the lot, one car per space, so that no two cars are in adjacent spaces. In how many ways can this happen?



- (A) 15 (B) 24 (C) 126 (D) 360 (E) 3024

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(D)** 360

Có 9 chỗ, 4 xe nên có 5 chỗ trống. Coi 5 chỗ trống là “vật tự do”: chúng tạo 6 khe (hình ở trên). Mỗi xe đậu vào một khe, mỗi khe nhiều nhất một xe — khi đó giữa hai xe luôn có ít nhất một chỗ trống, và ngược lại mỗi cách đậu hợp lệ ứng với đúng một cách chọn khe.

Chọn 4 khe trong 6 và xếp 4 xe khác màu vào đó theo thứ tự từ trái sang phải: $P(6, 4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$. Đáp án (D).

Bẫy: quên rằng các xe khác nhau, chỉ chọn khe, ra 15; không có điều kiện thì có $P(9, 4) = 3024$ cách.

Insight · Bài “không có hai cái cạnh nhau” → đặt cái tự do trước (kể cả chỗ trống!), rồi chen cái bị ràng buộc vào khe.

Theorem — Relative order — divide by symmetry (thứ tự tương đối)

Among all $n!$ arrangements of n different objects, any k particular objects appear in each of their $k!$ possible relative orders equally often. So the number of arrangements with those k objects in one prescribed order is $\frac{n!}{k!}$.

Lý do: đổi tên các vật đó cho nhau là một phép ghép đôi một-một giữa các cách xếp. Ví dụ: trong $5! = 120$ cách xếp 5 bạn, có đúng 60 cách Minh đứng trước Nam (không nhất thiết đứng sát) — vì “Minh trước Nam” và “Nam trước Minh” chia đều.

Example 8.4**Hai điều kiện thứ tự độc lập**

A playlist contains 6 different songs, including songs A , B , C , and D . In how many orders can all six songs be played so that A is played at some time before B , and C is played at some time before D ?

(A) 30 **(B)** 180 **(C)** 360 **(D)** 480 **(E)** 720

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(B)** 180

Bỏ qua điều kiện: $6! = 720$ thứ tự. Điều kiện “ A trước B ” giữ đúng một nửa: 360. Trong số đó, đổi chỗ C và D vẫn giữ nguyên điều kiện về A , B , nên “ C trước D ” lại giữ đúng một nửa: 180. Đáp án (B).

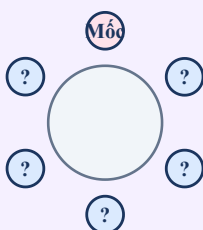
Bẫy: chỉ dùng một điều kiện ra 360; chia cho $4! = 24$ (coi như cả bốn bài phải theo một thứ tự cố định A, B, C, D) ra 30.

Insight · Mỗi điều kiện “ X trước Y ” với cặp riêng biệt chia số cách cho 2. Ba vật theo một thứ tự cố định → chia cho $3!$.

Theorem — Circular arrangements (xếp quanh bàn tròn)

If arrangements around a round table that differ only by a rotation are considered the same, then n different people can be seated in $(n - 1)!$ ways.

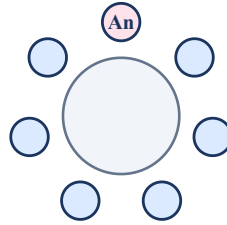
Cố định một người làm “mốc” (quay bàn sao cho người đó ở ghế trên cùng); $n - 1$ người còn lại xếp vào $n - 1$ ghế theo thứ tự dọc theo chiều kim đồng hồ: $(n - 1)!$ cách. Tương đương: $n!$ cách xếp theo ghế, mỗi cách quay được n lần nên chia n .



Example 8.5

Bàn tròn với hàng xóm cho trước

Seven friends, including An, Bình, and Chi, sit around a round table with 7 seats. Two seatings are the same if one is a rotation of the other. In how many seatings are An's two neighbors Bình and Chi?



(A) 24

(B) 48

(C) 120

(D) 240

(E) 336

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 48

Cố định An làm mốc. Hai ghế cạnh An dành cho Bình và Chi: 2 cách (Bình bên trái hay bên phải). Bốn bạn còn lại vào 4 ghế còn lại: $4! = 24$ cách.

Tổng $2 \cdot 24 = 48$. Đáp án (B).

Bấy: quên đổi chỗ Bình–Chi ra 24; coi bàn tròn như hàng ghế (không chia cho phép quay) ra $7 \cdot 48 = 336$.

Insight · Ở bàn tròn, cố định người “quan trọng nhất” làm mốc — các điều kiện quanh người đó trở thành điều kiện về ghế cụ thể.

Common Trap — Bàn tròn có lật hay không?

“Rotation” (phép quay) là mặc định của bàn tròn: $(n - 1)!$. Chỉ khi đề nói thêm “or a reflection” (vòng đeo tay, móc khoá có thể lật mặt) mới chia tiếp cho 2. Ngược lại, nếu các ghế được đánh số thì **không** chia gì cả — đó là một hàng n ghế bình thường.

Tip — Nhận dạng nhanh

“next to each other / together” → gom khối. “no two ... adjacent” → chèn khe. “before / to the left of (not necessarily next to)” → chia cho số thứ tự tương đối. “round table ... rotation” → cố định một người.

K 8.3 Combinations

Tổ hợp — chọn không kể thứ tự

Definition — Combinations (tổ hợp)

The number of ways to choose k objects from n different objects, when the order of choosing does not matter, is

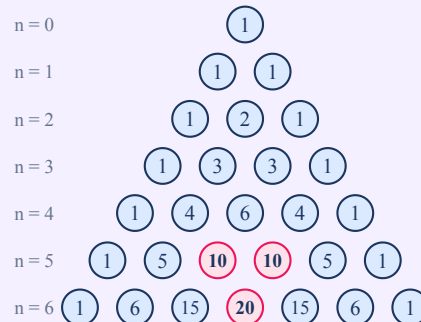
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!}.$$

Đọc là “ n chọn k ” (n choose k). Lý do: $P(n, k)$ đếm các cách chọn có *thứ tự*; mỗi nhóm k vật xuất hiện đúng $k!$ lần (theo $k!$ thứ tự), nên chia cho $k!$. Ví dụ: chọn 3 người trong 10 làm một nhóm: $\binom{10}{3} = \frac{720}{6} = 120$.

Theorem – Two useful facts

(1) Symmetry: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (2) Pascal's rule: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

(1) Chọn k người để đi cũng là chọn $n - k$ người ở lại. (2) Xét một người cụ thể: hoặc người đó được chọn (còn chọn $k - 1$ trong $n - 1$), hoặc không (chọn k trong $n - 1$). Quy tắc (2) sinh ra tam giác Pascal: mỗi số bằng tổng hai số ngay trên nó — ví dụ $\binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 10 + 10 = 20 = \binom{6}{3}$ (tô hồng).



Bảng nhỏ nên thuộc: $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ (số cặp, số cái bắt tay, số đoạn thẳng nối n điểm); $\binom{5}{2} = 10$, $\binom{6}{2} = 15$, $\binom{7}{3} = 35$, $\binom{8}{4} = 70$, $\binom{10}{3} = 120$.

Example 8.6**Chia trường hợp theo thành phần nhóm**

A teacher chooses 4 students from a group of 7 boys and 5 girls. The chosen students must include at least one boy, and there must be at least as many girls as boys among them. How many different groups of 4 are possible?

(A) 70 (B) 210 (C) 280 (D) 285 (E) 495

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 280

Gọi số trai là b , số gái là $4 - b$. Điều kiện: $b \geq 1$ và $4 - b \geq b$, nên $b = 1$ hoặc $b = 2$.

• $b = 2$: $\binom{7}{2} \binom{5}{2} = 21 \cdot 10 = 210$. • $b = 1$: $\binom{7}{1} \binom{5}{3} = 7 \cdot 10 = 70$.

Tổng $210 + 70 = 280$. Đáp án (C).

Bẫy: quên điều kiện “ít nhất một trai” (thêm nhóm toàn gái $\binom{5}{4} = 5$) ra 285; không điều kiện thì có $\binom{12}{4} = 495$.

Insight · Nhóm gồm hai loại người → chia theo **số người mỗi loại**, rồi nhân hai tổ hợp.

Key Idea – Geometry objects are choices of points

A segment is determined by 2 points, a triangle by 3 non-collinear points, a quadrilateral inside a convex polygon by 4 vertices.

Vì thế đếm hình hình học thường là “ $\binom{n}{3}$ trừ đi các bộ ba thẳng hàng”. Nhớ trừ **mọi** đường thẳng chứa từ 3 điểm trở lên, kể cả đường chéo.

Example 8.7**Chọn vị trí thay vì xếp**

The six letters of the word SQUARE are rearranged so that the vowels appear in alphabetical order (A before E before U) and the consonants also appear in alphabetical order (Q before R before S). The letters need not be next to each other. How many such arrangements are there (including QARESU, for example)?

(A) 20 (B) 36 (C) 60 (D) 120 (E) 720

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (A) 20

Một cách xếp hợp lệ được xác định hoàn toàn khi biết **3 vị trí nào** dành cho nguyên âm: điền A, E, U vào đó theo thứ tự, điền Q, R, S vào 3 vị trí còn lại theo thứ tự — chỉ 1 cách. Ngược lại mỗi cách chọn 3 vị trí cho đúng một cách xếp.

Số cách: $\binom{6}{3} = 20$. Đáp án (A).

Kiểm tra bằng thứ tự tương đối (mục 8.2): $\frac{6!}{3!3!} = \frac{720}{36} = 20 \checkmark$. Bấy: chỉ dùng một điều kiện ra $\frac{720}{6} = 120$.

Insight · Khi thứ tự bên trong từng nhóm đã bị ép, việc duy nhất còn lại là **chọn vị trí** cho mỗi nhóm — đó là một tổ hợp.

Common Trap — Chọn từng người một rồi quên chia

“Chọn người thứ nhất (7 cách), người thứ hai (6 cách)” cho 42 — nhưng một **cặp** chỉ có 21, vì mỗi cặp được đếm hai lần (Minh rồi Nam, Nam rồi Minh). Mỗi khi chọn lần lượt cho một nhóm không có vai trò, nhớ chia cho số thứ tự.

Tip — Chức vụ trong nhóm

Nhóm 4 người có 1 nhóm trưởng: hoặc chọn nhóm $\binom{n}{4}$ rồi chọn trưởng trong nhóm (4 cách), hoặc chọn trưởng trước (n cách) rồi 3 thành viên $\binom{n-1}{3}$. Hai cách phải cho cùng một số — đó là cách tự kiểm tra rất nhanh.

K 8.4 Repeated Objects, Paths and Sharing

Vật giống nhau, đường đi trên lưới và chia kẹo

Theorem — Arrangements with repeated objects (hoán vị lặp)

If n objects consist of a identical objects of one kind, b of a second kind, c of a third kind, ... ($a + b + c + \dots = n$), then the number of different arrangements in a row is $\frac{n!}{a!b!c!\dots}$.

Nếu dán nhãn cho các vật giống nhau ($A_1, A_2, \dots$) thì có $n!$ cách; mỗi cách xếp “thật” bị đếm $a!b!c!\dots$ lần (hoán vị các nhãn trong từng loại). Ví dụ: số cách xếp chữ cái của LEVEL là $\frac{5!}{2!1!1!1!1!} = 30$. Với hai loại, $\frac{n!}{a!b!} = \binom{n}{a}$: chỉ cần chọn vị trí cho loại thứ nhất.

Example 8.8

Hoán vị lặp kết hợp gom khối

How many arrangements of the nine letters of the word PEPPERONI begin with a P and have the two E 's next to each other?

(A) 840

(B) 2520

(C) 5040

(D) 6720

(E) 10 080

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 2520

Chữ cái: P (3 lần), E (2 lần), R, O, N, I . Gom hai chữ E thành một khối EE (bên trong chỉ 1 cách vì hai chữ E giống nhau). Còn 8 đơn vị: P, P, P, R, O, N, I, EE .

Đặt một chữ P ở đầu. Bảy đơn vị còn lại P, P, R, O, N, I, EE có hai chữ P giống nhau: $\frac{7!}{2!} = 2520$ cách. Đáp án (B).

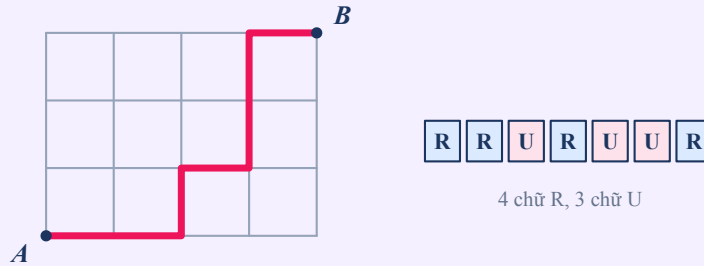
Kiểm tra bằng đối xứng: 8 đơn vị có $\frac{8!}{3!} = 6720$ cách xếp, và đơn vị đứng đầu là P trong $\frac{3}{8}$ số trường hợp: $6720 \cdot \frac{3}{8} = 2520 \checkmark$. Bấy: quên chia $2!$ cho hai chữ P còn lại ra 5040; quên điều kiện “bắt đầu bằng P ” ra 6720; quên điều kiện hai chữ E đứng cạnh nhau ra $\frac{8!}{2!2!} = 10\,080$; vẫn chia $3!$ dù đã đặt một chữ P ở đầu ra $\frac{7!}{3!} = 840$.

Insight · Gom khối và hoán vị lặp kết hợp tự nhiên: khối là một “chữ cái mới”; luôn hỏi xem bên trong khối có bao nhiêu thứ tự khác nhau.

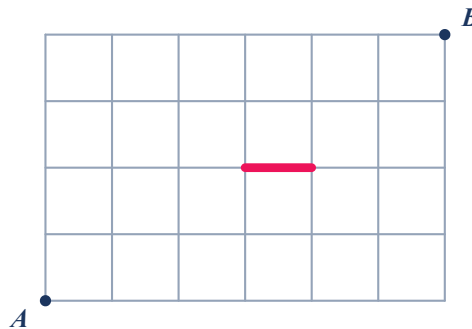
Theorem – Lattice paths (đường đi ngắn nhất trên lưới)

The number of shortest paths along grid lines from $(0, 0)$ to (m, n) , each step one unit right (R) or up (U), is $\binom{m+n}{m}$.

Chương 7 đếm đường đi bằng cách ghi số tại từng điểm. Bây giờ có cách nhanh hơn: mỗi đường đi là một chuỗi gồm m chữ R và n chữ U (hình), và mỗi chuỗi cho một đường đi. Số chuỗi là $\frac{(m+n)!}{m!n!} = \binom{m+n}{m}$. Các số ghi ở Chương 7 chính là các số trong tam giác Pascal!

**Example 8.9****Bắt buộc đi qua một đoạn phố**

The figure shows a 6×4 grid of streets. A route from A to B moves only right or up along the streets. How many routes use the highlighted block of street?



- (A) 30 (B) 60 (C) 90 (D) 100 (E) 210

SOLUTION • LỜI GIẢI · Answer: **(B)** 60

Đoạn tô hồng nối $(3, 2)$ với $(4, 2)$. Đi qua đoạn đó nghĩa là: đi từ A tới $(3, 2)$, bước sang phải, rồi đi từ $(4, 2)$ tới B .

$A \rightarrow (3, 2)$: $\binom{5}{2} = 10$ đường. $(4, 2) \rightarrow B = (6, 4)$: 2 bước phải, 2 bước lên: $\binom{4}{2} = 6$ đường.

Quy tắc nhân: $10 \cdot 6 = 60$. Đáp án (B).

Bẫy: đếm đường qua điểm $(3, 2)$ (có thể đi lên ở đó) ra $10 \cdot \binom{5}{2} = 100$; tổng số đường là $\binom{10}{4} = 210$.

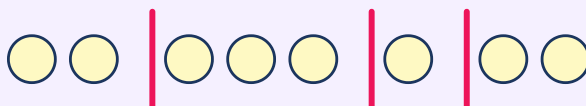
Insight · Một đoạn đường bắt buộc = hai điểm bắt buộc liên tiếp. Tách đường đi tại đó và nhân.

Theorem – Sharing identical items – stars and bars (chia kẹo)

The number of ways to give n identical items to k different people so that everyone gets at least one is $\binom{n-1}{k-1}$. If people may get none, the number is $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Xếp n chiếc bánh thành hàng: giữa chúng có $n-1$ khe. Đặt $k-1$ vạch vào $k-1$ khe khác nhau để cắt hàng thành k phần khác rỗng (hình). Nếu được phép rỗng: cho trước mỗi người 1 cái “ảo” — tức là chia $n+k$ chiếc, mỗi người ít nhất 1 — ra $\binom{n+k-1}{k-1}$.

3 vạch đặt vào 3 trong 7 khe giữa 8 chiếc bánh



loại 1: 2 · loại 2: 3 · loại 3: 1 · loại 4: 2

Example 8.10

Mua bóng, mỗi màu ít nhất một

A party shop sells balloons in 4 colors. Khoa buys 8 balloons, including at least one of each color. Balloons of the same color are identical. How many different selections can he make?

(A) 35

(B) 56

(C) 70

(D) 165

(E) 330

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (A) 35

Một lựa chọn = bộ số (a, b, c, d) nguyên dương với $a + b + c + d = 8$ (số bóng mỗi màu). Theo sao và vạch: 8 quả bóng có 7 khe, đặt 3 vạch: $\binom{7}{3} = 35$. Đáp án (A).

Bẫy: dùng công thức “được rỗng” ra $\binom{11}{3} = 165$; lấy nhầm $\binom{8}{3} = 56$ (đếm 8 khe thay vì 7).

Insight · “Vật giống nhau chia cho người/loại khác nhau” → sao và vạch. Trước khi dùng, xác định rõ: mỗi phần **được** rỗng hay không.

Common Trap – Sao và vạch chỉ dùng cho vật GIỐNG nhau

Chia 5 quyển sách **khác nhau** cho 3 người không phải là sao và vạch: mỗi quyển chọn người nhận, 3^5 cách. Còn chia 5 chiếc kẹo **giống nhau** mới là $\binom{7}{2}$. Đọc kỹ “identical” hay “different” trước khi chọn công thức.

Tip – Đổi để về dạng chuẩn

Điều kiện “mỗi người ít nhất 2” → phát trước mỗi người 1 cái, còn lại là “ít nhất 1”. Bài đường đi có hai loại bước → hoán vị lặp của hai chữ cái. Bài chữ số không giảm/không tăng → chọn tập chữ số. Đưa về dạng quen thuộc trước, tính sau.

K 8.5 Complementary Counting

Đếm phần bù và bao hàm–loại trừ

Key Idea — Complementary counting (đếm phần bù)

Number of good outcomes = (number of all outcomes) – (number of bad outcomes).

Dùng khi “xấu” dễ đếm hơn “tốt”. Dấu hiệu trong đề: **at least one** (ít nhất một), **not all**, **at least two ... are the same**, **some two are adjacent**. Phần bù của “ít nhất một” là “không có cái nào” — thường chỉ là một phép nhân.



Example 8.11

Ít nhất hai chữ số giống nhau

How many four-digit positive integers have at least two digits that are equal? (For example, 2026 and 7177 are such numbers.)

- (A) 4464 (B) 4536 (C) 4960 (D) 5040 (E) 5464

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (A) 4464

Phần bù: bốn chữ số **đôi một khác nhau**. Sơ đồ ô: chữ số đầu khác 0: 9 cách; chữ số thứ hai khác chữ số đầu (được là 0): 9 cách; rồi 8, rồi 7. Có $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$ số.

Có 9000 số có bốn chữ số, nên đáp số $9000 - 4536 = 4464$. Đáp án (A).

Bấy: trả lời phần bù 4536; đếm cả xấu bắt đầu bằng 0 ($10\,000 - 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4960$).

Insight · “ít nhất hai cái giống nhau” $\Leftrightarrow$ phần bù “tất cả khác nhau” — một sơ đồ ô gọn.

Theorem — Inclusion–exclusion for two conditions (bao hàm–loại trừ)

The number of outcomes satisfying neither bad condition X nor bad condition Y is

$$\text{All} - |X| - |Y| + |X \text{ and } Y|.$$

Đây là biểu đồ Venn của Chương 7 dùng cho phần bù: trừ $|X|$ và $|Y|$ thì các kết quả xấu cả hai kiểu bị trừ hai lần, nên cộng lại một lần. Với ba điều kiện: trừ ba tập, cộng ba phần giao từng đôi, trừ phần giao cả ba.

Example 8.12

Hai điều cấm cùng lúc

Five students, including An and Bảo, line up in a row. An refuses to be first in line and Bảo refuses to be last. In how many ways can the five students line up?

- (A) 48 (B) 66 (C) 72 (D) 78 (E) 96

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 78

Tất cả: $5! = 120$. Xấu kiểu X (An đứng đầu): $4! = 24$. Xấu kiểu Y (Bảo đứng cuối): 24 . Cả hai (An đầu và Bảo cuối): $3! = 6$.

Số cách hợp lệ: $120 - 24 - 24 + 6 = 78$. Đáp án (D).

Bấy: quên cộng lại phần giao ra 72; chỉ trừ một điều kiện ra 96.

Insight · Hai điều cấm $\rightarrow$ bao hàm–loại trừ: trừ từng cái, cộng lại phần “phạm cả hai”.

Common Trap — Đếm “ít nhất một” trực tiếp → đếm trùng

Đếm số mã PIN 4 chữ số (từ 0000 đến 9999) có ít nhất một chữ số 7 bằng cách “chọn vị trí cho chữ số 7 (4 cách), ba vị trí kia tùy ý (10^3)” cho 4000 — nhưng 7712 bị đếm hai lần, 7777 bốn lần. Đúng: $10^4 - 9^4 = 10\,000 - 6561 = 3439$.

Tip — Phần bù hay chia trường hợp?

Nghĩ phần bù trong 15 giây. Nếu phần bù là một phép nhân gọn (“không có...”, “tất cả khác nhau”), dùng nó. Nếu phần bù cũng rối (“không... và không...” cho nhiều điều kiện), cân nhắc chia trường hợp trực tiếp, hoặc bao hàm–loại trừ khi chỉ có hai, ba điều kiện.

E Worked Examples — Competition Level**Ví dụ mẫu mức thi đấu**

Hai ví dụ cuối ở mức câu 21–25 của AMC 8: mỗi bài phối hợp nhiều công cụ của chương. Hãy tự giải ít nhất 5 phút trước khi đọc lời giải.

Example 8.13**Hai cách đếm — và một cái bẫy đếm trùng**

A school has 4 sixth graders, 5 seventh graders, and 6 eighth graders on its math team. A group of 4 of these students is chosen for a contest, and every grade must be represented in the group. How many different groups are possible?

(A) 666 (B) 699 (C) 720 (D) 1365 (E) 1440

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 720

Cách 1 — chia theo thành phần. 4 người từ 3 khối, khối nào cũng có mặt: một khối có 2 người, hai khối kia mỗi khối 1.

• Khối 6 có 2: $\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 180$. • Khối 7 có 2: $4 \cdot \binom{5}{2} \cdot 6 = 240$. • Khối 8 có 2: $4 \cdot 5 \cdot \binom{6}{2} = 300$. Tổng 720.

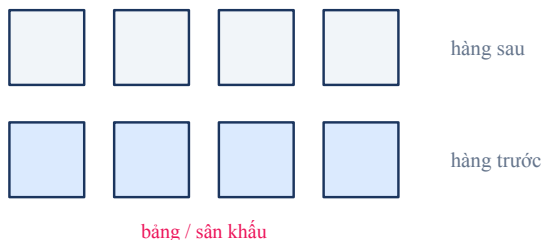
Cách 2 — phần bù + bao hàm–loại trừ. Tất cả $\binom{15}{4} = 1365$. Thiếu khối 6: $\binom{11}{4} = 330$; thiếu khối 7: $\binom{10}{4} = 210$; thiếu khối 8: $\binom{9}{4} = 126$. Thiếu hai khối (chỉ một khối): $\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} = 1 + 5 + 15 = 21$. Đáp số $1365 - (330 + 210 + 126) + 21 = 720$ ✓. Đáp án (C).

Bẫy lớn: “chọn mỗi khối một người ($4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$), rồi chọn người thứ tư tùy ý trong 12 người còn lại” cho 1440 — gấp đôi, vì nhóm có hai bạn khối 6 là An, Bình được đếm hai lần (An là “đại diện” hoặc Bình là “đại diện”). Quên cộng lại 21 ra 699.

Insight · Cách “chọn đại diện trước rồi chọn thêm” gần như luôn đếm trùng. Hãy chia theo **thành phần** nhóm, hoặc dùng phần bù.

Example 8.14**Mẫu trước, người sau**

Four boys and four girls sit in 8 seats arranged in two rows of four, a front row and a back row, with each back seat directly behind a front seat. No girl may sit directly behind a boy. In how many ways can the 8 children be seated?



(A) 7488 (B) 10 368 (C) 10 944 (D) 13 824 (E) 40 320

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 10 944

Tách hai bước. Trước hết chọn **mẫu**: ghế nào cho bạn trai (T), ghế nào cho bạn gái (G). Sau đó xếp 4 bạn trai vào 4 ghế T (4!) và 4 bạn gái vào 4 ghế G (4!): mỗi mẫu cho $24 \cdot 24 = 576$ cách.

Đếm mẫu. Mỗi cột (ghế trước, ghế sau) chỉ được là TT , GG hoặc GT (gái trước, trai sau); cấm TG . Gọi số cột mỗi loại là x, y, z . Đếm trai: $2x + z = 4$; đếm gái: $2y + z = 4$; nên $x = y$ và $z = 4 - 2x$.

• $x = 0$: cả 4 cột là GT : 1 mẫu. • $x = 1$: chọn cột TT (4 cách), cột GG (3 cách), hai cột còn lại GT : 12 mẫu. • $x = 2$: chọn 2 cột TT trong 4: $\binom{4}{2} = 6$ mẫu, còn lại GG .

Có $1 + 12 + 6 = 19$ mẫu. Đáp số $19 \cdot 576 = 10\,944$. Đáp án (C).

Bấy: quên trường hợp $x = 0$ ra $18 \cdot 576 = 10\,368$; bỏ điều kiện thì có $8! = 40\,320$.

Insight • Khi điều kiện chỉ nói về **loại** người (trai/gái), hãy đếm mẫu loại trước rồi nhân với số cách xếp người trong từng loại. Chia trường hợp theo số cột mỗi kiểu giúp mẫu không bị sót.

1 Exercises 1 • Foundation

Bài tập 1 • Nền tảng



8.1 What is the value of $\frac{9! - 8!}{7!}$?

- (A) 8 (B) 56 (C) 64 (D) 72 (E) 80

8.2 A pizza shop offers 8 different toppings. A customer orders a pizza with exactly 3 different toppings, but refuses to have both pineapple and anchovies on the same pizza. How many different pizzas can the customer order?

- (A) 50 (B) 56 (C) 70 (D) 280 (E) 336

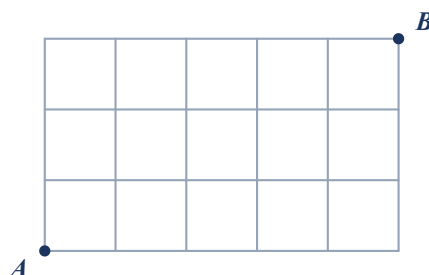
8.3 How many different four-digit numbers can be formed by rearranging the four digits of 2026, including 2026 itself?

- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 12

8.4 Six different cards, including the Ace and the King, are placed in a row. In how many arrangements is the Ace immediately to the left of the King?

- (A) 24 (B) 120 (C) 240 (D) 360 (E) 720

8.5 Moving only right or up along the grid lines, how many shortest paths go from A to B ?



- (A) 15 (B) 28 (C) 56 (D) 120 (E) 256

8.6 A code is a string of 3 letters, each chosen from A, B, C, D, E ; letters may repeat. How many codes contain at least one A ?

- (A) 48 (B) 61 (C) 64 (D) 75 (E) 125

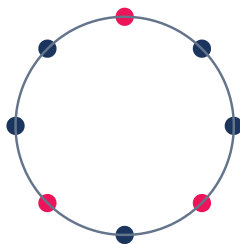
8.7 Twelve swimmers, including exactly two from Vietnam, swim in a final. The gold, silver, and bronze medals go to three different swimmers. In how many ways can the medals be awarded so that both Vietnamese swimmers win a medal?

- (A) 10 (B) 20 (C) 30 (D) 60 (E) 120

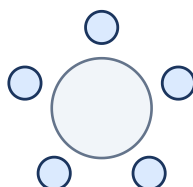
8.8 In a soccer league, every team plays every other team exactly twice, once at home and once away. A total of 90 games are played. How many teams are in the league?

Integer answer • Đáp số nguyên

- 8.9** ♦♦ Eight points are equally spaced on a circle; 3 of them are red and the other 5 are blue, as shown. How many triangles with vertices among these 8 points have at least one red vertex?



- (A) 10 (B) 30 (C) 36 (D) 45 (E) 46
- 8.10** ♦♦ A vending machine sells 3 kinds of drinks: tea, juice, and water. Hà buys 6 drinks. Drinks of the same kind are identical, and she does not have to buy every kind. How many different selections of 6 drinks are possible?
- (A) 10 (B) 18 (C) 21 (D) 28 (E) 729
- 8.11** ♦♦ Five friends, including An and Bình, sit around a round table with 5 seats, as shown. Two seatings are the same if one is a rotation of the other. In how many seatings do An and Bình sit next to each other?



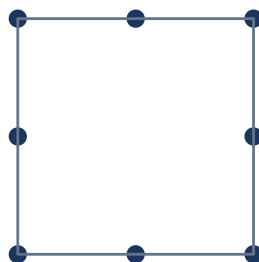
- (A) 12 (B) 24 (C) 36 (D) 48 (E) 120
- 8.12** ♦♦ For a mixed doubles badminton match, a coach chooses 2 of her 7 boys and 2 of her 6 girls, and then splits the four players into two teams, each consisting of one boy and one girl. In how many ways can she set up the match?
- (A) 126 (B) 210 (C) 315 (D) 420 (E) 630

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi



- 8.13** ♦♦ A 4-letter string is formed using four different letters chosen from A, B, C, D, E, F . How many such strings contain both A and B ?
- (A) 72 (B) 144 (C) 192 (D) 240 (E) 360
- 8.14** ♦♦ The figure shows the 4 vertices of a square and the midpoints of its 4 sides. How many triangles have all three vertices among these 8 points?

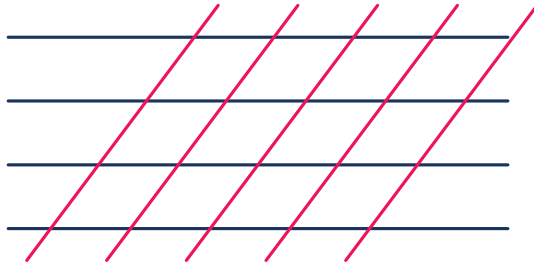


- (A) 40 (B) 44 (C) 48 (D) 50 (E) 52
- 8.15** ♦♦ A club of 8 members chooses a committee of 4 members. One committee member is named chair and a different committee member is named secretary. How many outcomes are possible?
- (A) 840 (B) 1120 (C) 1680 (D) 2520 (E) 3360

- 8.16** ♦♦ A team of 4 is chosen from 5 teachers and 6 students. The team must contain at least one teacher and at least one student. How many teams are possible?

(A) 300 (B) 310 (C) 315 (D) 325 (E) 330

- 8.17** ♦♦ Four parallel horizontal lines cross five parallel slanted lines, as shown. How many parallelograms are formed whose four sides lie on these lines?



(A) 10 (B) 20 (C) 36 (D) 60 (E) 126

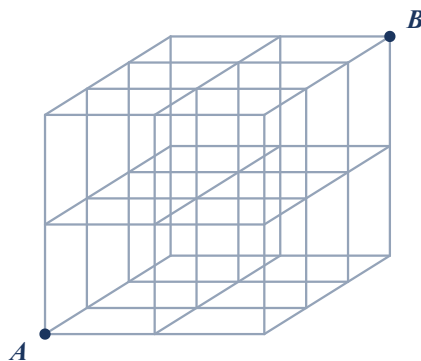
- 8.18** ♦♦ Linh places 4 identical red marbles and 3 identical blue marbles in a row. In how many of the possible rows are the first marble and the last marble the same color?

(A) 10 (B) 15 (C) 20 (D) 25 (E) 35

- 8.19** ♦♦ How many three-digit positive integers have digits that are either strictly increasing from left to right (like 258) or strictly decreasing from left to right (like 830)?

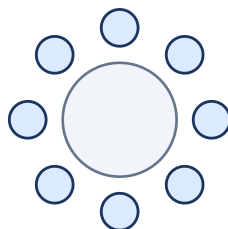
(A) 84 (B) 120 (C) 168 (D) 180 (E) 204

- 8.20** ♦♦ The figure shows the frame of a $2 \times 2 \times 3$ box made of unit-length rods. An ant crawls along the rods from corner A to the opposite corner B , and each move takes it one unit closer to B in one of the three directions. How many different routes can the ant take?



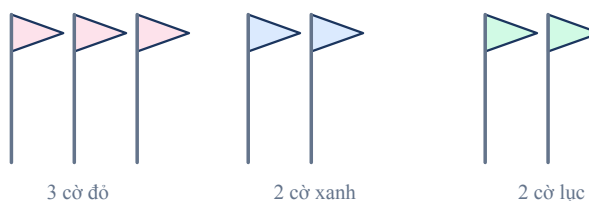
Integer answer · Đáp số nguyên

- 8.21** ♦♦ Eight people, including An, Bình, and Chi, sit around a round table with 8 equally spaced seats. Two seatings are the same if one is a rotation of the other. In how many seatings does Bình sit directly opposite An, while Chi does not sit next to An?



(A) 240 (B) 360 (C) 480 (D) 600 (E) 720

- 8.22** Seven students, including Anh, Bảo, and Chi, stand in a row. In how many arrangements are at least two of these three students standing next to each other?
 ♦♦♦ (A) 1440 (B) 2880 (C) 3600 (D) 4320 (E) 5040
- 8.23** A deck has 20 cards: each of the numbers 1, 2, 3, 4, 5 appears in each of 4 colors. A hand of 3 cards is dealt (the order of the cards does not matter). How many hands contain three different numbers and three different colors?
 ♦♦♦ (A) 40 (B) 120 (C) 160 (D) 240 (E) 1440
- 8.24** Twelve identical candies are shared among Ana, Ben, and Chi. Each of them gets at least 1 candy and at most 6 candies. In how many ways can the candies be shared?
 ♦♦♦ Integer answer · Đáp số nguyên
- 8.25** A club has 4 boys and 4 girls. Five of them are chosen and lined up in a row for a photo so that boys and girls alternate. How many different photos are possible?
 ♦♦♦ (A) 576 (B) 720 (C) 1152 (D) 1440 (E) 6720
- 8.26** A ship signals by hanging 5 flags in a vertical column. It has 3 identical red flags, 2 identical blue flags, and 2 identical green flags, as shown. How many different signals are possible?
 ♦♦♦



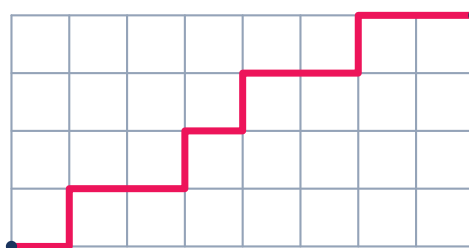
- (A) 60 (B) 90 (C) 100 (D) 120 (E) 130

3 Exercises 3 · Challenge

Bài tập 3 · Thử thách



- 8.27** From 5 married couples, 4 people are chosen. In how many ways can this be done so that exactly one married couple is among the 4 chosen people?
 ♦♦♦♦ (A) 120 (B) 130 (C) 140 (D) 180 (E) 210
- 8.28** A frog hops from $(0, 0)$ to $(8, 4)$ on the grid shown. Each hop moves it one unit to the right or one unit up, and every up-hop must be followed immediately by a right-hop. One such route is shown. How many different routes can the frog take?
 ♦♦♦♦



Integer answer · Đáp số nguyên

- 8.29** Five friends exchange gifts. Each friend gives one gift to one of the other four friends, and each friend receives exactly one gift. In addition, no two friends give gifts to each other. In how many ways can the gifts be exchanged?
 ♦♦♦♦ (A) 9 (B) 20 (C) 24 (D) 44 (E) 120
- 8.30** A set of dominoes has one tile for each pair of numbers from 0 to 6, with repetition allowed: $0|0, 0|1, \dots, 6|6$ — 28 tiles in all. Two different tiles can be placed end to end if they show a common number (for example, $2|5$ and $5|1$, or $2|5$ and $0|2$). How many pairs of different tiles can be placed end to end?
 ♦♦♦♦ (A) 126 (B) 147 (C) 168 (D) 294 (E) 378

- 8.31** Three different numbers are chosen from $1, 2, 3, \dots, 20$. In how many ways can they be chosen so that the three numbers, in some order, form an arithmetic sequence? (For example, $\{4, 11, 18\}$ works.)
♦♦♦♦
- (A) 45 (B) 60 (C) 72 (D) 81 (E) 90
- 8.32** A railway line has some stations. For each ordered pair of different stations there is one type of ticket (a ticket from X to Y is different from a ticket from Y to X). After more than one new station is added to the line, 46 new types of tickets are needed. How many stations did the line have before?
♦♦♦♦
- (A) 10 (B) 11 (C) 12 (D) 13 (E) 23
- 8.33** In a class, the number of ways to choose 2 boys equals the number of ways to choose 1 boy and 1 girl, and there are exactly 6 ways to choose 2 girls. How many students are in the class?
♦♦♦♦
- (A) 4 (B) 9 (C) 10 (D) 12 (E) 13
- 8.34** At a meeting of 6 people, each person shakes hands with exactly 2 of the other people (and no two people shake hands more than once). How many different sets of handshakes are possible?
♦♦♦♦
- (A) 40 (B) 60 (C) 70 (D) 80 (E) 130
- 8.35** Three different numbers are chosen from $1, 2, 3, \dots, 30$, and the order of choosing does not matter. In how many of these choices is the product of the three numbers a multiple of 4?
♦♦♦♦
- Integer answer · Đáp số nguyên
- 8.36** Mr. Nam forms two different groups of 3 students from his 7 students. The two groups do the same job, so swapping the two groups does not give a new choice. The two groups must have exactly one student in common. In how many ways can he form the groups?
♦♦♦♦
- (A) 105 (B) 210 (C) 280 (D) 315 (E) 630

Chapter 9

8020 AMC 8 Mastery

Probability & Statistics

Xác suất & thống kê

Mỗi đề AMC 8 có khoảng 3–4 câu thống kê và xác suất: đọc biểu đồ, trung bình–trung vị–mode, xác suất với xúc xắc, vòng quay, rút bi, và vài câu xác suất hình học hay kỳ vọng ở cuối đề. Chương này dùng lại toàn bộ công cụ đếm của chương 7–8 và thêm hai ý mới: **trung bình là tổng**, và **xác suất chỉ là tỉ số khi các kết quả đồng khả năng**. Lỗi mất điểm hay gặp: lấy trung vị khi chưa sắp xếp, coi các tổng hai xúc xắc như nhau, quên thứ tự, và nhân hai biến cố không độc lập.

✓ Đổi mọi trung bình thành tổng; dùng độ lệch để giải nhanh bài thêm, bớt, sửa số liệu.

✓ Tính xác suất đồng khả năng bằng đếm (bảng 36 ô, tổ hợp) và bằng phần bù.

✓ Tính xác suất hình học qua tỉ số độ dài, diện tích, thời gian; tính giá trị kỳ vọng.

✓ Đọc đúng biểu đồ cột, chấm, thân–lá, quạt, đường; tìm trung vị từ bảng tần số bằng cộng dồn.

✓ Dùng quy tắc nhân, sơ đồ cây cho phép thử nhiều bước, phân biệt có hoàn lại và không hoàn lại.

mean (average) · trung bình cộng

median · trung vị

mode · mode (giá trị xuất hiện nhiều nhất)

range · khoảng biến thiên

frequency · tần số

bar graph · biểu đồ cột

stem-and-leaf plot · biểu đồ thân–lá

circle graph · biểu đồ hình quạt

outcome · kết quả

equally likely · đồng khả năng

independent · độc lập

without replacement · không hoàn lại

tree diagram · sơ đồ cây

expected value · giá trị kỳ vọng

K 9.1 Mean, Median, Mode and Range

Trung bình, trung vị, mode và khoảng biến thiên

Mỗi đề AMC 8 thường có 1–2 câu thống kê. Chúng hiếm khi bắt bạn cộng một dãy số dài; cái được kiểm tra là bạn có **hiểu** từng số đo hay không: trung bình phụ thuộc vào **tổng**, trung vị phụ thuộc vào **vị trí**, mode phụ thuộc vào **số lần xuất hiện**. Nhớ được điều đó thì bài “thêm một số”, “sửa một điểm”, “tìm giá trị lớn nhất có thể” đều trở nên ngắn.

Definition — Mean, median, mode, range

For a list of n numbers: the **mean** (average) is $\frac{\text{sum}}{n}$. The **median** is the middle number after sorting (if n is even, the mean of the two middle numbers). A **mode** is a value that occurs most often. The **range** is largest – smallest.

Trung bình cộng (mean), trung vị (median), mode (giá trị xuất hiện nhiều nhất), khoảng biến thiên (range). Với dãy n số đã sắp xếp, trung vị nằm ở vị trí thứ $\frac{n+1}{2}$ khi n lẻ; khi n chẵn là trung bình của hai số ở vị trí $\frac{n}{2}$ và $\frac{n}{2} + 1$. Một dãy có thể có nhiều mode, hoặc không có mode nào; để hay nói “unique mode” (mode duy nhất).

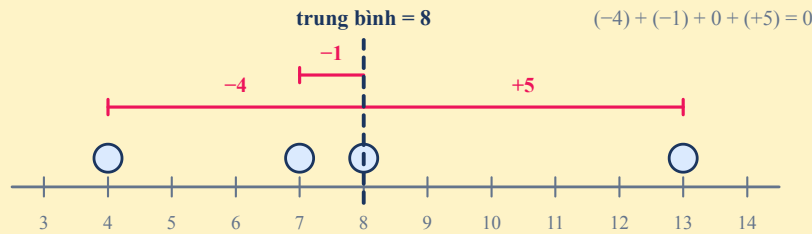
Theorem — Sum = mean $\times$ count (tổng = trung bình $\times$ số lượng)

If n numbers have mean m , their sum is nm . Conversely, any question about a mean is really a question about a sum.

Đây là công cụ số 1 của cả chương: đổi mọi trung bình thành **tổng**, làm việc với tổng (cộng, trừ, so sánh), rồi chia lại nếu cần. Ví dụ: 6 bài kiểm tra trung bình 7,5 điểm thì tổng điểm là 45 — không cần biết từng bài.

Key Idea — Độ lệch cân bằng (balancing deviations)

Trung bình là “điểm cân bằng”: tổng các độ lệch so với trung bình luôn bằng 0, vì $\sum (x_i - m) = \sum x_i - nm = 0$. Hình dưới: dãy 4, 7, 8, 13 có trung bình 8, các độ lệch $-4, -1, 0, +5$ triệt tiêu nhau. Dùng điều này để tính nhanh: muốn biết trung bình mới khi thêm vài số, hãy xem chúng “kéo” tổng lệch đi bao nhiêu.

**Example 9.1****Tổng, không phải trung bình**

On a test, the 24 students who took it on Monday had a mean score of 70. The other 6 students in the class took the same test on Tuesday. After that, the mean score of all 30 students was 72. What was the mean score of the 6 students who took the test on Tuesday?

- (A) 74 (B) 76 (C) 78 (D) 80 (E) 82

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 80

Cách 1 — đổi ra tổng. Tổng của cả lớp: $30 \cdot 72 = 2160$. Tổng của 24 bạn thứ Hai: $24 \cdot 70 = 1680$. Sáu bạn thứ Ba có tổng $2160 - 1680 = 480$, trung bình $480 : 6 = 80$.

Cách 2 — độ lệch cân bằng. So với trung bình mới 72, mỗi bạn trong 24 bạn thiếu 2 điểm: tổng thiếu 48. Sáu bạn còn lại phải bù đúng 48 điểm, tức mỗi bạn cao hơn 72 trung bình $48 : 6 = 8$ điểm: $72 + 8 = 80$. Đáp án (D).

Bấy: coi trung bình chung là trung bình cộng của hai trung bình nhóm, $\frac{70+x}{2} = 72$, ra $x = 74$ (A) — hai nhóm có cỡ khác nhau (24 và 6) nên không được cộng rồi chia đôi.

Insight · Gặp bài trung bình của nhiều nhóm: **đổi hết ra tổng**, hoặc dùng độ lệch so với trung bình chung.

Common Trap — Trung vị: sắp xếp trước, đếm vị trí sau

Lỗi hay gặp nhất: lấy “số đứng giữa” của dãy chưa sắp xếp, hoặc với n chẵn chỉ lấy một số. Dãy 9, 2, 7, 4 có trung vị $\frac{4+7}{2} = 5,5$, không phải 2 hay 7. Với bảng tần số, phải cộng dồn số lần xuất hiện để tìm vị trí giữa (mục 9.2).

Example 9.2**Cái gì thay đổi khi thêm số?**

A list of nine numbers has mean 16 and median 20. The two numbers 9 and 23 are added to the list. Which of the following statements must be true about the new list of eleven numbers?

- (A) The mean and the median both increase.
 (B) The mean stays the same, and the median increases.
 (C) The mean decreases, and the median stays the same.
 (D) The mean and the median both stay the same.
 (E) The mean stays the same, but the median cannot be determined.

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) The mean and the median both stay the same.

Trung bình. Tổng cũ $9 \cdot 16 = 144$, tổng mới $144 + 9 + 23 = 176$, trung bình mới $176 : 11 = 16$ — không đổi. Lý do sâu hơn: hai số thêm vào có độ lệch -7 và $+7$ so với 16, triệt tiêu nhau.

Trung vị. Dãy cũ (đã sắp xếp) có 4 số ≤ 20 ở trước số 20 đứng giữa và 4 số ≥ 20 ở sau. Thêm $9 \leq 20$ vào phía trước và $23 \geq 20$ vào phía sau: số 20 cũ giờ có 5 số đứng trước, 5 số đứng sau, nên vẫn ở vị trí thứ 6 của 11 số — trung vị vẫn là 20.

Cả hai đều không đổi. Đáp án (D).

Insight · Thêm một số nhỏ hơn và một số lớn hơn trung vị thì trung vị giữ nguyên; thêm các số có **tổng độ lệch bằng 0** thì trung bình giữ nguyên.

Tip — Bài “lớn nhất / nhỏ nhất có thể”: đẩy các số khác về biên

Khi để cho trung bình (tức tổng cố định) và hỏi một số lớn nhất hoặc nhỏ nhất có thể, hãy làm các số **còn lại** nhỏ nhất hoặc lớn nhất mà điều kiện (trung vị, khác nhau, nguyên dương...) còn cho phép. Viết dãy đã sắp xếp $a_1 \leq a_2 \leq \dots$ ra giấy và điền từng ô — giống sơ đồ ô của chương 7.

Example 9.3

Tối ưu với tổng cố định

Seven different positive integers have mean 15 and median 12. What is the least possible value of their range?

(A) 7

(B) 11

(C) 13

(D) 15

(E) 59

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 13

Sắp xếp $a_1 < a_2 < \dots < a_7$, có $a_4 = 12$ và tổng $7 \cdot 15 = 105$.

Ba số đầu đều < 12 và khác nhau nên $a_1 + a_2 + a_3 \leq 9 + 10 + 11$ khi $a_1 = 9$; tổng quát $a_2 \leq 10$, $a_3 \leq 11$ nên $a_1 + a_2 + a_3 \leq a_1 + 21$. Do đó $a_5 + a_6 + a_7 \geq 105 - 12 - (a_1 + 21) = 72 - a_1$. Vì $a_5 \leq a_7 - 2$, $a_6 \leq a_7 - 1$, ta có $3a_7 - 3 \geq 72 - a_1$, tức $a_7 \geq \frac{75 - a_1}{3}$.

Khoảng biến thiên $a_7 - a_1 \geq \frac{75 - a_1}{3} - a_1 = 25 - \frac{4a_1}{3}$, giảm khi a_1 tăng; mà $a_1 \leq 9$, nên khoảng biến thiên $\geq 25 - 12 = 13$. Đạt được: 9, 10, 11, 12, 20, 21, 22 (tổng 105). Đáp án (C).

Bẫy: quên điều kiện “khác nhau” thì có thể lấy 12, 12, 12, 12, 19, 19, 19 với khoảng biến thiên 7; còn 59 là khoảng biến thiên *lớn nhất* (1, 2, 3, 12, 13, 14, 60).

Insight · Muốn hai đầu dãy sát nhau: dồn các số nhỏ lên sát trung vị và các số lớn xuống sát nhau; viết điều kiện thành một bất đẳng thức theo một biến.

K 9.2 Reading Data Displays

Đọc biểu đồ và bảng số liệu

AMC 8 rất thích đưa số liệu dưới dạng hình: biểu đồ cột, biểu đồ chấm, biểu đồ thân-lá, biểu đồ hình quạt, biểu đồ đường. Phần khó thường không phải phép tính mà là **đọc đúng**: trục bắt đầu từ đâu, mỗi vạch là bao nhiêu, mỗi chấm là một người hay một nhóm, góc quạt ứng với bao nhiêu phần.

Definition — Common data displays (các loại biểu đồ hay gặp)

Bar graph: the height of each bar is a count or an amount. **Dot plot**: one dot per data value above a number line. **Stem-and-leaf plot**: 7 | 2 5 means the values 72 and 75. **Circle graph** (pie chart): each sector is a fraction of the whole. **Line graph**: values at successive times joined by segments. **Frequency table**: each value with how many times it occurs.

Biểu đồ cột, biểu đồ chấm, biểu đồ thân-lá (thân = chữ số hàng chục, lá = chữ số hàng đơn vị), biểu đồ hình quạt, biểu đồ đường, bảng tần số (frequency). Biểu đồ chấm và thân-lá giữ lại *từng* giá trị nên đọc trung vị rất nhanh.

Key Idea — Trung vị từ bảng tần số: cộng dồn

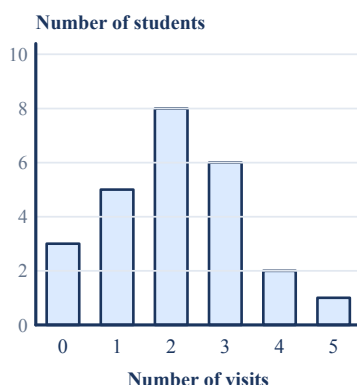
Có n giá trị thì trung vị ở vị trí $\frac{n+1}{2}$ (n lẻ). Cộng dồn tần số từ giá trị nhỏ nhất cho tới khi vượt qua vị trí đó. Ví dụ tần số của 0, 1, 2, 3 là 4, 6, 5, 5 ($n = 20$): cộng dồn 4, 10, 15, 20; vị trí thứ 10 và 11 là 1 và 2, nên trung vị là 1,5. Trung bình từ bảng tần số:

$$\frac{\sum(\text{giá trị} \times \text{tần số})}{n}$$

Example 9.4

Cần thêm bao nhiêu người để trung vị dịch chuyển?

The bar graph shows how many times each of the 25 students in a class visited the school library last month. Some new students join the class, and each of them visited the library exactly 5 times last month. What is the least number of new students needed so that the median number of visits for the whole class becomes 3?



(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

(E) 9

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 8

Đọc biểu đồ: tần số của 0, 1, 2, 3, 4, 5 lần là 3, 5, 8, 6, 2, 1. Cộng dồn: có $3 + 5 + 8 = 16$ bạn đi ≤ 2 lần và 9 bạn đi ≥ 3 lần. Trung vị hiện tại (vị trí 13) là 2.

Thêm k bạn (đều 5 lần) thì 16 bạn " ≤ 2 " vẫn đứng đầu dãy. Trung vị bằng 3 khi **mọi** vị trí giữa đều nằm sau vị trí 16:

- $n = 25 + k$ lẻ: cần vị trí $\frac{n+1}{2} \geq 17$, tức $n \geq 33$, $k \geq 8$.
- n chẵn: cần vị trí $\frac{n}{2} \geq 17$, tức $n \geq 34$, $k \geq 9$. Với $n = 32$ ($k = 7$) hai số giữa là số thứ 16 và 17, tức 2 và 3, trung vị 2,5.

Số nhỏ nhất là $k = 8$ (lúc đó vị trí 17 trong 33 là một bạn đi 3 lần). Đáp án (D).

Bấy: quên trường hợp n chẵn cho trung vị 2,5 nên trả lời 7.

Insight · Trung vị chỉ quan tâm **vị trí**: đếm có bao nhiêu giá trị nằm dưới ngưỡng, rồi đòi hỏi vị trí giữa vượt qua số đó — cần thận với n chẵn.

Theorem — Circle graphs (biểu đồ hình quạt)

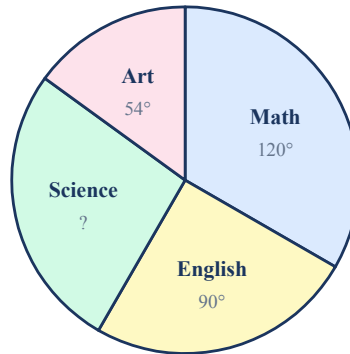
A sector with central angle θ° represents the fraction $\frac{\theta}{360}$ of the whole. If the whole is N people, the sector represents $\frac{\theta}{360} \cdot N$ people.

Góc 90° là $\frac{1}{4}$, 120° là $\frac{1}{3}$, 72° là $\frac{1}{5}$, 36° là $\frac{1}{10}$, 18° là 5%. Một phần trăm ứng với $3,6^\circ$. Nếu biết một quạt ứng với bao nhiêu người, suy ra được tổng N .

Example 9.5

Từ một quạt suy ra cả biểu đồ

In a survey, each student in a grade chose exactly one favorite subject. The circle graph shows the results. Exactly 18 students chose Art. How many more students chose Math than chose Science?



- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 24

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 8

Quạt Art có góc 54° ứng với 18 học sinh, nên mỗi học sinh ứng với 3° và cả khối có $360 : 3 = 120$ học sinh.

Góc Science = $360 - 120 - 90 - 54 = 96^\circ$, tức $96 : 3 = 32$ học sinh. Math 120° là 40 học sinh.

Chênh lệch $40 - 32 = 8$. Đáp án (B). Bẫy: trừ hai góc $120 - 96 = 24$ rồi quên đổi độ ra số học sinh.

Insight · Một quạt đã biết số người cho ta “tỉ giá” độ/người; mọi quạt khác đổi theo tỉ giá đó.

Common Trap — Đọc thang đo và chú giải trước khi đọc số

Trục dọc của biểu đồ cột có thể bắt đầu từ một số khác 0 (cột cao gấp đôi chưa chắc gấp đôi số lượng). Biểu đồ thân-lá luôn có chú giải (key) như $5 | 8 = 58$; nếu thân là hàng trăm thì nghĩa khác hẳn. Biểu đồ quạt ghi “not drawn to scale” thì **không** được đo bằng mắt — chỉ dùng số ghi trên hình.

Example 9.6

Lá bị che

The stem-and-leaf plot shows the test scores of 11 students, but one leaf is covered by the box. The mean of the 11 scores is 75. What is the mode of the scores?

Stem	Leaf
5	8
6	4 7 9
7	2 5 8
8	1 6
9	7

Key: $5 | 8$ means 58

- (A) 72 (B) 75 (C) 76 (D) 78 (E) 81

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 78

Tổng 11 điểm là $11 \cdot 75 = 825$. Mười điểm đọc được: 58, 64, 67, 69, 72, 75, 78, 81, 86, 97, tổng 747.

Điểm bị che là $825 - 747 = 78$ (lá 8, đúng thứ tự vì lá trong một hàng được viết tăng dần: 2, 5, , 8).

Khi đó 78 xuất hiện hai lần, mọi điểm khác một lần: mode là 78. Đáp án (D).

Bẫy: chọn 75 vì đó là trung bình (và cũng là trung vị) — mode là giá trị lặp nhiều nhất, không phải “giá trị trung tâm”.

Insight · Biết trung bình $\Rightarrow$ biết tổng $\Rightarrow$ tìm được giá trị bị thiếu. Mọi bài “số bị che” đều bắt đầu bằng tổng.

K 9.3 Probability with Equally Likely Outcomes

Xác suất với các kết quả đồng khả năng

Xác suất ở AMC 8 hầu hết là **đếm hai lần**: đếm số kết quả có thể, đếm số kết quả thuận lợi, rồi chia. Mọi công cụ đếm của chương 7–8 (quy tắc nhân, tổ hợp, phần bù) dùng lại nguyên vẹn ở đây — điều mới duy nhất là phải chắc chắn các kết quả **đồng khả năng**.

Definition — Probability of an event (xác suất của biến cố)

If an experiment has N equally likely outcomes and k of them belong to an event A , then $P(A) = \frac{k}{N}$. Always $0 \leq P(A) \leq 1$.

Phép thử (experiment), kết quả (outcome), không gian mẫu (sample space) = tập mọi kết quả, biến cố (event) = tập các kết quả thuận lợi. Công thức $\frac{k}{N}$ **chỉ** đúng khi N kết quả có cùng khả năng xảy ra.

Key Idea — Hai con xúc xắc: luôn nghĩ tới bảng 6×6

Gieo hai con xúc xắc (hoặc một con hai lần) có $6 \cdot 6 = 36$ kết quả **có thứ tự** (a, b) , đồng khả năng. Bảng dưới ghi tổng $a + b$ trong từng ô: tổng 7 xuất hiện 6 lần (đường chéo), tổng 2 và 12 chỉ 1 lần. Với điều kiện bất kỳ về (a, b) , tô các ô thỏa mãn rồi đếm — gần như không thể sai.

		First die					
		1	2	3	4	5	6
Second die	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Example 9.7

Đếm trên bảng 36 ô

Two fair six-sided dice are rolled, one red and one blue. What is the probability that the number on the red die is a divisor of the number on the blue die?

(A) $\frac{11}{36}$

(B) $\frac{7}{18}$

(C) $\frac{5}{12}$

(D) $\frac{4}{9}$

(E) $\frac{1}{2}$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) $\frac{7}{18}$

Có 36 kết quả đồng khả năng (r, b) . Đếm theo số r trên con đỏ (chia trường hợp theo hàng của bảng):

$r = 1$: mọi b — 6 cách. $r = 2$: $b \in \{2, 4, 6\}$ — 3. $r = 3$: $b \in \{3, 6\}$ — 2. $r = 4, 5, 6$: chỉ $b = r$ — mỗi số 1 cách.

Tổng $6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 14$, xác suất $\frac{14}{36} = \frac{7}{18}$. Đáp án (B).

Bẫy: quên rằng mỗi số là ước của chính nó, bỏ sót các ô $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(6, 6)$, ra $\frac{11}{36}$ (A). Cũng đừng đếm trên 21 cặp không thứ tự — 21 cặp đó **không** đồng khả năng.

Insight · Với hai con xúc xắc, đếm trên 36 cặp **có thứ tự**; chia trường hợp theo giá trị của một con.

Theorem – Complement rule (quy tắc phần bù)

$P(\text{not } A) = 1 - P(A)$. In particular, $P(\text{at least one}) = 1 - P(\text{none})$.

Mỗi kết quả hoặc thuộc A , hoặc thuộc phần bù của A , không bao giờ cả hai — nên hai số đếm cộng lại bằng N . Dấu hiệu nhận ra: “at least one”, “not all”, “at least two are the same”.

Example 9.8**Ít nhất một chữ số 7**

A three-digit positive integer is chosen at random, with all integers from 100 to 999 equally likely. What is the probability that at least one of its digits is a 7?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{271}{1000}$ (C) $\frac{7}{25}$ (D) $\frac{3}{10}$ (E) $\frac{1}{3}$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) $\frac{7}{25}$

Đếm phần bù: số có ba chữ số **không** có chữ số 7. Hàng trăm: 8 cách (bỏ 0 và 7); hàng chục và hàng đơn vị: mỗi hàng 9 cách. Có $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ số.

Xác suất cần tìm: $1 - \frac{648}{900} = \frac{252}{900} = \frac{7}{25}$. Đáp án (C).

Bây: cộng “ $\frac{1}{10}$ cho mỗi chữ số” ra $\frac{3}{10}$ (đếm trùng các số như 777, 707); hoặc dùng $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{271}{1000}$, quên rằng hàng trăm không thể là 0 nên chỉ có 9 lựa chọn ở đó.

Insight · “Ít nhất một” $\Rightarrow$ đếm phần “không có cái nào”, ở đó quy tắc nhân chạy thẳng.

Common Trap – Không đồng khả năng thì không được chia đếm

“Tổng hai con xúc xắc có 11 giá trị 2, ..., 12 nên $P(\text{tổng} = 7) = \frac{1}{11}$ ” là sai: 11 giá trị đó không đồng khả năng (tổng 7 có 6 ô, tổng 12 chỉ 1 ô). Tương tự, “trời mưa hoặc không mưa nên xác suất mưa là $\frac{1}{2}$ ” là sai. Luôn đưa về các kết quả thật sự ngang nhau: xúc xắc tô màu khác nhau, đồng xu đánh số, viên bi dán tên.

Tip – Đặt tên cho vật giống nhau

Túi có 3 bi đỏ giống hệt nhau? Hãy tưởng tượng chúng được đánh số R_1, R_2, R_3 . Xác suất không đổi, nhưng mọi kết quả giờ đồng khả năng và bạn có thể dùng tổ hợp $\binom{n}{k}$ của chương 8 để đếm.

K 9.4 Several Stages: Independence, Drawing Without Replacement, Tree Diagrams

Phép thử nhiều bước: độc lập, rút không hoàn lại, sơ đồ cây

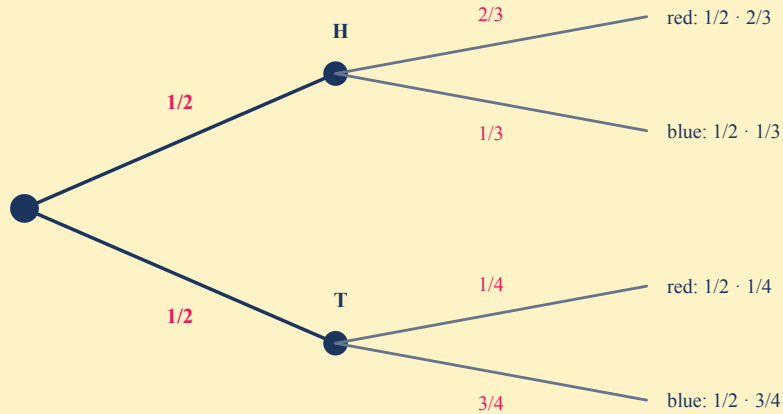
Theorem – Multiplication rule (quy tắc nhân xác suất)

Events A and B are **independent** if the outcome of one does not change the chances of the other. Then $P(A \text{ and } B) = P(A) \cdot P(B)$. More generally, for stages done one after another, $P(A \text{ then } B) = P(A) \cdot P(B \text{ given that } A \text{ happened})$.

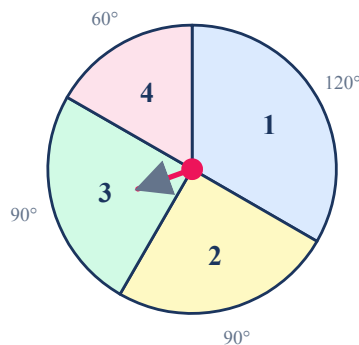
Gieo xu rồi gieo xúc xắc, quay hai lần một vòng quay: độc lập. Rút bi **không hoàn lại**: không độc lập — lần rút thứ hai phải dùng túi đã thay đổi. Quy tắc này chính là quy tắc nhân của phép đếm, chia cho tổng số kết quả.

Key Idea — Sơ đồ cây: nhân dọc nhánh, cộng các lá

Vẽ mỗi bước thành một tầng nhánh, ghi xác suất lên từng nhánh. Xác suất của một đường đi từ gốc tới lá là **tích** các số trên đường đi; xác suất của biến cố là **tổng** các lá thuận lợi. Hình: gieo một đồng xu, nếu ngửa (H) thì rút một bi từ túi 2 đỏ 1 xanh, nếu sấp (T) thì rút từ túi 1 đỏ 3 xanh: $P(\text{đỏ}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{11}{24}$.

**Example 9.9****Vòng quay không đều gặp xúc xắc**

The spinner shown is divided into four sectors labeled 1, 2, 3, 4, with the central angles shown. Khoa spins the spinner once and rolls a fair six-sided die once. What is the probability that the number on the spinner is greater than the number on the die?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{3}{16}$ (D) $\frac{5}{24}$ (E) $\frac{1}{4}$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) $\frac{5}{24}$

Xác suất của từng số trên vòng quay là góc chia 360° : $P(1) = \frac{120}{360} = \frac{1}{3}$, $P(2) = P(3) = \frac{1}{4}$, $P(4) = \frac{1}{6}$.

Chia trường hợp theo số s trên vòng quay; xúc xắc độc lập, số mặt nhỏ hơn s là $s - 1$:

- $s = 1$: không có mặt nào nhỏ hơn — góp 0.
- $s = 2$: $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$.
- $s = 3$: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} = \frac{2}{24}$.
- $s = 4$: $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{12} = \frac{2}{24}$.

Tổng $\frac{1+2+2}{24} = \frac{5}{24}$. Đáp án (D).

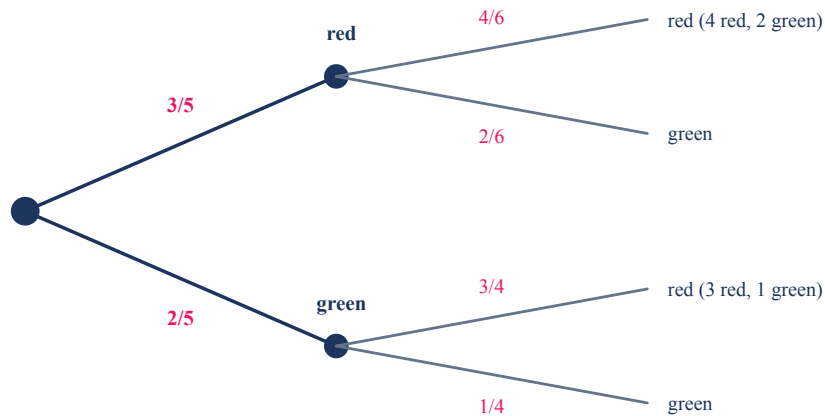
Bấy: coi bốn ô như nhau thì được $\frac{1}{4} \cdot \frac{0+1+2+3}{6} = \frac{1}{4}$ — ô số 4 nhỏ nhất nhưng lại là ô “tốt” nhất.

Insight · Kết quả không đồng khả năng thì đừng đếm ô — chia trường hợp theo bước có xác suất lệch, nhân với xác suất của bước còn lại rồi cộng.

Example 9.10

Túi thay đổi sau lần rút đầu

A box contains 3 red balls and 2 green balls. Lan draws one ball at random. If it is red, she puts it back into the box together with one more red ball. If it is green, she does not put it back. Then she draws a second ball at random. What is the probability that the second ball is red?



(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{13}{20}$

(D) $\frac{7}{10}$

(E) $\frac{4}{5}$

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (D) $\frac{7}{10}$

Vẽ sơ đồ cây hai tầng.

- Lần 1 đỏ (xác suất $\frac{3}{5}$): hộp thành 4 đỏ, 2 xanh, lần 2 đỏ với xác suất $\frac{4}{6}$. Nhánh này góp $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{2}{5}$.
- Lần 1 xanh ($\frac{2}{5}$): hộp còn 3 đỏ, 1 xanh, lần 2 đỏ với xác suất $\frac{3}{4}$. Góp $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$.

Cộng hai lá: $\frac{2}{5} + \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$. Đáp án (D).

Bây: trả lời $\frac{3}{5}$ vì “lần rút thứ hai giống lần đầu” — điều đó chỉ đúng khi hộp không bị thay đổi theo kết quả lần đầu.

Insight • Khi bước sau phụ thuộc bước trước, sơ đồ cây là cách an toàn nhất: mỗi nhánh dùng **hộp của riêng nhánh đó**.

Common Trap — “Và” nhân, “hoặc” cộng — nhưng có điều kiện

Chỉ **nhân** khi hai biến cố độc lập (hoặc khi dùng xác suất có điều kiện đúng của bước sau). Chỉ **cộng** khi các trường hợp rời nhau. Rút 2 bi không hoàn lại từ túi 3 đỏ 2 xanh: $P(\text{cả hai đỏ}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{3}{10}$, không phải $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5}$.

Tip — Hai cách cho bài rút không hoàn lại

(1) Nhân theo từng lần rút như trên. (2) Đếm: chọn tập con, $P = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$. Hai cách luôn ra cùng đáp số — dùng cách này kiểm tra cách kia. Với “rút đồng thời” thì cách đếm tổ hợp thường gọn hơn.

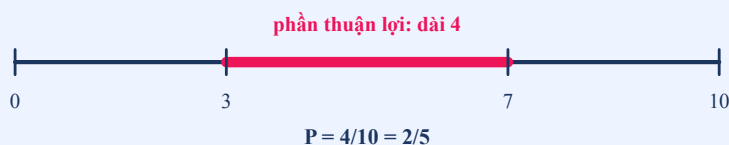
K 9.5 Geometric Probability and Expected Value

Xác suất hình học và giá trị kỳ vọng

Definition — Geometric probability (xác suất hình học)

If a point is chosen at random from a segment (or a region), with all positions equally likely, then the probability that it lands in a part of it is $\frac{\text{length (or area) of the part}}{\text{length (or area) of the whole}}$.

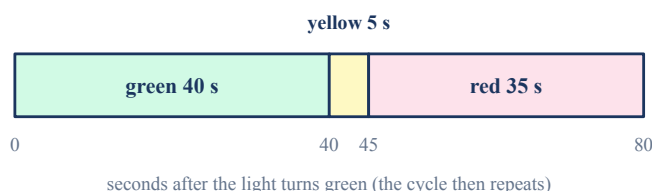
Thời gian cũng là “độ dài”: đến bến xe vào một thời điểm ngẫu nhiên trong 30 phút là chọn một điểm trên đoạn dài 30. Hai số thực chọn độc lập trong hai đoạn $\Rightarrow$ một điểm (x, y) trong hình chữ nhật, xác suất = tỉ số diện tích.



Example 9.11

Thời gian là độ dài

A traffic light repeats the same cycle: green for 40 seconds, then yellow for 5 seconds, then red for 35 seconds. A car arrives at the light at a random moment. If the light is green, the car goes on without stopping; otherwise the car stops and waits until the light turns green. What is the probability that the car stops and waits for less than 15 seconds?



(A) $\frac{1}{8}$

(B) $\frac{3}{16}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{11}{16}$

(E) $\frac{3}{4}$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) $\frac{3}{16}$

Chu kỳ dài $40 + 5 + 35 = 80$ giây; thời điểm đến là một điểm ngẫu nhiên trên đoạn dài 80.

Đến lúc xanh: không dừng. Đến lúc vàng: phải chờ hết vàng và cả 35 giây đỏ, tức ≥ 35 giây. Đến lúc đỏ: chờ đúng phần đỏ còn lại, dưới 15 giây khi và chỉ khi đến trong **15 giây cuối** của đèn đỏ.

Xác suất $\frac{15}{80} = \frac{3}{16}$. Đáp án (B).

Bẫy: tính cả lúc đèn xanh (“chờ 0 giây cũng là dưới 15 giây”) ra $\frac{55}{80} = \frac{11}{16}$ — nhưng đề hỏi xe **có dừng**; hoặc coi vàng là chờ ngắn ra $\frac{20}{80} = \frac{1}{4}$.

Insight · Đặt thời điểm lên một trục, đánh dấu đoạn thuận lợi; xác suất là tỉ số độ dài.

Definition — Expected value (giá trị kỳ vọng)

If an experiment gives the values $x_1, x_2, \dots, x_k$ with probabilities $p_1, p_2, \dots, p_k$, its expected value is $E = x_1p_1 + x_2p_2 + \dots + x_kp_k$.

Kỳ vọng là **trung bình về lâu dài**: chơi trò chơi rất nhiều lần, điểm trung bình mỗi lần tiến gần tới E . Đây chính là trung bình cộng của mục 9.1 với “tần số” thay bằng xác suất. Kỳ vọng của một con xúc xắc: $\frac{1+2+\dots+6}{6} = 3,5$.

Key Idea — Kỳ vọng của tổng = tổng các kỳ vọng

Quay một vòng quay hai lần, kỳ vọng của tổng điểm bằng hai lần kỳ vọng của một lần quay. Tổng quát, kỳ vọng của một tổng luôn bằng tổng các kỳ vọng — kể cả khi các phần không độc lập. Nhờ đó nhiều bài kỳ vọng không cần liệt kê mọi kết quả.

Example 9.12

Kỳ vọng với một lần gieo thêm

In a game, Minh rolls a fair six-sided die. If he rolls 1 or 2, he scores 0 points. If he rolls 3, 4, or 5, he scores that many points. If he rolls a 6, he rolls the die once more and scores twice the number on this second roll. What is the expected number of points Minh scores?

(A) $\frac{5}{2}$

(B) 3

(C) $\frac{19}{6}$

(D) $\frac{10}{3}$

(E) $\frac{7}{2}$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) $\frac{19}{6}$

Chia theo lần gieo đầu (mỗi mặt xác suất $\frac{1}{6}$):

- Mặt 3, 4, 5 góp $\frac{3+4+5}{6} = 2$.
- Mặt 6: điểm là $2 \times$ (lần gieo thứ hai), kỳ vọng $2 \cdot 3,5 = 7$; góp $\frac{1}{6} \cdot 7 = \frac{7}{6}$.
- Mặt 1, 2 góp 0.

$$E = 2 + \frac{7}{6} = \frac{19}{6}. \text{ Đáp án (C).}$$

Bấy: bỏ qua luật gieo lại, coi mặt 6 được 6 điểm, ra $\frac{3+4+5+6}{6} = 3$ (B).

Insight · Chia trường hợp theo bước đầu; trong mỗi nhánh dùng kỳ vọng của nhánh đó, rồi lấy trung bình có trọng số theo xác suất.

Common Trap — Kỳ vọng không nhất thiết là một kết quả có thể

Kỳ vọng $\frac{19}{6} \approx 3,17$ điểm ở ví dụ trên không phải số điểm Minh có thể đạt trong một lần chơi. Đừng loại đáp án phân số chỉ vì “không thể ghi được 3,17 điểm”. Ngược lại, đừng tính kỳ vọng bằng trung bình cộng các kết quả có thể có — phải nhân với xác suất.

E Worked Examples — Competition Level

Ví dụ mẫu mức thi đấu

Hai ví dụ dưới đây ở mức câu 20–25 của AMC 8: thống kê và xác suất đan vào nhau, hoặc xác suất hình học trên một hình vuông. Hãy tự làm ít nhất 10 phút trước khi đọc lời giải.

Example 9.13

Trung bình bằng trung vị

Three fair six-sided dice are rolled. What is the probability that the mean of the three numbers rolled is equal to their median?

(A) $\frac{1}{12}$

(B) $\frac{1}{9}$

(C) $\frac{1}{6}$

(D) $\frac{7}{36}$

(E) $\frac{2}{9}$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) $\frac{7}{36}$

Sắp xếp ba số $x \leq y \leq z$. Trung vị là y ; trung bình bằng y khi $x + y + z = 3y$, tức $z - y = y - x$: ba số (đã sắp xếp) lập thành **cấp số cộng** (có thể có công sai 0).

Đếm 216 kết quả có thứ tự theo bộ giá trị:

- Công sai 0 (ba số bằng nhau): 6 bộ, mỗi bộ 1 kết quả: 6.
- Công sai 1: $(1, 2, 3), \dots, (4, 5, 6)$: 4 bộ. Công sai 2: $(1, 3, 5), (2, 4, 6)$: 2 bộ. Mỗi bộ ba số khác nhau ứng với $3! = 6$ kết quả: $6 \cdot 6 = 36$.

$$\text{Xác suất } \frac{6+36}{216} = \frac{42}{216} = \frac{7}{36}. \text{ Đáp án (D).}$$

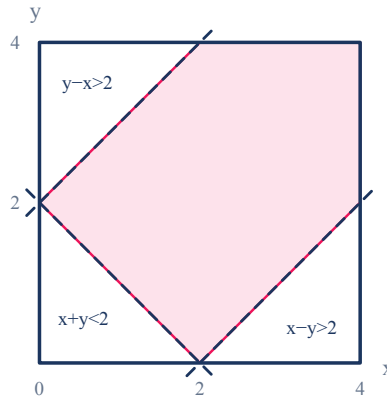
Bấy: quên trường hợp ba số bằng nhau ra $\frac{36}{216} = \frac{1}{6}$ (C).

Insight · Dịch điều kiện thống kê sang cấu trúc số: “trung bình = trung vị” với ba số nghĩa là cấp số cộng. Sau đó đếm bộ không thứ tự, nhân số hoán vị.

Example 9.14

Hai số thực và một tam giác

Real numbers x and y are each chosen at random from the interval $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 4$, independently, with all values equally likely. What is the probability that there is a triangle (with positive area) whose side lengths are x , y , and 2?



(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{5}{8}$

(C) $\frac{3}{4}$

(D) $\frac{13}{16}$

(E) $\frac{7}{8}$

SOLUTION • LỜI GIẢI · Answer: (B) $\frac{5}{8}$

Cặp (x, y) là một điểm ngẫu nhiên trong hình vuông 4×4 , diện tích 16. Ba đoạn tạo được tam giác khi mỗi cạnh nhỏ hơn tổng hai cạnh kia: $x + y > 2$, $x + 2 > y$, $y + 2 > x$.

Bỏ đi ba miền tam giác vuông (xem hình): $x + y \leq 2$ ở góc dưới trái, diện tích $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$; $x - y \geq 2$ ở góc dưới phải, diện tích 2; $y - x \geq 2$ ở góc trên trái, diện tích 2. Ba miền này không chồng lên nhau.

Miền thuận lợi có diện tích $16 - 6 = 10$, xác suất $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$. Đáp án (B).

Bẫy: chỉ nhớ điều kiện $x + y > 2$ ra $\frac{14}{16} = \frac{7}{8}$; hoặc quên nó ra $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

Insight · Hai số thực ngẫu nhiên $\Rightarrow$ một điểm trong hình chữ nhật. Mỗi bất đẳng thức là một nửa mặt phẳng; vẽ ra rồi tính diện tích bằng cách trừ các tam giác.

1

Exercises 1 • Foundation

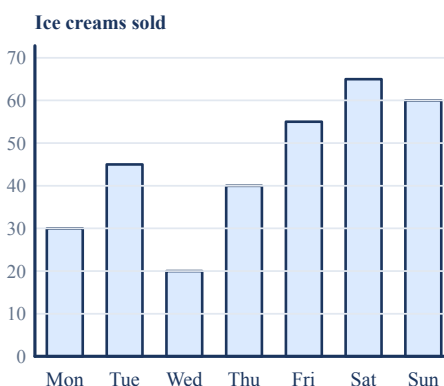
Bài tập 1 • Nền tảng



- 9.1** The mean of four numbers is 15. When a fifth number is added, the mean of the five numbers is 18. What is the fifth number?

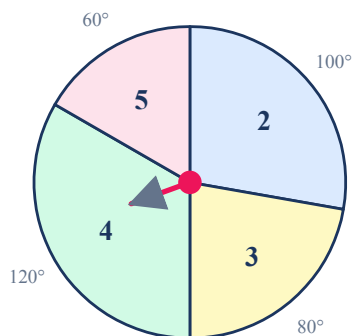
(A) 18 (B) 21 (C) 24 (D) 27 (E) 30

- 9.2** The bar graph shows how many ice creams a shop sold on each day of one week. On how many days did the shop sell more ice creams than its mean number of ice creams per day for that week?

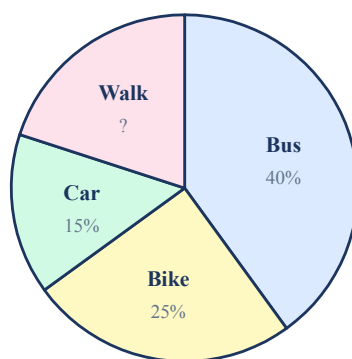


(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 7

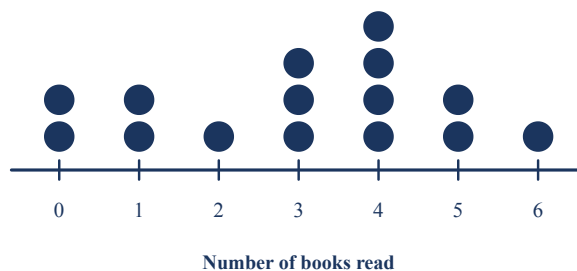
- 9.3** The spinner shown has four sectors labeled 2, 3, 4, and 5, with the central angles shown. If the spinner is spun once, what is the probability that it lands on a prime number?



- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{7}{12}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$
- 9.4** The circle graph shows how the 40 students in a class travel to school. What is the central angle, in degrees, of the sector for students who walk?



- (A) 72 (B) 90 (C) 108 (D) 120 (E) 144
- 9.5** What is the mean of all the odd integers between 10 and 50?
- (A) 30 (B) 31 (C) 35 (D) 39 (E) 40
- 9.6** The dot plot shows how many books each of 15 students read during the summer. What is the sum of the mean, the median, and the mode of these 15 numbers?



- (A) 9 (B) 9.5 (C) 10 (D) 10.5 (E) 11
- 9.7** An integer is chosen at random from 1 to 30, inclusive. What is the probability that it has no common factor greater than 1 with 30?
- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{4}{15}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{2}{5}$ (E) $\frac{7}{15}$
- 9.8** Two fair coins are tossed and a fair six-sided die is rolled. What is the probability that at least one coin shows heads and the die shows a number greater than 4?
- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{3}$ (E) $\frac{1}{2}$

- 9.9** ♦♦ A bag contains only red, blue, and green marbles. If one marble is drawn at random, the probability that it is red is $\frac{1}{3}$ and the probability that it is blue is $\frac{1}{4}$. There are 6 more green marbles than blue marbles. How many marbles are in the bag?

(A) 24 (B) 28 (C) 32 (D) 36 (E) 48

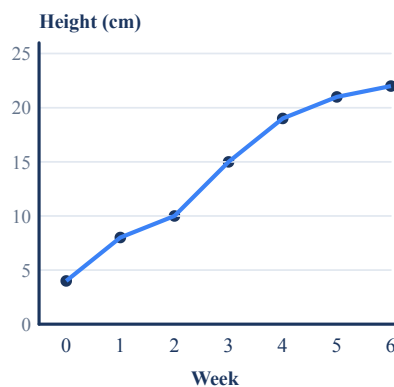
- 9.10** ♦♦ The stem-and-leaf plot shows the heights, in centimeters, of 13 plants. What is the median height minus the mode height, in centimeters?

Stem	Leaf
1	4 7 9 9 9
2	1 3 6 8
3	0 5 5
4	3

Key: 1 | 4 means 14 cm

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

- 9.11** ♦♦ The line graph shows the height of a plant at the end of each week, from week 0 to week 6. During how many of the six weeks did the plant grow by more than its mean growth per week over the six weeks?



(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 9.12** ♦♦ Two fair six-sided dice are rolled. What is the probability that both numbers are odd and their sum is greater than 6?

	First die					
	1	2	3	4	5	6
Second die	1					
	2					
	3					
	4					
	5					
	6					

(A) $\frac{1}{18}$ (B) $\frac{1}{12}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{1}{4}$

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi



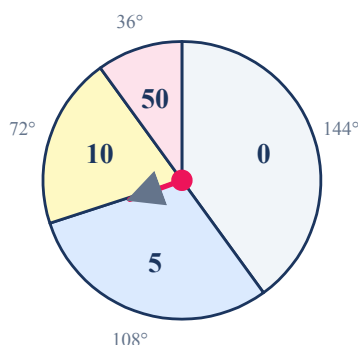
- 9.13** ♦♦ A teacher computed the mean score of the 30 students in her class. Then she noticed that she had recorded one student's score of 86 as 68 by mistake. After she corrected the mistake, by how much did the mean score of the class increase?

(A) 0.3 (B) 0.6 (C) 0.9 (D) 1.8 (E) 18

- 9.14** ♦♦ In a math club, the ratio of boys to girls is 3 : 2. The mean age of the boys is 13 years, and the mean age of all the members is 13.4 years. What is the mean age of the girls, in years?

(A) 14 (B) 14.2 (C) 14.4 (D) 14.6 (E) 15

- 9.15** ♦♦ The spinner shown is divided into four sectors worth 0, 5, 10, and 50 points, with the central angles shown. What is the expected number of points from one spin?



(A) 6 (B) $\frac{15}{2}$ (C) 8 (D) $\frac{17}{2}$ (E) $\frac{65}{4}$

- 9.16** ♦♦ Two fair six-sided dice are rolled. What is the probability that the two numbers rolled have a common factor greater than 1?

	First die					
	1	2	3	4	5	6
Second die	1					
	2					
	3					
	4					
	5					
	6					

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{11}{36}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{13}{36}$ (E) $\frac{7}{18}$

- 9.17** ♦♦ The digits 1, 2, 3, 4 are arranged in a random order to form a four-digit number. What is the probability that the number is divisible by 4?

(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{5}{24}$ (D) $\frac{1}{4}$ (E) $\frac{1}{3}$

- 9.18** ♦♦ A school sells 200 raffle tickets for 10 000 đồng each. One ticket wins a prize worth 500 000 đồng, two tickets win prizes worth 200 000 đồng each, five tickets win prizes worth 50 000 đồng each, and the other tickets win nothing. For a person who buys one ticket, what is the expected value, in đồng, of (prize won) – (price of the ticket)?

(A) –5 750 (B) –4 250 (C) –1 000 (D) 4 250 (E) 5 750

- 9.19** How many different lists of five positive integers (the order of the numbers in a list does not matter) have mean 8, median 8, unique mode 8, and range 11?
♦♦♦
- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
- 9.20** Three different cards are drawn at random from seven cards numbered 1 through 7. What is the probability that the sum of the numbers on the three cards is odd?
♦♦♦
- (A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{16}{35}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{19}{35}$ (E) $\frac{4}{7}$
- 9.21** At a random moment between 3:00 and 4:00, Mai looks at a clock with an hour hand and a minute hand that both move steadily. What is the probability that the angle between the two hands is less than 30° at that moment?
♦♦♦



- (A) $\frac{1}{12}$ (B) $\frac{1}{6}$ (C) $\frac{2}{11}$ (D) $\frac{1}{5}$ (E) $\frac{1}{3}$
- 9.22** A die is weighted so that the probability of rolling each number 1, 2, 3, 4, 5, 6 is proportional to that number. (For example, a 6 is three times as likely as a 2.) What is the probability of rolling an even number?
♦♦♦
- (A) $\frac{4}{7}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{5}{8}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{5}{7}$
- 9.23** The probability that it rains on Saturday is $\frac{2}{5}$. If it rains on Saturday, the probability that it rains on Sunday is $\frac{1}{2}$; if it does not rain on Saturday, the probability that it rains on Sunday is $\frac{1}{5}$. What is the probability that it rains on exactly one of the two days?
♦♦♦
- (A) $\frac{6}{25}$ (B) $\frac{7}{25}$ (C) $\frac{8}{25}$ (D) $\frac{9}{25}$ (E) $\frac{2}{5}$
- 9.24** An integer is chosen at random from 1 to 100, inclusive. What is the probability that it has exactly 3 positive divisors?
♦♦♦
- (A) $\frac{1}{25}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{3}{50}$ (D) $\frac{2}{25}$ (E) $\frac{1}{10}$
- 9.25** Three boys and three girls stand in a row in a random order, with all orders equally likely. What is the probability that boys and girls alternate (no two boys are next to each other and no two girls are next to each other)?
♦♦♦
- (A) $\frac{1}{30}$ (B) $\frac{1}{20}$ (C) $\frac{1}{15}$ (D) $\frac{1}{12}$ (E) $\frac{1}{10}$
- 9.26** The five numbers 72, 85, 90, 78, and x have a mean that is 3 greater than their median. What is x ?
♦♦♦
- (A) 80 (B) 95 (C) 105 (D) 110 (E) 115

3

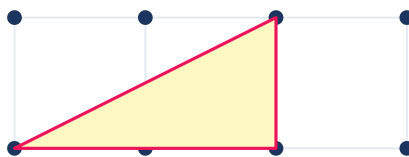
Exercises 3 • Challenge

Bài tập 3 • Thử thách



- 9.27** Ten whole numbers, each from 1 to 5, have mean 3.5, and 5 is their unique mode. What is the greatest possible number of 1s among the ten numbers?
♦♦♦♦
- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 9.28** Eight points are arranged in 2 rows of 4, with neighboring points 1 unit apart, as shown. Three of the eight points are chosen at random. What is the probability that they are the vertices of a right triangle? (One right triangle is shaded.)



- (A) $\frac{3}{7}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{4}{7}$ (D) $\frac{5}{7}$ (E) $\frac{6}{7}$

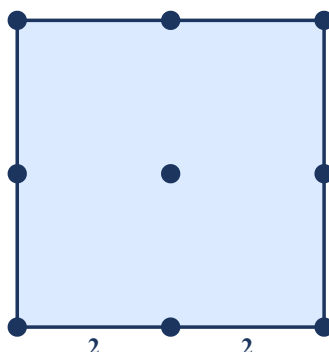
- 9.29** Three fair six-sided dice, one red, one white, and one blue, are rolled. What is the probability that the number on the red die is strictly between the numbers on the other two dice?

- (A) $\frac{5}{54}$ (B) $\frac{1}{9}$ (C) $\frac{4}{27}$ (D) $\frac{1}{6}$ (E) $\frac{5}{27}$

- 9.30** A teacher has a list of test scores. If the highest score is removed from the list, the mean of the remaining scores is 2 less than the mean of the whole list. If instead the lowest score is removed, the mean of the remaining scores is 3 more than the mean of the whole list. The highest score is 50 points more than the lowest score. How many scores are in the list?

Integer answer · Đáp số nguyên

- 9.31** A square with side length 4 has the 9 marked points shown: its 4 vertices, the midpoints of its 4 sides, and its center. A point is chosen at random inside the square. What is the probability that its distance from each of the 9 marked points is greater than 1?



- (A) $1 - \frac{\pi}{4}$ (B) $1 - \frac{\pi}{6}$ (C) $1 - \frac{\pi}{8}$ (D) $\frac{\pi}{4}$ (E) $1 - \frac{\pi}{16}$

- 9.32** Three different integers are chosen at random from $1, 2, 3, \dots, 10$. What is the probability that the mean of the three chosen integers is itself an integer?

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{10}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{7}{20}$ (E) $\frac{2}{5}$

- 9.33** Three different numbers are chosen at random from $1, 2, 3, \dots, 10$. What is the probability that the mean of the other seven numbers is an integer?

- (A) $\frac{2}{15}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{3}{20}$ (D) $\frac{7}{20}$ (E) $\frac{9}{10}$

- 9.34** An integer is chosen at random from $1, 2, 3, \dots, n$. For how many values of n with $1 \leq n \leq 100$ is the probability that the chosen integer is divisible by 2 or by 3 (or both) greater than $\frac{2}{3}$?

Integer answer · Đáp số nguyên

- 9.35** In a game, Bảo rolls a fair six-sided die. If he rolls 1 through 5, he scores that number and the game ends. If he rolls a 6, he scores 6 points and rolls again, and he keeps going this way, adding up all the numbers he rolls, until he rolls a number other than 6. What is the expected total score?

- (A) $\frac{7}{2}$ (B) 4 (C) $\frac{49}{12}$ (D) $\frac{21}{5}$ (E) $\frac{9}{2}$

9.36 The eight cards numbered 1 through 8 are shuffled. Lan takes four of them at random, and Minh takes the other four.

What is the probability that the sum of Lan's numbers is greater than the sum of Minh's numbers?

(A) $\frac{3}{7}$

(B) $\frac{31}{70}$

(C) $\frac{1}{2}$

(D) $\frac{39}{70}$

(E) $\frac{4}{7}$

Chapter 10

8020 AMC 8 Mastery

Angles, Triangles & Polygons

Góc, tam giác & đa giác

Mỗi đề AMC 8 có khoảng 6–8 câu hình học, và một nửa trong số đó chỉ cần đúng chương này: tính góc với đường song song, tổng góc tam giác, tam giác cân, bất đẳng thức tam giác, tam giác bằng nhau và góc của đa giác. Chương dạy cách “đuổi góc” có hệ thống (đặt một ẩn, dùng định lý góc ngoài, chốt bằng tổng $180^\circ/360^\circ$), cách đếm tam giác cạnh nguyên, và cách nghĩ bằng góc ngoài khi gặp đa giác. Lỗi mất điểm hay gặp: coi hai đường “trông song song” là song song, quên trường hợp của tam giác cân, nhận tam giác bẹt, và dùng tổng góc ngoài cho đa giác lõm. Chương 11 sẽ thêm diện tích và Pythagoras.

✓ Dùng thành thạo cặp góc, góc so le/đồng vị/trong cùng phía và quy tắc đường gấp khúc giữa hai đường song song.

✓ Áp dụng bất đẳng thức tam giác để đếm tam giác cạnh nguyên; so sánh độ dài bằng định lý cạnh–góc.

✓ Tính tổng góc trong/ngoài, góc đa giác đều, số đường chéo; giải bài đa giác bằng góc ngoài và điều kiện chia hết.

✓ Đuổi góc trong tam giác bằng tổng 180° , định lý góc ngoài, tam giác cân, công thức $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

✓ Nhận ra tam giác bằng nhau (c.c.c, c.g.c, g.c.g) ẩn trong hình vuông, hình thoi, tam giác đều; dùng tính chất các tứ giác đặc biệt.

vertical angles · góc đối đỉnh

supplementary / complementary · bù nhau / phụ nhau

transversal · cắt tuyến

alternate interior angles · góc so le trong

corresponding angles · góc đồng vị

exterior angle · góc ngoài

isosceles / equilateral · cân / đều

angle bisector · tia phân giác

triangle inequality · bất đẳng thức tam giác

congruent · bằng nhau (trùng khít)

parallelogram / rhombus · hình bình hành / hình thoi

kite · hình cánh diều

regular polygon · đa giác đều

diagonal · đường chéo

K 10.1 Angle Pairs and Parallel Lines

Cặp góc và đường thẳng song song

Mọi bài tính góc ở AMC 8 đều xây trên vài sự thật rất ngắn. Cái khó là **nhìn ra** chúng trong một hình rối. Thói quen tốt nhất: đặt ẩn cho một góc chưa biết, rồi viết **mọi** góc khác theo ẩn đó, cho tới khi gặp một đẳng thức (tổng 180° , tổng 360° , hai góc bằng nhau).

Definition — Angle pairs (các cặp góc)

Two angles are **complementary** if they add to 90° and **supplementary** if they add to 180° . When two lines cross, opposite angles are **vertical angles** and are equal. Angles around a point add to 360° ; angles on one side of a straight line add to 180° .

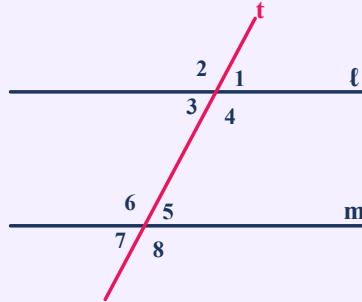
Hai góc **phụ nhau** có tổng 90° , **bù nhau** có tổng 180° . Hai đường thẳng cắt nhau tạo hai cặp **góc đối đỉnh** (bằng nhau). Lý do: góc 1 và góc 3 cùng bù với góc 2.

Theorem – Parallel lines and a transversal (song song và cắt tuyến)

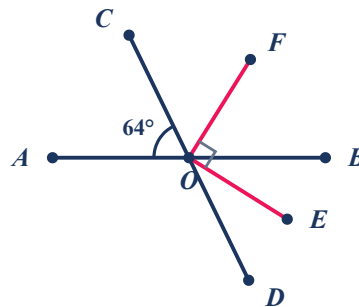
If $\ell \parallel m$ and a line t (a **transversal**) crosses both, then **corresponding angles** are equal ($\angle 1 = \angle 5$), **alternate interior angles** are equal ($\angle 3 = \angle 5$, $\angle 4 = \angle 6$), and **same-side interior angles** are supplementary ($\angle 4 + \angle 5 = 180^\circ$).

Conversely, if any one of these holds, then $\ell \parallel m$.

Góc **đồng vị** bằng nhau, góc **so le trong** bằng nhau, hai góc **trong cùng phía** bù nhau. Mẹo nhớ: trong hình, mọi góc nhọn bằng nhau, mọi góc tù bằng nhau, và một góc nhọn cộng một góc tù được 180° .

**Example 10.1****Phân giác của hai góc kề bù**

Lines AB and CD intersect at O , and $\angle AOC = 64^\circ$. Ray OE bisects $\angle BOD$. Ray OF is perpendicular to ray OE , with F on the same side of line AB as C . What is the degree measure of $\angle COF$?

**(A)** 26**(B)** 32**(C)** 52**(D)** 58**(E)** 64**SOLUTION • LỜI GIẢI** · Answer: **(D)** 58

Đối đỉnh: $\angle BOD = \angle AOC = 64^\circ$, nên $\angle BOE = 32^\circ$. Kề bù: $\angle BOC = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$.

Vì $OF \perp OE$: $\angle BOF = 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$. Do đó $\angle COF = 116^\circ - 58^\circ = 58^\circ$. Đáp án (D).

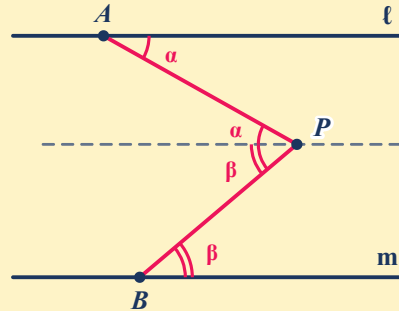
Nhận xét: $\angle COF = \angle FOB$, tức OF chính là phân giác của $\angle BOC$. Bẫy: dừng ở 32° (góc BOE) hoặc lấy nhầm góc đối đỉnh 64° .

Insight · Phân giác của hai góc **kề bù** luôn vuông góc với nhau (vì $\frac{x}{2} + \frac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ$) — gặp hai tia vuông góc, hãy nghĩ tới điều ngược lại.

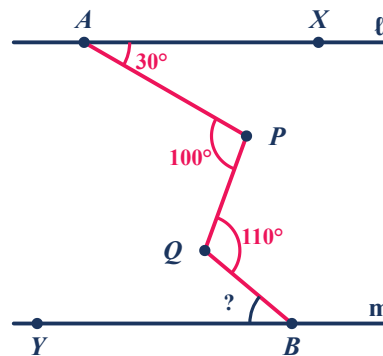
Key Idea — Quy tắc đường gấp khúc (the “bent line” rule)

If $\ell \parallel m$ and a broken line goes from A on ℓ to a point P between the lines and then to B on m , bending **toward** the side where the angles are measured, then $\angle APB = \alpha + \beta$.

Chứng minh: kẻ qua P đường thẳng song song với ℓ (nét đứt). Nó chia $\angle APB$ thành hai góc so le trong với α và β . Tổng quát: với đường gấp khúc nhiều khúc giữa hai đường song song, **tổng các góc “chĩa sang phải” bằng tổng các góc “chĩa sang trái”** — chỉ cần kẻ một đường song song qua mỗi đỉnh gấp.

**Example 10.2****Đường gấp khúc hai khúc**

In the figure, lines ℓ and m are parallel. The broken line $APQB$ goes from A on ℓ to B on m ; X is a point on ℓ to the right of A , and Y is a point on m to the left of B . If $\angle XAP = 30^\circ$, $\angle APQ = 100^\circ$, and $\angle PQB = 110^\circ$, what is the degree measure of $\angle QBY$?

**(A)** 30**(B)** 40**(C)** 50**(D)** 70**(E)** 140**SOLUTION · LỜI GIẢI** · Answer: **(B)** 40

Kẻ qua P và qua Q hai đường thẳng song song với ℓ .

Tại P : phần trên của $\angle APQ$ so le trong với $\angle XAP$ nên bằng 30° ; phần dưới bằng $100^\circ - 30^\circ = 70^\circ$.

Tại Q : phần trên của $\angle PQB$ so le trong với phần 70° ở P ; phần dưới bằng $110^\circ - 70^\circ = 40^\circ$, và phần này so le trong với $\angle QBY$. Vậy $\angle QBY = 40^\circ$. Đáp án (B).

Kiểm tra bằng quy tắc “trái = phải”: các góc chĩa sang phải là $\angle P = 100^\circ$ và $\angle QBY$; chĩa sang trái là 30° và 110° : $100 + 40 = 30 + 110$. ✓ Bấy: chỉ dùng một đỉnh gấp ($100 - 30 = 70$).

Insight · Mỗi đỉnh gấp $\rightarrow$ một đường song song phụ. Góc “đi qua” đường phụ được chuyển nguyên vẹn sang đỉnh kế tiếp.

Common Trap — Đừng “thấy” song song khi dễ không nói

Mọi quy tắc trên chỉ đúng khi hai đường thẳng **thật sự** song song (để nói, hoặc hình có ký hiệu mũi tên). Hai đường “trông song song” trong hình không phải là căn cứ. Lỗi thứ hai: dùng “bằng nhau” cho hai góc **trong cùng phía** — chúng **bù nhau**, chỉ bằng nhau khi cùng bằng 90° .

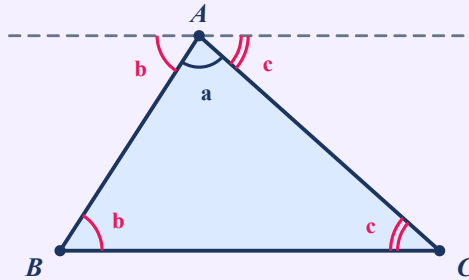
Tip – Trong phòng thi

Hình có hai đường song song và một điểm gấp ở giữa → kẻ ngay đường song song thứ ba qua điểm gấp. Hình có nhiều tia chung gốc → viết các góc theo một ẩn và dùng tổng 180° (một nửa mặt phẳng) hoặc 360° (quanh điểm).

K**10.2 Angles in Triangles****Góc trong tam giác****Theorem – Triangle angle sum (tổng ba góc tam giác)**

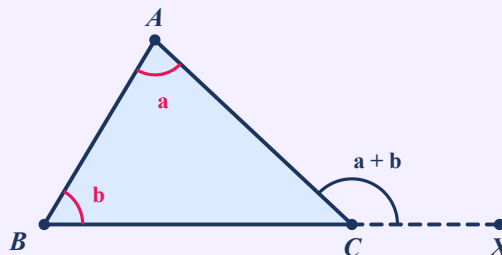
The three angles of every triangle add to 180° .

Chứng minh: qua A kẻ đường thẳng song song với BC . Hai góc so le trong cho ta lại hai góc b và c ở đỉnh A ; ba góc b, a, c ghép thành một góc bẹt.

**Theorem – Exterior Angle Theorem (định lý góc ngoài)**

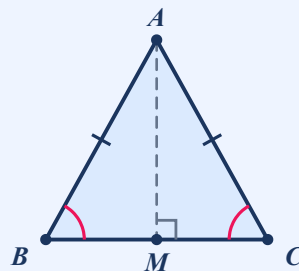
An exterior angle of a triangle equals the sum of the two interior angles that are not adjacent to it: $\angle ACX = \angle A + \angle B$.

Vì $\angle ACX$ và $\angle ACB$ cùng bù nhau, mà $\angle A + \angle B + \angle ACB = 180^\circ$. Đây là công cụ **nhANH NHẤT** trong các bài “đuổi góc” (angle chasing): một bước thay cho hai.

**Definition – Isosceles and equilateral triangles (tam giác cân, tam giác đều)**

A triangle with two equal sides is **isosceles**; the angles opposite the equal sides (the **base angles**) are equal, and conversely two equal angles force the opposite sides to be equal. A triangle with three equal sides is **equilateral**; each of its angles is 60° .

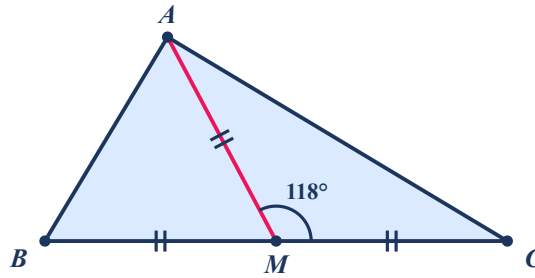
Lý do: đường trung tuyến AM chia tam giác cân thành hai tam giác bằng nhau (c.c.c, mục 10.4), nên $\angle B = \angle C$, và AM đồng thời là phân giác, đường cao. Trong hình: **hai cạnh cùng số gạch** → **hai góc đối diện bằng nhau** — đánh dấu ngay khi thấy.



Example 10.3

Một điểm cách đều ba đỉnh

In $\triangle ABC$, point M lies on side $\overline{BC}$ with $MA = MB = MC$, and $\angle AMC = 118^\circ$. What is $\angle ABC - \angle ACB$, in degrees?



(A) 22

(B) 28

(C) 31

(D) 59

(E) 62

SOLUTION • LỜI GIẢI · Answer: (B) 28

Tam giác AMC cân tại M : $\angle MCA = \frac{180^\circ - 118^\circ}{2} = 31^\circ$, tức $\angle ACB = 31^\circ$.

Góc ngoài: $\angle AMC = \angle MAB + \angle MBA$, mà tam giác AMB cân tại M nên hai góc này bằng nhau: $\angle ABC = 118^\circ / 2 = 59^\circ$.

Hiệu: $59^\circ - 31^\circ = 28^\circ$. Đáp án (B).

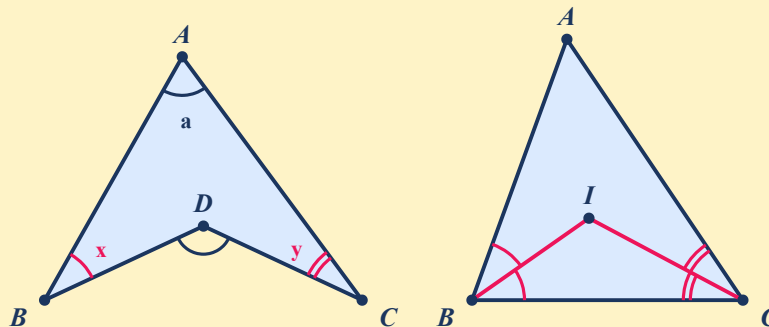
Để ý: $\angle BAC = 59^\circ + 31^\circ = 90^\circ$. Bấy: trả lời 31 hoặc 59 (chỉ một góc) hay 62 (góc AMB).

Insight · Nếu một điểm trên cạnh BC cách đều A, B, C thì $\angle A = \angle B + \angle C$, nên $\angle A = 90^\circ$. Gấp nhiều đoạn bằng nhau chung một đầu mút $\rightarrow$ tách thành các tam giác cân.

Key Idea — Hai hệ quả dùng mãi

(1) **Dart (arrowhead) rule**: if D is inside $\triangle ABC$, then $\angle BDC = \angle A + \angle ABD + \angle ACD$. (2) If the bisectors of $\angle B$ and $\angle C$ meet at I , then $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

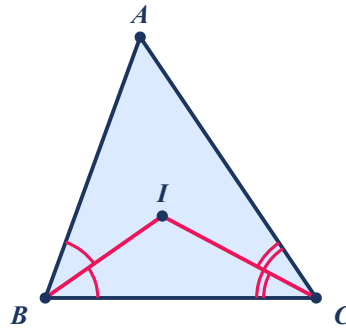
(1) Kéo dài BD cắt AC , rồi dùng định lý góc ngoài hai lần. (2) Trong tam giác BIC : $\angle IBC + \angle ICB = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle A)$, nên $\angle BIC = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.



Example 10.4

Góc tạo bởi hai phân giác

In $\triangle ABC$, the bisectors of $\angle ABC$ and $\angle ACB$ meet at I . The measure of $\angle BIC$ is 63° more than the measure of $\angle BAC$. What is the degree measure of $\angle BAC$?



- (A) 36 (B) 54 (C) 63 (D) 78 (E) 117

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 54

Theo hệ quả (2): $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$. Để cho $\angle BIC = \angle A + 63^\circ$.

Vậy $90 + \frac{1}{2}A = A + 63$, suy ra $\frac{1}{2}A = 27$, $A = 54^\circ$. Đáp án (B). Khi đó $\angle BIC = 117^\circ$.

Bẫy: nhớ nhầm $\angle BIC = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle A$ sẽ ra $A = 78^\circ$; trả lời $\angle BIC$ thay vì $\angle A$ ra 117.

Insight · Công thức $\angle BIC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$ biến mọi bài “hai phân giác trong” thành một phương trình bậc nhất.

Example 10.5

Đếm tam giác theo góc (nối chương đếm)

All three angles of a triangle are whole-number multiples of 15° . Two such triangles are considered the same if they have the same three angle measures. How many different triangles of this kind are obtuse?

- (A) 3 (B) 5 (C) 6 (D) 9 (E) 12

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 6

Viết các góc là $15a, 15b, 15c$ với $a \leq b \leq c$ nguyên dương. Tổng 180° cho $a + b + c = 12$.

Tam giác tù khi góc lớn nhất $15c > 90$, tức $c \geq 7$. Cố định c rồi liệt kê (a, b) với $a \leq b \leq c$:

$c = 7$: $a + b = 5$: $(1, 4), (2, 3)$; $c = 8$: $a + b = 4$: $(1, 3), (2, 2)$; $c = 9$: $(1, 2)$; $c = 10$: $(1, 1)$. Tổng 6. Đáp án (C).

Toàn bộ có 12 bộ: 3 bộ vuông ($c = 6$), 3 bộ nhọn $((2, 5, 5), (3, 4, 5), (4, 4, 5))$ và 6 bộ tù.

Insight · Đổi góc sang “đơn vị” (15°) để thành bài chia số nguyên; liệt kê theo **phần lớn nhất** để không sót, không trùng.

Common Trap — Tam giác cân: góc đã cho là góc nào?

“Một tam giác cân có một góc 50° ” chưa đủ để biết hình dạng: 50° có thể là góc ở đỉnh $(50, 65, 65)$ hoặc góc ở đáy $(50, 50, 80)$. Nếu góc đã cho $\geq 90^\circ$ thì nó **chỉ** có thể là góc ở đỉnh. Khi đề hỏi “tổng các giá trị có thể”, luôn xét cả hai trường hợp.

Tip — Đuổi góc có hệ thống

(1) Đánh dấu mọi cặp cạnh bằng nhau $\rightarrow$ cặp góc bằng nhau. (2) Đặt **một** ẩn x cho góc nhỏ nhất chưa biết. (3) Đi vòng hình bằng định lý góc ngoài, viết mỗi góc theo x . (4) Chốt bằng một tổng $180^\circ/360^\circ$. Đáp án AMC 8 gần như luôn là số nguyên độ — ra số lẻ là nên kiểm tra lại.

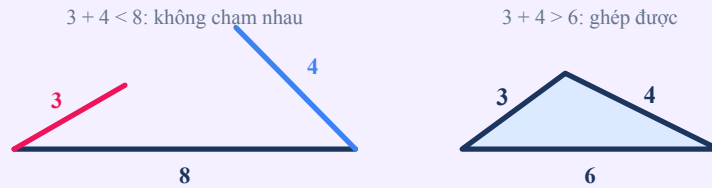
K 10.3 The Triangle Inequality; Sides and Angles

Bất đẳng thức tam giác; cạnh và góc đối diện

Theorem – Triangle Inequality (bất đẳng thức tam giác)

Positive numbers $a \leq b \leq c$ are the side lengths of a (non-degenerate) triangle if and only if $a + b > c$. Equivalently, for any two sides a, b , the third side c satisfies $|a - b| < c < a + b$.

Đường thẳng là đường ngắn nhất: đi từ A tới B vòng qua C phải dài hơn đi thẳng. Khi $a + b = c$, ba điểm thẳng hàng — tam giác “bẹt” (degenerate), **không** được tính là tam giác. Chỉ cần kiểm tra **một** bất đẳng thức: tổng hai cạnh nhỏ lớn hơn cạnh lớn nhất.



Theorem – Larger side $\leftrightarrow$ larger angle (cạnh lớn đối diện góc lớn)

In any triangle, the longer of two sides is opposite the larger of the two angles, and conversely. In particular the longest side is opposite the largest angle.

Ví dụ: tam giác có các góc $40^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ thì cạnh đối diện góc 80° dài nhất, cạnh đối diện 40° ngắn nhất. Định lý này so sánh được độ dài **mà không cần tính** — rất hợp với AMC 8 (không có lượng giác).

Example 10.6

Cố định cạnh lớn nhất

How many noncongruent triangles have integer side lengths and longest side of length exactly 9?

- (A) 16 (B) 20 (C) 25 (D) 29 (E) 45

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 25

Gọi các cạnh là $a \leq b \leq 9$. Điều kiện duy nhất cần kiểm tra là $a + b > 9$, tức $a \geq 10 - b$.

$b = 9$: $a = 1, \dots, 9$ (9 cách); $b = 8$: $a = 2, \dots, 8$ (7); $b = 7$: $a = 3, \dots, 7$ (5); $b = 6$: $a = 4, 5, 6$ (3); $b = 5$: $a = 5$ (1); $b \leq 4$: không có.

Tổng $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$. Đáp án (C).

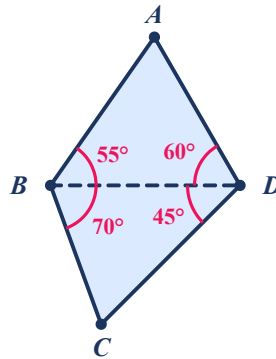
Bấy: cho phép $a + b = 9$ (tam giác bẹt) thêm 4 bộ, ra 29; quên điều kiện tam giác ra 45 (mọi cặp $a \leq b \leq 9$).

Insight · Đếm tam giác cạnh nguyên: **cố định cạnh lớn nhất**, khi đó chỉ còn một bất đẳng thức; các số đếm thường lập thành dãy lẻ/chẵn đẹp.

Example 10.7

Đoạn nào dài nhất?

In quadrilateral $ABCD$ shown, $\angle ABD = 55^\circ$, $\angle ADB = 60^\circ$, $\angle CBD = 70^\circ$, and $\angle CDB = 45^\circ$. Which of the five segments $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$ is the longest?

(A) $\overline{AB}$ (B) $\overline{AD}$ (C) $\overline{BC}$ (D) $\overline{BD}$ (E) $\overline{CD}$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (E) $\overline{CD}$

Tam giác ABD : $\angle A = 180^\circ - 55^\circ - 60^\circ = 65^\circ$. Cạnh đối diện $55^\circ, 60^\circ, 65^\circ$ lần lượt là AD, AB, BD , nên $AD < AB < BD$.

Tam giác CBD : $\angle C = 180^\circ - 70^\circ - 45^\circ = 65^\circ$. Cạnh đối diện $45^\circ, 65^\circ, 70^\circ$ là BC, BD, CD , nên $BC < BD < CD$.

Ghép hai chuỗi qua cạnh chung BD : CD dài nhất. Đáp án (E).

Insight · So sánh độ dài trong hình nhiều tam giác: xếp thứ tự **trong từng tam giác** theo góc đối diện, rồi **nối các chuỗi** qua cạnh chung.

Common Trap — Ba lỗi hay gặp với bất đẳng thức tam giác

(1) Dùng “ $\geq$ ” thay cho “ $>$ ”: ba que 3, 4, 7 **không** tạo thành tam giác. (2) Chỉ kiểm tra $a + b > c$ với c **không** phải cạnh lớn nhất — luôn sắp xếp cạnh trước. (3) Khi cạnh chứa ẩn (như $x + 4, 2x - 3$), phải kiểm tra **cả ba** bất đẳng thức và điều kiện mỗi cạnh dương, vì chưa biết cạnh nào lớn nhất.

Tip — Nhận dạng

Đề hỏi “bao nhiêu giá trị nguyên của cạnh thứ ba” $\rightarrow$ khoảng $|a - b| < c < a + b$, đếm số nguyên **bên trong** (không lấy hai đầu).
Đề hỏi “cạnh nào dài nhất / góc nào lớn nhất” mà không cho số đo cạnh $\rightarrow$ định lý cạnh–góc. Mở rộng cho đa giác: n đoạn thẳng ghép được thành một đa giác khi và chỉ khi đoạn dài nhất **ngắn hơn tổng các đoạn còn lại**.

K 10.4 Congruent Triangles and Special Quadrilaterals

Tam giác bằng nhau và các tứ giác đặc biệt

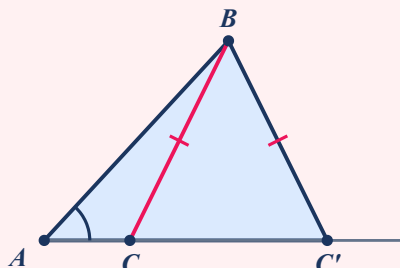
Definition — Congruence tests (các trường hợp bằng nhau)

Two triangles are **congruent** if one can be moved (slid, turned, flipped) onto the other. They are congruent if they agree in **SSS** (three sides), **SAS** (two sides and the angle between them), or **ASA/AAS** (two angles and one corresponding side). Congruent triangles have all corresponding sides and angles equal.

Ba trường hợp: **c.c.c**, **c.g.c** (góc phải *xen giữa* hai cạnh), **g.c.g**. Ở AMC 8, tam giác bằng nhau thường “**ẩn**” trong hình vuông, hình thoi, tam giác đều: các cạnh bằng nhau có sẵn, chỉ cần tìm góc xen giữa.

Common Trap – c.c.g (SSA) và g.g.g (AAA) KHÔNG ĐỦ

Hai tam giác ABC và ABC' trong hình có chung AB , chung góc A , và $BC = BC'$, nhưng rõ ràng không bằng nhau: cạnh BC “lắc” được về hai phía. Ba góc bằng nhau (g.g.g) chỉ cho hai tam giác **đồng dạng** (cùng hình dạng, khác cỡ).

**Theorem – Special quadrilaterals (tứ giác đặc biệt)**

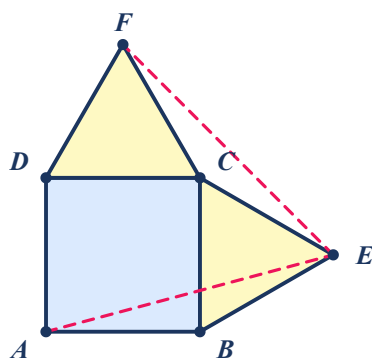
Angles of any quadrilateral add to 360° . In a **parallelogram**: opposite sides are equal, opposite angles are equal, consecutive angles are supplementary, and the diagonals bisect each other. A **rhombus** (four equal sides) is a parallelogram whose diagonals are perpendicular and bisect its angles. A **rectangle** is a parallelogram with equal diagonals. In a **kite** ($AB = AD$, $CB = CD$) the diagonal AC is a line of symmetry. In an **isosceles trapezoid** the two base angles at each base are equal.

Mọi tính chất trên đều chứng minh bằng tam giác bằng nhau: ví dụ đường chéo chia hình bình hành thành hai tam giác bằng nhau (g.c.g, nhờ hai cặp góc so le trong).

Tứ giác	Cạnh	Góc	Đường chéo
Hình bình hành	đối bằng nhau, đối song song	đối bằng nhau; kề bù nhau	cắt nhau tại trung điểm mỗi đường
Hình thoi	4 cạnh bằng nhau	như hình bình hành	vuông góc; là phân giác các góc
Hình chữ nhật	đối bằng nhau	4 góc vuông	bằng nhau, cắt tại trung điểm
Cánh diều	2 cặp cạnh kề bằng nhau	một cặp góc đối bằng nhau	vuông góc; một đường là trục đối xứng
Hình thang cân	2 cạnh bên bằng nhau	2 góc kề mỗi đáy bằng nhau	bằng nhau

Example 10.8**Tam giác bằng nhau ẩn quanh hình vuông**

Square $ABCD$ has equilateral triangles BCE and CDF drawn outside it, as shown. What is the degree measure of $\angle BEF$?



(A) 60

(B) 65

(C) 70

(D) 75

(E) 80

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(D)** 75

Mọi đoạn AB, BE, CE, CF, DF, AD đều bằng cạnh hình vuông. Tính ba góc xen giữa:

$\angle ABE = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, $\angle ADF = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$, và quanh C : $\angle ECF = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 150^\circ$.

Ba tam giác ABE, ADF, ECF bằng nhau (c.g.c: hai cạnh bằng cạnh hình vuông, góc xen giữa 150°), nên $AE = AF = EF$: tam giác AEF **đều**, $\angle AEF = 60^\circ$.

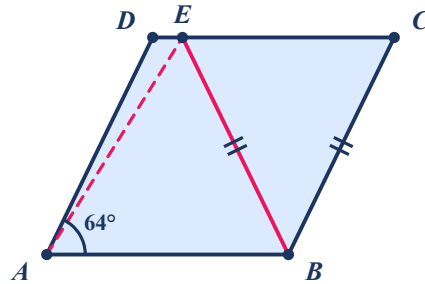
Tam giác ABE cân tại B : $\angle AEB = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$. Vậy $\angle BEF = 15^\circ + 60^\circ = 75^\circ$. Đáp án (D).

Insight · Nhiều đoạn bằng nhau (cạnh hình vuông, tam giác đều) + các góc xen giữa bằng nhau $\rightarrow$ tìm bộ tam giác bằng nhau (c.g.c); kết quả thường là một tam giác đều hoặc vuông cân “bất ngờ”.

Example 10.9

Hình thoi và một tam giác cân

Rhombus $ABCD$ has $\angle DAB = 64^\circ$. Point E lies on side $\overline{CD}$ so that $BE = BC$. What is the degree measure of $\angle AEB$?



- (A) 52 (B) 56 (C) 58 (D) 61 (E) 64

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 58

Góc đối của hình thoi bằng nhau: $\angle BCD = 64^\circ$; góc kề bù: $\angle ABC = 116^\circ$.

Tam giác BCE cân tại B : $\angle BEC = 64^\circ$, nên $\angle CBE = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ$ và $\angle ABE = 116^\circ - 52^\circ = 64^\circ$.

Mấu chốt: $BA = BC = BE$ (cạnh hình thoi), nên tam giác ABE cũng cân tại B : $\angle AEB = \frac{180^\circ - 64^\circ}{2} = 58^\circ$. Đáp án (C).

Bấy: lấy $\angle CBE = 52^\circ$ hay $\angle BEC = 64^\circ$ làm đáp số.

Insight · Hình thoi cho sẵn **bốn đoạn bằng nhau**; một điểm mới cách B đúng bằng cạnh hình thoi tạo thêm một tam giác cân chung đỉnh B .

Tip — Thấy hai đoạn bằng nhau chung một đầu mút

...thì có một tam giác cân (đánh dấu hai góc đáy). Thấy **ba** đoạn bằng nhau chung một đầu mút B ($BA = BC = BE$) thì có **ba** tam giác cân chung đỉnh — đây là chỗ các bài AMC 8 hay “giấu” lời giải. Thấy hình vuông hoặc tam giác đều ghép cạnh nhau $\rightarrow$ tìm các tam giác bằng nhau theo c.g.c.

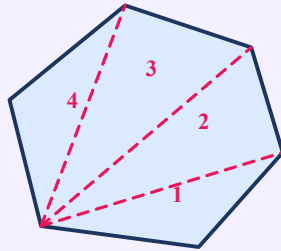
K 10.5 Polygons: Angle Sums, Regular Polygons, Diagonals

Đa giác: tổng góc, đa giác đều, đường chéo

Theorem — Interior angle sum (tổng các góc trong)

The interior angles of a polygon with n sides add to $(n - 2) \cdot 180^\circ$. This holds for every simple polygon (sides do not cross), convex or not.

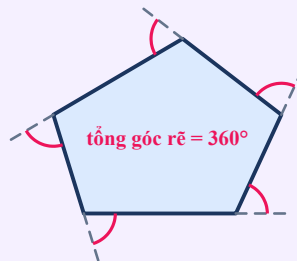
Từ một đỉnh của đa giác lồi kẻ $n - 3$ đường chéo, chia đa giác thành $n - 2$ tam giác; góc của các tam giác ghép đúng thành các góc của đa giác. Nhớ: tứ giác 360° , ngũ giác 540° , lục giác 720° , bát giác 1080° .



Theorem — Exterior angle sum (tổng các góc ngoài)

At each vertex of a convex polygon take one exterior angle. These n exterior angles always add to 360° , whatever n is.

Đi một vòng quanh đa giác, ở mỗi đỉnh ta rẽ một góc bằng góc ngoài; về chỗ cũ, ta đã quay đúng một vòng 360° . Cách khác: $n \cdot 180^\circ - (n - 2) \cdot 180^\circ = 360^\circ$.



Theorem — Regular polygons and diagonals (đa giác đều, đường chéo)

Each exterior angle of a regular n -gon is $\frac{360^\circ}{n}$ and each interior angle is $180^\circ - \frac{360^\circ}{n} = \frac{(n - 2) \cdot 180^\circ}{n}$. A convex n -gon has $\frac{n(n - 3)}{2}$ diagonals.

Đường chéo: mỗi đỉnh nối với $n - 3$ đỉnh không kề nó; $n(n - 3)$ đếm mỗi đường chéo hai lần (từ hai đầu), nên chia 2. Bảng nhanh: $n = 5, 6, 8, 10, 12$ có góc trong $108^\circ, 120^\circ, 135^\circ, 144^\circ, 150^\circ$.

Example 10.10

Hai đa giác, một hệ phương trình

Two convex polygons have 15 sides in total and 36 diagonals in total. What is the sum of the interior angles of the polygon with more sides, in degrees?

(A) 900

(B) 1080

(C) 1260

(D) 1440

(E) 1980

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 1260

Gọi số cạnh là n và m : $n + m = 15$ và $\frac{n(n - 3)}{2} + \frac{m(m - 3)}{2} = 36$, tức $n^2 + m^2 - 3(n + m) = 72$, nên $n^2 + m^2 = 117$.

Dùng hằng đẳng thức (Chương 3): $2nm = (n + m)^2 - (n^2 + m^2) = 225 - 117 = 108$, nên $nm = 54$. Hai số có tổng 15, tích 54: 6 và 9.

Đa giác lớn hơn có 9 cạnh: tổng góc trong $(9 - 2) \cdot 180^\circ = 1260^\circ$. Đáp án (C).

Bấy: 1980° là tổng góc của cả hai đa giác ($720 + 1260$) — con số này thật ra tính được ngay từ “15 cạnh” mà không cần số đường chéo; 720 là của đa giác nhỏ.

Insight · Hai ẩn đối xứng ($n + m$ và $n^2 + m^2$ đã biết) → tính nm bằng hằng đẳng thức, rồi tìm hai số biết tổng và tích.

Example 10.11

Chặn số cạnh bằng góc ngoài

Every interior angle of a convex polygon measures at least 150° and at most 165° . How many different values are possible for the number of sides of the polygon?

- (A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 24

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 13

Chuyển sang góc ngoài: mỗi góc ngoài nằm giữa $180 - 165 = 15^\circ$ và $180 - 150 = 30^\circ$ (tính cả hai đầu).

Tổng n góc ngoài là 360° , nên $15n \leq 360 \leq 30n$, tức $12 \leq n \leq 24$.

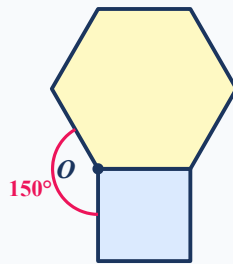
Mọi n trong khoảng đó đều đạt được: đa giác đều n cạnh có góc trong $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$, nằm giữa 150° ($n = 12$) và 165° ($n = 24$). Có $24 - 12 + 1 = 13$ giá trị. Đáp án (B).

Bấy: lấy $24 - 12 = 12$ (quên một đầu mút).

Insight · Ràng buộc trên **từng** góc trong → ràng buộc trên từng góc ngoài → nhân với n và so với 360° để chặn n ; nhớ kiểm tra hai đầu mút đạt được.

Note — Ghép đa giác đều quanh một điểm

Các đa giác đều ghép quanh một điểm (không chồng, không hở) khi tổng các góc trong tại điểm đó bằng 360° : ví dụ 6 tam giác đều, 4 hình vuông, 3 lục giác đều — chỉ ba loại này tự lát kín mặt phẳng. Khi tổng nhỏ hơn 360° thì còn một **khe**: hình vuông (90°) và lục giác đều (120°) chung một cạnh để lại khe 150° .



Example 10.12

Hai đa giác đều chung cạnh (nổi chương số học)

A regular n -gon and a regular m -gon share a side and lie on opposite sides of it. At one endpoint of the shared side, the two polygons leave a gap of exactly 30° (the angle outside both polygons). How many unordered pairs $\{n, m\}$ are possible? (The two polygons may have the same number of sides.)

- (A) 4 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 15

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 8

Góc trong là $180 - \frac{360}{n}$ và $180 - \frac{360}{m}$; khe bằng 360 trừ tổng hai góc trong: $\frac{360}{n} + \frac{360}{m} = 30$, tức $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{12}$.

Nhân với $12nm$: $12m + 12n = nm$, hay $(n - 12)(m - 12) = 144$. Vì $\frac{360}{n} < 30$ nên $n > 12$, cả hai thừa số dương.

$144 = 2^4 \cdot 3^2$ có 5 · 3 = 15 ước dương, nên có 15 cặp **có thứ tự** (n, m) . Cặp $n = m = 24$ đếm một lần, 14 cặp còn lại ghép thành 7 cặp không thứ tự. Tổng 7 + 1 = 8. Đáp án (D).

Bấy: trả lời 15 (đếm có thứ tự) hoặc 7 (quên cặp $\{24, 24\}$).

Insight • Điều kiện về góc đa giác đều thường quy về $\frac{1}{n} + \frac{1}{m} = \frac{1}{k}$; nhân chéo rồi “thêm bớt” để thành $(n - k)(m - k) = k^2$ và đếm ước.

Common Trap — Góc ngoài chỉ dùng cho đa giác lồi; góc trong luôn đúng

Công thức $(n - 2) \cdot 180^\circ$ vẫn đúng cho đa giác lõm (có góc trong lớn hơn 180° , gọi là góc phản — reflex), nhưng “tổng góc ngoài = 360° ” chỉ dùng trực tiếp cho đa giác **lồi**. Một lỗi khác: đếm đường chéo bằng $\binom{n}{2}$ — con số đó gồm cả n cạnh.

Tip — Chọn công cụ

Biết **một góc** của đa giác đều $\rightarrow$ dùng góc ngoài $\frac{360}{n}$ để ra n . Biết **tổng góc** $\rightarrow (n - 2) \cdot 180$. Các góc trong cho dạng “gần 180° ” hoặc nhiều góc bằng nhau $\rightarrow$ chuyển sang góc ngoài. Câu hỏi về n thường kèm điều kiện chia hết: n phải là ước của 360 để góc là số nguyên độ.

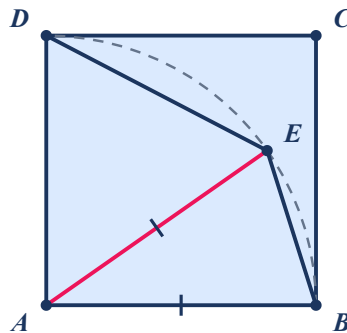
E Worked Examples — Competition Level

Ví dụ mẫu mức thi đấu

Example 10.13

Đáp số không phụ thuộc vị trí điểm

Point E lies inside square $ABCD$, and $AE = AB$. What is the degree measure of $\angle BED$?



- (A) 105 (B) 120 (C) 135 (D) 145 (E) 150

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (C) 135

Thử trường hợp đặc biệt trước. Nếu E nằm trên đường chéo AC thì hình đối xứng, và nhanh chóng ra 135° . Để không cho thêm dữ kiện, nên đáp số hẳn không phụ thuộc vị trí của E — giờ ta chứng minh.

Đặt $\angle BAE = x$, khi đó $\angle EAD = 90^\circ - x$. Vì $AB = AE = AD$, hai tam giác ABE và ADE đều cân tại A :

$$\angle AEB = \frac{180^\circ - x}{2} = 90^\circ - \frac{x}{2}, \quad \angle AED = \frac{180^\circ - (90^\circ - x)}{2} = 45^\circ + \frac{x}{2}.$$

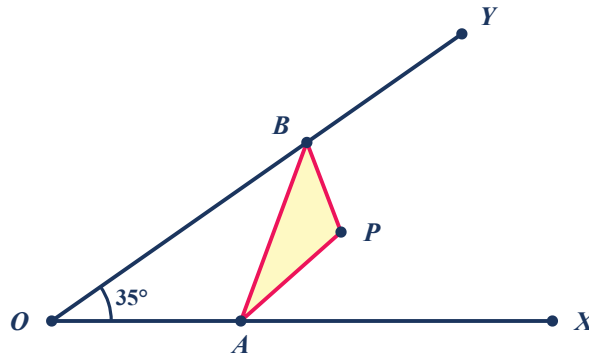
Cộng lại: $\angle BED = \angle AEB + \angle AED = 135^\circ$, với mọi x . Đáp án (C).

Insight • Khi đề “thiếu dữ kiện” mà vẫn hỏi một con số, đáp số không đổi: thử một vị trí đặc biệt để đoán, rồi đặt ẩn để chứng minh — ẩn sẽ tự triệt tiêu.

Example 10.14

Đối xứng trục biến chu vi thành một đoạn thẳng

Angle XOY measures 35° , and P is a point inside it. Points A on ray OX and B on ray OY are chosen so that the perimeter of $\triangle PAB$ is as small as possible. What is the degree measure of $\angle APB$?



- (A) 70 (B) 90 (C) 100 (D) 110 (E) 145

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 110

Lấy P_1 đối xứng với P qua OX và P_2 đối xứng với P qua OY . Khi đó $PA = P_1A$, $PB = P_2B$, nên chu vi $PA + AB + BP = P_1A + AB + BP_2 \geq P_1P_2$. Dấu bằng xảy ra khi A, B nằm trên đoạn P_1P_2 — đó là vị trí tối ưu.

Phép đối xứng giữ khoảng cách và góc: $OP_1 = OP = OP_2$, và $\angle P_1OP_2 = 2\angle XOY = 70^\circ$. Tam giác OP_1P_2 cân tại O nên $\angle OP_1P_2 = \angle OP_2P_1 = \frac{180^\circ - 70^\circ}{2} = 55^\circ$.

Tam giác OPA đối xứng với OP_1A , nên $\angle OPA = \angle OP_1A = 55^\circ$; tương tự $\angle OPB = 55^\circ$. Vậy $\angle APB = 110^\circ$. Đáp án (D).

Tổng quát: $\angle APB = 180^\circ - 2\angle XOY$ — không phụ thuộc vị trí của P . Bấy: $2 \cdot 35 = 70$ là góc P_1OP_2 , không phải đáp số.

Insight · Đường gấp khúc ngắn nhất qua các đường thẳng → lấy đối xứng để “đuổi thẳng” nó; mọi góc trong hình đối xứng được giữ nguyên.

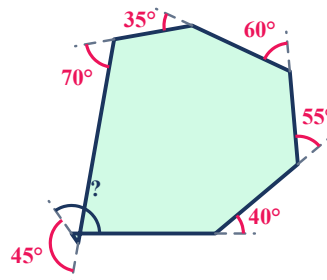
1

Exercises 1 · Foundation

Bài tập 1 · Nền tảng



- 10.1** Lan walks once around the edge of a park shaped like a convex heptagon (7 sides), turning left at each corner. At six of the corners she turns through 40° , 55° , 60° , 35° , 70° , and 45° . Through how many degrees does she turn at the seventh corner?



- (A) 45 (B) 55 (C) 65 (D) 125 (E) 305

- 10.2** The angles of a triangle are in the ratio $2 : 3 : 7$. By how many degrees does the largest angle exceed a right angle?

- (A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 20 (E) 30

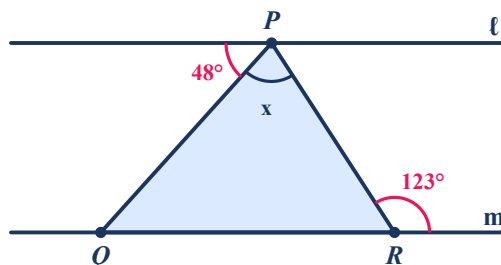
- 10.3** A regular polygon has exactly 20 diagonals. What is the degree measure of each of its interior angles?

- (A) 120 (B) 135 (C) 140 (D) 144 (E) 150

- 10.4** Two sides of a triangle have lengths 6 and 13. The length of the third side is a prime number. How many different lengths are possible for the third side?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

- 10.5** In the figure, lines ℓ and m are parallel. Point P is on ℓ , and points Q and R are on m . The angle between ℓ and $\overline{PQ}$ is 48° , and the angle between $\overline{RP}$ and line m on the right of R is 123° , as marked. What is the value of x ?

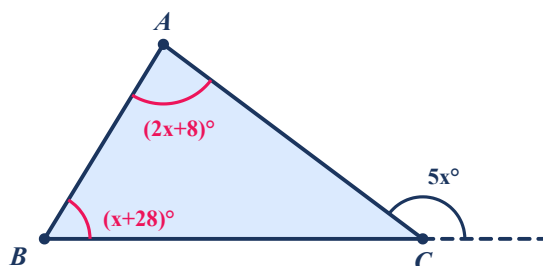


(A) 48 (B) 57 (C) 66 (D) 75 (E) 105

- 10.6** Which of the following sets of three numbers could be the side lengths of a triangle?

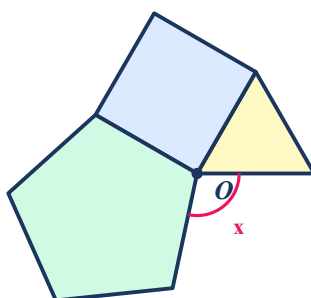
(A) 2, 3, 5 (B) 3, 4, 8 (C) 4, 5, 10 (D) 5, 6, 12 (E) 6, 7, 12

- 10.7** In $\triangle ABC$, $\angle A = (2x + 8)^\circ$ and $\angle B = (x + 28)^\circ$. Side $\overline{BC}$ is extended past C , and the exterior angle formed at C measures $5x^\circ$, as shown. What is the degree measure of the largest interior angle of the triangle? (The figure is not drawn to scale.)



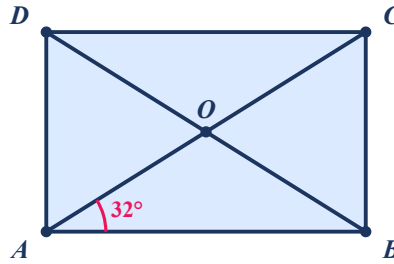
(A) 44 (B) 46 (C) 72 (D) 90 (E) 108

- 10.8** An equilateral triangle, a square, and a regular pentagon share the vertex O and do not overlap, as shown. What is the degree measure of the angle x of the gap that remains at O ?



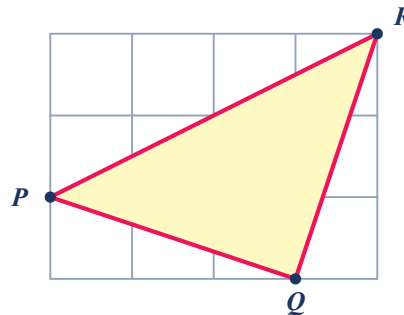
(A) 72 (B) 90 (C) 98 (D) 102 (E) 108

- 10.9** The diagonals of rectangle $ABCD$ meet at O , and diagonal $\overline{AC}$ makes an angle of 32° with side $\overline{AB}$. What is the degree measure of the acute angle between the two diagonals?



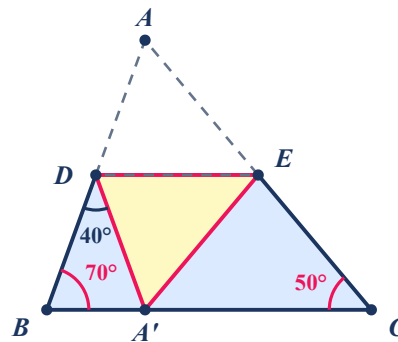
- (A) 26 (B) 32 (C) 52 (D) 58 (E) 64

- 10.10** Points P , Q , and R are lattice points of the grid of unit squares shown. What is the degree measure of $\angle QPR$?



- (A) 45 (B) 53 (C) 60 (D) 72 (E) 90

- 10.11** Triangle ABC has $\angle B = 70^\circ$ and $\angle C = 50^\circ$. It is folded along segment $\overline{DE}$, with D on $\overline{AB}$ and E on $\overline{AC}$, so that A lands on the point A' on $\overline{BC}$. If $\angle BDA' = 40^\circ$, what is the degree measure of $\angle CEA'$?



- (A) 80 (B) 90 (C) 100 (D) 110 (E) 120

- 10.12** How many noncongruent triangles with integer side lengths have perimeter 15 and at least one side of length 7?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

2 Exercises 2 • Competition Core

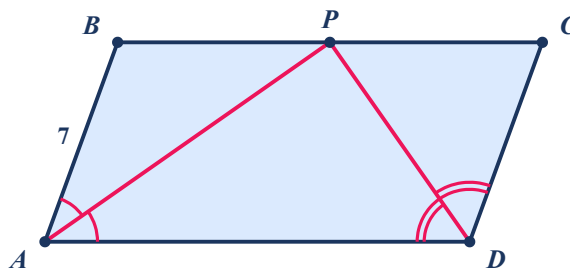
Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi



- 10.13** Two sides of a scalene triangle have lengths 8 and 15, and the third side has integer length. How many different lengths are possible for the third side?

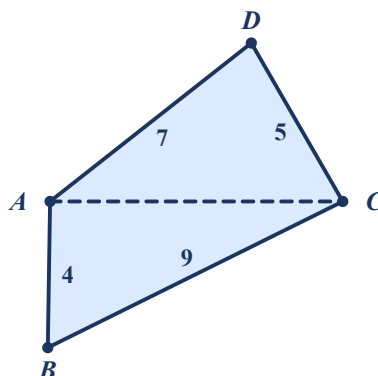
- (A) 11 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 17

- 10.14** In parallelogram $ABCD$, $AB = 7$. The bisectors of $\angle DAB$ and $\angle ADC$ meet at a point P on side $\overline{BC}$, as shown.
- ♦♦ What is the perimeter of $ABCD$?



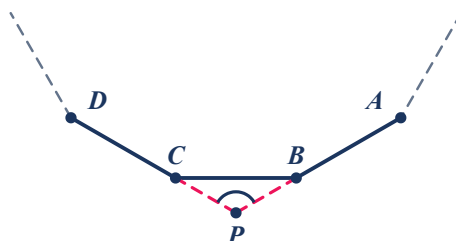
- (A) 28 (B) 35 (C) 42 (D) 49 (E) 56

- 10.15** Quadrilateral $ABCD$ has $AB = 4$, $BC = 9$, $CD = 5$, and $DA = 7$. The diagonal $\overline{AC}$ has integer length. How many values are possible for AC ?
- ♦♦



- (A) 6 (B) 7 (C) 9 (D) 10 (E) 11

- 10.16** A , B , C , and D are four consecutive vertices of a regular polygon. Lines AB and DC meet at point P , as shown, and $\angle BPC = 140^\circ$. How many sides does the polygon have? (The figure is not drawn to scale.)
- ♦♦

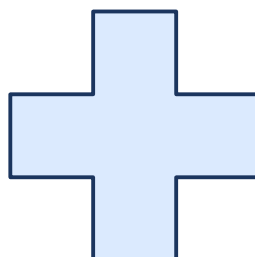


- (A) 9 (B) 12 (C) 15 (D) 18 (E) 20

- 10.17** The five interior angles of a convex pentagon form an arithmetic sequence, and the largest angle is twice the smallest. What is the common difference of the sequence, in degrees?
- ♦♦

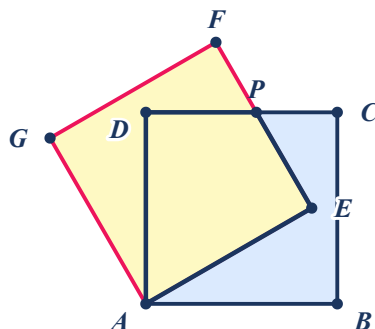
- (A) 18 (B) 20 (C) 24 (D) 27 (E) 36

- 10.18** Every interior angle of a certain kind of polygon measures either 90° or 270° . One such polygon, with 12 sides, is shown. If such a polygon has 18 sides, how many of its interior angles measure 270° ?
- ♦♦

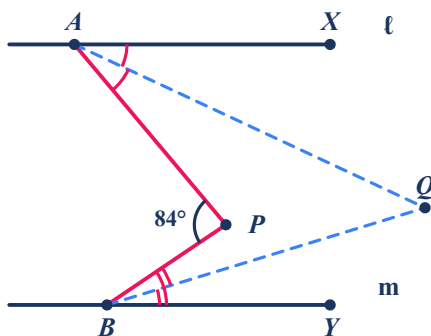


- (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 14

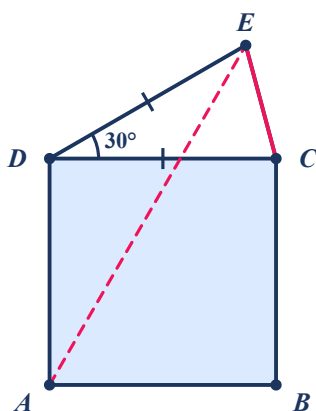
- 10.19** ♦♦ Squares $ABCD$ and $AEFG$ are congruent, and square $AEFG$ is obtained by turning square $ABCD$ counterclockwise 30° about A , as shown. Sides $\overline{CD}$ and $\overline{EF}$ meet at P . What is the degree measure of $\angle DPE$?



- (A) 100 (B) 110 (C) 120 (D) 135 (E) 150
- 10.20** ♦♦ A pentagon has side lengths 2, 3, 5, 6, and x , where x is a positive integer. How many values of x are possible?
- (A) 9 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16
- 10.21** ♦♦ Lines ℓ and m are parallel. Point P lies between them, A is on ℓ , and B is on m . Points X on ℓ and Y on m lie to the right of A and B , and P is also to the right of A and B , as shown. If $\angle APB = 84^\circ$ and the bisectors of $\angle XAP$ and $\angle YBP$ meet at Q , what is the degree measure of $\angle AQB$?

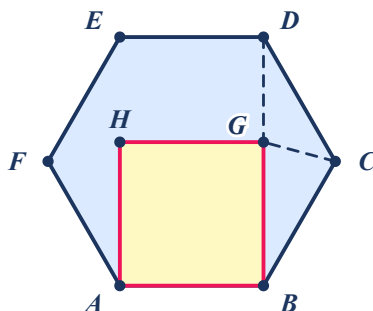


- (A) 21 (B) 28 (C) 42 (D) 48 (E) 84
- 10.22** ♦♦ Point E lies outside square $ABCD$, on the opposite side of line CD from A , so that $DE = DC$ and $\angle CDE = 30^\circ$. What is the degree measure of $\angle AEC$?



- (A) 15 (B) 30 (C) 40 (D) 45 (E) 60

- 10.23** Square $ABGH$ is drawn inside regular hexagon $ABCDEF$, sharing side $\overline{AB}$, as shown. What is the degree measure of $\angle CGD$?



- (A) 105 (B) 110 (C) 115 (D) 120 (E) 135

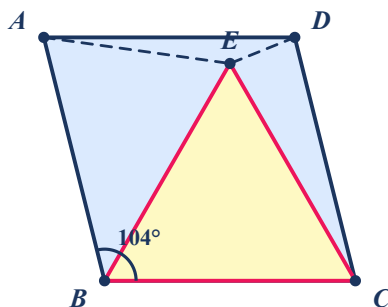
- 10.24** For how many integers $n \geq 3$ does a regular n -gon have each exterior angle equal to a whole number of degrees and have at most 100 diagonals?

- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

- 10.25** A triangle has integer side lengths, its perimeter is at most 30, and its longest side is exactly 3 times as long as its shortest side. How many noncongruent triangles have these properties?

- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

- 10.26** Rhombus $ABCD$ has $\angle ABC = 104^\circ$. Point E inside the rhombus is chosen so that $\triangle BCE$ is equilateral. What is the degree measure of $\angle AED$?



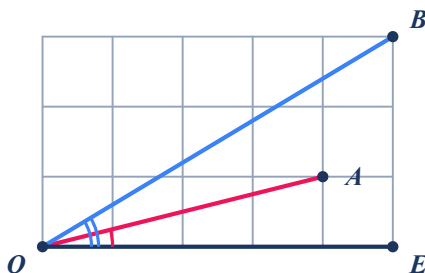
- (A) 120 (B) 128 (C) 135 (D) 142 (E) 150

3 Exercises 3 • Challenge

Bài tập 3 • Thử thách



- 10.27** In the grid of unit squares shown, $O = (0, 0)$, $A = (4, 1)$, $B = (5, 3)$, and $E = (5, 0)$. What is $\angle AOE + \angle BOE$, in degrees?

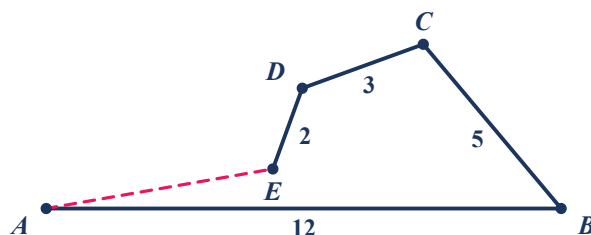


- (A) 30 (B) 40 (C) 45 (D) 50 (E) 60

- 10.28** In $\triangle ABC$, $\angle BAC = 60^\circ$ and $AB = 2 \cdot AC$. What is the degree measure of $\angle ABC$?

- (A) 30 (B) 36 (C) 40 (D) 45 (E) 60

- 10.29** Five points A, B, C, D, E in a plane satisfy $AB = 12$, $BC = 5$, $CD = 3$, and $DE = 2$; one possible arrangement is shown. How many integer values are possible for the distance AE ?

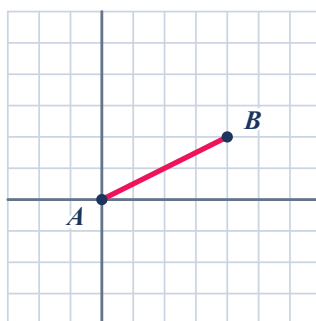


- (A) 11 (B) 18 (C) 20 (D) 21 (E) 23

- 10.30** Four sticks have whole-number lengths, in centimeters, with total length 16 cm, and they can be joined end to end to form a quadrilateral. How many different sets of four lengths are possible? (The order of the lengths does not matter.)

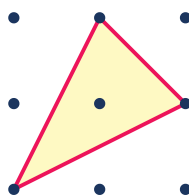
- (A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 23 (E) 34

- 10.31** Points $A = (0, 0)$ and $B = (4, 2)$ are shown on a grid. How many points C with integer coordinates make $\triangle ABC$ an isosceles right triangle?



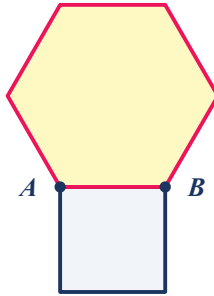
- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 10 (E) 12

- 10.32** How many noncongruent triangles have all three vertices among the 9 points of the 3×3 grid shown? (Adjacent points are 1 unit apart; the figure shows one such triangle.)



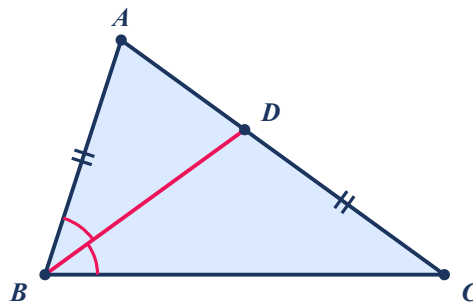
- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

- 10.33** ♦♦♦ A regular hexagon and a square have the same side length. The square is fixed, and the hexagon rests with one side on side $\overline{AB}$ of the square, as shown. The hexagon rolls clockwise around the outside of the square without slipping, each time turning about a corner of the square until one of its sides lies along the next side of the square. Through how many degrees has the hexagon turned when it first lies on side $\overline{AB}$ again?



- (A) 600 (B) 660 (C) 720 (D) 840 (E) 960

- 10.34** ♦♦♦ In $\triangle ABC$, $\angle ABC = 2\angle ACB$. The bisector of $\angle ABC$ meets side $\overline{AC}$ at D , and $AB = CD$. What is the degree measure of $\angle BAC$?

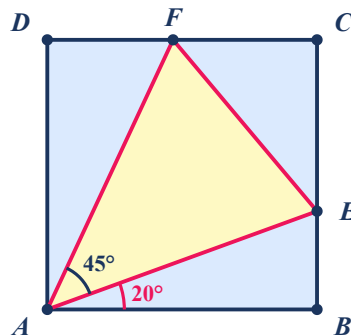


- (A) 36 (B) 45 (C) 54 (D) 60 (E) 72

- 10.35** ♦♦♦ A polygon has 10 sides, which do not cross each other; the polygon need not be convex. What is the greatest possible number of its interior angles that are right angles?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

- 10.36** ♦♦♦ In square $ABCD$, point E lies on side $\overline{BC}$ and point F lies on side $\overline{CD}$ so that $\angle EAF = 45^\circ$ and $\angle BAE = 20^\circ$, as shown. What is the degree measure of $\angle CEF$?



- (A) 30 (B) 35 (C) 40 (D) 45 (E) 50

Chapter 11

8020 AMC 8 Mastery

Area, Perimeter & the Pythagorean Theorem

Diện tích, chu vi & định lý Pythagoras

Diện tích, chu vi và định lý Pythagoras chiếm phần lớn các câu hình học của AMC 8 — từ câu “đếm ô” dễ ở đầu để tới các câu 20–25 giấu một tam giác vuông trong hình ghép. Chương này dạy cách chọn đáy và đường cao, đáy cạnh để tính chu vi hình bậc thang, trừ góc và so sánh tam giác chung đường cao, tính diện tích trên lưới (đóng khung, định lý Pick), định lý Pythagoras cùng các tam giác vuông đặc biệt, và quy tắc k^2 khi phóng to. Học sinh hay mất điểm vì chọn nhầm đường cao, quên điểm trên cạnh xiên, và tưởng diện tích tỉ lệ với độ dài.

✓ Tính diện tích tam giác, hình bình hành, hình thang, tứ giác có hai đường chéo vuông góc; đổi đáy để tìm đường cao.

✓ Tính chu vi hình toàn góc vuông bằng cách đáy cạnh, xử lý đúng các rãnh lõm.

✓ Tính diện tích miền tô màu bằng cộng/trừ, trừ các góc, và tỉ số diện tích các tam giác chung đường cao.

✓ Tính diện tích đa giác trên lưới bằng đóng khung và định lý Pick.

✓ Dùng định lý Pythagoras, định lý đảo, các bộ ba quen thuộc và tam giác 45-45-90, 30-60-90 trong hình ghép.

✓ Áp dụng quy tắc phóng to: độ dài nhân k thì diện tích nhân k^2 .

perimeter · chu vi

area · diện tích

altitude (height) · đường cao

base · đáy

trapezoid · hình thang

parallelogram · hình bình hành

rhombus / kite · hình thoi / hình cánh diều

hypotenuse · cạnh huyền

leg (of a right triangle) · cạnh góc vuông

Pythagorean triple · bộ ba Pythagoras

lattice point · điểm nguyên (điểm lưới)

shaded region · miền tô màu

midpoint · trung điểm

similar figures · hình đồng dạng

K

11.1 Perimeter and Area of Basic Shapes

Chu vi và diện tích các hình cơ bản

Mỗi đề AMC 8 có khoảng 6–8 câu hình học, và hơn một nửa trong số đó quy về **diện tích** hoặc **độ dài**. Công thức thì ai cũng thuộc; điểm được quyết định ở chỗ khác: chọn *cạnh nào làm đáy*, nhìn ra *đường cao nằm ở đâu*, và biết khi nào *không cần* tìm hết các độ dài mà để giấu đi.

Definition — Perimeter and area (chu vi và diện tích)

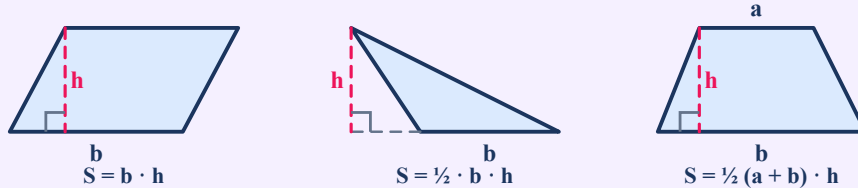
The **perimeter** of a polygon is the total length of its sides (a length, in cm). The **area** is the number of unit squares needed to cover it (in cm^2). An **altitude** (height) of a triangle is the perpendicular segment from a vertex to the line containing the opposite side.

Chú ý chữ “**line containing**”: với tam giác tù, chân đường cao có thể nằm **ngoài** cạnh đáy (hình giữa bên dưới). Chu vi đo bằng đơn vị dài, diện tích đo bằng đơn vị vuông — phóng to hình 2 lần thì chu vi gấp 2 nhưng diện tích gấp 4 (mục 11.5).

Theorem — Area formulas (công thức diện tích)

Rectangle $\ell \times w$: $S = \ell w$. Parallelogram: $S = bh$. Triangle: $S = \frac{1}{2}bh$ for **any** side b and its altitude h . Trapezoid with parallel sides a, b and height h : $S = \frac{1}{2}(a + b)h$. A quadrilateral whose diagonals d_1, d_2 are perpendicular (rhombus, kite, square): $S = \frac{1}{2}d_1d_2$.

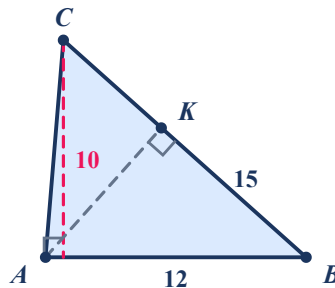
Mọi công thức đều đến từ hình chữ nhật. Hình bình hành: cắt một tam giác ở đầu này, dán sang đầu kia thành hình chữ nhật $b \times h$. Tam giác: hai bản sao ghép thành hình bình hành, nên lấy một nửa. Hình thang: hai bản sao (một bản quay ngược) ghép thành hình bình hành đáy $a + b$. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc: nằm gọn trong hình chữ nhật $d_1 \times d_2$ và chiếm đúng một nửa.

**Key Idea — Một tam giác, ba cách tính diện tích**

Vì cạnh nào cũng có thể làm đáy, ta luôn có $a \cdot h_a = b \cdot h_b = c \cdot h_c = 2S$. Đường cao **tỉ lệ nghịch** với cạnh tương ứng: cạnh dài nhất có đường cao ngắn nhất. Đây là cách nhanh nhất để tìm một đường cao khó thấy: tính S bằng một cặp (đáy, cao) dễ, rồi chia.

Example 11.1**Đổi đáy để tìm đường cao**

In $\triangle ABC$, $AB = 12$ and $BC = 15$, and the altitude from C to $\overline{AB}$ has length 10. What is the length of the altitude $\overline{AK}$ from A to $\overline{BC}$?



(A) 6

(B) $\frac{15}{2}$

(C) 8

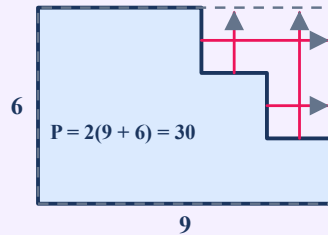
(D) 9

(E) $\frac{25}{2}$ **SOLUTION · LỜI GIẢI** · Answer: (C) 8Lấy AB làm đáy: $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60$.Lấy BC làm đáy: $S = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot AK$, nên $AK = \frac{2 \cdot 60}{15} = 8$. Đáp án (C).Bấy: lập tỉ lệ ngược ($AK = 10 \cdot \frac{15}{12}$) ra $\frac{25}{2}$ — cạnh dài hơn phải đi với đường cao *ngắn* hơn.**Insight** · Một diện tích, hai cặp (đáy, cao): tính S bằng cặp đã biết rồi chia cho cạnh còn lại.

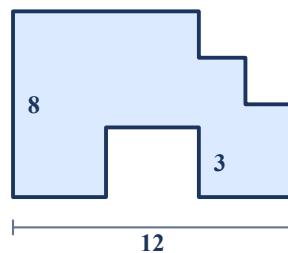
Theorem — Perimeter of a staircase shape (chu vi hình bậc thang)

If every side of a polygon is horizontal or vertical and the polygon has no “notches” (every horizontal line and every vertical line meets it in one segment), its perimeter equals the perimeter of its bounding rectangle: $2(\text{width} + \text{height})$.

Lý do: **đẩy** mỗi bậc thang ra ngoài (hình). Các đoạn ngang được đẩy lên lấp đúng cạnh trên của hình chữ nhật bao, các đoạn dọc được đẩy sang lấp đúng cạnh phải — tổng độ dài không đổi. Nếu có **rãnh** (một chỗ lõm vào rồi lại đi ra), hai cạnh bên của rãnh không bị đẩy đi đâu cả: chu vi tăng thêm **gấp đôi độ sâu rãnh**.

**Example 11.2****Bậc thang không tổn, rãnh thì tổn**

In the figure, every angle is a right angle. The figure is 12 wide and 8 tall, and the notch in the bottom side is 3 deep. The lengths of the steps in the upper right corner are not given. What is the perimeter of the figure?



(A) 38

(B) 40

(C) 43

(D) 46

(E) 52

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 46

Bậc thang ở góc trên phải: đẩy ra ngoài thì lấp đúng góc của hình chữ nhật 12×8 , không làm đổi chu vi.

Rãnh ở cạnh dưới: đáy rãnh (dài bằng chỗ hõ) thay cho đoạn cạnh dưới bị khoét, nhưng hai cạnh bên của rãnh, mỗi cạnh dài 3, là phần **thêm**.

Chu vi = $2(12 + 8) + 2 \cdot 3 = 46$. Đáp án (D).

Bẫy: quên rãnh ra 40; chỉ cộng một cạnh của rãnh ra 43.

Insight · Với hình toàn góc vuông, đừng đi tìm từng cạnh bị giấu: đẩy cạnh ra hình chữ nhật bao, rồi cộng riêng phần rãnh.

Common Trap — Cùng diện tích chưa chắc cùng chu vi

Hình chữ nhật 1×36 và 6×6 cùng diện tích 36 nhưng chu vi là 74 và 24. Ngược lại, cắt bớt một bậc thang ở góc làm **giảm** diện tích nhưng **giữ nguyên** chu vi. Đừng bao giờ suy chu vi từ diện tích (hay ngược lại) mà không có thêm thông tin.

Tip — Ghi đơn vị và đọc kỹ “perimeter / area”

Câu hỏi AMC 8 hay cho số liệu của diện tích rồi hỏi chu vi (hoặc ngược lại). Trước khi khoan, nhìn lại câu hỏi: đơn vị là cm hay cm²? Các đáp án nhiều thường chính là đại lượng kia.

K 11.2 Composite Regions and Area Ratios

Hình ghép, phần tô màu và tỉ số diện tích

Phần lớn câu diện tích ở AMC 8 không hỏi một hình “chuẩn” mà hỏi một miền tô màu kỳ quặc. Ba thao tác giải quyết gần như tất cả: **cộng** các mảnh, **trừ** đi phần thừa (lấy cả hình trừ phần không tô), và **so sánh** các tam giác có chung đường cao.

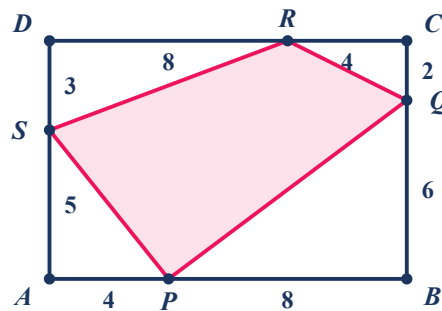
Key Idea — Trừ các góc vuông thay vì tính trực tiếp

Tam giác có ba đỉnh nằm trên các cạnh của một hình chữ nhật thường có cạnh xiên và đường cao rất khó tìm. Nhưng phần còn lại của hình chữ nhật gồm các **tam giác vuông** (và hình thang vuông) ở các góc — diện tích của chúng đọc thẳng từ hình. Diện tích cần tìm = hình chữ nhật — tổng các mảnh ở góc.

Example 11.3

Trừ các mảnh ở góc

Rectangle $ABCD$ has $AB = 12$ and $BC = 8$. Points P, Q, R, S lie on sides $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$, respectively, with $AP = 4, BQ = 6, CR = 4$, and $DS = 3$. What is the area of quadrilateral $PQRS$?



(A) 44

(B) 46

(C) 48

(D) 50

(E) 52

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 46

Lấy hình chữ nhật ($12 \cdot 8 = 96$) trừ bốn tam giác vuông ở bốn góc, mỗi tam giác có hai cạnh góc vuông đọc thẳng trên hai cạnh hình chữ nhật:

- góc A : $AP = 4, AS = 8 - 3 = 5$: diện tích 10;
- góc B : $PB = 8, BQ = 6$: 24;
- góc C : $QC = 2, CR = 4$: 4;
- góc D : $RD = 12 - 4 = 8, DS = 3$: 12.

$S_{PQRS} = 96 - (10 + 24 + 4 + 12) = 46$. Đáp án (B).

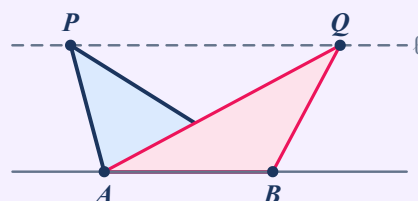
Bấy: lấy luôn $AS = 3$ (quên $AS = 8 - 3 = 5$, nhầm với DS) thì góc A chỉ còn 6 và ra $96 - 46 = 50$ — luôn ghi độ dài cả hai đoạn trên mỗi cạnh lên hình trước khi tính.

Insight · Đỉnh nằm trên cạnh hình chữ nhật → diện tích = cả hình — các tam giác vuông ở góc.

Theorem — Triangles with a common height (chung đường cao)

If two triangles have their bases on the same line and share the opposite vertex (or have their opposite vertices on a line parallel to the bases), they have the same height, so **the ratio of their areas equals the ratio of their bases**. In particular, triangles with the **same base** whose third vertices lie on a line parallel to that base have **equal areas**.

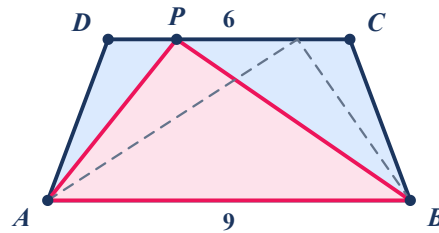
Cả hai đều là $S = \frac{1}{2}bh$ với cùng một h . Hệ quả hay dùng: trung tuyến chia tam giác thành hai nửa bằng nhau; điểm D chia BC theo tỉ số $2 : 3$ thì $S_{ABD} : S_{ADC} = 2 : 3$; và trong hình dưới, $S_{ABP} = S_{ABQ}$ dù hai tam giác trông rất khác nhau.



Example 11.4

Đỉnh trượt trên đường song song

Trapezoid $ABCD$ has $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$, $AB = 9$, $CD = 6$, and area 60. Point P moves along $\overline{CD}$. What is the area of $\triangle ABP$?



- (A) 18 (B) 24 (C) 30 (D) 33 (E) 36

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (E) 36

Gọi h là chiều cao hình thang: $\frac{1}{2}(9 + 6)h = 60$ nên $h = 8$.

Dù P ở đâu trên CD , khoảng cách từ P tới đường AB luôn là $h = 8$ (vì $CD \parallel AB$). Vậy $S_{ABP} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 8 = 36$, không phụ thuộc vị trí P . Đáp án (E).

Cách nhìn khác: $S_{ABP} : S_{\text{trapezoid}} = \frac{9}{9+6}$ nên $S_{ABP} = 60 \cdot \frac{9}{15} = 36$. Bẫy: dùng đáy CD ra 24; lấy một nửa hình thang ra 30.

Insight · Để cho một điểm “chạy” mà vẫn hỏi một con số cố định $\rightarrow$ đáp số không phụ thuộc vị trí; đặt điểm ở chỗ dễ tính nhất (ví dụ $P = D$).

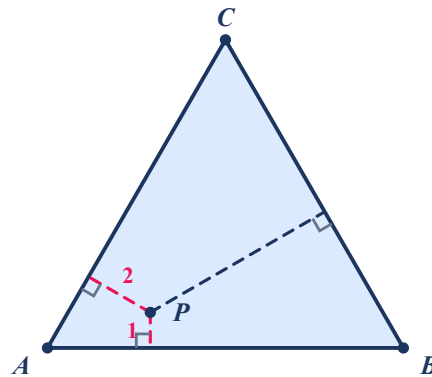
Key Idea — Chia hình từ một điểm bên trong

Nối một điểm P bên trong đa giác với các đỉnh: đa giác tách thành các tam giác có đáy là các cạnh và đường cao là **khoảng cách từ P tới các cạnh**. Với tam giác đều cạnh a , cộng ba diện tích lại: $\frac{1}{2}a(d_1 + d_2 + d_3) = S$, nên **tổng ba khoảng cách luôn bằng chiều cao** của tam giác, dù P ở đâu.

Example 11.5

Tổng khoảng cách trong tam giác đều

Point P lies inside an equilateral triangle with side length 10. The distance from P to one side is 1, and the distance from P to another side is 2. What is the distance from P to the third side?



- (A) 3 (B) $5\sqrt{3} - 3$ (C) 7 (D) $5\sqrt{3}$ (E) $10\sqrt{3} - 3$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) $5\sqrt{3} - 3$

Nối P với ba đỉnh, tam giác đều tách thành ba tam giác cùng đáy 10 với ba đường cao 1, 2, d :

$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot (1 + 2 + d) = S = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 10^2 = 25\sqrt{3}$ (công thức diện tích tam giác đều ở mục 11.4).

Vậy $1 + 2 + d = 5\sqrt{3}$ — chính là chiều cao của tam giác — và $d = 5\sqrt{3} - 3$. Đáp án (B).

Bẫy: quên trừ $1 + 2$ ra $5\sqrt{3}$.

Insight · Có nhiều khoảng cách từ một điểm tới các cạnh $\rightarrow$ nối điểm với các đỉnh, viết tổng diện tích các tam giác con.

Common Trap — Tỷ số đáy chỉ đúng khi cùng đường cao

$S_1 : S_2 = b_1 : b_2$ chỉ đúng khi hai tam giác có **cùng đường cao** (cùng đỉnh đối diện và hai đáy cùng nằm trên một đường thẳng, hoặc hai đỉnh nằm trên đường song song với đáy). Hai tam giác có đáy trên hai đường khác nhau thì phải so cả đáy lẫn cao.

Tip — Nhận dạng trong phòng thi

Thấy “midpoint”, “divides in the ratio”, hay một điểm di động trên cạnh song song → nghĩ ngay tới **chung đường cao**. Thấy tam giác “lơ lửng” bên trong hình chữ nhật → **trừ các góc**. Thấy một điểm bên trong và các khoảng cách → **chia từ điểm đó**.

K 11.3 Area on a Grid: Boxing and Pick's Theorem**Diện tích trên lưới: đóng khung và định lý Pick**

Hình vẽ trên giấy kẻ ô hoặc lưới điểm là “đặc sản” của AMC 8. Các cạnh xiên làm công thức đáy–cao trở nên khó dùng, nhưng lưới cho ta hai công cụ không cần đo một độ dài nào.

Definition — Lattice points (điểm nguyên)

A **lattice point** is a point whose coordinates are both integers — on a dot grid, it is one of the dots. A **lattice polygon** has all its vertices at lattice points.

Mọi khoảng cách ngang/dọc giữa hai điểm nguyên đều là số nguyên, nên các tam giác vuông có cạnh nằm theo lưới luôn có diện tích dễ đọc.

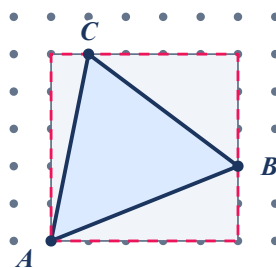
Theorem — Boxing method (đóng khung)

Enclose the polygon in the smallest rectangle with horizontal and vertical sides. The region between the polygon and the rectangle splits into right triangles (and sometimes rectangles) with horizontal and vertical legs. Then $S_{\text{polygon}} = S_{\text{rectangle}} - S_{\text{pieces}}$.

Mỗi cạnh xiên của đa giác là cạnh huyền của một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông dọc thẳng trên lưới. Với hình vuông nghiêng có đỉnh cách nhau theo bước (a, b) : khung là hình vuông $(a + b)^2$, bốn góc là bốn tam giác $\frac{1}{2}ab$, nên diện tích $(a + b)^2 - 2ab = a^2 + b^2$ — một cách nhìn định lý Pythagoras ngay trên lưới.

Example 11.6**Đóng khung một tam giác xiên**

On the dot grid shown, neighboring dots are 1 unit apart. Triangle ABC has its vertices at dots, as shown. What is its area?



- (A) $\frac{23}{2}$ (B) 12 (C) $\frac{25}{2}$ (D) 13 (E) $\frac{27}{2}$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (A) $\frac{23}{2}$

Khung nhỏ nhất là hình vuông 5×5 (diện tích 25). Ba tam giác vuông màu xám ở ngoài:

- dưới-phải: hai cạnh góc vuông 5 và 2, diện tích 5;
- trên-phải: 4 và 3, diện tích 6;
- trái: 1 và 5, diện tích $\frac{5}{2}$.

$$S_{ABC} = 25 - 5 - 6 - \frac{5}{2} = \frac{23}{2}. \text{ Đáp án (A).}$$

Bẫy: nghĩ tam giác chiếm “khoảng một nửa khung” rồi chọn $\frac{25}{2}$.

Insight · Cạnh xiên trên lưới = cạnh huyền của tam giác vuông có cạnh nằm theo lưới. Đóng khung rồi trừ.

Theorem — Pick's Theorem (định lý Pick)

For a lattice polygon (no holes) with I lattice points strictly inside and B lattice points on its boundary (vertices included),

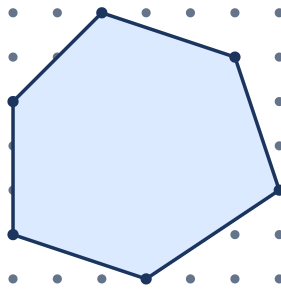
$$S = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Kiểm tra nhanh: ô vuông đơn vị có $I = 0$, $B = 4$: $S = 0 + 2 - 1 = 1$. Tam giác vuông cân có hai cạnh góc vuông 2 (đỉnh $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$): trên biên có 6 điểm $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(2, 0)$, $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 1)$ và không có điểm bên trong, nên $S = 0 + 3 - 1 = 2$ — đúng. Chú ý điểm $(1, 1)$ nằm **giữa cạnh xiên**: trên cạnh đi theo bước (a, b) có $\gcd(a, b) - 1$ điểm nguyên không kể hai đầu — rất dễ bỏ sót.

Example 11.7

Pick cho đa giác nhiều đỉnh

The hexagon shown has its vertices at dots of a grid with spacing 1. What is its area?



(A) 22

(B) $\frac{51}{2}$

(C) $\frac{53}{2}$

(D) 30

(E) 31

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) $\frac{51}{2}$

Đóng khung ở đây phải trừ sáu mảnh; Pick nhanh hơn.

Biên B : sáu đỉnh, cộng các điểm giữa cạnh: cạnh $(3, 0) \rightarrow (6, 2)$ bước $(3, 2)$, $\gcd = 1$: không có; $(6, 2) \rightarrow (5, 5)$ bước $(1, 3)$: không có; $(5, 5) \rightarrow (2, 6)$ bước $(3, 1)$: không có; $(2, 6) \rightarrow (0, 4)$ bước $(2, 2)$, $\gcd = 2$: một điểm $(1, 5)$; $(0, 4) \rightarrow (0, 1)$ dọc dài 3: hai điểm; $(0, 1) \rightarrow (3, 0)$ bước $(3, 1)$: không có. Vậy $B = 6 + 1 + 2 = 9$.

Bên trong I : đếm từng hàng: $y = 1$: $x = 1, 2, 3, 4$ (4 điểm); $y = 2$: $x = 1..5$ (5); $y = 3$: $x = 1..5$ (5); $y = 4$: $x = 1..5$ (5); $y = 5$: $x = 2, 3, 4$ (3). $I = 22$.

$S = 22 + \frac{9}{2} - 1 = \frac{51}{2}$. Đáp án (B).

Bẫy: dùng $I + B - 1 = 30$ hoặc quên trừ 1 ra $\frac{53}{2}$.

Insight · Đa giác lưới có nhiều đỉnh và cạnh xiên → Pick: chỉ cần đếm điểm, nhưng đếm kỹ điểm trên cạnh xiên.

Common Trap — Pick chỉ dùng cho đa giác lưới

Mọi đỉnh phải là điểm nguyên, và hình không có lỗ thủng. Một tam giác có đỉnh ở trung điểm ô vuông thì Pick cho kết quả sai. Lỗi phổ biến nhất khi dùng Pick là bỏ sót điểm nằm giữa một cạnh xiên như bước $(2, 2)$ hay $(4, 6)$.

Tip — Chọn công cụ nào?

Đa giác ít đỉnh, khung gọn → **đóng khung**. Đa giác nhiều đỉnh, hình cong queo → **Pick**. Có thời gian thì làm cả hai để kiểm tra — hai cách độc lập mà ra cùng số thì gần như chắc chắn đúng.

K 11.4 The Pythagorean Theorem

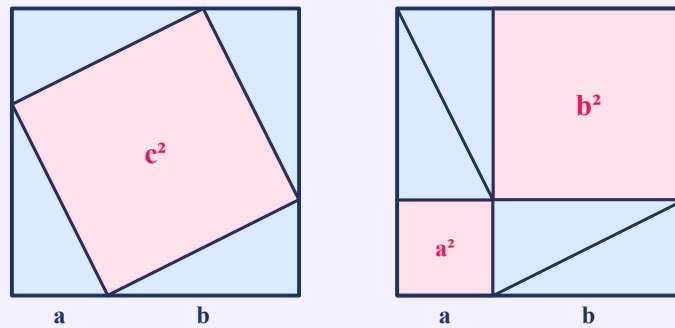
Định lý Pythagoras

Theorem – Pythagorean Theorem (định lý Pythagoras)

In a right triangle with legs a, b and hypotenuse c (the side opposite the right angle),

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Chứng minh bằng hình: trong hình vuông cạnh $a + b$, đặt bốn tam giác vuông giống nhau theo hai cách. Cách 1 (trái): phần trống là hình vuông cạnh c . Cách 2 (phải): phần trống là hai hình vuông a^2 và b^2 . Cùng một hình vuông lớn, cùng bốn tam giác, nên phần trống bằng nhau: $c^2 = a^2 + b^2$.



Theorem – Converse (định lý đảo)

If the side lengths of a triangle satisfy $a^2 + b^2 = c^2$, the triangle has a right angle opposite side c . If $a^2 + b^2 > c^2$ (with c the longest side) the triangle is acute; if $a^2 + b^2 < c^2$ it is obtuse.

Dùng để **nhận ra** góc vuông ẩn: tam giác 9, 12, 15 vuông vì $81 + 144 = 225$. Khi đã thấy góc vuông, diện tích chỉ còn là $\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 = 54$.

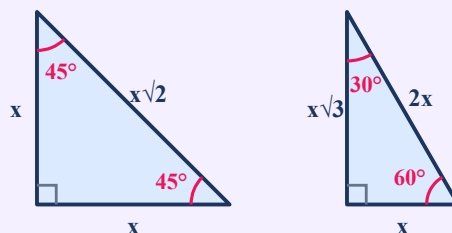
Key Idea – Bộ ba Pythagoras nên thuộc

Bộ ba số nguyên (a, b, c) với $a^2 + b^2 = c^2$: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (7, 24, 25), (20, 21, 29), (9, 40, 41) và **mọi bội** của chúng: (6, 8, 10), (9, 12, 15), (15, 20, 25), (10, 24, 26)... Khi thấy hai cạnh tỉ lệ 3 : 4 hay 5 : 12, cạnh thứ ba hiện ra ngay mà không cần khai căn.

Theorem – Special right triangles (tam giác vuông đặc biệt)

$45^\circ-45^\circ-90^\circ$: sides $x, x, x\sqrt{2}$ (half of a square cut by a diagonal). $30^\circ-60^\circ-90^\circ$: sides $x, x\sqrt{3}, 2x$ (half of an equilateral triangle cut by an altitude). Consequently an equilateral triangle with side s has height $\frac{\sqrt{3}}{2}s$ and area $\frac{\sqrt{3}}{4}s^2$.

Cả hai đều suy ra từ Pythagoras: hình vuông cạnh x có đường chéo $\sqrt{x^2 + x^2} = x\sqrt{2}$; tam giác đều cạnh $2x$ bị đường cao chia đôi đáy thành x , nên đường cao $\sqrt{(2x)^2 - x^2} = x\sqrt{3}$.



Example 11.8

Bộ ba phóng to theo chu vi

The legs of a right triangle are in the ratio 5 : 12, and its perimeter is 90. What is its area?

- (A) 135 (B) 180 (C) 240 (D) 270 (E) 540

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(D)** 270

Hai cạnh góc vuông $5k$ và $12k$ thì cạnh huyền là $13k$ (bộ ba 5, 12, 13 phóng to k lần).

Chu vi $5k + 12k + 13k = 30k = 90$ nên $k = 3$: các cạnh là 15, 36, 39.

Diện tích $\frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 36 = 270$. Đáp án (D).

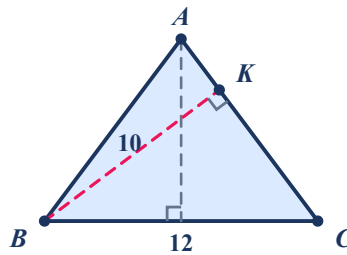
Bẫy: quên $\frac{1}{2}$ ra 540.

Insight · Tỷ số hai cạnh góc vuông là một bộ ba quen $\rightarrow$ viết cả ba cạnh theo k , một phương trình bậc nhất là xong.

Example 11.9

Đường cao xuống cạnh bên

Triangle ABC has $AB = AC = 10$ and $BC = 12$. What is the length of the altitude $\overline{BK}$ from B to $\overline{AC}$?



(A) 6

(B) 8

(C) $\frac{48}{5}$

(D) 10

(E) 12

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(C)** $\frac{48}{5}$

Tam giác cân: đường cao từ A cũng là trung tuyến, chia BC thành hai đoạn 6. Theo Pythagoras, đường cao đó dài $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ (bộ ba 6, 8, 10). Diện tích $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$.

Đổi đáy sang $AC = 10$: $\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot BK = 48$, nên $BK = \frac{48}{5}$. Đáp án (C).

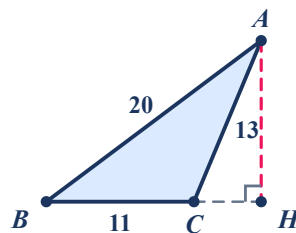
Bẫy: lấy luôn đường cao từ A ra 8.

Insight · Đường cao “khó” trong tam giác cân: tính đường cao “dễ” (xuống đáy) bằng Pythagoras, rồi đổi đáy qua diện tích.

Example 11.10

Khi chân đường cao nằm ngoài

Triangle ABC has $BC = 11$, $CA = 13$, and $AB = 20$. What is the area of $\triangle ABC$?



(A) 60

(B) 66

(C) 78

(D) 110

(E) 132

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(B)** 66

$20^2 = 400 > 11^2 + 13^2 = 290$ nên góc C tù: hạ đường cao AH xuống **đường thẳng** BC , chân H nằm ngoài đoạn BC , về phía C . Đặt $CH = x$, $AH = h$.

Hai tam giác vuông: $x^2 + h^2 = 13^2$ và $(11 + x)^2 + h^2 = 20^2$. Trừ vế: $121 + 22x = 231$, nên $x = 5$ và $h = 12$.

$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 12 = 66$. Đáp án (B).

Bẫy: cho rằng H nằm giữa B và C thì $(11 - x)^2 + h^2 = 400$ dẫn tới $x < 0$ — dấu hiệu đã đặt sai phía.

Insight • Đặt ẩn cho đoạn chưa biết trên đáy, viết hai phương trình Pythagoras rồi **trừ vế** để khử h^2 .

Common Trap — Cạnh huyền là cạnh dài nhất — và là cạnh đối diện góc vuông

Với tam giác vuông có hai cạnh 6 và 8, cạnh thứ ba là 10 **chỉ khi** 6, 8 là hai cạnh góc vuông; nếu 8 là cạnh huyền thì cạnh còn lại là $\sqrt{64 - 36} = 2\sqrt{7}$. Để không nói rõ thì phải xét cả hai. Và nhớ: $a^2 + b^2 = c^2$ không có nghĩa $a + b = c$.

Tip — Nhìn ra tam giác vuông ẩn

Đường chéo hình chữ nhật, đường cao tam giác cân, khoảng cách giữa hai điểm trên lưới, bán kính... đều là cạnh huyền chờ sẵn. Khi bị kẹt, hãy **hạ một đường vuông góc**: nó tạo ra tam giác vuông và thường cũng cho luôn đường cao để tính diện tích.

K 11.5 Pythagoras Inside Figures; Scaling

Pythagoras trong hình ghép; phóng to – thu nhỏ

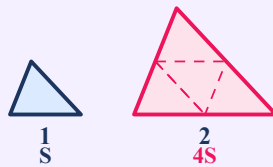
Key Idea — Đặt ẩn, hạ vuông góc, viết hai phương trình

Câu khó thường giấu tam giác vuông trong một hình ghép. Quy trình: (1) hạ đường vuông góc để tạo tam giác vuông; (2) đặt ẩn x cho đoạn chưa biết; (3) viết Pythagoras cho **hai** tam giác vuông chung một cạnh; (4) trừ vế để mất x^2 hoặc h^2 — phương trình còn lại là bậc nhất. Ví dụ tam giác tù ở mục 11.4 chính là quy trình này.

Theorem — Scaling (phóng to – thu nhỏ)

If every length of a figure is multiplied by k , its perimeter is multiplied by k and its area by k^2 . In particular, a line parallel to one side of a triangle cuts off a smaller triangle similar to it: if the small triangle's height is t times the big one's, its area is t^2 times the big one's area.

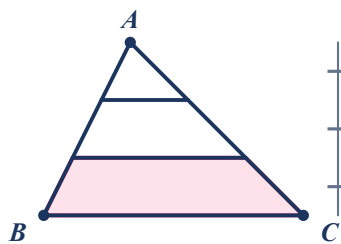
Diện tích là “dài $\times$ rộng”, nên mỗi chiều nhân k thì diện tích nhân $k \cdot k$. Hình dưới: phóng tam giác lên 2 lần thì vừa đúng 4 bản sao của tam giác cũ.



Example 11.11

Dải song song trong tam giác

Triangle ABC has area 72. Two lines parallel to $\overline{BC}$ divide the altitude from A into three equal parts, as shown. What is the area of the shaded strip next to $\overline{BC}$?



(A) 24

(B) 32

(C) 36

(D) 40

(E) 48

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (D) 40

Hai đường song song cắt ra hai tam giác nhỏ đồng dạng với ABC , chung đỉnh A , có chiều cao bằng $\frac{1}{3}$ và $\frac{2}{3}$ chiều cao của ABC . Diện tích của chúng: $72 \cdot \frac{1}{9} = 8$ và $72 \cdot \frac{4}{9} = 32$.

Dải tô màu là phần của ABC nằm ngoài tam giác thứ hai: $72 - 32 = 40$. Đáp án (D).

Ba dải từ trên xuống có diện tích 8, 24, 40, tỉ lệ 1 : 3 : 5 (hiệu của 1, 4, 9). Bấy: tưởng ba dải cao bằng nhau thì diện tích bằng nhau, ra 24; lấy $\frac{2}{3}$ diện tích ra 48.

Insight · Phần nằm giữa hai đường song song = hiệu của hai tam giác đồng dạng; diện tích theo **bình phương** tỉ số chiều cao.

Common Trap — Tỉ số diện tích chỉ là bình phương khi hai hình đồng dạng

Kéo dài một hình chữ nhật thêm 2 lần theo chiều dài (giữ chiều rộng) thì diện tích chỉ gấp 2, không phải 4. Quy tắc k^2 chỉ áp dụng khi **mọi** độ dài cùng nhân k — tức hai hình đồng dạng.

Tip — Nhận dạng nhanh

“parallel to a side” trong tam giác → tam giác nhỏ đồng dạng, dùng bình phương tỉ số. “enlarged / scale drawing / map” → k cho độ dài, k^2 cho diện tích. “The figure is not drawn to scale” → đừng đo, hãy tính.

E Worked Examples — Competition Level

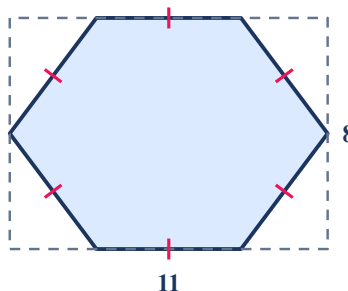
Ví dụ mẫu mức thi đấu

Hai ví dụ cuối ở mức câu 20–25 của AMC 8: dữ kiện không đủ để tìm từng độ dài một cách trực tiếp, nên phải đặt ẩn và dùng đúng một mối quan hệ then chốt. Hãy tự thử ít nhất 10 phút trước khi đọc lời giải.

Example 11.12

Lục giác đều cạnh trong hình chữ nhật

A triangle is cut off at each of the four corners of an 11×8 rectangle, leaving the hexagon shown, whose six sides all have the same length. Two vertices of the hexagon are the midpoints of the two sides of length 8. What is the area of the hexagon?



(A) 52

(B) 56

(C) 58

(D) 60

(E) 64

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (E) 64

Bốn tam giác bị cắt là tam giác vuông bằng nhau: cạnh góc vuông đứng là 4 (từ góc tới trung điểm cạnh 8), cạnh góc vuông nằm ngang đặt là p . Cạnh xiên của lục giác dài $\sqrt{p^2 + 16}$; cạnh trên (và dưới) dài $11 - 2p$.

Sáu cạnh bằng nhau: $(11 - 2p)^2 = p^2 + 16$, tức $121 - 44p + 4p^2 = p^2 + 16$, hay $3p^2 - 44p + 105 = 0$. Phân tích: $(p - 3)(3p - 35) = 0$. Nghiệm $p = \frac{35}{3}$ bị loại vì $2p$ phải nhỏ hơn 11. Vậy $p = 3$ và mỗi cạnh dài 5 (bộ ba 3, 4, 5!).

Diện tích = $11 \cdot 8 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 88 - 24 = 64$. Đáp án (E).

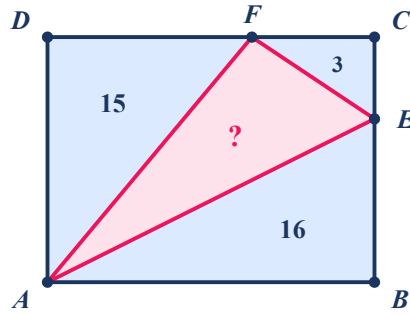
Bấy: tưởng bốn góc là tam giác vuông cân (cắt 4 mỗi chiều) ra $88 - 32 = 56$.

Insight · Đặt **một** ẩn cho phần chưa biết, biểu diễn mọi cạnh theo ẩn đó, rồi dùng điều kiện “bằng nhau” → phương trình; thử nghiệm với bộ ba quen.

Example 11.13

Ba tam giác biết diện tích, hình chữ nhật thì không

In rectangle $ABCD$, point E lies on $\overline{BC}$ and point F lies on $\overline{CD}$. The areas of $\triangle ABE$, $\triangle ECF$, and $\triangle FDA$ are 16, 3, and 15, respectively. What is the area of $\triangle AEF$?



- (A) 14 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 24

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (A) 14

Chỉ cần diện tích S của hình chữ nhật: $S_{AEF} = S - 16 - 3 - 15 = S - 34$. Đặt $AB = a$, $AD = b$ ($S = ab$).

Từ $\frac{1}{2}a \cdot BE = 16$: $BE = \frac{32}{a}$, nên $EC = b - \frac{32}{a} = \frac{S-32}{a}$. Từ $\frac{1}{2}b \cdot DF = 15$: $DF = \frac{30}{b}$, nên $CF = a - \frac{30}{b} = \frac{S-30}{b}$.

Tam giác ECF : $\frac{1}{2} \cdot \frac{S-32}{a} \cdot \frac{S-30}{b} = 3$, tức $(S-32)(S-30) = 6S$, hay $S^2 - 68S + 960 = 0$, $(S-20)(S-48) = 0$.

$S = 20$ bị loại (phải có $S > 32$ để $EC > 0$). Vậy $S = 48$ và $S_{AEF} = 48 - 34 = 14$. Đáp án (A).

Ví dụ một hình cụ thể: $a = 8$, $b = 6$, $BE = 4$, $CF = 3$.

Insight · Đừng cố tìm từng cạnh: đặt ẩn là **đại lượng cần dùng** ($S = ab$); các tích $a \cdot b$ tự xuất hiện khi nhân các đoạn với nhau.

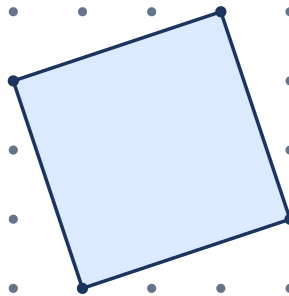
1

Exercises 1 · Foundation

Bài tập 1 · Nền tảng



- 11.1** On the dot grid shown, neighboring dots are 1 unit apart. What is the area of the shaded square?

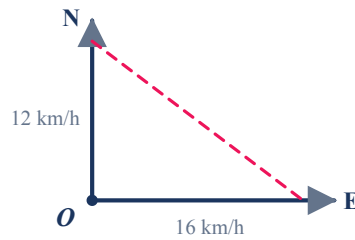


- (A) 9 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 16

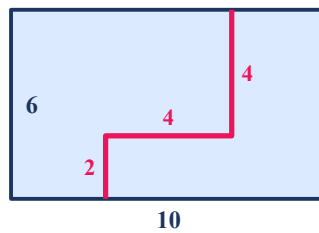
- 11.2** Which of the following could be the side lengths of a right triangle?

- (A) 5, 11, 12 (B) 9, 39, 40 (C) 12, 34, 36 (D) 13, 84, 86 (E) 11, 60, 61

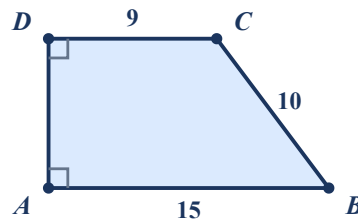
- 11.3** Two cyclists leave the same point at the same time. One rides due north at 12 km per hour and the other rides due east at 16 km per hour. After how many hours will they be 50 km apart?



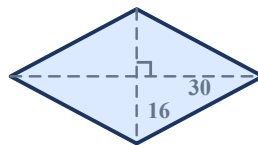
- (A) $\frac{25}{14}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) 3 (D) $\frac{7}{2}$ (E) 4
- 11.4** A 10×6 rectangle is cut into two pieces along the path shown, which goes up 2, then right 4, then up 4. What is the sum of the perimeters of the two pieces?



- (A) 32 (B) 42 (C) 48 (D) 52 (E) 64
- 11.5** In trapezoid $ABCD$, $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ and $\angle A = \angle D = 90^\circ$. Also $AB = 15$, $CD = 9$, and $BC = 10$. What is the area of the trapezoid?

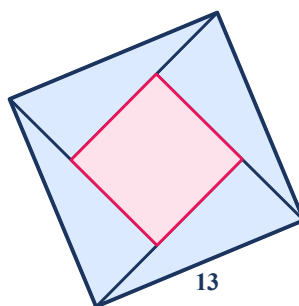


- (A) 80 (B) 96 (C) 100 (D) 120 (E) 150
- 11.6** The diagonals of a rhombus have lengths 16 and 30. What is the perimeter of the rhombus?



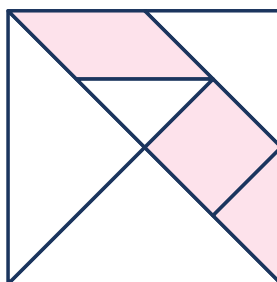
- (A) 46 (B) 60 (C) 68 (D) 76 (E) 136

- 11.7** Four congruent right triangles with legs 5 and 12 are placed inside a square so that the hypotenuse of each triangle is a side of the square, as shown. The triangles do not overlap. What is the area of the small square in the middle that is not covered?



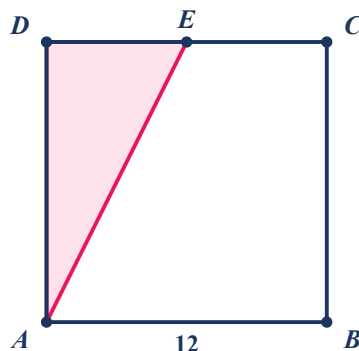
- (A) 36 (B) 49 (C) 60 (D) 64 (E) 120

- 11.8** The figure shows a square with area 64 cut into seven pieces: two large triangles, one medium triangle, two small triangles, one square, and one parallelogram. What is the total area of the three shaded pieces?



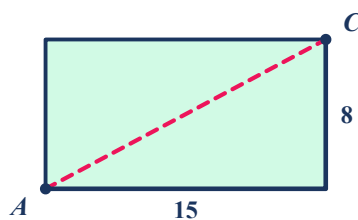
- (A) 20 (B) 22 (C) 24 (D) 28 (E) 32

- 11.9** Square $ABCD$ has side length 12. Point E lies on $\overline{CD}$, and segment $\overline{AE}$ divides the square into a triangle and a trapezoid. The area of the trapezoid is 3 times the area of the triangle. What is the length of $\overline{AE}$?



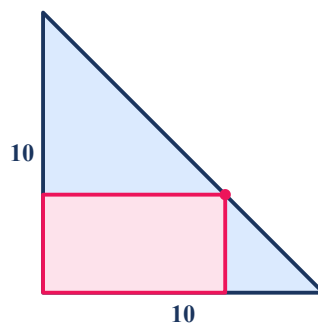
- (A) $6\sqrt{3}$ (B) 12 (C) $6\sqrt{5}$ (D) $4\sqrt{13}$ (E) $12\sqrt{2}$

- 11.10** A rectangular garden is 15 m long and 8 m wide. Lan walks from corner A to the opposite corner C along two sides of the garden, and Minh walks straight along the diagonal. How many meters shorter is Minh's walk?



- (A) 6 (B) 7 (C) 17 (D) 23 (E) 40

- 11.11** ♦♦ A right triangle has two legs of length 10. A rectangle is drawn inside the triangle so that one vertex of the rectangle is at the right angle, two of its sides lie along the legs, and the opposite vertex lies on the hypotenuse, as shown. The size of the rectangle is not given. What is the perimeter of the rectangle?



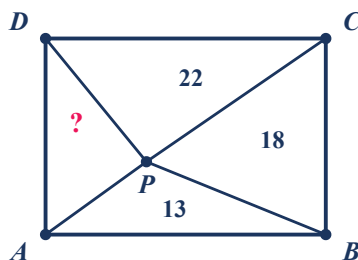
- (A) 10 (B) 14 (C) $10\sqrt{2}$ (D) 20 (E) 25
- 11.12** ♦♦ Each side of a rectangle is increased by 4. As a result, the area of the rectangle increases by 96. What was the perimeter of the original rectangle?
- (A) 16 (B) 20 (C) 24 (D) 36 (E) 40

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi



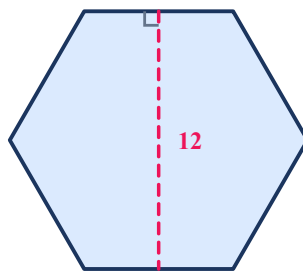
- 11.13** ♦♦ A polygon is drawn along the lines of a grid of unit squares, so that each of its sides is horizontal or vertical. Its perimeter is 20. What is the greatest possible area of the polygon?
- (A) 20 (B) 24 (C) 25 (D) 30 (E) 100
- 11.14** ♦♦ The side lengths of a right triangle are x , $x + 7$, and $x + 8$. What is the area of the triangle?
- (A) 30 (B) 60 (C) 65 (D) 78 (E) 156
- 11.15** ♦♦ Point P lies inside rectangle $ABCD$. The areas of $\triangle PAB$, $\triangle PBC$, and $\triangle PCD$ are 13, 18, and 22, respectively. What is the area of $\triangle PDA$?



- (A) 9 (B) 11 (C) 13 (D) 15 (E) 17
- 11.16** ♦♦ A triangle has its three vertices at lattice points. There are no other lattice points on its sides, and there are exactly 7 lattice points inside it. What is the area of the triangle?
- (A) 7 (B) $\frac{15}{2}$ (C) 8 (D) $\frac{17}{2}$ (E) 10

- 11.17** The distance between two opposite sides of a regular hexagon is 12. What is the area of the hexagon?

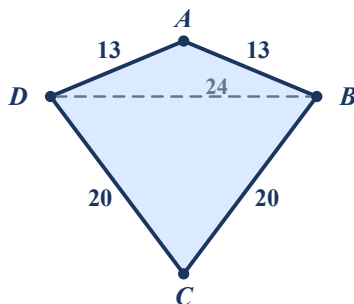
♦♦



- (A) 72 (B) $48\sqrt{3}$ (C) $54\sqrt{3}$ (D) $72\sqrt{3}$ (E) 144

- 11.18** Quadrilateral $ABCD$ has $AB = AD = 13$, $CB = CD = 20$, and diagonal $BD = 24$. The quadrilateral is not necessarily convex; one possible shape is shown. What is the sum of all possible areas of $ABCD$?

♦♦♦



- (A) 132 (B) 252 (C) 264 (D) 384 (E) 504

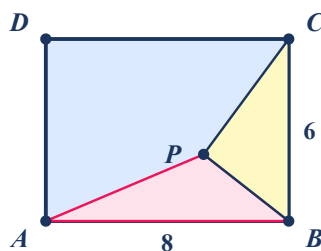
- 11.19** A rectangle has area 120, and its side lengths and the length of its diagonal are all whole numbers. What is the perimeter of the rectangle?

♦♦♦

- (A) 17 (B) 23 (C) 34 (D) 44 (E) 46

- 11.20** A point P is chosen at random inside rectangle $ABCD$ with $AB = 8$ and $BC = 6$. What is the probability that the area of $\triangle PAB$ is less than 12 and the area of $\triangle PBC$ is less than 18?

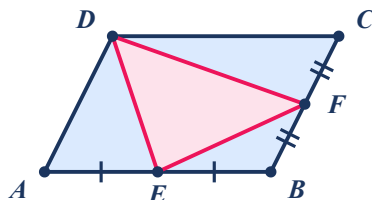
♦♦♦



- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$ (E) $\frac{3}{4}$

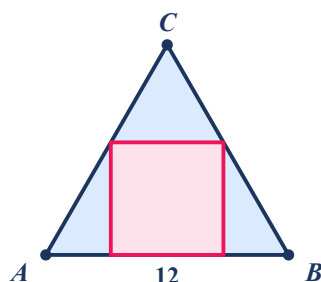
- 11.21** Parallelogram $ABCD$ has area 48. Point E is the midpoint of $\overline{AB}$ and point F is the midpoint of $\overline{BC}$. What is the area of $\triangle DEF$?

♦♦♦



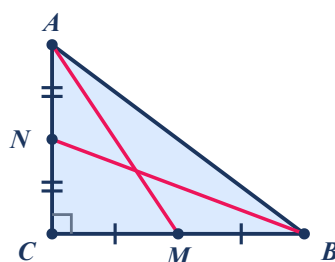
- (A) 12 (B) 16 (C) 18 (D) 20 (E) 24

- 11.22** A square is drawn inside an equilateral triangle with side length 12 so that one side of the square lies on a side of the triangle and the other two vertices of the square lie on the other two sides. What is the side length of the square?



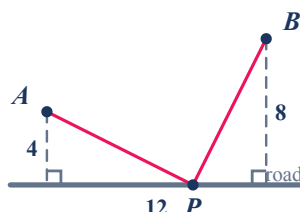
- (A) $24\sqrt{3} - 36$ (B) 6 (C) $4\sqrt{3}$ (D) $12\sqrt{3} - 12$ (E) $6\sqrt{3}$

- 11.23** In right triangle ABC , $\angle C = 90^\circ$. Point M is the midpoint of $\overline{BC}$ and point N is the midpoint of $\overline{AC}$. If $AM = 2\sqrt{13}$ and $BN = \sqrt{73}$, what is AB ?



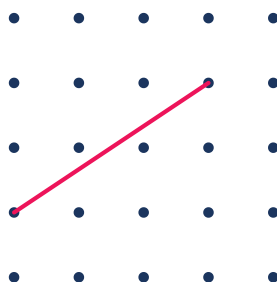
- (A) $\sqrt{73}$ (B) 9 (C) 10 (D) $5\sqrt{5}$ (E) 12

- 11.24** Houses A and B are on the same side of a straight road, 4 m and 8 m from the road, respectively. The points of the road nearest to A and to B are 12 m apart. A bus stop P on the road is the same distance from A as from B . What is that distance, in meters?



- (A) 8 (B) $4\sqrt{5}$ (C) $4\sqrt{6}$ (D) 10 (E) $4\sqrt{10}$

- 11.25** The figure shows a 5×5 array of 25 dots, with neighboring dots 1 unit apart. Consider all segments whose endpoints are two of the dots; one is shown. How many different lengths do these segments have?



Integer answer · Đáp số nguyên

- 11.26** How many rectangles with whole-number side lengths have perimeter 30 and a diagonal shorter than 12? (Rectangles with the same two side lengths count only once.)

Integer answer · Đáp số nguyên

3

Exercises 3 • Challenge

Bài tập 3 • Thử thách



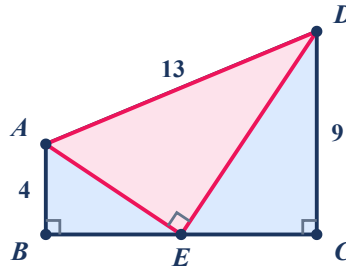
11.27 A triangle has side lengths $\sqrt{17}$, $\sqrt{29}$, and $2\sqrt{10}$. What is its area?

♦♦♦

- (A) 11 (B) $\frac{23}{2}$ (C) 12 (D) 13 (E) 14

11.28 Quadrilateral $ABCD$ has $\angle B = \angle C = 90^\circ$, $AB = 4$, $CD = 9$, and $AD = 13$, with A and D on the same side of line BC . Point E lies on $\overline{BC}$ so that $\angle AED = 90^\circ$. What is the area of $\triangle AED$?

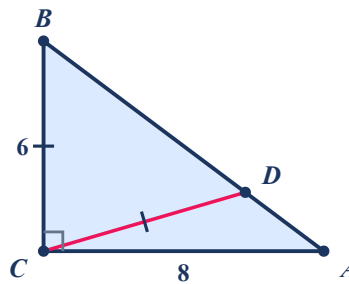
♦♦♦



- (A) 30 (B) 36 (C) 39 (D) 42 (E) 78

11.29 In $\triangle ABC$, $\angle C = 90^\circ$, $AC = 8$, and $BC = 6$. Point D lies on $\overline{AB}$ so that $CD = CB$. What is AD ?

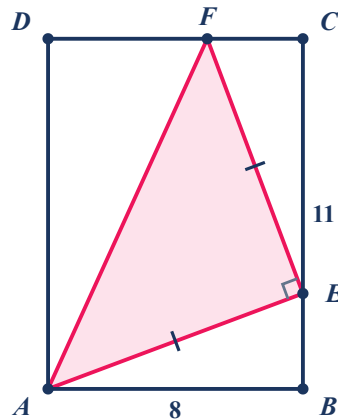
♦♦♦



- (A) 2 (B) $\frac{12}{5}$ (C) $\frac{13}{5}$ (D) $\frac{14}{5}$ (E) $\frac{32}{5}$

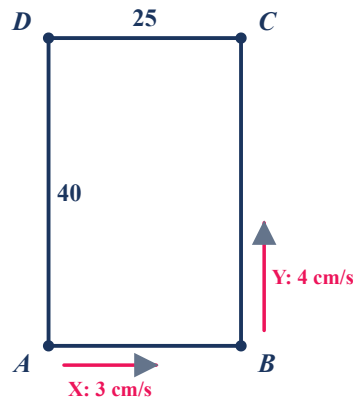
11.30 Rectangle $ABCD$ has $AB = 8$ and $BC = 11$. Point E lies on $\overline{BC}$ and point F lies on $\overline{CD}$ so that $AE = EF$ and $\angle AEF = 90^\circ$. What is the area of $\triangle AEF$?

♦♦♦



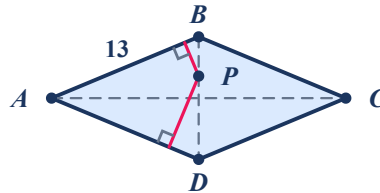
- (A) 30 (B) 32 (C) 33 (D) 35 (E) $\frac{73}{2}$

- 11.31** ♦♦♦ Rectangle $ABCD$ has $AB = 25$ cm and $BC = 40$ cm. At the same moment, ant X starts at A and walks toward B along $\overline{AB}$ at 3 cm per second, and ant Y starts at B and walks toward C along $\overline{BC}$ at 4 cm per second. What is the smallest distance, in cm, between the two ants before X reaches B ?



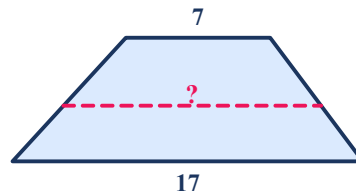
- (A) 15 (B) 20 (C) 21 (D) 24 (E) 25

- 11.32** ♦♦♦ Rhombus $ABCD$ has side length 13 and diagonal $AC = 24$. Point P moves along diagonal $\overline{BD}$. What is the sum of the distances from P to line AB and to line AD ?



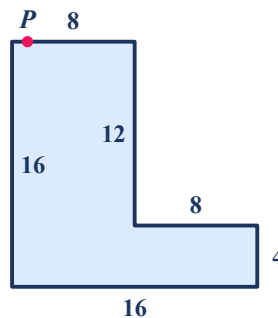
- (A) $\frac{60}{13}$ (B) 5 (C) $\frac{120}{13}$ (D) 10 (E) 12

- 11.33** ♦♦♦ A trapezoid has parallel sides of lengths 7 and 17. A segment parallel to these sides, with its endpoints on the other two sides, divides the trapezoid into two regions of equal area. What is the length of this segment?



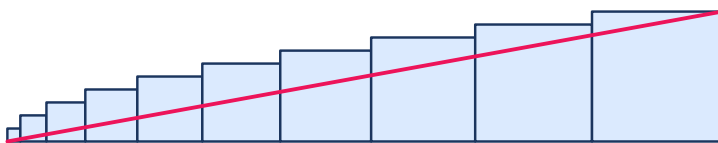
- (A) $\sqrt{119}$ (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15

- 11.34** ♦♦♦ The L-shaped region shown has all angles right angles. Its side lengths are 16, 4, 8, 12, 8, and 16, as marked. Point P lies on the top side, 1 unit from the upper left corner. A straight line through P divides the region into two parts of equal area and meets the bottom side at Q . How far is Q from the lower left corner?



Integer answer · Đáp số nguyên

- 11.35** ♦♦♦♦♦ Ten squares with side lengths $1, 2, 3, \dots, 10$ are placed side by side, in that order from left to right, with their bottom sides on a line, as shown. A segment joins the lower left corner of the smallest square to the upper right corner of the largest square. What is the total area of the parts of the squares that lie above the segment?



Integer answer · Đáp số nguyên

- 11.36** ♦♦♦♦♦ Two of the three altitudes of a triangle have lengths 12 and 15. The length of the third altitude is an integer. How many values are possible for the length of the third altitude?

Integer answer · Đáp số nguyên

Chapter 12

8020 AMC 8 Mastery

Circles, Coordinates & 3D Solids

Đường tròn, tọa độ & hình không gian

Đường tròn, hệ tọa độ và hình không gian chiếm khoảng một phần ba số câu hình học của AMC 8: bánh xe lăn, vùng tô màu ghép từ cung tròn, điểm trên lưới, đổ nước từ bình này sang bình kia, hình chiếu của khối lập phương. Chương này trang bị công thức chu vi – diện tích – thể tích cùng ba “nguồn” góc vuông trong đường tròn, rồi luyện cách đưa bài không gian về mặt phẳng. Lỗi hay gặp nhất: nhầm bán kính với đường kính, quên $\frac{1}{3}$ của hình nón, và coi diện tích “cộng thẳng” như độ dài.

✓ Tính chu vi, diện tích, độ dài cung, diện tích hình quạt; xử lý vùng ghép từ các cung tròn.

✓ Tính khoảng cách, trung điểm, hệ số góc, giao điểm và diện tích trên mặt phẳng tọa độ; làm quen khoảng cách đường phố.

✓ Áp dụng công thức hình trụ, nón, chóp, cầu cho các bài đổ nước, đúc lại, quay hình phẳng quanh trục.

✓ Dùng định lý dây cung, tiếp tuyến và góc chắn nửa đường tròn để dựng tam giác vuông có cạnh là bán kính.

✓ Tính thể tích, diện tích toàn phần, đường chéo của hộp chữ nhật; đọc hình khai triển và hình chiếu.

radius / diameter · bán kính / đường kính

circumference · chu vi đường tròn

chord · dây cung

arc / sector · cung / hình quạt

central angle · góc ở tâm

tangent · tiếp tuyến

midpoint · trung điểm

slope · hệ số góc

intercept · giao điểm với trục

rectangular box · hộp chữ nhật

space diagonal · đường chéo không gian

net · hình khai triển

cylinder / cone / sphere · hình trụ / nón / cầu

cross-section · mặt cắt

K 12.1 Circumference, Area, Arcs and Sectors

Chu vi, diện tích, cung và hình quạt

Đường tròn xuất hiện trong gần như mọi đề AMC 8: bánh xe lăn, đồng hồ, sân chạy, miếng bánh pizza, vùng tô màu ghép từ cung tròn. Công thức thì ai cũng thuộc; điểm bị mất nằm ở chỗ **nhầm bán kính với đường kính**, quên cộng hai bán kính khi tính chu vi hình quạt, hoặc tưởng diện tích cũng “cộng thẳng” như độ dài. Chương này cũng mở rộng sang mặt phẳng tọa độ và các khối không gian — nơi đường tròn lại xuất hiện ở hình trụ, hình nón, hình cầu.

Definition – Circle vocabulary (các phần của đường tròn)

A **circle** is the set of points at distance r (the **radius**) from a point O (the **center**). A **chord** joins two points of the circle; a chord through O is a **diameter**, of length $d = 2r$. An **arc** is a piece of the circle; a **sector** is the region bounded by two radii and an arc; the angle between the two radii is the **central angle**.

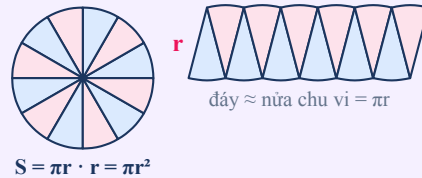
Hình quạt (sector) là “miếng pizza”: hai bán kính và một cung. Dây cung (chord) là đoạn thẳng; cung (arc) là phần cong.



Theorem – Circumference and area (chu vi và diện tích hình tròn)

A circle of radius r has circumference $C = 2\pi r = \pi d$ and encloses area $A = \pi r^2$.

Vì sao $A = \pi r^2$? Cắt hình tròn thành rất nhiều hình quạt nhỏ rồi xếp xen kẽ (hình dưới): được một hình gần như hình bình hành có đáy bằng **nửa chu vi** πr và chiều cao r , nên diện tích là $\pi r \cdot r = \pi r^2$. Hệ quả hay dùng: $A = \frac{C \cdot r}{2}$ — giống công thức “đáy nhân cao chia hai” của tam giác.

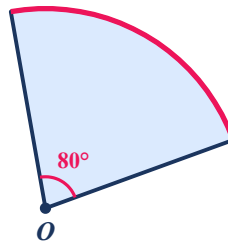
**Theorem – Arcs and sectors (độ dài cung, diện tích hình quạt)**

In a circle of radius r , an arc with central angle θ° has length $\frac{\theta}{360} \cdot 2\pi r$, and the sector has area $\frac{\theta}{360} \cdot \pi r^2 = \frac{1}{2} \cdot (\text{arc length}) \cdot r$.

Cung và hình quạt chỉ là **một phần** của cả đường tròn, đúng bằng tỉ lệ $\frac{\theta}{360}$. Chu vi (perimeter) của hình quạt = độ dài cung **cộng hai bán kính**.

Example 12.1**Từ diện tích hình quạt suy ra bán kính**

A sector of a circle has a central angle of 80° and an area of 18π . What is the perimeter of the sector?



- (A) 4π (B) $9 + 4\pi$ (C) $18 + 2\pi$ (D) $18 + 4\pi$ (E) $18 + 8\pi$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) $18 + 4\pi$

Diện tích hình quạt: $\frac{80}{360} \pi r^2 = \frac{2}{9} \pi r^2 = 18\pi$, nên $r^2 = 81$, $r = 9$.

Độ dài cung: $\frac{80}{360} \cdot 2\pi \cdot 9 = 4\pi$. Chu vi hình quạt gồm cung và **hai** bán kính: $4\pi + 9 + 9 = 18 + 4\pi$. Đáp án (D).

Bẫy: chỉ cộng một bán kính ra $9 + 4\pi$; quên hai bán kính ra 4π ; lấy 18 làm bán kính khi tính cung ra $18 + 8\pi$; dùng πr thay cho $2\pi r$ ra $18 + 2\pi$.

Insight · Bài hình quạt luôn đi qua **bán kính**: tìm r trước, rồi mọi đại lượng khác chỉ là “phần số $\frac{\theta}{360}$ của cả hình tròn”.

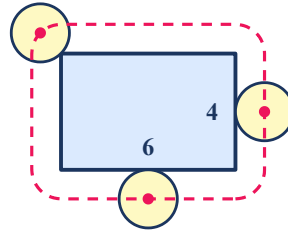
Common Trap – Bán kính hay đường kính? Diện tích không “cộng thẳng”

(1) Để cho **đường kính** (pizza 12 inch, ống đường kính 2...) mà thế thẳng vào πr^2 là sai gấp 4 lần. (2) Gấp đôi bán kính thì chu vi gấp đôi nhưng **diện tích gấp bốn**. (3) Độ dài các cung cộng được theo đường kính (ba nửa đường tròn đường kính 4 dài bằng một nửa đường tròn đường kính 12), nhưng diện tích thì không — xem Ví dụ 12.3.

Example 12.2

Đường đi của tâm đồng xu

A coin of radius 1 rolls around the outside of a 6×4 rectangle, always touching the rectangle, until it returns to its starting position. What is the length of the path traced by the center of the coin?



- (A) 20 (B) $20 + \pi$ (C) $20 + 2\pi$ (D) 28 (E) $20 + 4\pi$

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) $20 + 2\pi$

Tâm đồng xu luôn cách hình chữ nhật đúng 1 đơn vị. Dọc theo mỗi cạnh, tâm đi một đoạn thẳng **song song và dài bằng** cạnh đó: tổng $6 + 4 + 6 + 4 = 20$.

Ở mỗi góc, đồng xu “xoay quanh” đỉnh: tâm vẽ một cung tròn tâm là đỉnh, bán kính 1, góc 90° (hình). Bốn cung góc 90° ghép lại thành **một đường tròn trọn vẹn** bán kính 1, dài 2π .

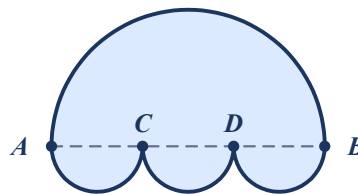
Tổng: $20 + 2\pi$. Đáp án (C). Bấy: tưởng đường đi của tâm là hình chữ nhật 8×6 (góc vuông) ra 28; bỏ qua các góc ra 20.

Insight · Đường cách đều một đa giác lõi một khoảng r = chu vi đa giác + chu vi một đường tròn bán kính r (các góc ngoài cộng lại đủ 360°).

Example 12.3

Độ dài cộng được, diện tích thì không

Segment $\overline{AB}$ has length 12, and points C and D divide it into three segments of length 4. A semicircle with diameter $\overline{AB}$ is drawn above $\overline{AB}$, and semicircles with diameters $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, and $\overline{DB}$ are drawn below $\overline{AB}$, as shown. What is the area of the region bounded by the four semicircles?



- (A) 12π (B) 18π (C) 24π (D) 36π (E) 42π

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 24π

Vùng gồm hai phần không chồng nhau: nửa hình tròn lớn phía trên (bán kính 6) và ba nửa hình tròn nhỏ phía dưới (bán kính 2).

Diện tích: $\frac{1}{2}\pi \cdot 6^2 + 3 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 18\pi + 6\pi = 24\pi$. Đáp án (C).

So sánh: **độ dài** ba cung nhỏ là $3 \cdot 2\pi = 6\pi$, đúng bằng cung lớn 6π (độ dài cung tỉ lệ với đường kính, mà ba đường kính nhỏ cộng lại bằng đường kính lớn). Nhưng **diện tích** tỉ lệ với bình phương: ba nửa hình tròn nhỏ chỉ có 6π , bằng $\frac{1}{3}$ nửa hình tròn lớn. Ai “cộng thẳng” như độ dài sẽ ra $18\pi + 18\pi = 36\pi$; ai trừ thay vì cộng ra 12π ; dùng 4 làm bán kính nhỏ ra 42π .

Insight · Chu vi tỉ lệ với kích thước, diện tích tỉ lệ với **bình phương** kích thước — chia nhỏ đường kính giữ nguyên tổng độ dài cung nhưng làm diện tích giảm mạnh.

Tip – Giữ π đến cuối; “closest to” mới thay số

Đáp án AMC thường viết dưới dạng $a + b\pi$. Giữ π như một chữ cái suốt bài, cộng các hệ số của π với nhau. Chỉ khi đề hỏi “which is closest to” mới thay $\pi \approx 3,14$ (hoặc $\frac{22}{7}$). Để so sánh nhanh các lựa chọn: $\pi \approx 3,14$, $2\pi \approx 6,28$, $4\pi \approx 12,57$.

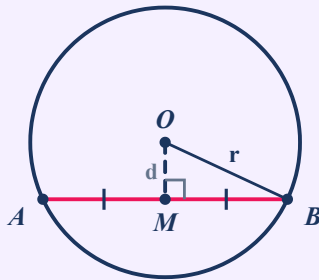
K 12.2 Chords, Tangents and Right Angles in Circles**Dây cung, tiếp tuyến và góc vuông trong đường tròn**

Ở AMC 8, hình học đường tròn gần như luôn quy về **một tam giác vuông** có một cạnh là bán kính. Ba “nguồn” góc vuông dưới đây là chìa khóa — hãy thấy dây cung, tiếp tuyến hay đường kính, hãy tìm ngay góc vuông tương ứng rồi dùng Pythagoras (Chương 11).

Theorem – Chord theorem (đường vuông góc từ tâm xuống dây)

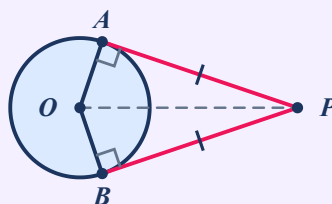
The perpendicular from the center O to a chord $\overline{AB}$ meets the chord at its midpoint M . If the radius is r and $OM = d$, then $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 + d^2 = r^2$.

Lý do: $OA = OB = r$ nên tam giác OAB cân tại O ; đường cao từ đỉnh cân cũng là trung tuyến. Một dây dài 2ℓ cách tâm d thì $\ell^2 + d^2 = r^2$ — dây càng gần tâm càng dài.

**Theorem – Tangents (tiếp tuyến)**

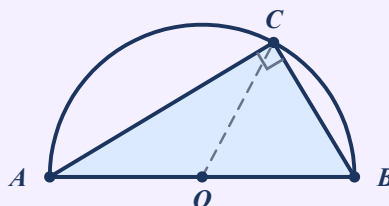
A tangent line touches the circle at exactly one point A , and it is perpendicular to the radius $\overline{OA}$. The two tangent segments from an outside point P are equal: $PA = PB$.

Hai tam giác vuông OAP và OBP có chung cạnh huyền OP và $OA = OB$ nên bằng nhau, suy ra $PA = PB$. Hai đường tròn tiếp xúc nhau: khoảng cách hai tâm bằng **tổng** hai bán kính (tiếp xúc ngoài) hoặc **hiệu** (tiếp xúc trong).

**Theorem – Angle in a semicircle (góc chắn nửa đường tròn)**

If $\overline{AB}$ is a diameter and C is any other point on the circle, then $\angle ACB = 90^\circ$. Conversely, the hypotenuse of a right triangle is a diameter of the circle through its three vertices.

Nối O (trung điểm AB) với C : $OA = OB = OC$ nên hai tam giác OAC , OBC cân. Gọi hai góc đáy là x và y : tổng ba góc của $\triangle ABC$ là $2x + 2y = 180^\circ$, nên $\angle ACB = x + y = 90^\circ$.

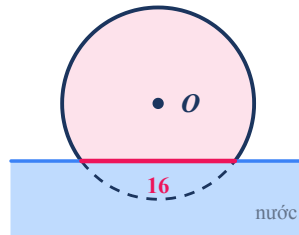


Key Idea — Vẽ bán kính tới mọi điểm quan trọng

Gặp đường tròn mà chưa thấy hướng: nối tâm với **tiếp điểm**, với **hai đầu dây cung**, với **tâm đường tròn kia**. Mỗi đoạn nối là một bán kính (đã biết độ dài) và thường tạo ra góc vuông. Phần lớn bài đường tròn AMC 8 xong sau bước này.

Example 12.4**Dây cung trong không gian: quả bóng nổi**

A ball with radius 10 cm floats in water. The water surface meets the ball in a circle with diameter 16 cm, and the center of the ball is above the water. How far above the water is the top of the ball, in centimeters?



(A) 4

(B) 6

(C) 8

(D) 10

(E) 16

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (E) 16

Cắt quả bóng bằng mặt phẳng thẳng đứng qua tâm: được hình tròn bán kính 10, mặt nước là một **dây cung** dài 16.

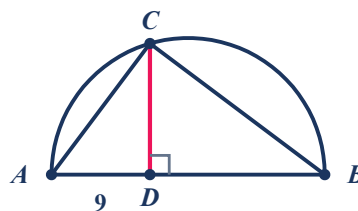
Khoảng cách từ tâm tới dây: $d^2 = 10^2 - 8^2 = 36$, $d = 6$. Tâm ở **trên** mặt nước 6 cm, nên đỉnh quả bóng cao $6 + 10 = 16$ cm so với mặt nước. Đáp án (E).

Bây: lấy nhầm vị trí (tâm dưới mặt nước) ra $10 - 6 = 4$; dừng ở khoảng cách $d = 6$; lấy nửa dây 8.

Insight · Mọi mặt cắt của hình cầu là hình tròn; mặt cắt qua tâm biến bài toán không gian thành bài **dây cung** phẳng. Luôn hỏi: “điểm cần tìm ở cùng phía hay khác phía tâm?”

Example 12.5**Đường kính tạo góc vuông**

$\overline{AB}$ is a diameter of a circle, and $AB = 25$. Point C is on the circle, and D is the point on $\overline{AB}$ with $\overline{CD} \perp \overline{AB}$. If $AD = 9$, what is CD ?



(A) 9

(B) 12

(C) 15

(D) 16

(E) 20

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 12

Cách 1 — vẽ bán kính. Tâm O là trung điểm AB , $OA = OC = 12,5$, $OD = 12,5 - 9 = 3,5$. Tam giác ODC vuông tại D : $CD^2 = 12,5^2 - 3,5^2 = (12,5 - 3,5)(12,5 + 3,5) = 9 \cdot 16 = 144$, $CD = 12$.

Cách 2 — góc chắn nửa đường tròn. $\angle ACB = 90^\circ$. Với $DB = 16$: $AC^2 = 81 + CD^2$, $BC^2 = 256 + CD^2$ và $AC^2 + BC^2 = 25^2$ cho $2CD^2 = 625 - 337 = 288$, $CD = 12$. Đáp án (B).

Lưu ý: $AC = 15$ và $BC = 20$ cũng có trong các lựa chọn — đọc kỹ đề hỏi đoạn nào.

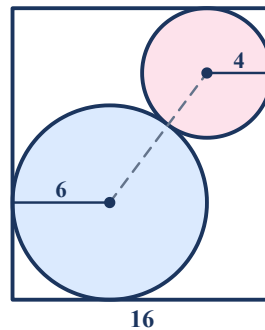
Insight · Đường kính $\Rightarrow$ góc vuông; điểm trên đường tròn $\Rightarrow$ một bán kính. Hai lối vào khác nhau, cùng về một tam giác vuông.

Common Trap — Một dây cung, hai vị trí

Biết bán kính và độ dài dây chỉ cho biết **khoảng cách** từ tâm tới dây, chứ không cho biết dây nằm phía nào của tâm. Hai dây song song có thể cùng phía (khoảng cách hai dây $= |d_1 - d_2|$) hoặc khác phía ($= d_1 + d_2$). Đọc kỹ đề: “center above the water”, “on opposite sides of the center”...

Example 12.6**Hai đường tròn tiếp xúc trong hình chữ nhật**

A rectangle has width 16. A circle of radius 6 is tangent to the bottom side and the left side of the rectangle, and a circle of radius 4 is tangent to the top side and the right side. The two circles are tangent to each other, as shown. What is the area of the rectangle?



(A) 192

(B) 224

(C) 256

(D) 288

(E) 320

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 288

Đặt góc dưới trái ở gốc toạ độ, chiều cao là H . Tâm hai đường tròn: $O_1 = (6, 6)$, $O_2 = (16 - 4, H - 4) = (12, H - 4)$.

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài nên $O_1O_2 = 6 + 4 = 10$. Hiệu hoành độ là $12 - 6 = 6$, nên hiệu tung độ là $\sqrt{10^2 - 6^2} = 8$: $H - 4 - 6 = 8$, $H = 18$.

Diện tích $16 \cdot 18 = 288$. Đáp án (D).

Bấy: tưởng hai tâm thẳng hàng theo chiều dọc ($H = 6 + 10 + 4 = 20$) ra 320.

Insight · Hai đường tròn tiếp xúc $\Rightarrow$ nối hai tâm (dài $r_1 + r_2$) rồi dựng tam giác vuông có hai cạnh song song với các cạnh hình chữ nhật.

Tip — Nhận dạng nhanh

“chord ... distance from the center” $\rightarrow$ nửa dây, khoảng cách, bán kính là bộ ba Pythagoras. “tangent” $\rightarrow$ bán kính vuông góc; hai tiếp tuyến từ một điểm bằng nhau. “diameter / semicircle” $\rightarrow$ góc vuông. “circles tangent to each other” $\rightarrow$ nối tâm. Bộ ba hay gặp: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (8, 15, 17), (6, 8, 10).

**12.3 The Coordinate Plane: Distance, Midpoint, Slope, Lines**

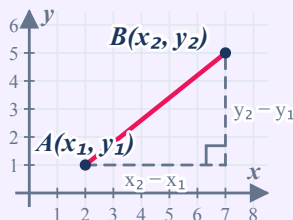
Mặt phẳng toạ độ: khoảng cách, trung điểm, hệ số góc, đường thẳng

Toạ độ biến hình học thành tính toán: thay vì “nhìn ra” một tính chất, ta cộng trừ các con số. Ở AMC 8, bốn công cụ dưới đây là đủ; quan trọng hơn là thói quen **vẽ nhanh hệ trục** và đặt các điểm lên đó trước khi tính.

Theorem – Distance and midpoint (khoảng cách, trung điểm)

For $A = (x_1, y_1)$ and $B = (x_2, y_2)$: $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, and the midpoint of $\overline{AB}$ is $M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Công thức khoảng cách chính là Pythagoras cho tam giác vuông có hai cạnh song song với hai trục (hình). Vì vậy đường tròn tâm (a, b) bán kính r là tập các điểm thoả $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

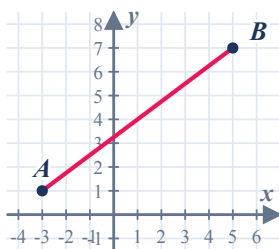
**Definition – Slope and lines (hệ số góc, phương trình đường thẳng)**

The **slope** of line AB is $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (rise over run). A non-vertical line with slope m and y -intercept b has equation $y = mx + b$. Parallel lines have equal slopes; perpendicular lines have slopes whose product is -1 .

Ba điểm thẳng hàng $\Leftrightarrow$ hệ số góc giữa các cặp bằng nhau. Giao điểm với trục Ox : cho $y = 0$; với trục Oy : cho $x = 0$. Giao điểm hai đường thẳng: cho hai vế y bằng nhau.

Example 12.7**Đường tròn đường kính AB trên hệ trục**

Let $A = (-3, 1)$ and $B = (5, 7)$. Which of the following points lies on the circle that has $\overline{AB}$ as a diameter?



- (A) (1, 7) (B) (5, 1) (C) (8, 6) (D) (9, 10) (E) (2, 8)

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(B)** (5, 1)

Tâm là trung điểm $M = \left(\frac{-3+5}{2}, \frac{1+7}{2}\right) = (1, 4)$, bán kính $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2} = 5$. Một điểm nằm trên đường tròn khi khoảng cách tới M bằng 5, tức bình phương khoảng cách bằng 25:

(1, 7): $0 + 9 = 9$; (5, 1): $16 + 9 = 25$ ✓; (8, 6): $49 + 4 = 53$; (9, 10): $64 + 36 = 100$; (2, 8): $1 + 16 = 17$. Đáp án (B).

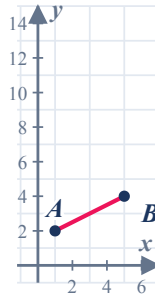
Kiểm tra bằng góc vuông: với $C = (5, 1)$, AC nằm ngang và BC thẳng đứng nên $\angle ACB = 90^\circ$ — đúng như định lý góc chắn nửa đường tròn. Các lựa chọn nhiễu: (9, 10) cách tâm 10 (lấy cả AB làm bán kính), (1, 7) và (8, 6) cách điểm (4, 3) đúng 5 (tính “trung điểm” bằng hiệu chia đôi thay vì tổng chia đôi).

Insight · Trên hệ trục, “nằm trên đường tròn” = “khoảng cách tới tâm bằng bán kính”; so sánh **bình phương** khoảng cách để khỏi khai căn.

Example 12.8

Hai đường vuông góc: tích hệ số góc bằng -1

Let $A = (1, 2)$ and $B = (5, 4)$. Point C lies on the y -axis, and $\angle ABC = 90^\circ$. What is the area of $\triangle ABC$?



(A) 10

(B) 20

(C) 25

(D) 30

(E) 50

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 25

Hệ số góc AB : $\frac{4-2}{5-1} = \frac{1}{2}$. Vì $BC \perp AB$ nên hệ số góc BC là -2 : đường thẳng BC là $y - 4 = -2(x - 5)$, cắt trục tung ($x = 0$) tại $y = 14$. Vậy $C = (0, 14)$.

Hai cạnh góc vuông: $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{5^2 + 10^2} = 5\sqrt{5}$. Diện tích $\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{5} \cdot 5\sqrt{5} = 25$. Đáp án (C).

Kiểm tra bằng đóng khung: hình chữ nhật $[0, 5] \times [2, 14]$ có diện tích 60, trừ ba tam giác vuông $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10 = 6 + 4 + 25 = 35$, còn 25. Quên $\frac{1}{2}$ ra 50.

Insight · “Vuông góc” trên hệ trục = hệ số góc nghịch đảo đối dấu ($m_1 m_2 = -1$); có hệ số góc và một điểm là viết được đường thẳng, cắt trục là ra điểm cần tìm.

Key Idea — Khoảng cách “đường phố” (taxicab distance)

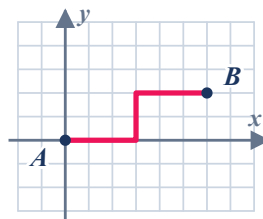
On a street grid you can only move horizontally or vertically. The taxicab distance between (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$.

Mọi đường đi ngắn nhất dọc lưới từ A tới B đều có cùng độ dài này. Điểm P nằm trong hình chữ nhật có hai góc đối là A và B khi và chỉ khi $d(A, P) + d(P, B) = d(A, B)$ — một tính chất rất khác khoảng cách thường.

Example 12.9

Cách đều theo khoảng cách đường phố

The taxicab distance between points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Let $A = (0, 0)$ and $B = (6, 2)$. How many points P with integer coordinates have the same taxicab distance from A as from B , with that distance at most 6?



(A) 3

(B) 4

(C) 5

(D) 7

(E) 9

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 7

Ta có $d(A, B) = 6 + 2 = 8$. Xét $P = (x, y)$ theo vị trí của y so với dải $0 \leq y \leq 2$.

Trong dải $0 \leq y \leq 2$ (và $0 \leq x \leq 6$): $x + y = (6 - x) + (2 - y) \Rightarrow x + y = 4$: các điểm $(2, 2)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$, mỗi điểm cách A và B đúng 4.

Phía trên ($y > 2$): $|x| + y = |x - 6| + y - 2 \Rightarrow |x| - |x - 6| = -2 \Rightarrow x = 2$. Điều kiện $d(A, P) = 2 + y \leq 6$ cho $y = 3, 4$: hai điểm $(2, 3)$, $(2, 4)$.

Phía dưới ($y < 0$): $|x| - y = |x - 6| + 2 - y \Rightarrow |x| - |x - 6| = 2 \Rightarrow x = 4$. Điều kiện $4 - y \leq 6$ cho $y = -1, -2$: hai điểm.

Tổng $3 + 2 + 2 = 7$. Đáp án (D). Tập các điểm cách đều ở đây không phải đường trung trực thẳng mà là một **đường gấp khúc**: tia đứng $x = 2$, đoạn chéo từ $(2, 2)$ tới $(4, 0)$, tia đứng $x = 4$. Chỉ đếm trong dải sẽ ra 3.

Insight • Với khoảng cách “đường phố”, hãy tách theo vị trí so với hình chữ nhật $A-B$ để bỏ dấu giá trị tuyệt đối; hình dạng thu được thường là đường gấp khúc.

Common Trap — Hệ số góc: “lên chia ngang”, không phải ngược lại

$m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, hai hiệu phải lấy **cùng thứ tự điểm**. Đường thẳng đứng $x = c$ không có hệ số góc và không viết được dạng $y = mx + b$. Khi tìm giao điểm với trục Ox của $y = mx + b$, nghiệm là $x = -\frac{b}{m}$ — rất hay sai dấu.

Tip — Diện tích trên hệ trục

Tam giác có một cạnh nằm trên trục hoặc song song với trục: dùng đáy $\times$ cao $\div 2$ trực tiếp. Hình xiên: đóng khung bằng hình chữ nhật có cạnh song song với trục rồi trừ các tam giác vuông ở góc (Chương 11). Trung điểm các cạnh: tam giác tạo bởi ba trung điểm có diện tích bằng $\frac{1}{4}$ tam giác ban đầu.

K 12.4 Prisms, Boxes and Cubes

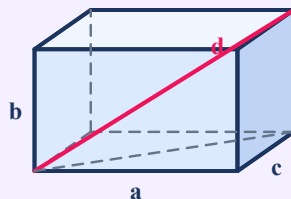
Lăng trụ, hộp chữ nhật và khối lập phương

Câu hỏi không gian ở AMC 8 xoay quanh ba việc: tính **thể tích** (đếm khối lập phương đơn vị), tính **diện tích bề mặt** (đếm các mặt lộ ra ngoài) và **tưởng tượng** hình (khai triển, hình chiếu). Hộp chữ nhật là “phòng tập” cho cả ba.

Theorem — Rectangular box (hộp chữ nhật)

An $a \times b \times c$ box has volume $V = abc$, surface area $S = 2(ab + bc + ca)$, 12 edges of total length $4(a + b + c)$, and space diagonal $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

Đường chéo không gian: dùng Pythagoras hai lần — đường chéo mặt đáy $\sqrt{a^2 + c^2}$, rồi tam giác vuông với cạnh đứng b . Nếu biết diện tích ba mặt ab, bc, ca thì $V^2 = (ab)(bc)(ca)$.



Definition — Prism and net (lăng trụ, hình khai triển)

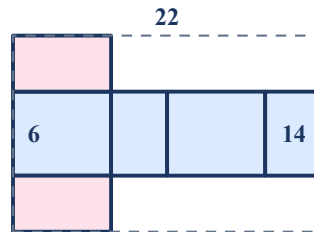
A **prism** has two congruent parallel bases joined by rectangles; its volume is (base area) $\times$ (height). A **net** is a flat pattern of faces that folds up into the solid.

Hộp chữ nhật và khối lập phương là lăng trụ đặc biệt. Khi đọc hình khai triển, tô cùng màu các mặt sẽ đối diện nhau và ghi kích thước thật của từng mặt.

Example 12.10

Đọc kích thước từ hình khai triển

The net shown folds into a rectangular box. The net fits exactly inside a 22×14 rectangle, as shown, and each of the four faces in the middle row has height 6. What is the volume of the box?



- (A) 120 (B) 144 (C) 168 (D) 192 (E) 210

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 168

Gọi kích thước hộp là a (chiều rộng của mặt có nắp và đáy gắn vào), b và chiều cao $c = 6$. Hàng giữa gồm bốn mặt bên rộng lần lượt a, b, a, b : $2a + 2b = 22$. Theo chiều dọc: nắp (b) + mặt bên (6) + đáy (b): $2b + 6 = 14$.

Suy ra $b = 4$, $a = 7$, thể tích $7 \cdot 4 \cdot 6 = 168$. Đáp án (C).

Insight · Mỗi kích thước của hộp xuất hiện nhiều lần trong hình khai triển; viết “tổng chiều ngang” và “tổng chiều dọc” theo a, b, c để lập phương trình.

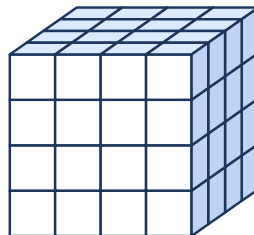
Key Idea — Diện tích bề mặt của khối ghép = đếm theo 6 hướng nhìn

Với khối ghép từ các khối lập phương đơn vị không có “hang” khuất, số mặt nhìn thấy từ trước bằng từ sau, từ trên bằng từ dưới, từ trái bằng từ phải. Nên diện tích bề mặt = 2 (trước + trên + cạnh). Mỗi lần dán hai khối vào nhau diện tích mất đúng 2 đơn vị.

Example 12.11

Ba hình chiếu đều kín — giữ lại ít khối nhất

A $4 \times 4 \times 4$ cube is built from 64 unit cubes. Some of the unit cubes are removed, and the others stay exactly where they were. Seen from the front, from the right side, and from the top, the remaining cubes still cover the whole 4×4 square in each view. What is the least number of unit cubes that can remain?



- (A) 4 (B) 8 (C) 16 (D) 24 (E) 32

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 16

Gọi vị trí mỗi khối là (cột x , tầng y , hàng sâu z), mỗi tọa độ từ 0 tới 3. Hình chiếu từ trước kín nghĩa là với **mỗi** cặp (x, y) — 16 cặp — có ít nhất một khối trên “thanh” xuyên từ trước ra sau. 16 thanh này rời nhau, nên phải còn **ít nhất 16 khối**. 16 khối là đủ: ở mỗi cột x và tầng y , giữ đúng khối ở hàng sâu $z = (x + y)$ chia 4 lấy dư. Nhìn từ trước: mỗi (x, y) có một khối. Nhìn từ trên (cặp (x, z)): với x cố định, khi y chạy từ 0 tới 3 thì z đi qua đủ 0, 1, 2, 3. Nhìn từ bên (cặp (y, z)): tương tự.

Đáp số 16. Đáp án (C). Mỗi lớp nằm ngang khi đó là một **hình vuông Latin** 4×4 .

Insight · Chặn dưới bằng cách tìm các “thanh” rời nhau mà mỗi thanh cần ít nhất một khối; rồi dựng một cách xếp đạt đúng chặn đó.

Common Trap — Khối khuất và mặt dán

Đếm khối trong hình vẽ: nhớ các khối **đổ bên dưới** mà không nhìn thấy (trừ khi đề nói có thể bỏ trống). Tính diện tích bề mặt: đừng cộng diện tích từng khối rồi quên trừ các mặt bị dán; và đừng quên mặt đáy nếu đề nói “including the bottom”.

Tip — Cho ba mặt — nhân lại rồi khai căn

Để cho diện tích ba mặt kề nhau x, y, z của hộp: $V = \sqrt{xyz}$, không cần tìm từng cạnh. Để cho tổng các cạnh và diện tích bề mặt: dùng $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ để ra đường chéo.

K 12.5 Cylinders, Cones, Pyramids and Spheres

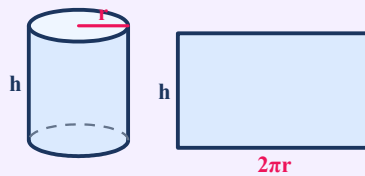
Hình trụ, hình nón, hình chóp và hình cầu

Bốn công thức thể tích dưới đây là đủ cho AMC 8. Các bài thi hiếm khi hỏi thẳng công thức; chúng hỏi **đổ nước** từ bình này sang bình kia, **nấu chảy** rồi đúc lại, **quay** một hình phẳng quanh một trục. Chia khoá luôn là: thể tích được bảo toàn.

Theorem — Cylinder (hình trụ)

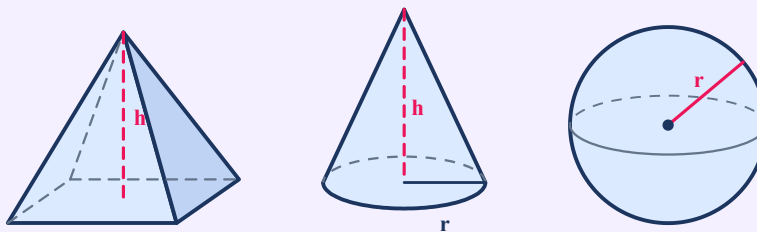
A cylinder with radius r and height h has volume $V = \pi r^2 h$ and lateral (curved) surface area $2\pi r h$; the total surface area adds the two disks: $2\pi r h + 2\pi r^2$.

Hình trụ là “lăng trụ có đáy tròn”: thể tích = diện tích đáy $\times$ chiều cao. Mặt xung quanh trải phẳng là hình chữ nhật có một cạnh bằng chu vi đáy $2\pi r$ và cạnh kia bằng h .

**Theorem — Pyramid, cone, sphere (hình chóp, hình nón, hình cầu)**

A pyramid or cone with base area B and height h has volume $V = \frac{1}{3}Bh$; for a cone, $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$. A sphere of radius r has volume $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ and surface area $4\pi r^2$.

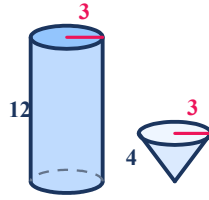
Vì sao có $\frac{1}{3}$? Một khối lập phương cạnh a chia được thành 6 hình chóp bằng nhau có đỉnh chung là tâm khối, đáy là một mặt, chiều cao $\frac{a}{2}$: mỗi hình chóp có thể tích $\frac{a^3}{6} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2}$. Chiều cao luôn đo **vuông góc** với đáy, không phải theo cạnh xiên.



Example 12.12

Đổ nước từ cốc trụ sang cốc nón

A cylindrical glass with radius 3 cm and height 12 cm is full of juice. The juice is poured into cone-shaped paper cups, each with radius 3 cm and height 4 cm, held point down. How many cups can be filled completely?



(A) 3

(B) 4

(C) 6

(D) 9

(E) 27

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 9

Thể tích cốc trụ: $\pi \cdot 3^2 \cdot 12 = 108\pi$. Một cốc nón: $\frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 4 = 12\pi$.

Số cốc: $108\pi : 12\pi = 9$. Đáp án (D).

Nhận xét: cùng bán kính đáy, nên chỉ cần so chiều cao — nhưng phải nhớ thừa số $\frac{1}{3}$: một cốc nón cao 4 chỉ chứa bằng một khối trụ cao $\frac{4}{3}$. Quên $\frac{1}{3}$ ra 3 cốc.

Insight · Cùng đáy: hình nón (hình chóp) chứa đúng $\frac{1}{3}$ hình trụ (lăng trụ) cùng chiều cao.

Key Idea — Phóng to hệ số k

Hai hình đồng dạng (cùng hình dạng) với tỉ số độ dài k thì tỉ số diện tích (kể cả diện tích bề mặt) là k^2 và tỉ số thể tích là k^3 . Quả cầu bán kính gấp đôi nặng gấp 8 lần; nón nước đầy $\frac{1}{2}$ chiều cao chỉ chứa $\frac{1}{8}$ thể tích.

Common Trap — Ba lỗi kinh điển với khối tròn

(1) Quên $\frac{1}{3}$ của hình nón, hình chóp. (2) Dùng đường kính thay bán kính trong $\pi r^2 h$ hay $\frac{4}{3}\pi r^3$ (sai gấp 4 hoặc 8 lần). (3) Lấy độ dài đường sinh (slant height) làm chiều cao của hình nón: chiều cao là đoạn từ đỉnh **vuông góc** xuống đáy, và (đường sinh) $^2 = h^2 + r^2$.

Tip — Bài “đổ – nấu chảy – thả vào”

Viết một phương trình duy nhất: thể tích trước = thể tích sau. Thả vật chìm hẳn vào bình trụ: mực nước dâng thêm $\frac{V_{\text{vật}}}{\pi r^2}$. Để π ở cả hai vế rồi rút gọn — thường đáp số không còn π .

E Worked Examples — Competition Level

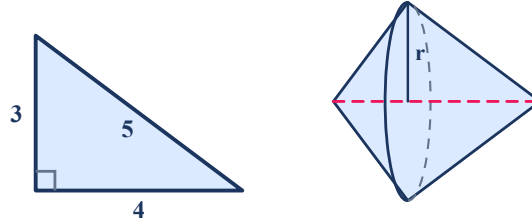
Ví dụ mẫu mức thi đấu

Ví dụ dưới đây ở mức câu 20–23 của AMC 8: phải tự dựng hình không gian từ một hình phẳng. Hãy thử tự làm ít nhất 5 phút.

Example 12.13

Quay tam giác vuông quanh từng cạnh

A right triangle has legs of lengths 3 and 4. It is rotated one full turn about the line containing one of its sides, sweeping out a solid. This is done three times, once for each side. What is the ratio of the largest of the three volumes to the smallest?



- (A) $\frac{4}{3}$ (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{5}{3}$ (D) $\frac{16}{9}$ (E) 2

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) $\frac{5}{3}$

Quay quanh cạnh 3: được hình nón bán kính 4, cao 3: $V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 16 \cdot 3 = 16\pi$.

Quay quanh cạnh 4: hình nón bán kính 3, cao 4: $V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot 4 = 12\pi$.

Quay quanh cạnh huyền 5: đỉnh góc vuông vẽ ra một đường tròn có bán kính bằng đường cao r hạ xuống cạnh huyền; ta được **hai hình nón chung đáy** (hình). Từ diện tích: $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot r$, nên $r = \frac{12}{5}$. Hai chiều cao cộng lại bằng 5, nên $V_3 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot 5 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{144}{25} \cdot 5 = \frac{48}{5}\pi$.

Lớn nhất 16π , nhỏ nhất $\frac{48}{5}\pi$; tỉ số $16 : \frac{48}{5} = \frac{5}{3}$. Đáp án (C).

Bấy: tưởng quay quanh cạnh dài nhất cho khối lớn nhất, hoặc bỏ qua khối thứ ba và trả lời: $\frac{16\pi}{\frac{48}{5}\pi} = \frac{5}{3}$.

Insight · Quay quanh một đoạn không phải cạnh góc vuông → tách thành các hình nón chung đáy; bán kính chung là **khoảng cách** từ điểm xa trục nhất tới trục.

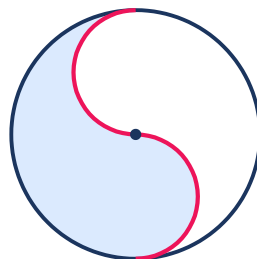
1

Exercises 1 · Foundation



Bài tập 1 · Nền tảng

- 12.1** The area of a circle, in square units, is numerically equal to twice its circumference, in units. What is the diameter of the circle?
- (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8
- 12.2** A circle has radius 4. Two semicircles, each with radius 2 and each with its diameter on the same diameter of the large circle, form an S-shaped curve that divides the large circle into two congruent pieces, as shown. What is the perimeter of one of the pieces?

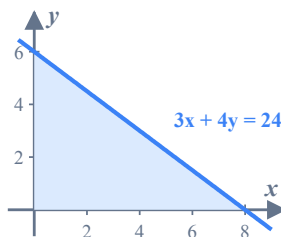


- (A) 6π (B) 8π (C) 10π (D) 12π (E) 16π
- 12.3** The circumferences of two circles are in the ratio 2 : 3, and the area of the smaller circle is 16π . What is the area of the larger circle?
- (A) 18π (B) 24π (C) 32π (D) 36π (E) 64π

12.4 Point $P = (a, 3)$ is at distance 5 from point $Q = (1, -1)$. What is the sum of all possible values of a ?

- (A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

12.5 The line $3x + 4y = 24$ meets the x -axis at A and the y -axis at B , as shown. What is the distance from the origin O to the line?

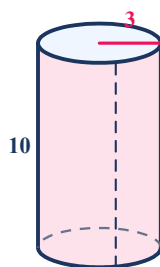


- (A) 3 (B) 4 (C) $\frac{9}{2}$ (D) $\frac{24}{5}$ (E) 5

12.6 A cube has surface area 96. What is the length of a space diagonal of the cube (a segment joining two opposite vertices through the inside)?

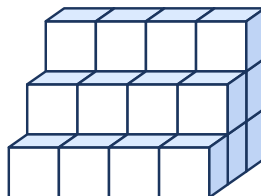
- (A) 4 (B) $4\sqrt{2}$ (C) $4\sqrt{3}$ (D) 8 (E) 12

12.7 A cylindrical can has radius 3 cm and height 10 cm. A paper label covers the whole curved side of the can and is exactly as tall as the can; its two ends overlap by 1 cm where they are glued together. What is the area of the label, in square centimeters?



- (A) $30\pi + 10$ (B) 60π (C) $60\pi + 10$ (D) $60\pi + 20$ (E) 78π

12.8 The staircase shown is built from unit cubes. It is 4 cubes wide and 3 cubes deep, and its three steps have heights 1, 2, and 3; no cubes are missing behind or under the visible ones. What is the total surface area of the staircase, including the bottom?

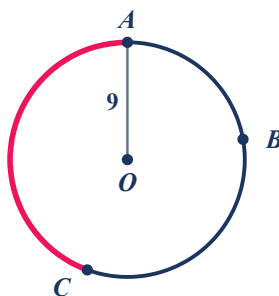


- (A) 36 (B) 42 (C) 48 (D) 54 (E) 60

12.9 The surface area of a sphere is 36π . What is the volume of the sphere?

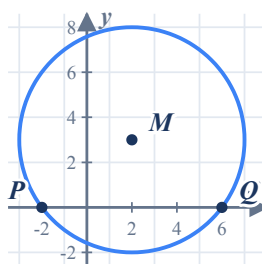
- (A) 36π (B) 48π (C) 72π (D) 108π (E) 144π

- 12.10** ♦ Points A , B , and C lie on a circle with radius 9 and divide it into three arcs whose lengths are in the ratio $2 : 3 : 4$, as shown. What is the length of the longest of the three arcs?



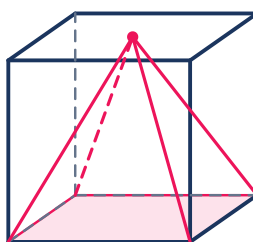
- (A) 2π (B) 4π (C) 6π (D) 8π (E) 16π

- 12.11** ♦♦ The circle with center $M = (2, 3)$ and radius 5 meets the x -axis at points P and Q , as shown. What is the area of $\triangle MPQ$?



- (A) 12 (B) 15 (C) 20 (D) 24 (E) 30

- 12.12** ♦♦ A solid wooden cube has edge length 6. A carpenter carves it into a pyramid whose base is the bottom face of the cube and whose apex is the center of the top face, as shown, and throws away the rest of the wood. What is the volume of the wood thrown away?



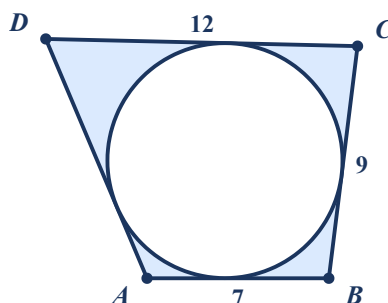
- (A) 72 (B) 108 (C) 144 (D) 180 (E) 216

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi

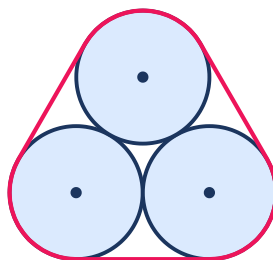


- 12.13** ♦♦ Quadrilateral $ABCD$ has a circle inside it that is tangent to all four sides, as shown. If $AB = 7$, $BC = 9$, and $CD = 12$, what is DA ?



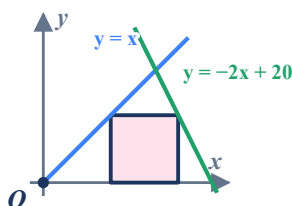
- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

- 12.14** Three pipes, each with diameter 2, are held together by a tight band, as shown; each pipe touches the other two. What is the length of the band?



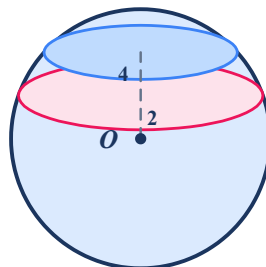
- (A) $6 + \pi$ (B) $6 + 2\pi$ (C) $6 + 3\pi$ (D) $12 + 2\pi$ (E) $6 + 6\pi$

- 12.15** A square has one side on the x -axis. Its upper left vertex lies on the line $y = x$, and its upper right vertex lies on the line $y = -2x + 20$, as shown. What is the area of the square?



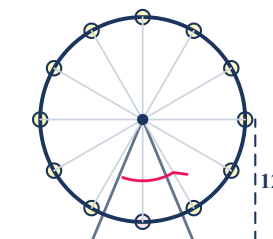
- (A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 16 (E) 25

- 12.16** A sphere with radius 6 is cut by two parallel planes. One plane is at distance 2 from the center of the sphere and the other is at distance 4, on the same side of the center, as shown. By how much does the area of the larger cross-section exceed the area of the smaller one?



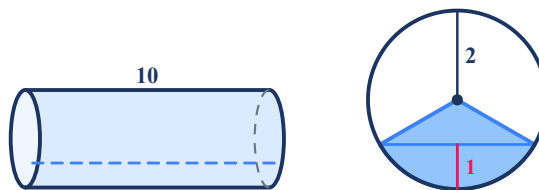
- (A) 2π (B) 4π (C) 8π (D) 12π (E) 20π

- 12.17** A Ferris wheel has radius 10 m, and its center is 12 m above the ground. It turns at a constant speed, making one full turn every 12 minutes. A car is at the lowest point of the wheel at noon. How many meters above the ground is the car at 12:04 p.m.?

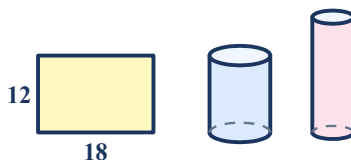


- (A) 2 (B) 7 (C) 12 (D) 17 (E) 22

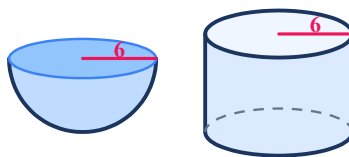
- 12.18** ♦♦♦ A closed cylindrical tank with radius 2 and length 10 lies on its side on level ground, as shown. It contains water to a depth of 1. What is the volume of the water?



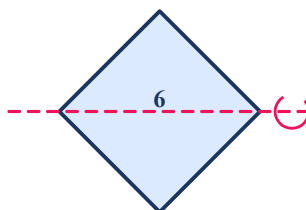
- (A) $10\pi - 20$ (B) $\frac{40\pi}{3} - 10\sqrt{3}$ (C) 10π (D) $\frac{40\pi}{3}$ (E) 20π
- 12.19** ♦♦ The length, width, and height of a rectangular box are in the ratio 1 : 2 : 3, and the surface area of the box is 198. What is the volume of the box?
- (A) 36 (B) 54 (C) 96 (D) 144 (E) 162
- 12.20** ♦♦ A cylinder has volume 72π , and the area of its curved side (not including the top and bottom) is 48π . What is the total surface area of the cylinder, including the top and bottom?
- (A) 66π (B) 72π (C) 84π (D) 96π (E) 120π
- 12.21** ♦♦ A 12×18 sheet of paper can be rolled into the curved surface of a cylinder (without overlap) in two ways: with the side of length 18 going around the cylinder, or with the side of length 12 going around. What is the ratio of the larger of the two volumes to the smaller?



- (A) 1 (B) $\frac{3}{2}$ (C) 2 (D) $\frac{9}{4}$ (E) 3
- 12.22** ♦♦ A bowl in the shape of a hemisphere with radius 6 is full of water. All of the water is poured into an empty cylinder with radius 6, as shown. How deep is the water in the cylinder?

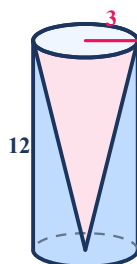


- (A) 4 (B) 6 (C) 8 (D) 9 (E) 12
- 12.23** ♦♦ A square whose diagonals have length 6 is rotated one full turn about the line containing one of its diagonals, as shown. What is the volume of the solid swept out?



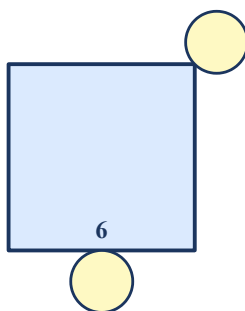
- (A) 6π (B) 9π (C) 18π (D) 27π (E) 54π

- 12.24** A cylindrical glass with radius 3 and height 12 is full of water. A solid cone with base radius 3 and height 12 is pushed, point down, into the glass until its base is level with the top of the glass, so some water spills out; then the cone is removed. Next, a solid ball with radius 3 is dropped into the glass. How deep is the water now?



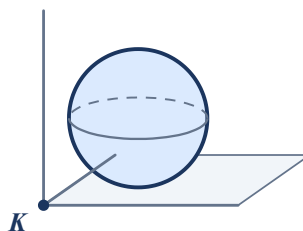
- (A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11 (E) 12

- 12.25** A coin with radius 1 rolls around the outside of a square with side length 6, always touching the square, until it returns to its starting position. What is the area of the region covered by the coin at some moment during its trip?



- (A) $24 + 4\pi$ (B) 48 (C) $48 + \pi$ (D) $48 + 2\pi$ (E) $48 + 4\pi$

- 12.26** A ball with radius 6 rests on the floor in a corner of a room, touching the floor and both walls, as shown. Let K be the corner point where the two walls meet the floor. What is the distance from K to the nearest point of the ball?



- (A) $6\sqrt{2} - 6$ (B) 3 (C) $6\sqrt{3} - 6$ (D) 6 (E) $6\sqrt{3}$

3 Exercises 3 • Challenge

Bài tập 3 • Thử thách



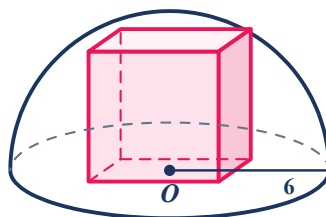
- 12.27** A rectangular box has edge lengths $a \leq b \leq c$, all positive integers, and its volume is numerically equal to its surface area. How many such boxes are there?

Integer answer · Đáp số nguyên

- 12.28** A rectangular box has three different whole-number edge lengths, and the length of its space diagonal is also a whole number. What is the least possible volume of the box?

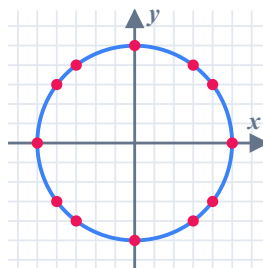
Integer answer · Đáp số nguyên

- 12.29** ♦♦♦ A cube sits inside a solid hemisphere of radius 6: its bottom face lies on the flat face of the hemisphere, centered there, and the four top vertices of the cube lie on the curved surface, as shown. What is the surface area of the cube?



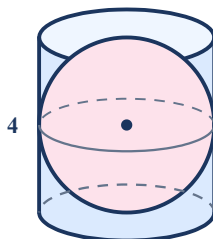
- (A) 72 (B) 96 (C) 108 (D) 128 (E) 144

- 12.30** ♦♦♦ For how many integers n with $1 \leq n \leq 50$ does the circle $x^2 + y^2 = n$ pass through exactly 8 points whose coordinates are both integers? (For example, the circle $x^2 + y^2 = 25$, shown, passes through 12 such points.)



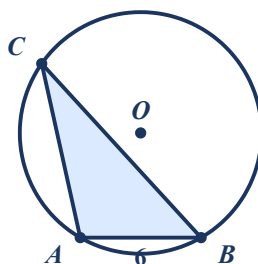
- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 13 (E) 14

- 12.31** ♦♦♦ A closed cylinder has radius 2 and height 4. A point is chosen at random inside the cylinder. What is the probability that the point is at distance at most 2 from the center of the cylinder (the midpoint of its axis)?



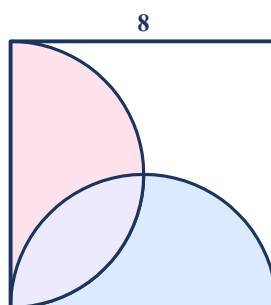
- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{5}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{3}{4}$

- 12.32** ♦♦♦ Points A and B lie on a circle with center O and radius 6, and $AB = 6$. Point C moves along the circle. What is the greatest possible area of $\triangle ABC$?

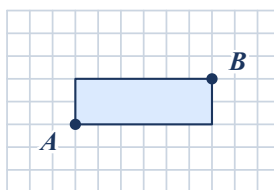


- (A) $9\sqrt{3}$ (B) 18 (C) $18\sqrt{3}$ (D) $18 + 9\sqrt{3}$ (E) $36 + 9\sqrt{3}$

- 12.33** Square $ABCD$ has side length 8. Inside the square, one semicircle has diameter $\overline{AB}$ (the bottom side) and another semicircle has diameter $\overline{AD}$ (the left side), as shown. What is the total area of the parts of the square that lie inside exactly one of the two semicircles?

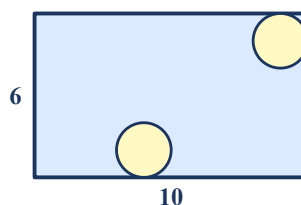


- (A) 32 (B) $8\pi + 16$ (C) 48 (D) 16π (E) 64
- 12.34** The taxicab distance between points (x_1, y_1) and (x_2, y_2) is $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Let $A = (0, 0)$ and $B = (6, 2)$. How many points P with integer coordinates satisfy (taxicab distance from P to A) + (taxicab distance from P to B) = 12?

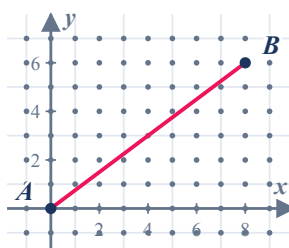


Integer answer · Đáp số nguyên

- 12.35** A coin with radius 1 rolls around the inside of a 10×6 rectangle, always touching at least one side of the rectangle, until it has gone all the way around. What is the area of the part of the rectangle that the coin never covers?



- (A) 12 (B) $16 - \pi$ (C) $12 + \pi$ (D) 16 (E) $20 - \pi$
- 12.36** Points $A = (0, 0)$ and $B = (8, 6)$ are shown. For how many points C with integer coordinates is $\angle ACB = 90^\circ$?



- (A) 8 (B) 10 (C) 12 (D) 14 (E) 16

Chapter 13

8020 AMC 8 Mastery

Problem-Solving Strategies

Chiến lược giải toán

Chương cuối không dạy thêm công thức mà dạy **cách tấn công một bài lạ** — kỹ năng phân biệt học sinh 15 điểm với học sinh 22 điểm ở AMC 8. Sáu nhóm chiến lược: đi ngược và thử có hệ thống; thu nhỏ bài toán và đổi góc nhìn; chặn lẻ, tô màu và bất biến; nguyên lý Dirichlet với trường hợp xấu nhất; bài cực trị bằng “chặn rồi xây dựng”; và các chiến thuật trắc nghiệm. Học sinh hay mất điểm vì tin một quy luật chưa kiểm tra, vì quên cộng 1 trong bài “chắc chắn”, và vì chỉ tìm ví dụ mà không chặn (hoặc chỉ chặn mà không có ví dụ).

✓ Đi ngược đúng thứ tự với các phép ngược; thử – kiểm tra – điều chỉnh có hệ thống khi biểu thức đơn điệu.

✓ Giải các trường hợp nhỏ, tìm quy luật và lý do; đổi đổi tượng đếm khi đếm trực tiếp rối.

✓ Dùng chặn lẻ, tô màu và bất biến để chứng minh “không thể”, và xây dựng cách làm cho các trường hợp còn lại.

✓ Thiết kế “chuồng” cho nguyên lý Dirichlet và tính đúng trường hợp xấu nhất.

✓ Giải bài lớn nhất/nhỏ nhất bằng hai bước: chặn (chia khối, lấy trung bình) và xây dựng.

✓ Dùng các lựa chọn: thử đáp án, giá trị đặc biệt, loại trừ bằng chữ số tận cùng, chặn lẻ, số dư, độ lớn.

working backwards · đi ngược (từ kết quả)

guess, check, and refine · thử – kiểm tra – điều chỉnh

small cases · trường hợp nhỏ

pattern · quy luật

parity · tính chẵn lẻ

coloring argument · lập luận tô màu

invariant · bất biến

monovariant · đại lượng đơn điệu

pigeonhole principle · nguyên lý Dirichlet (chuồng – thỏ)

worst case · trường hợp xấu nhất

bound · cận (chặn)

construction · xây dựng (ví dụ đạt được)

greedy · tham lam

backsolving · thử đáp án

special values · giá trị đặc biệt

estimate · ước lượng

K 13.1 Working Backwards; Guess, Check and Refine

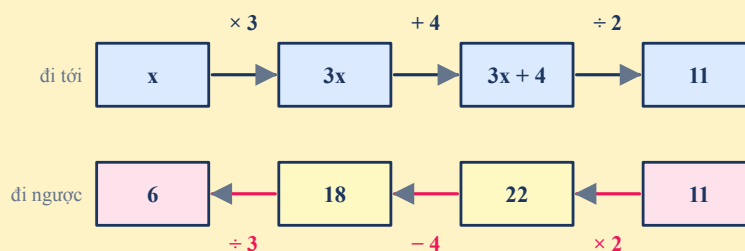
Đi ngược từ kết quả; thử – kiểm tra – điều chỉnh

Mười hai chương trước dạy **kiến thức**; chương cuối này dạy **cách nghĩ** khi gặp một bài lạ. Chiến lược đầu tiên rất đơn giản nhưng hay bị bỏ quên: khi đề cho *trạng thái cuối* và mô tả *từng bước* đã xảy ra, đừng đặt ẩn rồi giải phương trình công kênh — hãy **đi ngược** (work backwards) từ cuối về đầu. Khi bài hỏi “số nào thoả mãn ...” mà các giá trị thử được lại tăng/giảm đều theo số đó, hãy **thử – kiểm tra – điều chỉnh** (guess, check, refine) thay vì mò ngẫu nhiên.

Key Idea — Working backwards (đi ngược)

If a process is a chain of steps and each step can be undone, start from the final result and undo the steps **in reverse order**, replacing every operation by its inverse.

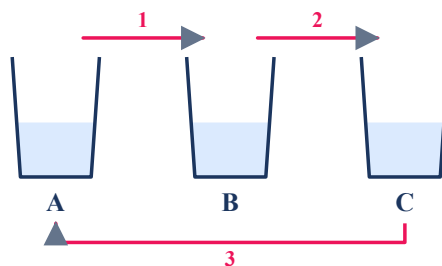
Phép ngược: $+$ $\leftrightarrow$ $-$, $\times$ $\leftrightarrow$ $\div$, “gấp đôi” $\leftrightarrow$ “chia đôi”. Ví dụ ở hình: một số được nhân 3, cộng 4, chia 2 thì được 11. Đi ngược: $11 \times 2 = 22$, $22 - 4 = 18$, $18 \div 3 = 6$. Không cần phương trình nào cả.



Example 13.1

Đi ngược bằng bảng trạng thái

Three cups A , B , and C contain some water, as shown. First, water is poured from A into B until the amount in B doubles. Next, water is poured from B into C until the amount in C doubles. Finally, water is poured from C into A until the amount in A doubles. Now each cup contains 240 mL. How many milliliters of water did cup A contain at the start?



(A) 180

(B) 210

(C) 300

(D) 330

(E) 360

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 330

Lần rót nào cũng làm cốc nhận **gấp đôi**, nên đi ngược thì cốc nhận phải **chia đôi**, phần chia ra trả về cốc đã rót. Tổng lượng nước luôn là $3 \cdot 240 = 720$ mL. Lập bảng từ dưới lên:

Thời điểm	A	B	C
Cuối cùng	240	240	240
Trước lần rót 3 ($C \rightarrow A$)	120	240	360
Trước lần rót 2 ($B \rightarrow C$)	120	420	180
Ban đầu (trước lần rót 1, $A \rightarrow B$)	330	210	180

Ví dụ dòng thứ hai: sau lần rót 3, A có 240 mL, tức là đã gấp đôi từ 120 mL; 120 mL đó lấy từ C , nên trước đó C có $240 + 120 = 360$ mL. Kiểm tra lại theo chiều xuôi: $(330, 210, 180) \rightarrow (120, 420, 180) \rightarrow (120, 240, 360) \rightarrow (240, 240, 240)$. Đáp án (D).

Bấy: 210 và 180 là lượng nước ban đầu của B và C , không phải của A .

Insight · Mỗi bước “gấp đôi” khi đi ngược là “chia đôi”; giữ **tổng không đổi** để kiểm tra từng dòng của bảng.

Common Trap — Đảo đúng phép, đúng thứ tự

Bước cuối cùng phải được gỡ **đầu tiên**. Nếu một bước là “lấy một nửa rồi bớt 3”, thì đi ngược là “thêm 3 rồi nhân 2” — làm “nhân 2 rồi thêm 3” sẽ sai. Với phần trăm: giảm 20% là nhân 0,8, nên đi ngược là chia 0,8 (tức tăng 25%), **không** phải tăng 20%.

Tip — Thử – kiểm tra – điều chỉnh (guess, check, refine)

Khi cần tìm một số nguyên mà biểu thức của nó **tăng dần** theo số đó, hãy: (1) ước lượng bằng số hạng lớn nhất; (2) thử một giá trị và ghi vào bảng “quá nhỏ / quá lớn”; (3) nhảy về phía đúng. Mỗi lần thử phải **thu hẹp** vùng tìm kiếm — đó là khác biệt giữa thử có hệ thống và đoán mò. Chữ số tận cùng thường loại bớt giá trị trước khi tính.

Example 13.2

Ước lượng rồi điều chỉnh

What positive integer x satisfies $x + x^2 + x^3 = 2954$?

(A) 12

(B) 13

(C) 14

(D) 15

(E) 16

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 14

Số hạng x^3 chiếm gần hết vế trái, nên x^3 hơi nhỏ hơn 2954. Vì $14^3 = 2744$ và $15^3 = 3375$, ta thử quanh 14.

x	$x + x^2 + x^3$	nhận xét
10	1110	quá nhỏ

15	3615	quá lớn
14	$14 + 196 + 2744 = 2954$	đúng

Về trái tăng khi x tăng nên nghiệm nguyên dương là duy nhất: $x = 14$. Đáp án (C).

Có thể loại nhanh bằng chữ số tận cùng: cần tận cùng 4. Với x tận cùng 2, 3, 5, 6 thì $x + x^2 + x^3$ tận cùng lần lượt 4, 9, 5, 8 — chỉ còn 12 và 14 cần thử; $12 + 144 + 1728 = 1884$ quá nhỏ.

Insight • Ước lượng bằng **số hạng trội**, rồi dùng tính đơn điệu để biết nên thử lớn hơn hay nhỏ hơn.

K 13.2 Make It Simpler: Small Cases and a New Point of View

Thu nhỏ bài toán: trường hợp nhỏ và đổi góc nhìn

Một bài có số lớn (100 người, 2026 bước, bảng 12×18) thường là phiên bản phóng to của một bài nhỏ mà ta giải được bằng tay. Chiến lược: **giải các trường hợp nhỏ**, ghi kết quả vào bảng, tìm quy luật, rồi **giải thích vì sao** quy luật đúng. Khi đếm trực tiếp rồi, hãy **đổi góc nhìn**: đếm một đại lượng khác nhưng bằng nó.

Key Idea — Solve a smaller problem (giải bài nhỏ hơn)

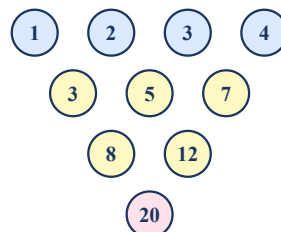
Replace the large numbers by small ones, solve several small versions completely, organise the answers in a table, look for a pattern, and then find the **reason** behind the pattern before applying it to the original numbers.

Bước “tìm lý do” là bắt buộc: nó vừa bảo đảm quy luật đúng, vừa thường cho luôn công thức tổng quát.

Example 13.3

Trường hợp nhỏ → quy luật → lý do

The integers 1, 2, 3, ..., 10 are written in a row. Below each pair of neighbors their sum is written, making a row of 9 numbers. This is repeated, each new row having one number fewer, until a single number is left. The figure shows the same process starting from 1, 2, 3, 4. What is the single number left at the end?



(A) 1408

(B) 2816

(C) 5120

(D) 5632

(E) 11264

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (B) 2816

Trường hợp nhỏ (bắt đầu từ 1, 2, ..., n):

n	2	3	4	5
số cuối	$3 = 3 \cdot 1$	$8 = 4 \cdot 2$	$20 = 5 \cdot 4$	$48 = 6 \cdot 8$

Quy luật: $(n + 1) \cdot 2^{n-2}$.

Lý do. Số cuối là tổng các số ở hàng đầu, mỗi số nhân với một “trọng số” bằng số cách đi từ nó xuống đáy (mỗi bước xuống trái hoặc phải). Với $n = 4$ các trọng số là 1, 3, 3, 1: $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 20$. Trọng số đối xứng và có tổng 2^{n-1} ; vì 1, 2, ..., n đối xứng quanh trung bình $\frac{n+1}{2}$, ghép số đầu với số cuối, số thứ hai với số áp cuối... (cùng trọng số) cho kết quả $\frac{n+1}{2} \cdot 2^{n-1} = (n + 1)2^{n-2}$.

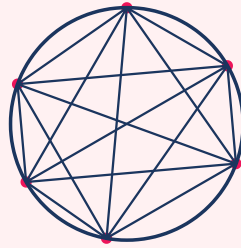
Với $n = 10$: $11 \cdot 2^8 = 2816$. Đáp án (B).

Bẫy: $5632 = 11 \cdot 2^9$ là dùng 2^{n-1} mà quên chia 2; $5120 = 10 \cdot 2^9$ là nhầm trung bình thành n .

Insight • Bảng các trường hợp nhỏ gợi ý công thức; **lý do** (trọng số đối xứng) mới cho phép tin công thức với $n = 10$.

Common Trap — Quy luật nhìn thấy chưa phải là chứng minh

Đặt n điểm trên đường tròn rồi nối mọi cặp điểm (không có ba dây nào đồng quy). Số miền tạo ra lần lượt là 1, 2, 4, 8, 16 với $n = 1, 2, 3, 4, 5$ — rất giống “gấp đôi”. Nhưng với $n = 6$ (hình) chỉ có 31 miền, không phải 32. Vì vậy luôn tìm **lý do** của quy luật, hoặc kiểm tra thêm một trường hợp trước khi tin.

**Tip — Đổi góc nhìn: đếm thứ dễ đếm hơn**

Đề hỏi số trận đấu? Đếm số **lần thua**. Đề hỏi số lần cắt? Đếm số **mảnh tăng thêm**. Đề hỏi số ô một đường thẳng đi qua? Đếm số **vạch lưới** nó cắt. Hỏi bản thân: “mỗi sự kiện tạo ra đúng một cái gì mà tôi dễ đếm?”

Example 13.4**Đếm trận đấu qua số trận thua**

In a double-elimination tournament, a team is eliminated as soon as it has lost two games, and there are no ties. Thirty-two teams enter, and games are played until only one team, the champion, remains. What is the greatest possible number of games played?

- (A) 31 (B) 32 (C) 62 (D) 63 (E) 64

SOLUTION • LỜI GIẢI · Answer: **(D) 63**

Đừng vẽ nhánh đấu — hãy đếm **số trận thua**: mỗi trận có đúng một đội thua, nên số trận bằng tổng số lần thua.

31 đội bị loại, mỗi đội thua đúng 2 trận: 62 lần thua. Nhà vô địch thua 0 hoặc 1 trận. Vậy số trận là 62 hoặc 63, lớn nhất là 63 — xảy ra khi nhà vô địch thua một trận (ví dụ ngay trận đầu) rồi thắng tất cả các trận sau. Đáp án (D).

Bấy: 31 là số trận của thể thức *loại trực tiếp*; 62 là quên trận thua có thể có của nhà vô địch; 64 là tính nhầm nhà vô địch cũng thua 2 trận (khi đó đội ấy đã bị loại).

Insight · “Mỗi trận sinh ra đúng một trận thua” — đổi đối tượng đếm từ trận đấu sang kết quả của trận.

K 13.3 Parity, Coloring and Invariants**Chẵn lẻ, tô màu và bất biến**

Nhiều câu hỏi AMC 8 có dạng “có làm được không?”, “giá trị nào có thể xảy ra?”. Thử mãi không ra chưa chứng minh được điều gì. Công cụ mạnh nhất cho loại câu này là tìm một đại lượng **không đổi** (hoặc chỉ đổi theo một cách biết trước) qua mọi bước: tính chẵn lẻ, màu của ô, tổng các số theo một số dư...

Definition — Parity (tính chẵn lẻ)

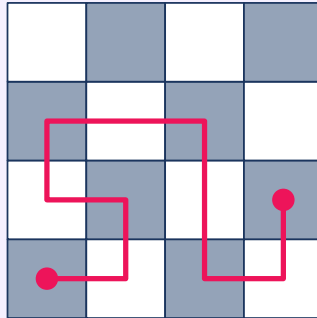
even $\pm$ even = even, odd $\pm$ odd = even, even $\pm$ odd = odd; a product is odd only if every factor is odd. A sum of integers is odd exactly when it contains an odd number of odd terms.

Hệ quả hay dùng: $a + b$ và $a - b$ luôn **cùng tính chẵn lẻ**; đổi dấu một số hạng không đổi tính chẵn lẻ của tổng.

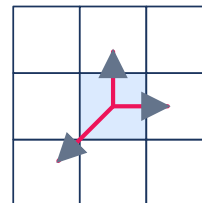
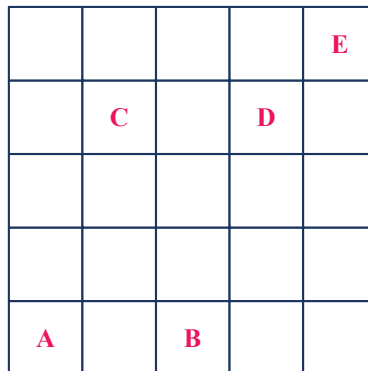
Theorem – Coloring argument (lập luận tô màu)

Color the cells of a board like a chessboard. Any path that moves between cells sharing a side alternates colors. Hence on a path visiting m cells, the numbers of cells of the two colors differ by at most 1; and after an odd number of moves the path is on the other color.

Tổng quát: nếu tô các vị trí bằng vài màu sao cho mỗi bước luôn chuyển sang màu “kế tiếp” theo một vòng cố định, thì trên đường đi các màu xuất hiện lần lượt, số lần xuất hiện của chúng chênh nhau không quá 1. So sánh với số ô mỗi màu trên bảng sẽ biết đường đi nào không thể có. Hình: đường đi qua 11 ô, xen kẽ 6 ô một màu và 5 ô màu kia.

**Example 13.5****Tô ba màu theo chu kỳ**

A robot stands on one square of the 5×5 board shown. In each move it goes one square to the right, one square up, or one square diagonally down and to the left (see the small picture). It wants to visit every square of the board exactly once. Which of the five marked squares could be its starting square?

**(A)** A**(B)** B**(C)** C**(D)** D**(E)** E**SOLUTION · LỜI GIẢI** · Answer: **(C)** C

Tô màu. Đánh số cột $x = 0, \dots, 4$ từ trái sang, hàng $y = 0, \dots, 4$ từ dưới lên, và tô ô (x, y) theo số dư của $x + y$ khi chia cho 3. Đi sang phải hay lên trên làm $x + y$ tăng 1; đi chéo xuống trái làm $x + y$ giảm 2 — theo môđun 3 cũng là tăng 1. Vậy màu thay đổi theo vòng $0 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$

Đếm. Trên đường đi qua 25 ô, màu của ô xuất phát xuất hiện 9 lần, hai màu kia mỗi màu 8 lần. Trên bảng, màu 0 có 8 ô, màu 1 có 9 ô, màu 2 có 8 ô. Vậy ô xuất phát phải có màu 1, tức $x + y$ chia 3 dư 1.

Các ô đánh dấu: $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (1, 3)$, $D = (3, 3)$, $E = (4, 4)$ có $x + y$ lần lượt là 0, 2, 4, 6, 8 — chỉ C dư 1.

Xây dựng. Hình dưới (tô màu theo số dư) đánh số một đường đi qua cả 25 ô xuất phát từ C. Đáp án (C).

10	11	12	13	14
9	1	2	15	16
8	3	4	17	24
7	5	18	25	23
6	19	20	21	22

Lưu ý: không phải ô màu 1 nào cũng xuất phát được (ví dụ ô giữa bảng thì không) — tô màu chỉ **loại** các ô sai; ô đúng phải được xác nhận bằng một đường đi cụ thể.

Insight · Khi mỗi bước làm một đại lượng tăng đều theo một môđun, hãy tô màu theo môđun đó và **đếm số ô mỗi màu**.

Key Idea — Invariant (bất biến)

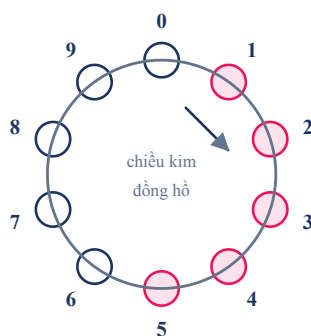
An invariant is a quantity that does not change when a move is made. If the starting position and a target position give different values of the invariant, the target can never be reached.

Cách tìm: viết ra một nước đi tổng quát, xem nó làm thay đổi **tổng, hiệu, số dư** hay **tính chẵn lẻ** của cái gì — đại lượng nào không đổi (hoặc chỉ đổi theo bội của một số cố định) chính là bất biến.

Example 13.6

Tổng theo môđun 10 không đổi

Ten stations, numbered 0 to 9, are equally spaced around a circle, as shown. Tokens sit on stations 1, 2, 3, 4, and 5, one on each. In a move, Minh chooses two tokens, moves one of them one station clockwise, and moves the other one station counterclockwise. Several tokens may share a station. For how many of the ten stations is it possible to bring all five tokens to that station?



- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 5 (E) 10

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: **(D)** 5

Bất biến. Gọi T là tổng số hiệu các trạm có quân. Mỗi nước đi cộng 1 vào một số và trừ 1 ở số kia (đi qua $9 \rightarrow 0$ hay $0 \rightarrow 9$ thì thay đổi ∓ 9 , vẫn là ± 1 theo môđun 10). Vậy **số dư của T khi chia cho 10 không đổi**. Ban đầu $T = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$, dư 5.

Nếu cả năm quân ở trạm s thì $T = 5s$, dư 0 khi s chẵn và dư 5 khi s lẻ. Vậy chỉ các trạm **lẻ** mới có thể.

Xây dựng. Gom về trạm 3: đẩy quân ở 1 theo chiều kim đồng hồ và quân ở 5 ngược chiều, lặp lại với hai quân đó và với cặp 2, 4: $(1, 2, 3, 4, 5) \rightarrow (2, 2, 3, 4, 4) \rightarrow (3, 2, 3, 4, 3) \rightarrow (3, 3, 3, 3, 3)$. Từ “cả năm quân ở s ” sang “cả năm ở $s + 2$ ”: cho một quân đi ngược chiều 8 bước (tức tiến 2 trạm) trong khi mỗi quân còn lại đi xuôi 2 bước — 8 nước. Vậy cả 5 trạm lẻ 1, 3, 5, 7, 9 đều được. Đáp án (D).

Bây: chỉ nghĩ tới trạm “ở giữa” là 3 thì chọn 1; quên kiểm tra bất biến thì chọn 10.

Insight · Bất biến loại bỏ các trạm chắn; nhưng để khẳng định các trạm lẻ **làm được**, phải chỉ ra cách đi.

Common Trap — Bất biến chỉ chứng minh được “không thể”

Bất biến cho biết trạng thái nào **không** đạt được. Nó không tự bảo đảm các trạng thái còn lại đạt được — muốn trả lời “có bao nhiêu trạng thái đạt được” phải **xây dựng** cách đi cho từng loại. Ngược lại, khi để chỉ hỏi “trạng thái nào không thể”, một bất biến là đủ.

K 13.4 The Pigeonhole Principle and the Worst Case

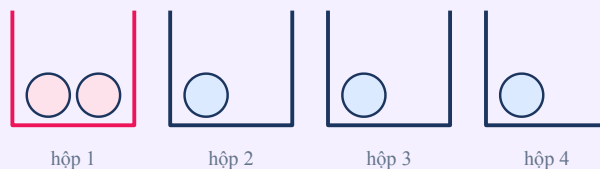
Nguyên lý Dirichlet và trường hợp xấu nhất

Câu hỏi “ít nhất bao nhiêu ... để **chắc chắn** ...” là tín hiệu của nguyên lý Dirichlet (pigeonhole principle). Đáp án luôn gồm hai nửa: (1) một **ví dụ xấu nhất** cho thấy với ít hơn thì chưa chắc; (2) một lập luận “chuồng – thỏ” cho thấy số đó là đủ.

Theorem — Pigeonhole Principle (nguyên lý Dirichlet)

If more than n objects are put into n boxes, some box contains at least 2 objects. More generally, if more than kn objects are put into n boxes, some box contains at least $k + 1$ objects.

Lý do: nếu hộp nào cũng có không quá k vật thì tổng số vật không quá kn . Ví dụ: 5 viên bi vào 4 hộp thì có hộp chứa ≥ 2 viên (hình); 31 viên bi vào 4 hộp thì có hộp chứa ≥ 8 viên vì $31 > 7 \cdot 4$.



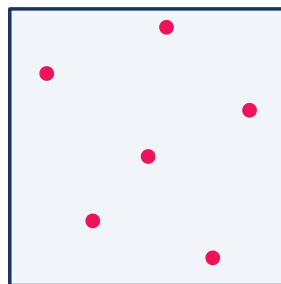
Tip — Nghệ thuật là chọn “chuồng”

Chuồng phải được thiết kế sao cho “hai vật cùng chuồng” **tự động** cho điều để muốn: cùng số dư, cùng một ô vuông nhỏ, cùng một nhóm số liên tiếp, cùng một cặp có tổng cố định... Nếu thấy cần $k + 1$ vật cùng chuồng, hãy dùng dạng tổng quát.

Example 13.7

Chuồng là các ô vuông nhỏ

What is the least positive integer n such that among any n points placed inside or on the boundary of a 3×3 square, there are always two points whose distance is at most $\sqrt{2}$?



(A) 5

(B) 9

(C) 10

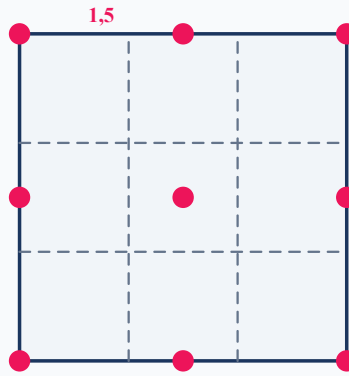
(D) 13

(E) 16

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 10

Đủ: chia hình vuông thành 9 ô vuông đơn vị (chuồng). Với 10 điểm, có hai điểm cùng một ô (điểm trên cạnh chung thì xếp vào một ô bất kỳ chứa nó). Hai điểm trong cùng một ô vuông cạnh 1 cách nhau không quá đường chéo $\sqrt{2}$.

Chưa đủ với 9: đặt 9 điểm có hai tọa độ đều thuộc $\{0; 1,5; 3\}$ — một lưới cách đều 1,5 (hình). Hai điểm gần nhất cách nhau $1,5 > \sqrt{2} \approx 1,414$.



Vậy $n = 10$. Đáp án (C). Bẫy: chọn 9 là quên rằng phải có **nhiều hơn** số chuồng.

Insight · Hai nửa của một bài Dirichlet: chuồng cho “đủ”, ví dụ xấu nhất cho “chưa đủ”.

Common Trap — “Chắc chắn” nghĩa là tính cho trường hợp xấu nhất

Đề hỏi số lần rút ít nhất để **chắc chắn** đạt mục tiêu: hãy đóng vai người xui nhất — rút được nhiều nhất bao nhiêu mà vẫn *chưa* đạt? Đáp án là số đó cộng 1. Hai lỗi thường gặp: quên cộng 1, và tưởng tượng một kịch bản “khá xui” thay vì kịch bản xui **nhất**.

Example 13.8

Chuồng là các bộ ba liên tiếp

Cards numbered $1, 2, 3, \dots, 30$ are in a bag. Lan draws cards without looking. What is the least number of cards she must draw to be sure that among the cards drawn there are three with consecutive numbers, such as 14, 15, 16?

(A) 11 (B) 16 (C) 20 (D) 21 (E) 28

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (D) 21

Trường hợp xấu nhất. Lan có thể rút 20 thẻ mà không có ba số liên tiếp: mọi số *không* chia hết cho 3 ($1, 2, 4, 5, 7, 8, \dots, 28, 29$) — giữa hai cặp liên tiếp luôn bị bội của 3 chen vào.

Chuồng. Chia $1-30$ thành 10 nhóm $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots, \{28, 29, 30\}$ (hình). Rút $21 = 2 \cdot 10 + 1$ thẻ thì theo dạng tổng quát của nguyên lý Dirichlet có một nhóm đủ cả 3 thẻ — ba số liên tiếp.

1 2 3	4 5 6	7 8 9	10 11 12	13 14 15
16 17 18	19 20 21	22 23 24	25 26 27	28 29 30

Đáp án (D). Bẫy: 20 là quên cộng 1; 11 là dùng dạng “hai vật cùng chuồng” thay vì “ba vật cùng chuồng”.

Insight · Muốn $k + 1$ vật cùng một chuồng thì cần $kn + 1$ vật; chuồng được chọn để “cùng chuồng” $\Rightarrow$ đúng điều cần chứng minh.

K 13.5 Extremes: Bound, then Build

Cực trị: chặn rồi xây dựng

Câu hỏi “lớn nhất / nhỏ nhất là bao nhiêu” luôn có **hai** việc phải làm. Chỉ tìm được một ví dụ tốt thì mới biết đáp án *ít nhất* là bấy nhiêu; chỉ có một bất đẳng thức thì chưa biết có đạt được không. Đáp án đúng là nơi hai việc gặp nhau.

Key Idea — Bound + construction (chặn + xây dựng)

To show that the maximum of a quantity is M : (1) prove that the quantity can never exceed M (a bound); (2) exhibit one example where it equals M (a construction). For a minimum, reverse the inequalities.

Ở AMC không cần viết chứng minh, nhưng tư duy hai bước này giúp loại đáp án: một ví dụ cho thấy đáp án không thể nhỏ hơn số đó, một lập luận chặn cho thấy không thể lớn hơn.

Common Trap — Tham lam (greedy) có thể sai

“Lấy cái lớn nhất có thể ở mỗi bước” là một cách **xây dựng** nhanh, nhưng không tự bảo đảm là tốt nhất. Với nhiều hệ mệnh giá quen thuộc tham lam cho kết quả tốt, nhưng với những mệnh giá “lạ” thì không — xem ví dụ dưới. Muốn khẳng định là tối ưu, vẫn phải có lập luận chặn.

Example 13.9**Khi tham lam thất bại**

In a board game, coins are worth 1, 5, and 12 points, as shown, and there are plenty of each kind. What is the least number of coins with a total value of exactly 39 points?



(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

(E) 8

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 5

Tham lam: lấy ba xu 12 (được 36), còn 3 điểm phải dùng ba xu 1: tổng 6 xu. Nhưng $12 + 12 + 5 + 5 + 5 = 39$ chỉ cần 5 xu.

Chặn: không thể dùng 4 xu. Nếu có nhiều nhất một xu 12 thì 4 xu có tổng không quá $12 + 5 + 5 + 5 = 27 < 39$. Nếu có đúng hai xu 12 thì hai xu còn lại (mỗi xu là 1 hoặc 5) phải có tổng 15 — không được vì tối đa là 10. Ba xu 12 thì xu còn lại phải là 3 — không có. Bốn xu 12 cho 48. Vậy ít nhất 5 xu. Đáp án (B).

Bấy: 6 là đáp số của cách tham lam.

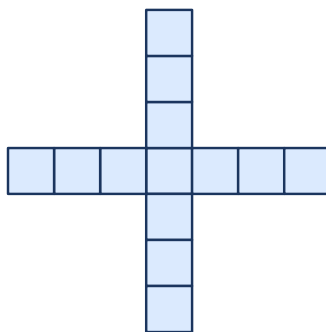
Insight · Một ví dụ chỉ cho cận trên; muốn chắc là ít nhất phải **chặn** được mọi cách dùng ít hơn.

Tip — Ba cách chặn hay gặp

(1) **Chia khối:** cắt hình/tập hợp thành các phần mà mỗi phần chứa nhiều nhất một (hoặc k) đối tượng — số phần là cận trên. (2) **Lấy trung bình:** đếm mỗi phần tử được tính bao nhiêu lần trong các tổng, suy ra tổng của tất cả các tổng; khi đó tổng lớn nhất không nhỏ hơn trung bình. (3) **Tô màu:** nếu mỗi đối tượng phải chiếm ít nhất một ô của một màu hiếm, số ô màu đó là cận trên. Sau khi chặn, nhìn vào **trường hợp dấu bằng** của lập luận để đoán cách xây dựng.

Example 13.10**Tô màu để chặn, xếp hình để đạt**

The plus-shaped figure shown is made of 13 unit squares: a center square and four arms of 3 squares each. What is the greatest number of 1×2 dominoes that can be cut from it, cutting only along grid lines?



(A) 4

(B) 5

(C) 6

(D) 7

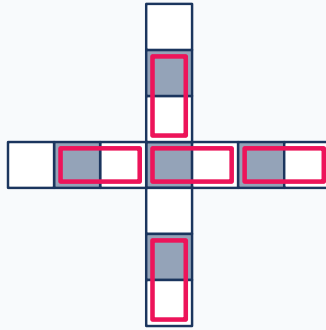
(E) 13

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (B) 5

Đếm ô thôi chưa đủ: 13 ô cho cận 6 quân domino, nhưng cận này không đạt.

Chặn bằng tô màu. Tô như bàn cờ với ô giữa màu xám. Trên mỗi nhánh, tính từ trong ra: trắng, xám, trắng. Vậy chỉ có $1 + 4 = 5$ ô xám (và 8 ô trắng). Mỗi quân domino phủ hai ô kề nhau, tức **một ô xám và một ô trắng**, nên có nhiều nhất 5 quân.

Xây dựng. Ô giữa ghép với ô đầu của một nhánh; ở nhánh đó hai ô còn lại thành một quân; ở mỗi nhánh khác, ô xám ở giữa ghép với một ô trắng bên cạnh. Được $1 + 1 + 3 = 5$ quân (hình).



Đáp án (B). Bấy: $6 = \lfloor 13/2 \rfloor$ là chỉ chia số ô cho 2.

Insight • Mỗi quân chiếm đúng một ô của màu hiếm $\Rightarrow$ số ô màu hiếm là cận trên — thường chặt hơn cận “tổng số ô chia 2”.

K

13.6 Multiple-Choice Tactics

Chiến thuật trắc nghiệm

AMC 8 có 25 câu trong 40 phút, mỗi câu 5 lựa chọn và không trừ điểm khi sai. Năm lựa chọn là **thông tin**: có thể thử chúng, dùng chúng để loại trừ, hoặc nhận ra rằng đáp số không phụ thuộc vào chi tiết nên được chọn giá trị đặc biệt. Đây là công cụ hỗ trợ — vẫn phải hiểu bài — nhưng thường tiết kiệm được vài phút quý giá.

Tip — Thử đáp án (backsolving)

Khi đề hỏi “số nào trong các số sau thỏa mãn ...” hoặc phương trình khó giải mà dễ kiểm tra, hãy thay từng lựa chọn vào. Lựa chọn số được xếp tăng dần, nên thử lựa chọn ở **giữa** trước: nếu nó quá lớn thì chỉ còn hai lựa chọn nhỏ hơn. Tốt hơn nữa: tìm một **tính chất** (chia hết, chẵn lẻ, số dư) loại nhiều lựa chọn cùng lúc.

Example 13.11

Thử lựa chọn ở giữa trước

What value of x satisfies $\sqrt{x+9} + \sqrt{x} = 9$?

- (A) 1 (B) 4 (C) 9 (D) 16 (E) 36

SOLUTION • LỜI GIẢI • Answer: (D) 16

Thử đáp án. Các lựa chọn đều là số chính phương — dấu hiệu nên thay vào. Thử lựa chọn ở giữa, $x = 9$: $\sqrt{18} + 3 \approx 4,24 + 3 = 7,24 < 9$, quá nhỏ. Vế trái tăng theo x , nên chỉ cần thử lớn hơn: $x = 16$ cho $\sqrt{25} + \sqrt{16} = 5 + 4 = 9$. Đáp án (D).

Cách đại số (để thấy vì sao nghiệm đẹp): nhân hai vế với $\sqrt{x+9} - \sqrt{x}$ được $9 = 9(\sqrt{x+9} - \sqrt{x})$, nên $\sqrt{x+9} - \sqrt{x} = 1$. Cộng với phương trình đề bài: $2\sqrt{x+9} = 10$, $x = 16$.

Insight • Thử lựa chọn **giữa** trước; nếu biểu thức đơn điệu thì một phép thử loại được hai lựa chọn khác.

Tip — Giá trị đặc biệt (special values)

Nếu đề ngầm khẳng định đáp số **không phụ thuộc** vào một đại lượng (“với mọi x ...”, “điểm P bất kỳ...”, chỉ cho tỉ số mà không cho từng số), hãy chọn giá trị dễ tính nhất cho đại lượng đó: 0, 1, 2, một trường hợp đối xứng, một điểm ở đỉnh hay trung điểm. Một phép tính nhỏ thay cho cả một chứng minh.

Key Idea — Loại trừ bằng “dấu vân tay” của đáp án

Before computing exactly, check cheap properties of the answer: its last digit, its parity, its remainder modulo 3, 4 or 9, its rough size. Every choice that fails one of them can be crossed out.

Ví dụ: tích hai số lẻ phải lẻ; một số chính phương chia 3 dư 0 hoặc 1; một kết quả ước lượng khoảng 400 thì loại ngay 40 và 4000.

Example 13.12**Dấu hiệu nhận biết số chính phương**

Exactly one of the following numbers is a perfect square. Which one?

- (A) 4637 (B) 5112 (C) 5329 (D) 6246 (E) 7541

SOLUTION · LỜI GIẢI · Answer: (C) 5329

Bình phương của một số nguyên chỉ tận cùng bằng 0, 1, 4, 5, 6, 9: loại 4637 (tận cùng 7) và 5112 (tận cùng 2).

6246 chẵn, nên nếu là số chính phương thì phải chia hết cho 4; nhưng hai chữ số cuối 46 không chia hết cho 4: loại.

7541 có tổng chữ số 17, chia 3 dư 2; mà số chính phương chia 3 chỉ dư 0 hoặc 1: loại.

Còn lại 5329; thật vậy $73^2 = 5329$. Đáp án (C).

Insight · Ba phép thử rẻ — chữ số tận cùng, chia hết cho 4, số dư khi chia 3 — loại được bốn lựa chọn mà không cần khai căn.

Common Trap — Giá trị đặc biệt chỉ hợp lệ khi đáp số thật sự không đổi

Nếu $x + y = 10$ thì $x^2 + y^2$ **không** cố định: $x = y = 5$ cho 50, còn $x = 0$, $y = 10$ cho 100. Trước khi chọn giá trị đặc biệt, chắc chắn rằng đề (hoặc các lựa chọn, vốn đều là hằng số) cho biết đáp số không phụ thuộc vào cách chọn. Khi nghi ngờ, thử **hai** bộ giá trị khác nhau: nếu ra hai kết quả khác nhau, cách hiểu đề của bạn đang sai.

1 Exercises 1 · Foundation**Bài tập 1 · Nền tảng**

- 13.1** In a video game, at each level a player's score is first doubled and then 15 points are subtracted. After three levels, Tú has 55 points. How many points did Tú have before the first level?
- (A) 10 (B) 20 (C) 25 (D) 35 (E) 40
- 13.2** A film starts at 7:45 p.m. Before it, Hà needs 40 minutes to eat dinner and then 25 minutes to travel to the cinema, and she wants to arrive 15 minutes before the film starts. What is the latest time she can start eating dinner?
- (A) 6:25 p.m. (B) 6:40 p.m. (C) 6:50 p.m. (D) 7:05 p.m. (E) 7:30 p.m.
- 13.3** Fifteen positive integers have a sum of 100. At most how many of them can be odd?
- ♦♦ (A) 7 (B) 12 (C) 13 (D) 14 (E) 15
- 13.4** A rectangle with whole-number side lengths has area 72 and perimeter 36. What is the length of its longer side?
- ♦ (A) 8 (B) 9 (C) 12 (D) 18 (E) 24
- 13.5** Twenty-five students take a quiz, and each receives a whole-number score from 0 to 10. What is the largest number k such that we can be sure that at least k students received the same score?
- ♦ (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 11
- 13.6** Vietnamese banknotes include notes worth 1, 2, 5, 10, 20, and 50 thousand đồng. What is the least number of these notes with a total value of exactly 88 thousand đồng?
- ♦ (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10
- 13.7** Mai has 20 matchsticks, each 1 cm long. She uses all of them to make the outlines of two separate rectangles; each side of each rectangle is made of whole matchsticks. What is the greatest possible total area of the two rectangles, in square centimeters?
- ♦♦ (A) 12 (B) 13 (C) 16 (D) 17 (E) 25

13.8 What is the value of x if $2^x + 3^x = 97$?

- (A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

13.9 If $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$, what is the value of $\frac{x+2y}{2x-y}$?

- (A) $\frac{7}{4}$ (B) 2 (C) 4 (D) 7 (E) 8

13.10 Which of the following is closest to $\frac{0.49 \times 3.98 \times 20.3}{0.101}$?

- (A) 0.04 (B) 0.4 (C) 4 (D) 40 (E) 400

13.11 On a straight road that runs east–west, the bank is 3 km east of the school. The park is 5 km west of the bank, the zoo is 6 km east of the park, and the library is 4 km west of the zoo. How many kilometers apart are the library and the school?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4 (E) 6

13.12 A badminton tournament starts with 45 players. In each match two players play, the loser is eliminated, and the winner stays in the tournament; when the number of players left is odd, one of them may wait for the next round. The tournament ends when only the champion is left. How many matches are played?

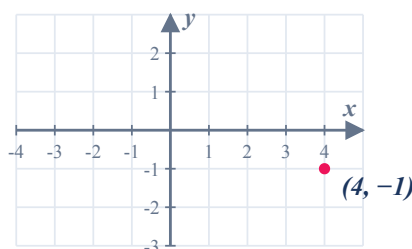
- (A) 22 (B) 23 (C) 44 (D) 45 (E) 90

2 Exercises 2 • Competition Core

Bài tập 2 • Trọng tâm kỳ thi



13.13 A point P is reflected over the x -axis. The image is then rotated 90° counterclockwise about the origin, and that image is moved 3 units to the right. The final point is $(4, -1)$, as shown. What are the coordinates of P ?

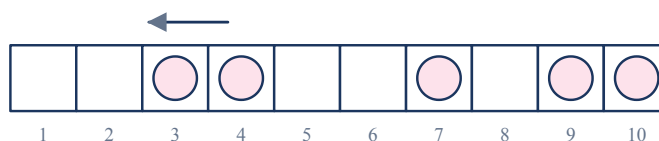


- (A) $(-2, -4)$ (B) $(-1, -1)$ (C) $(1, -1)$ (D) $(1, 1)$ (E) $(-1, 1)$

13.14 What is the sum of all the digits used in writing the integers from 1 to 999?

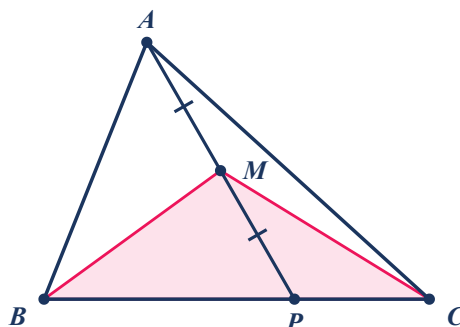
- (A) 4500 (B) 9000 (C) 13 500 (D) 13 527 (E) 27 000

13.15 Five checkers stand on cells 3, 4, 7, 9, and 10 of a strip of cells numbered 1 to 10, as shown. In a move, a checker slides one cell to the left onto an empty cell. Moves are made, in any order, until no move is possible. How many moves are made?



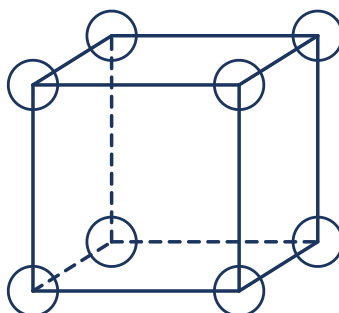
- (A) 5 (B) 10 (C) 15 (D) 18 (E) 33

- 13.16** Triangle ABC has area 72. Point P lies on side $\overline{BC}$, and M is the midpoint of $\overline{AP}$, as shown. What is the area of triangle MBC ?



- (A) 24 (B) 36 (C) 40 (D) 48 (E) 72

- 13.17** The integers 1, 2, ..., 8 are placed at the vertices of a cube, one at each vertex, as shown. For each of the 6 faces, the sum of the 4 numbers at the vertices of that face is computed. What is the least possible value of the largest of these six sums?



- (A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 20

- 13.18** The integers 1 to 9 are placed in a 3×3 grid, one in each cell. Lan computes the three row sums and the three column sums. What is the least possible number of odd numbers among these six sums?

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

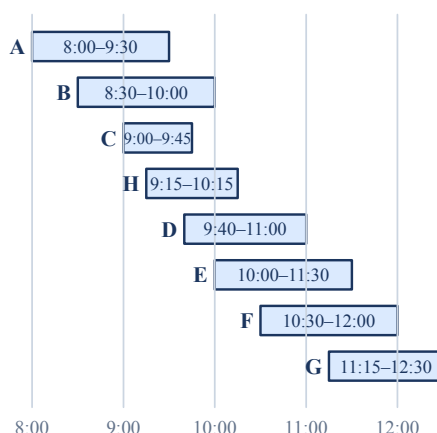
- 13.19** Which of the following is closest to $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{10}$?

- (A) 1.5 (B) 2 (C) 2.5 (D) 3 (E) 3.5

- 13.20** What is the least number of different integers that must be chosen from 1, 2, 3, ..., 50 to be sure that two of the chosen integers have a sum divisible by 7?

- (A) 8 (B) 9 (C) 23 (D) 24 (E) 26

- 13.21** ♦♦ The chart shows the times of eight meetings, A to H , at a company on one day. Each meeting needs a room for its whole duration, and two meetings cannot use the same room at the same time; a room that becomes free at some time can be used by a meeting that starts at that same time. What is the least number of rooms needed?



- (A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8
- 13.22** ♦♦ For every integer n , which of the following expressions is always even?
 (A) $n^2 + 3n$ (B) $n^2 + n + 1$ (C) $3n + 1$ (D) $n^3 + n + 1$ (E) $2n^2 + n$
- 13.23** ♦♦ What is the greatest number of integers that can be chosen from $1, 2, 3, \dots, 20$ so that no two chosen integers differ by 1 or by 2?
 (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 10 (E) 13
- 13.24** ♦♦ Which of the following is closest to $\frac{2^{20}}{3^{12}}$?
 (A) 1 (B) 2 (C) 4 (D) 8 (E) 16
- 13.25** ♦♦ Eight points are marked on a circle whose circumference is 24 cm. What is the least number d such that, however the eight points are placed, some two of them are at most d cm apart, measured along the circle?
 (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 12
- 13.26** ♦♦ Starting at the top-left square S of the grid shown and moving only right or down, one square at a time, Nam walks to the bottom-right square E and adds up the numbers on all the squares he visits, including S and E . What is the greatest possible sum?

S	2	1	8	3
	6	2	9	1
	1	5	2	7
	4	9	1	3
				E

- (A) 27 (B) 28 (C) 30 (D) 31 (E) 32

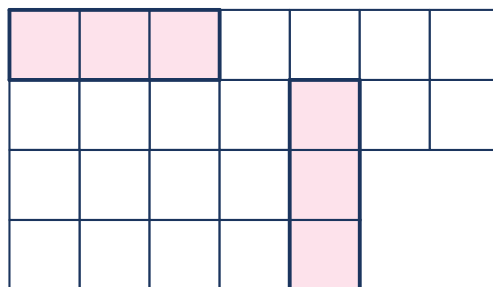
3

Exercises 3 • Challenge

Bài tập 3 • Thử thách



- 13.27** The figure shows a 4×7 board from which a 2×2 square has been cut off at one corner, leaving 24 unit squares. Straight pieces, each covering three unit squares in a row or three unit squares in a column (two of them are shown shaded), are to be placed on the board without overlapping, each covering three whole squares of the board. What is the greatest number of pieces that can be placed?

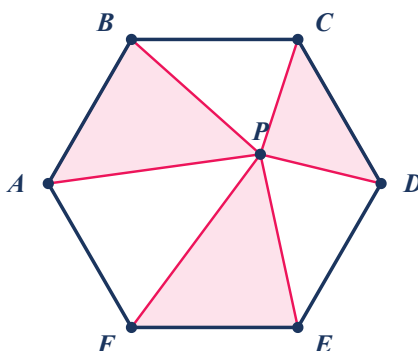


(A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 9

- 13.28** Every student in a class joins at least one of four clubs: Art, Band, Chess, and Drama. What is the least number of students the class must have to be sure that there are two students such that every club joined by the first of them is also joined by the second?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 15 (E) 16

- 13.29** Regular hexagon $ABCDEF$ has area 48. Point P is any point inside the hexagon, as shown. What is the sum of the areas of triangles PAB , PCD , and PEF ?



(A) 12 (B) 16 (C) 20 (D) 24 (E) 32

- 13.30** The cells of a long strip are numbered 1, 2, 3, ... from left to right, and 100 chips are placed on cell 1. In a move, Bảo chooses a cell holding at least two chips, removes two chips from it, and puts one chip on the next cell to the right. He keeps making moves until no move is possible. How many moves does he make?



(A) 3 (B) 97 (C) 98 (D) 99 (E) 100

- 13.31** The integers 1, 2, 3, 4, 5, 6 are written in a row in some order. For each of the five pairs of neighbors, Lan multiplies the two numbers, and then she adds the five products. What is the greatest possible value of this sum?

(A) 70 (B) 76 (C) 78 (D) 80 (E) 82

- 13.32** Some of the integers 1, 2, 3, ..., 30 are chosen so that no chosen integer is equal to the sum of two different chosen integers. What is the greatest possible number of chosen integers?

(A) 10 (B) 12 (C) 14 (D) 15 (E) 16

- 13.33** ♦♦♦ The integers $1, 2, 3, \dots, 9$ are placed around a circle in some order, one at each of nine equally spaced points. For each of the nine pairs of neighbors, Minh subtracts the smaller number from the larger one, getting nine differences. Which of the following statements is true for every such placement?
- (A) At least one of the differences is even.
(B) At least two of the differences are even.
(C) At least one of the differences is a multiple of 3.
(D) At least one of the differences equals 1.
(E) At least one of the differences equals 2.
- 13.34** ♦♦♦ The numbers $1, 2, 3, \dots, 10$ are written on a board. A move consists of erasing two of the numbers and writing their positive difference in their place (or 0 if the two numbers are equal). After 9 moves a single number remains. What is the sum of all possible values of this number?
- (A) 5 (B) 9 (C) 16 (D) 20 (E) 25
- 13.35** ♦♦♦ For how many positive integers $n \leq 100$ is n divisible by the largest integer whose square is at most n ? (For example, for $n = 10$ that integer is 3, and 10 is not divisible by 3.)
- (A) 26 (B) 27 (C) 28 (D) 30 (E) 31
- 13.36** ♦♦♦ If $a + b + c = 0$ and $abc \neq 0$, what is the value of $\frac{a^3 + b^3 + c^3}{abc}$?
- (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 9 (E) 27

Practice Test 1

8020 AMC 8 Mastery

Full Practice Test 1

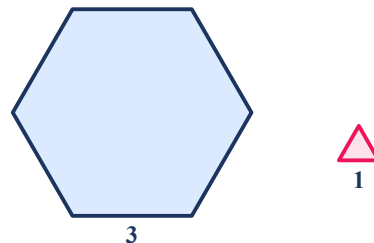
Đề thi thử 1

Đề thi thử đầy đủ đầu tiên: 25 câu, 40 phút, đúng cấu trúc và đường cong độ khó của AMC 8 — câu 1–5 khởi động, 6–12 trung bình, 13–19 khó dần, 20–25 phân loại. Đề trộn đủ các mảng (lời văn và tính toán, đại số và quy luật, số học, đếm–xác suất–thống kê, hình học) và cần kiến thức của cả 13 chương. Hãy làm trong một lần ngồi, bấm giờ, không máy tính; rồi đọc lời giải ở cuối sách cho mọi câu sai và mọi câu đoán.

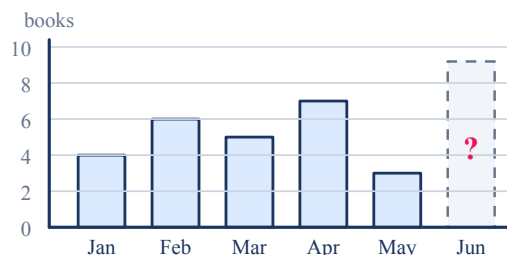
Time: 40 minutes · 25 questions · No calculators. Scoring: 1 point for each correct answer, no penalty for wrong answers (maximum 25). Figures are drawn accurately unless stated otherwise.

Thời gian 40 phút · 25 câu · không dùng máy tính. Mỗi câu đúng 1 điểm, câu sai không bị trừ điểm — đừng bỏ trống câu nào. Mốc tham khảo: các câu 1–15 nên làm chắc trong khoảng 20 phút để dành thời gian cho phần cuối.

- 1 What is the value of $99 \times 101 - 98 \times 102$?
 (A) 0 (B) 1 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- 2 A single bus ticket costs 7 000 đồng, and a monthly bus pass costs 180 000 đồng. Minh takes the bus to school and back home on each of the 22 school days in a month, and he takes no other bus rides. How many đồng does he save that month by buying the pass instead of single tickets?
 (A) 128 000 (B) 154 000 (C) 240 000 (D) 308 000 (E) 488 000
- 3 A regular hexagon with side length 3 is cut, with no gaps or overlaps, into equilateral triangles with side length 1. How many small triangles are there?

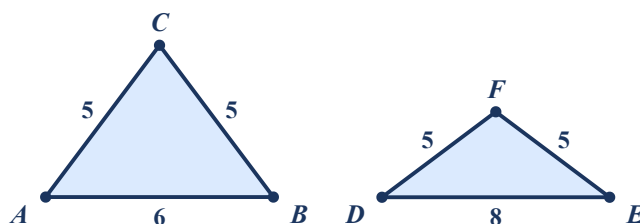


- (A) 9 (B) 18 (C) 27 (D) 36 (E) 54
- 4 The bar graph shows how many books Lan read in each of the first five months of the year; the bar for June is hidden. Lan read 20% more books in April, May, and June together than in January, February, and March together. How many books did she read in June?

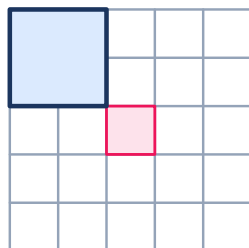


- (A) 5 (B) 8 (C) 15 (D) 18 (E) 25

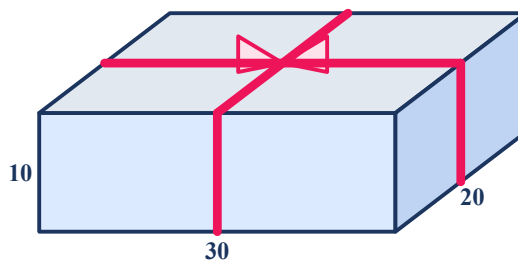
- 5 ♦♦ The four-digit number $\overline{7a2b}$, with digits 7, a , 2, b in that order, is divisible by 36. How many such four-digit numbers are there?
 (A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 12 (E) 30
- 6 ♦♦ Mai will paint one wall of her room, which is 4.5 meters wide and 2.4 meters high. The wall has a door 0.9 meter wide and 2 meters high, which will not be painted. The wall needs two coats of paint, and one can of paint covers 4 square meters with one coat. What is the least number of cans Mai must buy?
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5 (E) 6
- 7 ♦♦ All apples have the same weight, and all pears have the same weight. Three apples and two pears together weigh 760 grams, and two apples and three pears together weigh 740 grams. How many grams do one apple and one pear weigh together?
 (A) 20 (B) 140 (C) 150 (D) 160 (E) 300
- 8 ♦♦ Triangle ABC has side lengths 5, 5, and 6, and triangle DEF has side lengths 5, 5, and 8, as shown. What is the ratio of the area of $\triangle ABC$ to the area of $\triangle DEF$?



- (A) $\frac{9}{16}$ (B) $\frac{3}{4}$ (C) 1 (D) $\frac{4}{3}$ (E) $\frac{16}{9}$
- 9 ♦♦ A 2×2 block of four unit squares is chosen at random from the 5×5 grid shown, with all such blocks equally likely (one block is outlined). What is the probability that the chosen block contains the center square of the grid, which is shaded?



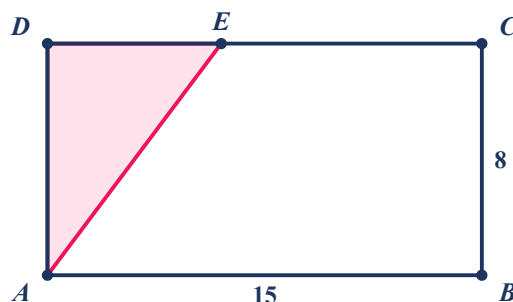
- (A) $\frac{1}{25}$ (B) $\frac{1}{16}$ (C) $\frac{1}{9}$ (D) $\frac{4}{25}$ (E) $\frac{1}{4}$
- 10 ♦♦ A closed box is 30 cm long, 20 cm wide, and 10 cm high. A ribbon is tied around the box as shown: it crosses itself at the center of the top face and at the center of the bottom face, and every piece of it lies flat against the box, parallel to an edge. The bow uses another 25 cm of ribbon. How many centimeters of ribbon are used in all?



- (A) 140 (B) 145 (C) 165 (D) 185 (E) 205

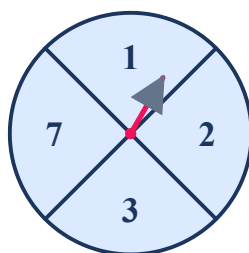
- 11 What is the largest prime factor of $3^5 + 5^3$?
- ♦♦ (A) 23 (B) 46 (C) 92 (D) 184 (E) 368

- 12 Rectangle $ABCD$ has $AB = 15$ and $BC = 8$. Point E lies on side $\overline{CD}$ so that the area of the shaded triangle ADE is $\frac{1}{5}$ of the area of the rectangle. What is the perimeter of quadrilateral $ABCE$?
- ♦♦♦



- (A) 40 (B) 42 (C) 46 (D) 48 (E) 56

- 13 The spinner shown has four equal sections labeled 1, 2, 3, and 7. Lan spins it twice; the first result is the tens digit and the second result is the units digit of a two-digit number. What is the probability that this number is prime?
- ♦♦♦



- (A) $\frac{5}{16}$ (B) $\frac{7}{16}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{9}{16}$ (E) $\frac{3}{4}$

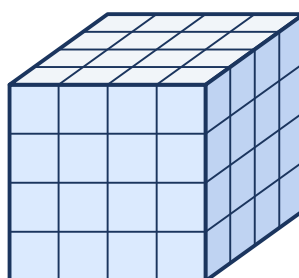
- 14 A class is buying a gift for its teacher. If each student pays 15 000 đồng, the class will be 20 000 đồng short. If each student pays 18 000 đồng, the class will have 25 000 đồng left over. How many đồng does the gift cost?
- ♦♦♦

- (A) 245 000 (B) 250 000 (C) 270 000 (D) 290 000 (E) 295 000

- 15 For how many prime numbers p is $p^2 + 14$ also a prime number?

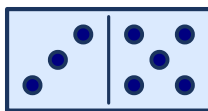
- ♦♦♦ (A) 0 (B) 1
(C) 2 (D) 3
(E) infinitely many

- 16 A $4 \times 4 \times 4$ cube is built from 64 unit cubes, as shown. What is the greatest number of unit cubes that can be seen, at least in part, from a single point outside the large cube?
- ♦♦♦

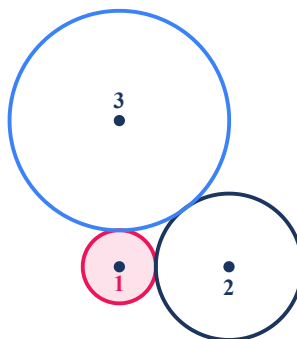


- (A) 16 (B) 27 (C) 36 (D) 37 (E) 48

- 17** ♦♦♦ A standard set of dominoes has exactly one tile for each pair of numbers of dots from 0 to 6, doubles such as 4|4 included, so it has 28 tiles; the tile 3|5 is shown. One tile is chosen at random from the set. What is the probability that the total number of dots on it is at least 8?

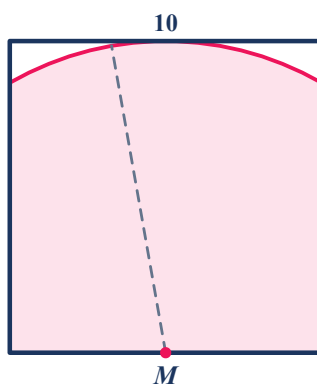


- (A) $\frac{3}{14}$ (B) $\frac{2}{7}$ (C) $\frac{15}{49}$ (D) $\frac{9}{28}$ (E) $\frac{5}{12}$
- 18** ♦♦♦ A 40-liter tank is full of a drink that is 25% juice. Some of the drink is drained out, and then the same amount of pure juice is poured in, so the tank is full again. The drink is now 40% juice. How many liters were drained?
- (A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 16 (E) 24
- 19** ♦♦♦ Three circles with radii 1, 2, and 3 are each externally tangent to the other two, as shown. What is the area of the triangle whose vertices are the centers of the three circles?

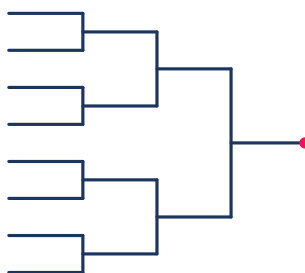


- (A) 6 (B) 7.5 (C) 10 (D) 12 (E) 24
- 20** ♦♦♦ A store lowers the price of a television by the same percent at the end of every month. After two months, the price has fallen from 625 thousand đồng to 400 thousand đồng. What will the price be, in thousand đồng, after four months (counted from the start)?
- (A) 125 (B) 144 (C) 175 (D) 225 (E) 256
- 21** ♦♦♦ Bảo has a pile of 2026 coins. Every minute he takes away half of the coins in the pile; when the pile has an odd number of coins, he rounds up (for example, from a pile of 7 coins he takes away 4). After how many minutes is the pile empty for the first time?
- (A) 2 (B) 8 (C) 10 (D) 11 (E) 12

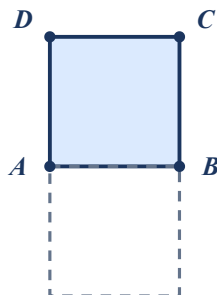
- 22** A square field has side length 10 meters and a fence along all four sides. A goat inside the field is tied to the midpoint M of one side with a rope 10 meters long. What is the area, in square meters, of the part of the field that the goat can reach (shaded)? (The goat cannot go through the fence.)



- (A) $25\sqrt{3}$ (B) $\frac{50\pi}{3}$ (C) $\frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{50\pi}{3}$ (D) $25\sqrt{3} + \frac{50\pi}{3}$ (E) 50π
- 23** Eight players enter a knockout tournament. They are placed at random into the 8 starting positions of the bracket shown; in each match the loser leaves and the winner moves on. Every player wins each match with probability $\frac{1}{2}$, independently. What is the probability that Lan and Minh, two of the players, play each other at some point in the tournament?



- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{5}{14}$ (C) $\frac{3}{7}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 1
- 24** Square $ABCD$ is shown. How many squares in the plane, including $ABCD$ itself, have at least two of their vertices among the four points A , B , C , and D ? (One such square is drawn dashed.)



- (A) 5 (B) 9 (C) 11 (D) 12 (E) 13
- 25** In how many ways can 12 be written as an ordered sum of one or more odd positive integers? (For example, $3 + 9$, $9 + 3$, and $1 + 1 + \dots + 1$ with twelve 1s are three different ways.)
- (A) 15 (B) 89 (C) 144 (D) 233 (E) 2048

Practice Test 2

8020 AMC 8 Mastery

Full Practice Test 2

Đề thi thử 2

Đề thi thử đầy đủ thứ hai của sách: 25 câu, 40 phút, đúng cấu trúc và đường cong độ khó của AMC 8 — câu 1–5 khởi động, 6–12 trung bình, 13–19 khó, 20–25 phân loại. Để trộn đủ các mảng (5 số học–lời văn, 4 đại số–quy luật, 4 số học, 4 đếm–xác suất–thống kê, 8 hình học). Nhiều câu cài “bẫy đọc đề”: đếm khoảng hay đếm tầng, đếm lớp dây hay đếm mẫu dây, ít nhất hay nhiều nhất — khi chữa, ghi lại mình rơi vào bẫy nào. Làm trong một lần ngồi, bấm giờ, không máy tính.

Time: 40 minutes · 25 questions · No calculators. Scoring: 1 point for each correct answer; no points are taken off for wrong answers (maximum 25). Figures are drawn accurately unless stated otherwise.

Thời gian 40 phút · 25 câu · không dùng máy tính. Mỗi câu đúng được 1 điểm, câu sai không bị trừ điểm — vì vậy đừng bỏ trống câu nào: loại bớt phương án rồi chọn.

- 1 What is the value of

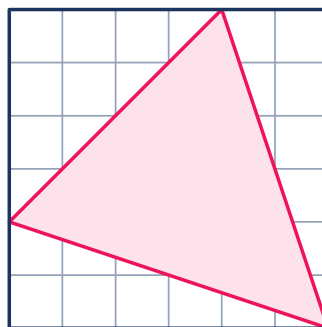
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} ?$$

- (A) $\frac{1}{14}$ (B) $\frac{4}{5}$ (C) $\frac{5}{6}$ (D) $\frac{6}{7}$ (E) $\frac{29}{30}$

- 2 In Lan's apartment building, each flight of stairs from one floor to the next floor has 16 steps. Lan walks up the stairs from the 2nd floor to the 9th floor, and then walks down to the 5th floor. How many steps does she walk in all?

- (A) 48 (B) 64 (C) 112 (D) 128 (E) 176

- 3 The large square shown is a 6×6 grid of unit squares. The vertices of the shaded triangle are grid points. What fraction of the large square is shaded?



- (A) $\frac{4}{9}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{5}{9}$ (D) $\frac{2}{3}$ (E) $\frac{8}{9}$

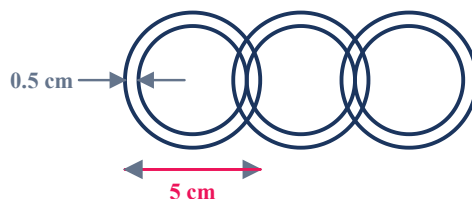
- 4 Minh's piggy bank contains only 1000-đồng, 2000-đồng, and 5000-đồng notes. He has the same number of notes of each kind, and the total value is 120 000 đồng. How many notes does he have in all?

- (A) 15 (B) 45 (C) 60 (D) 68 (E) 120

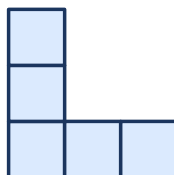
- 5 How many three-digit multiples of 45 have three different digits, none of which is 0?

- (A) 2 (B) 6 (C) 9 (D) 15 (E) 20

- 6 Identical metal rings, each 5 cm across on the outside and made of wire 0.5 cm thick, are linked in a straight chain and pulled tight. A chain of 3 rings is shown. How many centimeters long is a chain of 20 rings?

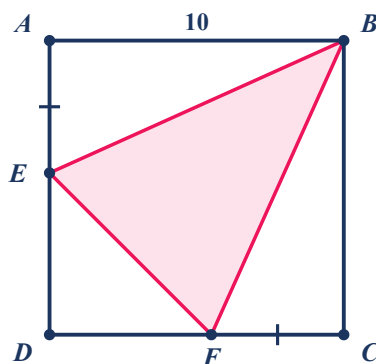


- (A) 80 (B) 81 (C) 90.5 (D) 99 (E) 100
- 7 A bookstore sells notebooks for 12 thousand đồng each, with this offer: in any single purchase, every third notebook costs half price (so 3 notebooks cost 30 thousand đồng). Bảo buys 10 notebooks in a single purchase. How many thousand đồng does he pay?
- (A) 90 (B) 96 (C) 100 (D) 102 (E) 114
- 8 The members of a chess club have a mean age of 30 years. A new member who is 60 years old joins the club, and the mean age of all the members becomes 32 years. How many members did the club have before the new member joined?
- (A) 14 (B) 15 (C) 28 (D) 29 (E) 30
- 9 Five congruent squares are joined to form the L-shaped figure shown. The figure has perimeter 48. What is its area?

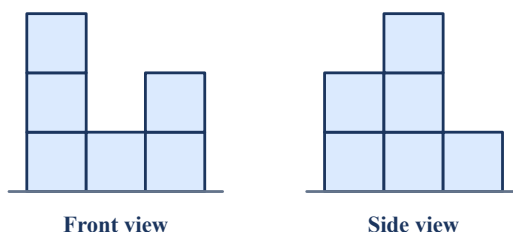


- (A) 20 (B) 28.8 (C) 80 (D) 115.2 (E) 144
- 10 Mai has some marbles in box A and some in box B . If she moves 6 marbles from box A to box B , the two boxes will have the same number of marbles. If instead she moves 6 marbles from box B to box A , box A will have twice as many marbles as box B . How many marbles are there in the two boxes altogether?
- (A) 30 (B) 42 (C) 48 (D) 54 (E) 72
- 11 The 0 key on Mai's calculator is broken, so she cannot type any number that contains the digit 0. How many of the whole numbers from 1 to 500 can she type?
- (A) 86 (B) 324 (C) 405 (D) 414 (E) 450
- 12 A long piece of string is folded in half, then folded in half again, and then folded in half a third time, so that all the layers lie together in a bundle. The bundle is then cut straight across at two different places, neither of them at a fold or at an end. Into how many pieces is the string cut?
- (A) 13 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 24

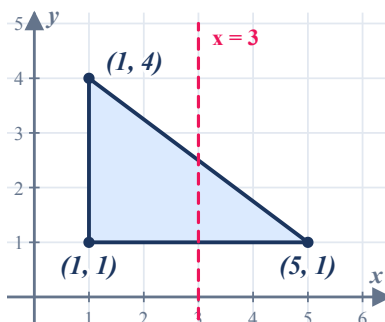
- 13** Square $ABCD$ has side length 10. Point E lies on side $\overline{AD}$ and point F lies on side $\overline{CD}$ so that $AE = CF$. The area of $\triangle BEF$ is 32. What is AE ? (The figure is not drawn to scale.)



- (A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 6.8 (E) 18
- 14** Real numbers x and y satisfy $x + y = 6$ and $x^2 + y^2 = 30$. What is the value of $x^3 + y^3$?
- (A) 162 (B) 180 (C) 207 (D) 216 (E) 270
- 15** A solid is built from unit cubes stacked in columns on a 3×3 square grid (some squares of the grid may have no cubes). The views of the solid from the front and from the right side are shown; each view shows the height of the tallest column in each row or column of the grid. What is the least possible number of cubes in the solid?

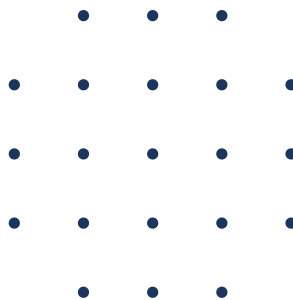


- (A) 6 (B) 12 (C) 14 (D) 18 (E) 27
- 16** At a school dance there were 30 students. Every boy danced with exactly 3 girls, and every girl danced with exactly 2 boys. (Each dance is one boy dancing with one girl, and no pair danced together twice.) How many different boy-girl pairs danced together?
- (A) 36 (B) 45 (C) 60 (D) 72 (E) 90
- 17** The triangle with vertices $(1, 1)$, $(5, 1)$, and $(1, 4)$ is reflected across the line $x = 3$. What is the area of the region that lies inside both the original triangle and its reflection?

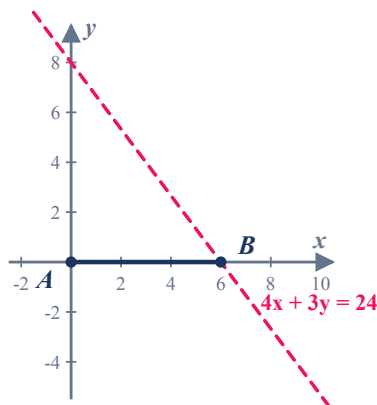


- (A) 1.5 (B) 3 (C) 5 (D) 6 (E) 9
- 18** A six-digit number is formed by writing the same two-digit number three times in a row; for example, 474747 and 101010 are formed this way. How many positive integers divide every six-digit number formed in this way?
- (A) 2 (B) 4 (C) 8 (D) 15 (E) 16

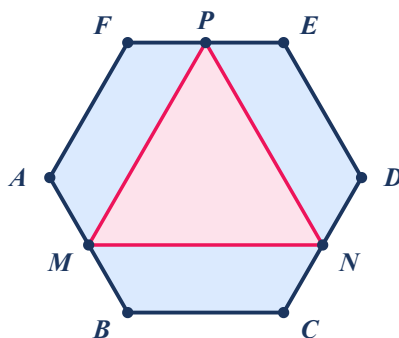
- 19** The seven letters of the word ROTATOR are written on seven cards, one letter per card. The cards are shuffled and laid out in a row. What is the probability that the row of letters reads the same from left to right as from right to left?
- (A) $\frac{1}{5040}$ (B) $\frac{1}{840}$ (C) $\frac{1}{630}$ (D) $\frac{1}{105}$ (E) $\frac{4}{105}$
- 20** The 21 points shown are arranged in a cross shape on a square grid with spacing 1. How many squares (of any size and in any position, not necessarily with horizontal sides) have all four vertices among these 21 points?



- (A) 17 (B) 26 (C) 29 (D) 35 (E) 37
- 21** Points $A = (0, 0)$ and $B = (6, 0)$ are shown, together with the line $4x + 3y = 24$, which passes through B . Point C lies on this line. For how many positions of C is $\triangle ABC$ an isosceles triangle?



- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5
- 22** Regular hexagon $ABCDEF$ has area 72. Points M , N , and P are the midpoints of sides $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, and $\overline{EF}$, respectively. What is the area of $\triangle MNP$?

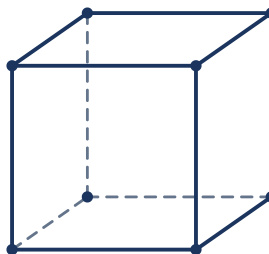


- (A) 9 (B) 12 (C) 18 (D) 27 (E) 36
- 23** What is the tens digit of the product of all the odd numbers from 1 to 99,

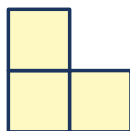
$$1 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times 97 \times 99?$$

- (A) 0 (B) 2 (C) 3 (D) 5 (E) 7

- 24** Each of the 8 vertices of a cube is to be colored red or blue so that every one of the 6 faces of the cube has exactly 2 red vertices. In how many ways can this be done? (Colorings that differ by a rotation of the cube are counted as different.)



- (A) 6 (B) 8 (C) 12 (D) 14 (E) 70
- 25** What is the sum of all integers n with $1 \leq n \leq 12$ for which an $n \times n$ square can be covered completely, without gaps or overlaps, by copies of the L-shaped piece shown? (The piece is made of three unit squares; copies may be turned or flipped.)



- (A) 18 (B) 21 (C) 27 (D) 30 (E) 78

Practice Test 3

8020 AMC 8 Mastery

Full Practice Test 3

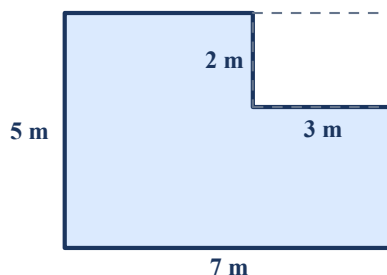
Đề thi thử 3

Đề thi thử đầy đủ thứ ba: 25 câu, 40 phút, cấu trúc và đường cong độ khó như AMC 8 thật. Đề này nghiêng về những chỗ học sinh hay mất điểm vì đọc vội: đổi đơn vị, đếm khoảng nghỉ, phép toán không kết hợp, giả thiết ngầm cần kiểm tra lại (khối chìm hay nổi?), và hai câu cuối cần một ý tưởng chứ không cần tính nhiều. Làm trong một lần ngồi, bấm giờ, không máy tính; rồi đọc lời giải cho mọi câu sai và mọi câu đoán.

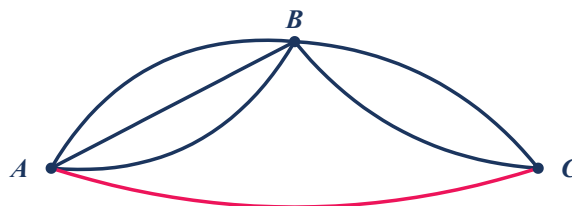
Time: 40 minutes · 25 questions · No calculators. Scoring: 1 point for each correct answer, no penalty for wrong answers (maximum 25). Figures are drawn accurately unless stated otherwise.

Thời gian 40 phút · 25 câu · không dùng máy tính. Mỗi câu đúng 1 điểm, câu sai không bị trừ điểm — đừng bỏ trống câu nào. Gợi ý phân bổ: khoảng 15 phút cho câu 1–12, khoảng 25 phút cho câu 13–25; câu nào kẹt quá 2 phút thì đánh dấu, làm tiếp, quay lại sau.

- 1 How many minutes are there in 2.5% of a day?
 ♦ (A) 0.6 (B) 3.6 (C) 6 (D) 36 (E) 60
- 2 A school morning runs from 7:30 to 11:15. It has 5 lessons of equal length and a break between every two consecutive lessons. The break after the third lesson lasts 20 minutes, and every other break lasts 5 minutes. How many minutes long is each lesson?
 ♦ (A) 38 (B) 39 (C) 41 (D) 42 (E) 45
- 3 The floor of a room is the L-shaped region shown: a 7 m by 5 m rectangle with a 3 m by 2 m corner missing. It is covered exactly by square tiles with side length 50 cm. How many tiles are used?
 ♦

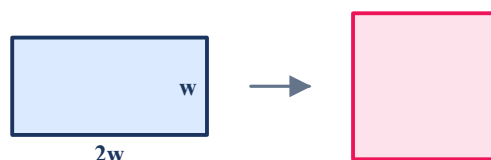


- (A) 29 (B) 58 (C) 96 (D) 116 (E) 140
- 4 The map shows all the roads between towns A , B , and C : three roads join A and B , two roads join B and C , and one road joins A and C directly. Minh travels from A to C and then back to A . On each of the two legs he passes through each town at most once, and in the whole trip he never uses the same road twice. How many different round trips can he make?
 ♦♦

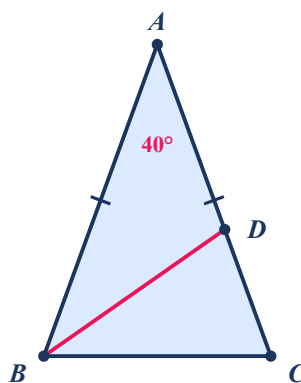


- (A) 24 (B) 25 (C) 42 (D) 48 (E) 49

- 5 How many perfect cubes are greater than 2^{10} and less than 2^{20} ?
 ♦♦ (A) 89 (B) 90 (C) 91 (D) 100 (E) 101
- 6 Mai is now 3 times as old as her brother Bảo. In 4 years, the sum of their ages will be 32. How old was Mai when she was 5 times as old as Bảo?
 ♦♦ (A) 15 (B) 18 (C) 20 (D) 22 (E) 30
- 7 The sequence 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1, 2, ... goes up from 1 to 5, back down to 1, up to 5 again, and so on. What is the sum of the first 2026 terms?
 ♦♦ (A) 5626 (B) 6072 (C) 6073 (D) 6075 (E) 6096
- 8 A piece of wire 60 cm long is bent to form a rectangle whose length is twice its width. The wire is then straightened and bent again to form a square. By how many square centimeters is the area of the square greater than the area of the rectangle?

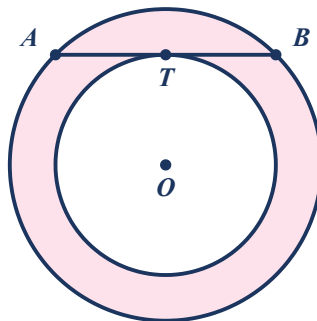


- (A) 25 (B) 100 (C) 200 (D) 225 (E) 900
- 9 In a class election, each of the 25 students votes for exactly one of 4 candidates. When the votes are counted, no two candidates have the same number of votes. What is the least number of votes the winner could have received?
 ♦♦ (A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 10 (E) 13
- 10 In $\triangle ABC$, $AB = AC$ and $\angle BAC = 40^\circ$. Point D lies on side $\overline{AC}$ so that $\overline{BD}$ bisects $\angle ABC$, as shown. What is the degree measure of $\angle ADB$?
 ♦♦



- (A) 35 (B) 40 (C) 70 (D) 75 (E) 105
- 11 For numbers a and b , define $a \diamond b = ab - a + b$. For what value of x is $(x \diamond 2) \diamond 3 = 31$?
 ♦♦ (A) 4 (B) 12 (C) 19 (D) 24 (E) 29
- 12 How many positive integers less than 2026 have no common factor greater than 1 with 2026?
 ♦♦ (A) 1011 (B) 1012 (C) 1013 (D) 2024 (E) 2025

- 13** Two circles have the same center O . Chord $\overline{AB}$ of the larger circle has length 12 and is tangent to the smaller circle at T , as shown. The shaded ring between the two circles has the same area as the smaller circle. What is the area of the larger circle?

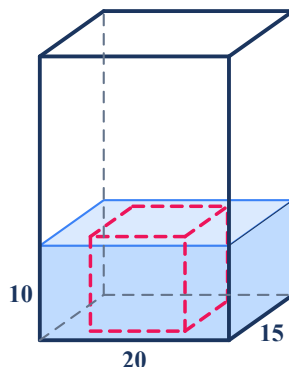


- (A) 12π (B) 36π (C) 48π (D) 72π (E) 144π
- 14** The mean of Lan's first four test scores is 7. Her score on the fifth test is 2 points higher than the mean of all five scores. What was her score on the fifth test?
- (A) 4.5 (B) 7.5 (C) 9 (D) 9.4 (E) 9.5
- 15** A hallway has 100 closed lockers numbered 1 to 100, and a class has 100 students numbered 1 to 100. One day only the students with *odd* numbers come. One at a time, each of them walks down the hallway and changes every locker whose number is a multiple of his or her own number (opening it if it is closed, closing it if it is open). How many lockers are open at the end?
- (A) 5 (B) 7 (C) 10 (D) 11 (E) 17
- 16** How many integers x satisfy $|x - 3| + |x + 5| \leq 12$?
- (A) 8 (B) 9 (C) 11 (D) 12 (E) 13
- 17** Two different cards are chosen at random from the eight cards shown. What is the probability that the product of the two numbers is a multiple of 6?



- (A) $\frac{3}{28}$ (B) $\frac{1}{7}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{21}{64}$ (E) $\frac{5}{14}$
- 18** For how many positive integers n is $\frac{n+18}{n-2}$ an integer?
- (A) 5 (B) 6 (C) 7 (D) 8 (E) 12

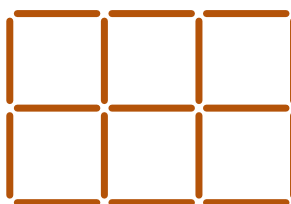
- 19** A glass tank in the shape of a rectangular box is 30 cm tall, has a 20 cm by 15 cm base, and contains water 10 cm deep. A solid metal cube with edge length 10 cm is placed on the bottom of the tank, as shown. What is the new depth of the water, in centimeters?



- (A) $\frac{10}{3}$ (B) $\frac{31}{3}$ (C) $\frac{40}{3}$ (D) 15 (E) 20
- 20** A straight road is 1200 m long. On its north side there are lamp posts at 0, 40, 80, $\dots$, 1200 meters from the west end; on its south side there are lamp posts at 20, 60, 100, $\dots$, 1180 meters, as shown (not to scale). The city wants lamp posts on *both* sides at exactly 0, 50, 100, $\dots$, 1200 meters. Every old post that is already at a wanted position stays; every other wanted position gets a new post. How many new posts are needed?

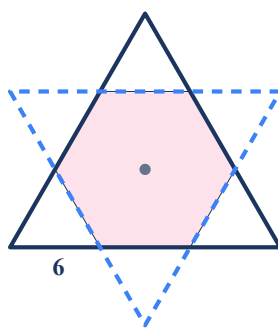


- (A) 36 (B) 37 (C) 38 (D) 48 (E) 50
- 21** Toothpicks of length 1 are used to build rectangular grids of unit squares; for example, the 2×3 grid shown uses 17 toothpicks. Lan uses exactly 2026 toothpicks to build an $a \times b$ grid with $1 \leq a \leq b$. How many such grids are possible?

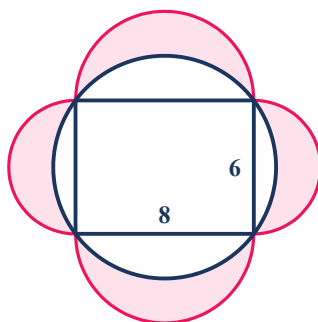


- (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 6 (E) 8

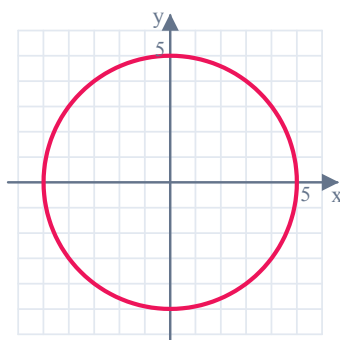
- 22** ♦♦♦♦ An equilateral triangle with side length 6 is rotated 60° about its center. What is the area of the region that lies inside both the original triangle and the rotated triangle (shaded)?



- (A) $3\sqrt{3}$ (B) $6\sqrt{3}$ (C) $9\sqrt{3}$ (D) $12\sqrt{3}$ (E) $18\sqrt{3}$
- 23** ♦♦♦♦ A 6×8 rectangle is inscribed in a circle. On each side of the rectangle, a semicircle is drawn outward with that side as its diameter, as shown. What is the total area of the four shaded regions that lie inside the semicircles but outside the circle?

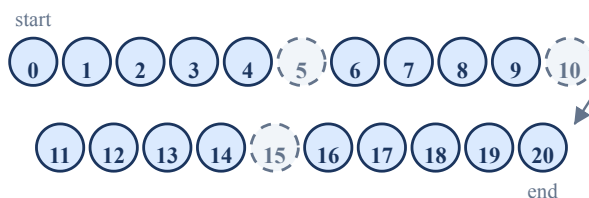


- (A) 48 (B) 25π (C) 96 (D) $25\pi + 48$ (E) $75\pi + 48$
- 24** ♦♦♦♦ Exactly 12 points with integer coordinates lie on the circle $x^2 + y^2 = 25$, shown. These 12 points are the vertices of a convex polygon. What is the area of this polygon?



- (A) 48 (B) 50 (C) 62 (D) 74 (E) 25π

- 25** Twenty-one stones in a row are numbered 0 to 20; the figure shows them in two lines. A frog starts on stone 0 and wants to reach stone 20. Each jump takes it forward by either 1 or 2 stones. The stones whose numbers are multiples of 5, other than 0 and 20, are slippery, and the frog never lands on them. In how many different ways can the frog reach stone 20?



- (A) 16 (B) 45 (C) 225 (D) 1600 (E) 10946

A Answer Key & Full Solutions

Đáp án & lời giải chi tiết

Chapter 1 — Arithmetic Fluency — Fractions, Decimals & Percents

1.1 (D)	1.2 (C)	1.3 (C)	1.4 (A)	1.5 (B)	1.6 (D)
1.7 (B)	1.8 (D)	1.9 (E)	1.10 (A)	1.11 (B)	1.12 (E)
1.13 (B)	1.14 (C)	1.15 (D)	1.16 (B)	1.17 (A)	1.18 (A)
1.19 (D)	1.20 (E)	1.21 (E)	1.22 (C)	1.23 (D)	1.24 (B)
1.25 (E)	1.26 (A)	1.27 (C)	1.28 (B)	1.29 (C)	1.30 10
1.31 13	1.32 (B)	1.33 (A)	1.34 (D)	1.35 12	1.36 (E)

1.1 (D) 17

Luỹ thừa trước: $3^2 = 9$. Chia và nhân từ trái sang: $4 \div \frac{2}{3} = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$, rồi $6 \times 2 = 12$.

Cuối cùng $20 - 12 + 9 = 17$. Đáp án (D).

Nếu nhân $\frac{2}{3} \times 2$ trước (sai thứ tự) thì được $4 \div \frac{4}{3} = 3$ và đáp số 26.

1.2 (C) $\frac{5}{8}$

Lấy cạnh ô nhỏ là 1, hình vuông lớn có diện tích 16.

Tam giác vuông bên trái: hai cạnh góc vuông 2 và 4, diện tích $\frac{2 \cdot 4}{2} = 4$. Hình vuông góc trên phải: $2 \cdot 2 = 4$. Tam giác góc dưới phải: $\frac{2 \cdot 2}{2} = 2$.

Tổng 10, chiếm $\frac{10}{16} = \frac{5}{8}$. Đáp án (C).

1.3 (C) 5.1

$0.2 \times 0.5 = 0.1$ và $\frac{0.1}{0.02} = \frac{10}{2} = 5$ (nhân cả tử và mẫu với 100).

$0.4 \times 0.25 = 0.1$. Tổng $5 + 0.1 = 5.1$. Đáp án (C).

Viết $0.1 \div 0.02$ thành $10 \div 2$ giúp không bị lệch một hàng thập phân (ra 0.5 hoặc 50).

1.4 (A) 20

Dùng tính chất $x\%$ của y bằng $y\%$ của x : hai số hạng bằng nhau.

8% của $125 = 0.08 \cdot 125 = 10$; 125% của $8 = 1.25 \cdot 8 = 10$. Tổng 20. Đáp án (A).

1.5 (B) $\frac{7}{6}$

Mỗi vạch là $\frac{1}{12}$. Đếm vạch: $A = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, $B = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$.

B là trung điểm nên C cách B đúng bằng A cách B : 5 vạch. $C = \frac{9+5}{12} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$. Đáp án (B).

1.6 (D) All four get the same amount.

An lấy $\frac{1}{4}$, còn $\frac{3}{4}$. Bình lấy $\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, còn $\frac{1}{2}$. Chi lấy $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$, còn $\frac{1}{4}$ cho Dũng.

Bốn bạn đều được $\frac{1}{4}$ cái bánh. Đáp án (D).

Nhận xét: phân số mỗi lần nhỏ đi nhưng “phần còn lại” cũng nhỏ đi — chỉ tính mới biết ai nhiều hơn.

1.7 (B) 32%

Hệ số nhân: $0.8 \cdot 0.85 = 0.68$. Giá cuối bằng 68% giá gốc, tức giảm tổng cộng 32%. Đáp án (B).

Cộng hai phần trăm ($20 + 15 = 35$) là sai vì 15% tính trên giá đã giảm; 68% là giá phải trả, không phải mức giảm.

1.8 (D) $\frac{20}{33}$

$$0.\overline{27} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11} \text{ và } 0.\overline{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

$$\frac{3}{11} + \frac{1}{3} = \frac{9+11}{33} = \frac{20}{33}. \text{ Đáp án (D).}$$

Kiểm tra: $0.2727\ldots + 0.3333\ldots = 0.6060\ldots = \frac{60}{99} = \frac{20}{33}$. Lấy $0.27 + 0.33 = 0.6$ rồi trả lời $\frac{3}{5}$ là quên phần lặp.

1.9 (E) $\frac{5}{8}$

Đổi ra thập phân hoặc so với $\frac{3}{5} = 0.6$ và $\frac{2}{3} \approx 0.667$: $\frac{5}{9} \approx 0.556$, $\frac{4}{7} \approx 0.571$, $\frac{7}{12} \approx 0.583$ đều nhỏ hơn 0.6 ; $\frac{3}{5}$ không “nằm giữa thật sự”.

$$\frac{5}{8} = 0.625 \text{ thoả mãn. Đáp án (E). Cách nhanh: phân số trung gian của } \frac{3}{5} \text{ và } \frac{2}{3} \text{ là } \frac{3+2}{5+3} = \frac{5}{8}.$$

1.10 (A) 50

$$0.75 = \frac{3}{4}, \text{ nên hai số hạng đầu có thừa số chung: } \frac{3}{4}(37 + 63) = \frac{3}{4} \cdot 100 = 75.$$

Trừ $0.25 \cdot 100 = 25$: kết quả 50. Đáp án (A).

1.11 (B) 2000

$$\text{Giá mới} = 1.15 \times \text{giá cũ, nên giá cũ} = \frac{2300}{1.15} = \frac{230\,000}{115} = 2000 \text{ nghìn đồng. Đáp án (B).}$$

Bẫy: lấy 2300 trừ 15% của 2300 ra 1955 — sai vì 15% được tính trên giá cũ, không phải giá mới.

1.12 (E) 30%

Đọc biểu đồ: 8A 6 kg, 8B 9 kg, 8C 4 kg, 8D 12 kg, 8E 9 kg; tổng $6 + 9 + 4 + 12 + 9 = 40$ kg.

$$\text{Lớp 8D thu } \frac{12}{40} = \frac{3}{10} = 30\%. \text{ Đáp án (E).}$$

Lưu ý: chia cho **tổng** chứ không chia cho một cột khác.

1.13 (B) $\frac{5}{11}$

Phân tích mẫu: $3 = 1 \cdot 3$, $15 = 3 \cdot 5$, $35 = 5 \cdot 7$, $63 = 7 \cdot 9$, $99 = 9 \cdot 11$ — tích hai số lẻ liên tiếp, chênh nhau 2.

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right), \text{ nên tổng} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{11} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{11} = \frac{5}{11}. \text{ Đáp án (B).}$$

Quên hệ số $\frac{1}{2}$ thì ra $\frac{10}{11}$.

1.14 (C) $\frac{23}{36}$

$$\text{Tổng lượng nước ép không đổi: } \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{6+8+9}{12} = \frac{23}{12} \text{ cốc.}$$

$$\text{Chia đều cho 3 cốc: } \frac{23}{12} \div 3 = \frac{23}{36}. \text{ Đáp án (C).}$$

Bẫy: “cộng tử, cộng mẫu” $\frac{1+2+3}{2+3+4} = \frac{2}{3}$ — đó là phân số trung gian, không phải trung bình; quên chia 3 thì ra $\frac{23}{12}$.

1.15 (D) 10%

$$\text{Giá mỗi gam} = \frac{\text{giá}}{\text{khối lượng}}, \text{ nên hệ số nhân của nó là } \frac{1.08}{1.20} = 0.9.$$

Giá mỗi gam còn 90%, tức giảm 10%. Đáp án (D).

Bẫy: trừ phần trăm $20 - 8 = 12$.

1.16 (B) $\frac{1}{27}$

Theo công thức đổi số tuần hoàn, chu kỳ 3 chữ số nghĩa là số có dạng $\frac{\overline{abc}}{999}$. Thật vậy $\frac{1}{27} = \frac{37}{999} = 0.\overline{037}$.

Các lựa chọn khác: $\frac{1}{33} = 0.\overline{03}$ và $\frac{1}{11} = 0.\overline{09}$ có chu kỳ 2; $\frac{1}{13} = 0.\overline{076923}$ và $\frac{1}{7} = 0.\overline{142857}$ có chu kỳ 6. Đáp án (B).

1.17 (A) 7

Nhân cả ba vế với 40: $\frac{3 \cdot 40}{8} < n < \frac{5 \cdot 40}{9}$, tức $15 < n < 22.2$.

$n \in \{16, 17, \dots, 22\}$: có 7 số. Đáp án (A).

Bấy: tính cả $n = 15$ (dấu bất đẳng thức nghiêm ngặt) thì ra 8.

1.18 (A) 25

Mẫu chỉ có thừa số 2, nên nhân tử và mẫu với 5^8 : $\frac{1}{2^8} = \frac{5^8}{10^8} = \frac{390625}{10^8} = 0.00390625$.

Tổng các chữ số: $3 + 9 + 0 + 6 + 2 + 5 = 25$. Đáp án (A).

Nhận xét: không cần chia dài $1 \div 256$; tính $5^8 = 625^2 = 390625$ là xong. Nhẩm sang $\frac{1}{2^9} = 0.001953125$ thì ra 26.

1.19 (D) 160

Biểu diễn mọi thứ theo z : $y = 0.4z$, $x = 1.5 \cdot 0.4z = 0.6z$.

$x + y + z = 0.6z + 0.4z + z = 2z = 320$, nên $z = 160$. Đáp án (D).

Ý chính: “phần trăm của phần trăm” là nhân hai hệ số ($1.5 \cdot 0.4 = 0.6$). Hãy quy mọi đại lượng về **một** biến gốc trước khi cộng.

1.20 (E) 237.5%

Thể tích tỉ lệ với lập phương cạnh, nên hệ số nhân của thể tích là $1.5^3 = 3.375$.

Thể tích mới bằng 337.5% thể tích cũ, tức **tăng** 237.5%. Đáp án (E).

Bấy: nhân $3 \cdot 50\% = 150\%$; hoặc trả lời 337.5% là nhầm “bằng” với “tăng thêm”; 125% là mức tăng của diện tích một mặt.

1.21 (E) 10

Vì $b + \frac{1}{c} > 1$, phân số $\frac{1}{b + \frac{1}{c}}$ nằm giữa 0 và 1, nên a là phần nguyên của $\frac{38}{11} = 3\frac{5}{11}$: $a = 3$.

Khi đó $\frac{1}{b + \frac{1}{c}} = \frac{5}{11}$, nên $b + \frac{1}{c} = \frac{11}{5} = 2 + \frac{1}{5}$. Lập luận tương tự ($\frac{1}{c} < 1$ khi $c \geq 2$; $c = 1$ thì $b + 1$ nguyên, không thể bằng $\frac{11}{5}$): $b = 2, c = 5$.

$a + b + c = 3 + 2 + 5 = 10$. Đáp án (E).

Cách làm này là “lật ngược và tách phần nguyên” lặp lại — đúng thuật toán Euclid trên tử và mẫu 38, 11.

1.22 (C) 5

“Tối đa hai chữ số sau dấu phẩy” nghĩa là $\frac{n}{72} \cdot 100$ là số nguyên. $\frac{100n}{72} = \frac{25n}{18}$, và $\gcd(25, 18) = 1$, nên cần $18 \mid n$.

$n \in \{18, 36, 54, 72, 90\}$: có 5 số. Đáp án (C).

Bấy: chỉ đòi $\frac{n}{72}$ là thập phân hữu hạn (cần $9 \mid n$) thì ra 11 — nhưng chẳng hạn $\frac{9}{72} = 0.125$ có ba chữ số.

1.23 (D) 6.25%

Cho giá gốc mỗi món là 100. Giá mới 125; khách trả 3 món cho 4 món: 375, trung bình $\frac{375}{4} = 93.75$ mỗi món.

So với 100: rẻ hơn 6.25%. Đáp án (D). Bằng hệ số nhân: $1.25 \cdot \frac{3}{4} = 0.9375$.

Bấy: “tặng 1 trên 4” là giảm 25%, trừ đi 25% tăng giá thì tưởng không đổi.

1.24 (B) 36

Sau k bước phân số là $\frac{1+k}{5+k}$; phần thiếu tới 1 luôn là $\frac{4}{5+k}$ (tử và mẫu luôn chênh 4).

Phân số $> \frac{9}{10}$ khi phần thiếu $< \frac{1}{10}$: $\frac{4}{5+k} < \frac{1}{10} \iff 5+k > 40 \iff k > 35$. Bước đầu tiên là $k = 36$. Đáp án (B).

Ở $k = 35$ phân số bằng đúng $\frac{36}{40} = \frac{9}{10}$, chưa lớn hơn.

1.25 (E) 56.25%

Cho ngân sách 2024 là 100: giáo dục 20. Ngân sách 2025 là 125, giáo dục chiếm 25%: $0.25 \cdot 125 = 31.25$.

Tăng $\frac{31.25 - 20}{20} = \frac{11.25}{20} = 56.25\%$. Đáp án (E).

Bấy: $25\% - 20\% = 5$ là **điểm phần trăm** của tỉ trọng; $\frac{25 - 20}{20} = 25\%$ quên rằng tổng ngân sách cũng tăng.

1.26 (A) 42.5

Cho tổng số phiếu là 100. Đã đếm 60 phiếu: A có $0.55 \cdot 60 = 33$, B có 27. Còn 40 phiếu.

Nếu A nhận thêm t phiếu thì B nhận $40 - t$. A thắng khi $33 + t > 27 + 40 - t \iff 2t > 34 \iff t > 17$.

17 trên 40 phiếu còn lại là $\frac{17}{40} = 42.5\%$. Đáp án (A).

Bấy: nghĩ phải “hơn nửa” phiếu còn lại (50%) — quên rằng A đang dẫn 6 phiếu; hoặc nghĩ phải giữ nguyên tỉ lệ 55%.

1.27 (C) $\frac{23}{20}$

Tử số phải là 1, 2, 3. Nếu một tử a lớn hơn một mẫu b nào đó, đổi chỗ a và b làm tổng nhỏ đi (tử nhỏ lại, mẫu lớn lên). Vậy tử $\{1, 2, 3\}$, mẫu $\{4, 5, 6\}$.

Ghép cặp. So sánh hai cách ghép tử $a < a'$ với mẫu $b < b'$: $\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}$ và $\frac{a}{b'} + \frac{a'}{b}$. Hiệu $\left(\frac{a}{b'} + \frac{a'}{b}\right) - \left(\frac{a}{b} + \frac{a'}{b'}\right) = (a' - a)\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b'}\right) > 0$, nên tử lớn nên đi với mẫu lớn.

Tổng nhỏ nhất $\frac{1}{4} + \frac{2}{5} + \frac{3}{6} = \frac{15 + 24 + 30}{60} = \frac{69}{60} = \frac{23}{20}$. Đáp án (C).

Bấy: ghép “tử nhỏ với mẫu lớn” $\frac{1}{6} + \frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{79}{60}$ — trực giác sai hướng.

1.28 (B) $\frac{99}{100}$

Tử số $2k + 1$ là hiệu của hai bình phương ở mẫu: $(k + 1)^2 - k^2 = 2k + 1$.

Do đó $\frac{2k + 1}{k^2(k + 1)^2} = \frac{(k + 1)^2 - k^2}{k^2(k + 1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k + 1)^2}$.

Tổng rút gọn dây chuyền: $\frac{1}{1^2} - \frac{1}{10^2} = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100}$. Đáp án (B).

Bấy: tách nhầm thành $\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}$ (quên bình phương) thì ra $\frac{9}{10}$.

1.29 (C) 180

Hai chu kỳ dài 2 và 3, nên viết cả hai với chu kỳ chung dài 6: $0.\overline{57} = 0.\overline{575757} = \frac{575757}{999999}$ và $0.\overline{468} = 0.\overline{468468} = \frac{468468}{999999}$.

Tổng = $\frac{1\,044\,225}{999\,999} = 1 + \frac{44\,226}{999\,999} = 1.\overline{044226}$. Chú ý: phần vượt quá 999 999 là 44 226, **không phải** 44 225 — chữ số 1 “tràn” sang phần nguyên đồng thời được cộng vòng lại vào cuối mỗi chu kỳ (vì $1\,000\,000 = 999\,999 + 1$).

Kiểm tra bằng cách cộng thẳng: $0.575757\,575757\ldots + 0.468468\,468468\ldots = 1.044226\,044226\ldots$ — nhớ 1 từ chu kỳ sau làm chữ số cuối mỗi chu kỳ thành 6.

Một chu kỳ có tổng $0 + 4 + 4 + 2 + 2 + 6 = 18$; 60 chữ số là 10 chu kỳ: $10 \cdot 18 = 180$. Đáp án (C).

Bấy: lấy $575757 + 468468$ rồi chỉ giữ sáu chữ số cuối 044225 (quên số nhớ vòng lại) thì ra 170; cộng từng cặp chữ số mà bỏ hết số nhớ ($5 + 4, 7 + 6 \rightarrow 3, \dots$, được 933115) thì ra 220.

1.30 10

$n\%$ của n là $\frac{n^2}{100}$; $n\%$ của số đó là $\frac{n}{100} \cdot \frac{n^2}{100} = \frac{n^3}{10000} = \frac{n^3}{2^4 \cdot 5^4}$.

Cần $2^4 \mid n^3$: nếu n chỉ chứa một thừa số 2 thì n^3 chỉ chứa 2^3 — không đủ, nên $4 \mid n$. Tương tự $25 \mid n$. Vậy $100 \mid n$ (ngược lại, $100 \mid n$ thì n^3 chia hết cho 10^6).

$n \in \{100, 200, \dots, 1000\}$: đáp số 10.

Bây: chỉ đòi $10 \mid n$ (đủ cho $n\%$ của n) thì đếm ra 100; nhưng $n = 10$ cho $\frac{1000}{10000} = 0.1$, không nguyên.

1.31 13

$\frac{1}{a} > \frac{1}{30}$ nên $a < 30$. Đặt $a = 30 - d$ với $1 \leq d \leq 29$. Từ $\frac{1}{b} = \frac{1}{a} - \frac{1}{30} = \frac{30-a}{30a} = \frac{d}{30(30-d)}$ suy ra $b = \frac{30(30-d)}{d} = \frac{900}{d} - 30$.

b nguyên dương khi và chỉ khi $d \mid 900$ và $d < 30$. Ước của $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$ nhỏ hơn 30: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25 — có 13 ước, mỗi ước cho một cặp, ví dụ $d = 1$: (29, 870); $d = 25$: (5, 6).

Đáp số: 13. (Đây là dạng ngược của công thức tách $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$ ở mục 1.3.)

1.32 (B) 200

Mẫu là tổng 10 phân số; số nhỏ nhất là $\frac{1}{2010}$, số lớn nhất là $\frac{1}{2001}$, và chúng không bằng nhau hết.

Nên $\frac{10}{2010} < \text{mẫu} < \frac{10}{2001}$, và nghịch đảo: $200.1 < \text{giá trị} < 201$.

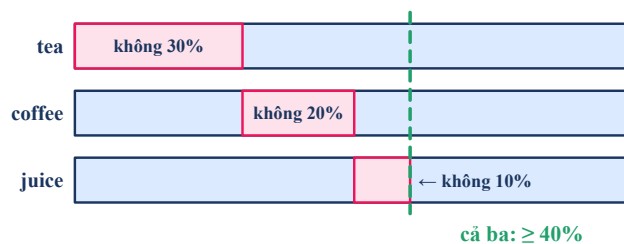
Phần nguyên là 200. Đáp án (B).

Bây: “gộp” các phân số thành $\frac{10}{20055}$ (cộng mẫu) thì ra 2005.

1.33 (A) 40%

Nhìn phần bù: 30% không thích trà, 20% không thích cà phê, 10% không thích nước ép.

Một học sinh *không* thích cả ba khi thuộc ít nhất một nhóm “không”. Ba nhóm “không” gộp lại chiếm nhiều nhất $30 + 20 + 10 = 60\%$, nên ít nhất 40% thích cả ba.



Đạt được: xếp ba nhóm “không” rời nhau như hình. Đáp án (A).

Bây: $0.7 \cdot 0.8 \cdot 0.9 = 50.4\%$ chỉ đúng nếu các sở thích “độc lập” — để không nói vậy; 70% là giá trị *lớn nhất* có thể.

1.34 (D) 7

Có $\binom{5}{2} = 10$ cách chọn khúc liên tiếp (từ số thứ i đến số thứ j). Liệt kê có hệ thống theo điểm bắt đầu:

- Bắt đầu ở 12: $(12 - 6) \div 2 \times 3 + 1 = 10$; $(12 - 6 \div 2) \times 3 + 1 = 28$; $(12 - 6 \div 2 \times 3) + 1 = 4$; cả biểu thức = 4.
- Bắt đầu ở 6: $12 - (6 \div 2) \times 3 + 1 = 4$; $12 - (6 \div 2 \times 3) + 1 = 4$; $12 - (6 \div 2 \times 3 + 1) = 2$.
- Bắt đầu ở 2: $12 - 6 \div (2 \times 3) + 1 = 12$; $12 - 6 \div (2 \times 3 + 1) = 12 - \frac{6}{7} = \frac{78}{7}$.
- Bắt đầu ở 3: $12 - 6 \div 2 \times (3 + 1) = 0$.

Các giá trị khác nhau: 0, 2, 4, 10, 12, $\frac{78}{7}$, 28 — tổng cộng 7. Đáp án (D).

Lưu ý: ngoặc bao một khúc mà phép tính bên trong vốn đã được làm trước (như $(6 \div 2)$) không đổi giá trị — đếm **giá trị**, không đếm cách đặt ngoặc.

1.35 12

Hệ số nhân: $\frac{100+p}{100} \cdot \frac{100-q}{100} = 1$, tức $(100+p)(100-q) = 10000$.

Vậy $100+p$ là một ước của $10000 = 2^4 \cdot 5^4$ lớn hơn 100, và khi đó $100-q = \frac{10000}{100+p}$ là số nguyên dương nhỏ hơn 100, cho q nguyên dương. Ngược lại, mỗi ước như vậy cho đúng một cặp (p, q) .

10000 có $(4+1)(4+1) = 25$ ước, ghép thành cặp $d \cdot \frac{10000}{d}$; ước 100 đứng giữa, nên có $\frac{25-1}{2} = 12$ ước lớn hơn 100. Chẳng hạn ước 125, 200, 250, 400 cho các cặp $(25, 20)$, $(100, 50)$, $(150, 60)$, $(300, 75)$. Đáp số: 12.

1.36 (E) $\frac{509}{256}$

Tìm cách tách dây chuyền. Ta muốn viết $\frac{k}{2^k} = \frac{f(k)}{2^{k-1}} - \frac{f(k+1)}{2^k}$. Thử $f(k) = k+1$: $\frac{k+1}{2^{k-1}} - \frac{k+2}{2^k} = \frac{2(k+1) - (k+2)}{2^k} = \frac{k}{2^k}$. ✓

Cộng từ $k=1$ đến 10, các số hạng giữa triệt tiêu: tổng $= \frac{2}{2^0} - \frac{12}{2^{10}} = 2 - \frac{12}{1024} = 2 - \frac{3}{256} = \frac{509}{256}$. Đáp án (E).

Cách khác. Gọi tổng là S thì $2S = 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \dots + \frac{10}{512}$. Lấy $2S - S$, các cặp cùng mẫu cho $\frac{1}{2^j}$: $S = \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{512}\right) - \frac{10}{1024} = \left(2 - \frac{1}{512}\right) - \frac{10}{1024} = 2 - \frac{12}{1024}$.

Bấy: dừng ở 9 số hạng ra $\frac{1013}{512}$; lệch một bậc lũy thừa của 2 ở số hạng cuối ra $\frac{253}{128}$.

Chapter 2 — Ratios, Rates & Proportional Reasoning

2.1 (B)	2.2 (A)	2.3 (C)	2.4 (E)	2.5 (D)	2.6 (C)
2.7 (B)	2.8 (C)	2.9 (E)	2.10 (A)	2.11 (D)	2.12 (D)
2.13 (E)	2.14 (B)	2.15 (C)	2.16 (D)	2.17 (E)	2.18 (E)
2.19 (C)	2.20 (D)	2.21 (B)	2.22 (A)	2.23 (A)	2.24 (D)
2.25 (B)	2.26 (C)	2.27 (B)	2.28 (C)	2.29 (C)	2.30 (D)
2.31 198	2.32 (D)	2.33 (B)	2.34 (E)	2.35 127	2.36 (A)

2.1 (B) 18

Cờ vua là 1 phần = 18 học sinh. Bóng đá hơn cầu lông $5 - 4 = 1$ phần, tức 18 học sinh. Đáp án (B).

Không cần tính cả lớp (12 phần = 216 bạn): câu hỏi về một **hiệu số phần** chỉ cần giá trị một phần.

2.2 (A) 16

Cạnh tỉ lệ 2 : 5 nên diện tích tỉ lệ 4 : 25. Hiệu 21 phần = 84 cm^2 , một phần = 4 cm^2 .

Diện tích P là $4 \cdot 4 = 16 \text{ cm}^2$. Đáp án (A).

Bấy: dùng thẳng tỉ số cạnh 2 : 5 cho diện tích thì hiệu 3 phần = 84, ra 56.

2.3 (C) 50

Trong 1 phút ô tô đi $\frac{90}{60} = 1.5 \text{ km} = 1500 \text{ m}$.

Báo chạy 30 m mỗi giây nên cần $\frac{1500}{30} = 50$ giây. Đáp án (C).

Hoặc đổi $90 \text{ km/h} = 25 \text{ m/s}$: quãng $25 \cdot 60 = 1500 \text{ m}$.

2.4 (E) 48

Năng suất: X gõ $\frac{3}{4}$ trang/phút, Y gõ $\frac{5}{6}$ trang/phút; cùng nhau $\frac{9+10}{12} = \frac{19}{12}$ trang/phút.

Thời gian $= 76 : \frac{19}{12} = 76 \cdot \frac{12}{19} = 48$ phút. Đáp án (E).

Cách khác: trong 12 phút X gõ 9 trang, Y gõ 10 trang — tổng 19 trang; $76 = 4 \cdot 19$ nên cần $4 \cdot 12 = 48$ phút.

2.5 (D) 30

Vận tốc Lan: $2 \cdot 0.6 = 1.2$ m/s. Vận tốc Minh: $1.5 \cdot 0.75 = 1.125$ m/s — Minh bước dài hơn nhưng chậm hơn.

Lan cần $\frac{540}{1.2} = 450$ s, Minh cần $\frac{540}{1.125} = 480$ s. Chênh nhau 30 giây. Đáp án (D).

2.6 (C) 4

Xe A: 600 km là 6 lần 100 km, dùng $6 \cdot 6 = 36$ lít. Xe B: $\frac{600}{15} = 40$ lít.

Chênh $40 - 36 = 4$ lít. Đáp án (C).

Lưu ý hai đơn vị ngược nhau: “lít trên 100 km” càng nhỏ càng tiết kiệm, còn “km trên lít” càng lớn càng tiết kiệm. Đổi về cùng một kiểu trước khi so sánh.

2.7 (B) 160

Số chữ của cuốn sách không đổi = trang $\times$ dòng mỗi trang $\times$ chữ mỗi dòng. Số trang tỉ lệ nghịch với tích hai thừa số sau.

Mỗi trang mới chứa gấp $\frac{36}{30} \cdot 1.25 = 1.2 \cdot 1.25 = 1.5$ lần trang cũ, nên số trang là $\frac{240}{1.5} = 160$. Đáp án (B).

Quên 25% thì ra 200.

2.8 (C) 12

Trong một giờ xe đi được trung bình 48 km. Với tốc độ 60 km/h, để đi 48 km xe cần chạy $\frac{48}{60}$ giờ = 48 phút.

Thời gian dừng: $60 - 48 = 12$ phút mỗi giờ. Đáp án (C).

Bấy: chia nhầm $\frac{12}{48}$ giờ = 15 phút — phần “hụt” 12 km phải đổi ra thời gian theo tốc độ **khi chạy** (60 km/h), không phải tốc độ trung bình.

2.9 (E) 24

1 cm trên bản đồ là 250 000 cm = 2.5 km. Vậy 6.4 cm ứng với $6.4 \cdot 2.5 = 16$ km.

Thời gian $\frac{16}{40}$ giờ = $0.4 \cdot 60 = 24$ phút. Đáp án (E).

Bấy: lấy 16 (số km) làm số phút; hoặc đổi 0.4 giờ thành 4 phút rồi chọn đáp án gần nhất.

2.10 (A) 75

Đọc điểm rõ trên lưới: 4 kg gạo A giá 100 nghìn, nên đơn giá 25 nghìn/kg; 5 kg gạo B giá 100 nghìn, nên đơn giá 20 nghìn/kg.

Chênh lệch 5 nghìn mỗi kg, với 15 kg là 75 nghìn đồng. Đáp án (A).

Với đồ thị tỉ lệ thuận, hãy chọn điểm nằm đúng giao lưới để đọc đơn giá = $\frac{\text{tung độ}}{\text{hoành độ}}$.

2.11 (D) 36

Đo cỏ bằng “suất ngựa-ngày”: tổng $12 \cdot 30 = 360$ suất. Sau 6 ngày đã dùng 72 suất, còn 288 suất.

Còn 8 con ngựa, nên cỏ đủ thêm $\frac{288}{8} = 36$ ngày. Đáp án (D).

Bấy: tính $\frac{360}{8} = 45$ là quên 6 ngày đầu đã ăn với 12 con; 24 là số ngày còn lại nếu không bán ngựa.

2.12 (D) 70

Đổi trung bình thành tổng: cả 5 giờ đi được $5 \cdot 62 = 310$ km; hai giờ đầu đi 100 km.

Ba giờ sau đi 210 km, vận tốc $\frac{210}{3} = 70$ km/h. Đáp án (D).

Ở đây hai đoạn có **thời gian** khác nhau (2 và 3 giờ) nên trọng số là 2 và 3. Bấy: coi như trung bình cộng hai vận tốc, $\frac{50 + v}{2} = 62$, ra 74.

2.13 (E) 55

Chuyển sách giữa hai ngăn thì **tổng** không đổi. Trước: ngăn trên chiếm $\frac{7}{11}$ tổng; sau: $\frac{3}{5}$ tổng. Cả hai phải là số nguyên nên tổng chia hết cho 11 và cho 5, tức chia hết cho 55.

Với tổng 55: trước 35 và 20, sau 33 và 22 — chuyển 2 cuốn. Tổng nhỏ nhất là 55. Đáp án (E).

Bẫy: chỉ dùng một tỉ số (11 hoặc 5 phần) mà quên rằng tổng phải khớp **cả hai**; tổng 22 hay 33 chia đúng 7 : 4 nhưng không chia được 3 : 2.

2.14 (B) 20

Chọn quãng đường một chiều là 120 km (BCNN của 24 và 30). Cả đi lẫn về 240 km với trung bình 24 km/h mất 10 giờ.

Chiều về mất $\frac{120}{30} = 4$ giờ, nên chiều đi mất 6 giờ: vận tốc $\frac{120}{6} = 20$ km/h. Đáp án (B).

Bẫy: coi trung bình là trung bình cộng, $\frac{v+30}{2} = 24$, ra 18.

2.15 (C) 43

Hai cách bỏ đều để lại $N - 1$ viên (N là tổng số bi). Lần 1 có $r - 1$ viên đỏ = $\frac{N-1}{7}$; lần 2 có r viên đỏ = $\frac{N-1}{6}$.

Trừ hai đẳng thức: $1 = \frac{N-1}{6} - \frac{N-1}{7} = \frac{N-1}{42}$, nên $N - 1 = 42$, $N = 43$. Đáp án (C).

Kiểm tra: $r = 7$, xanh 36; bỏ một đỏ: $\frac{6}{42} = \frac{1}{7}$ ✓; bỏ một xanh: $\frac{7}{42} = \frac{1}{6}$ ✓. Bẫy: trả lời 42 là số bi còn lại sau khi bỏ.

2.16 (D) 600

Số vòng quay tỉ lệ nghịch với chu vi: trên mỗi mét, bánh sau quay $\frac{1}{1.2} = \frac{5}{6}$ vòng, bánh trước quay $\frac{1}{3}$ vòng — bánh sau quay nhiều hơn $\frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ vòng mỗi mét.

Hơn 300 vòng nên quãng đường là $300 : \frac{1}{2} = 600$ m. Đáp án (D).

Kiểm tra: 600 m, bánh trước 200 vòng, bánh sau 500 vòng, hơn 300. ✓

2.17 (E) 1620

Phần của cháu út: lần đầu $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$ tổng, lần sau $\frac{7}{27}$ tổng. Chênh lệch $\frac{7}{27} - \frac{1}{4} = \frac{28-27}{108} = \frac{1}{108}$ tổng.

$\frac{1}{108}$ tổng = 15 nghìn, nên tổng là $15 \cdot 108 = 1620$ nghìn đồng. Đáp án (E).

Nhận xét thú vị: cháu giữa nhận $\frac{8}{24} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3}$ cả hai lần, nên cháu lớn nhận ít đi đúng 15 nghìn. Bẫy: so sánh số phần ($7 - 6 = 1$ phần = 15) mà quên rằng một “phần” mỗi lần có giá trị khác nhau.

2.18 (E) 128

Tỉ số diện tích $\frac{9}{16} = \left(\frac{3}{4}\right)^2$, nên tỉ số độ dài (nhỏ : lớn) là $\frac{3}{4}$ và tỉ số thể tích là $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$.

Chai lớn chứa $54 \cdot \frac{64}{27} = 128$ mL. Đáp án (E).

Bẫy: dùng thẳng tỉ số diện tích ra 96; dùng tỉ số độ dài ra 72.

2.19 (C) $\sqrt{3}$

Gọi cạnh ngắn là 1, cạnh dài là r . Mỗi dải có kích thước 1 và $\frac{r}{3}$.

Với $r > 1$ và dải đồng dạng hình gốc, cạnh dài của dải là 1 và cạnh ngắn là $\frac{r}{3}$ (nếu $\frac{r}{3} \geq 1$ thì dải có tỉ số $\frac{r}{3} < r$, không đồng dạng). Tỉ số dài : ngắn bằng nhau: $\frac{1}{r/3} = r$, tức $r^2 = 3$, $r = \sqrt{3}$. Đáp án (C).

Bẫy: cắt làm đôi thì ra $\sqrt{2}$ (khổ giấy A4); “ba dải” không có nghĩa tỉ số là 3.

2.20 (D) 20

Cùng quãng đường, thời gian tỉ lệ nghịch với vận tốc. Nhanh hơn 25% (hệ số $\frac{5}{4}$) thì thời gian còn $\frac{4}{5}$, tức bớt $\frac{1}{5}$ thời gian thường.

$\frac{1}{5}T = 12$ phút nên $T = 60$ phút. Chậm hơn 25% (hệ số $\frac{3}{4}$) thì thời gian thành $\frac{4}{3} \cdot 60 = 80$ phút — muộn 20 phút. Đáp án (D).

Bấy: nghĩ “tăng hay giảm 25% thì sớm hay muộn như nhau” ra 12; hoặc cho thời gian giảm/tăng đúng 25% ra 15.

2.21 (B) 50%

Diện tích mới bằng $100\% + 125\% = 225\%$ diện tích cũ, tức hệ số diện tích $2.25 = 1.5^2$.

Hình mới đồng dạng hình cũ nên mọi độ dài (và chu vi) nhân với 1.5: chu vi tăng 50%. Đáp án (B).

Bấy: cho chu vi tăng 125% như diện tích; chia đôi thành 62.5%; hay trả lời 150% là nhầm “bằng 150%” với “tăng 150%”.

2.22 (A) 5

Nồng độ nước ép: lọ A là $\frac{1}{3}$, lọ B là $\frac{3}{4}$; cần hỗn hợp $\frac{1}{2}$.

Quy tắc đòn bẩy: số cốc A : số cốc B = $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4} : \frac{1}{6} = 3 : 2$.

Ít nhất 3 cốc từ A và 2 cốc từ B: tổng 5 cốc. Đáp án (A). Kiểm tra: nước ép $3 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{3}{4} = 2.5$ trên 5 cốc. ✓

Bấy: đảo tỉ số thành 2 : 3 cũng ra 5 cốc nhưng hỗn hợp sai; nên luôn kiểm tra lại lượng nước ép.

2.23 (A) 20

Đọc độ dốc từng đoạn: 0–10 phút: $\frac{200}{10} = 20$ L/phút, đó là vòi P. 10–30: $\frac{500}{20} = 25$ L/phút = $P + Q$, nên $Q = 5$. 30–40: $\frac{-100}{10} = -10$ L/phút = $P + Q - \text{cống}$, nên cống thoát 35 L/phút.

Khoá P: lượng nước giảm $35 - 5 = 30$ L/phút. Từ 600 lít cần $\frac{600}{30} = 20$ phút. Đáp án (A).

Bấy: lấy $\frac{600}{35}$ (quên vòi Q vẫn mở) hoặc $\frac{600}{25} = 24$.

2.24 (D) 10%

Xét 5 kg hỗn hợp (2 kg điều, 3 kg lạc). Giá cũ: $600 + 300 = 900$ nghìn.

Giá mới: điều $600 \cdot 1.2 = 720$, lạc $300 \cdot 0.9 = 270$; tổng 990 nghìn. Tăng $\frac{90}{900} = 10\%$. Đáp án (D).

Bấy: tính phần trăm theo **khối lượng** $\frac{2 \cdot 20 - 3 \cdot 10}{5} = 2\%$ — sai vì trọng số phải là **tiền** (600 và 300), không phải kg; $\frac{20 - 10}{2} = 5\%$ là bỏ hẵn trọng số.

2.25 (B) 1000

Khối lượng riêng trung bình của vương miện là $\frac{1500}{100} = 15$ g/cm³, nằm giữa 10 và 20.

Đòn bẩy theo **thể tích**: vàng : bạc = $(15 - 10) : (20 - 15) = 1 : 1$, tức 50 cm³ vàng và 50 cm³ bạc. Khối lượng vàng = $50 \cdot 20 = 1000$ g. Đáp án (B).

Bấy: dùng tỉ số 1 : 1 cho khối lượng ra 750 g — trung bình 15 g/cm³ là trung bình theo thể tích, nên tỉ số 1 : 1 là tỉ số thể tích.

2.26 (C) 7.5

Đọc đồ thị: Bảo đi 3 km trong 45 phút ($\frac{1}{15}$ km/phút). Chị xuất phát ở phút 15 và tới trường ở phút 30: 3 km trong 15 phút ($\frac{1}{5}$ km/phút).

Lúc chị xuất phát, Bảo đã đi 1 km. Khoảng cách thu hẹp với tốc độ $\frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{2}{15}$ km/phút, nên chị đuổi kịp sau $1 : \frac{2}{15} = 7.5$ phút. Đáp án (C).

Trên đồ thị, giao điểm ở phút 22.5, cách nhà 1.5 km — đúng điểm giữa hai vạch lưới. Bấy: đọc thẳng hoành độ giao điểm ra 22.5 — đó là số phút tính từ 7:00, không phải thời gian chị đã đạp xe.

2.27 (B) 10

Ba người cùng một điểm khi và chỉ khi từng cặp “lệch nhau” một số nguyên vòng. Dùng vận tốc tương đối: sau t phút, B hơn A $40t$ m và C hơn A $120t$ m.

Cần $40t$ và $120t$ đều chia hết cho 400. Điều kiện thứ nhất cho $t \in \{10, 20, \dots\}$, và khi đó $120t$ cũng là bội của 400. Lần đầu là $t = 10$ phút. Đáp án (B).

Lúc đó cả ba ở điểm cách S một khoảng $1700 - 4 \cdot 400 = 100$ m — **không** phải vạch xuất phát. Muốn cả ba cùng ở vạch S phải đợi tới $t = 40$ (bội chung của các thời gian $\frac{400}{170}, \dots$), đó là bảy (D).

2.28 (C) 10

Gọi a, b là số giờ mỗi người cần để gỡ cả báo cáo. Gỡ nối tiếp mỗi người nửa việc: $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} = 12.5$, nên $a + b = 25$.

Gỡ cùng lúc: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$, tức $\frac{a+b}{ab} = \frac{1}{6}$, nên $ab = 6 \cdot 25 = 150$.

Hai số có tổng 25, tích 150: 10 và 15 (vì $t^2 - 25t + 150 = (t - 10)(t - 15)$). Người nhanh hơn cần 10 giờ. Đáp án (C).

Bảy: chọn 15 là người chậm hơn; nghĩ “làm chung thì nhanh gấp đôi” ($12.5 : 2 = 6.25$) là sai vì hai người năng suất khác nhau; 6 là thời gian làm chung, không phải của một người.

2.29 (C) 4

Tiền chia theo **lượng công việc**, nên Bình làm được $\frac{400}{3600} = \frac{1}{9}$ ngôi nhà. Năng suất của Bình là $\frac{1}{9}$ nhà/ngày, vậy Bình làm đúng 1 ngày.

Ngày đầu cả ba làm được $\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} = \frac{3+2+1}{18} = \frac{1}{3}$ ngôi nhà. Còn $\frac{2}{3}$, An và Chi làm với năng suất $\frac{1}{6} + \frac{1}{18} = \frac{2}{9}$ nhà/ngày, cần $\frac{2}{3} : \frac{2}{9} = 3$ ngày.

Tổng cộng $1 + 3 = 4$ ngày. Đáp án (C). Kiểm tra: An làm $\frac{4}{6}$, Chi làm $\frac{4}{18}$, Bình $\frac{1}{9}$; tổng $\frac{12+4+2}{18} = 1$ ✓.

Bảy: thấy cả ba cùng làm mất 3 ngày rồi chọn 3; hoặc chia tiền theo **số ngày** thay vì theo lượng việc.

2.30 (D) 84

Tỉ lệ trả lời “có”: nam $\frac{3}{5}$, nữ $\frac{1}{4}$, cả lớp $\frac{5}{12}$. Đây là trung bình có trọng số, nên dùng đòn bẩy:

$$\text{nam} : \text{nữ} = \left(\frac{5}{12} - \frac{1}{4} \right) : \left(\frac{3}{5} - \frac{5}{12} \right) = \frac{1}{6} : \frac{11}{60} = 10 : 11.$$

Số nam $10j$ phải chia hết cho 5 (luôn đúng); số nữ $11j$ phải chia hết cho 4, nên $4 \mid j$. Nhỏ nhất $j = 4$: 40 nam, 44 nữ, tổng 84. Đáp án (D).

Kiểm tra: “có” $24 + 11 = 35$, “không” $16 + 33 = 49$, $35 : 49 = 5 : 7$ ✓. Bảy: dừng ở 21 (10 nam, 11 nữ) mà quên rằng 11 bạn nữ không thể chia theo $1 : 3$.

2.31 198

Trước: nữ $3k$, nam $2k$. Sau: tổng $5k + 18$ chia thành 9 phần, nên $9 \mid 5k + 18$, tức $9 \mid 5k$, $9 \mid k$. Đặt $k = 9j$; tổng sau là $45j + 18 = 9(5j + 2)$.

Sau khi vào: nữ $5(5j + 2) = 25j + 10$, nam $4(5j + 2) = 20j + 8$. Số nữ mới là $25j + 10 - 27j = 10 - 2j$, số nam mới là $20j + 8 - 18j = 2j + 8$.

Cần ít nhất một nữ mới: $10 - 2j \geq 1$, tức $j \leq 4$. Lớn nhất $j = 4$: trước 108 nữ, 72 nam; vào 2 nữ và 16 nam; sau $110 : 88 = 5 : 4$ ✓.

Số thành viên lớn nhất là $180 + 18 = 198$. Đáp số: 198.

Bảy: bỏ điều kiện “ít nhất một nữ” thì $j = 5$ cho 243 (tất cả 18 người mới đều là nam).

2.32 (D) 114

Phần sữa tạo thành một hình nón nhỏ **đồng dạng** với cả cái ốc quế (cùng đỉnh, cùng góc), với hệ số độ dài $\frac{2}{3}$.

Thể tích nhân với $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$: cả ốc quế chứa $48 \cdot \frac{27}{8} = 162$ mL. Cần thêm $162 - 48 = 114$ mL. Đáp án (D).

Bấy: dùng tỉ số độ dài ($48 \cdot \frac{3}{2} = 72$, thêm 24) hoặc diện tích ($48 \cdot \frac{9}{4} = 108$, thêm 60); quên chữ “thêm” thì chọn 162. Lưu ý: $\frac{2}{3}$ chiều cao nhưng chỉ chứa $\frac{8}{27} < \frac{1}{3}$ thể tích — phần miệng rộng chứa gần hết.

2.33 (B) 2.4

Sau khi trộn, hai bình có cùng nồng độ, nên nồng độ đó phải là nồng độ của **toàn bộ** 10 lít: $\frac{6 \cdot 20\% + 4 \cdot 50\%}{10} = \frac{1.2 + 2}{10} = 32\%$.

Bình A (vẫn 6 lít) cần có $6 \cdot 32\% = 1.92$ lít nước chanh, trong khi lúc đầu có 1.2 lít. Mỗi lít đổi chỗ, bình A mất 0.2 lít và nhận 0.5 lít nước chanh, tức lời 0.3 lít. Vậy $0.3x = 1.92 - 1.2 = 0.72$, $x = 2.4$. Đáp án (B).

Cách nhìn tỉ số đẹp hơn: hai bình giống hệt nhau về thành phần khi trong mỗi bình, phần “đến từ B” chiếm đúng tỉ lệ của B trong tổng thể, $\frac{4}{10}$. Bình A có x lít từ B trên 6 lít: $\frac{x}{6} = \frac{4}{10}$, $x = 2.4$. Kết quả $x = \frac{6 \cdot 4}{6 + 4}$ **không phụ thuộc** vào 20% và 50%!

Kiểm tra bình B: $1.6 \cdot 50\% + 2.4 \cdot 20\% = 1.28 = 4 \cdot 32\%$ ✓.

Bấy: đoán “đổi một nửa” bình nhỏ (2) hay bình lớn (3) — đổi một nửa chỉ làm hai bình giống nhau khi hai bình bằng nhau.

2.34 (E) 84

Trên đoạn đầu cả bốn người cùng ngồi; An chỉ trả phần của đoạn đầu: $\frac{6d_1}{4} = 12$, nên $d_1 = 8$ km.

Bình trả phần đoạn đầu (12) cộng phần đoạn hai chia ba: $24 - 12 = \frac{6d_2}{3}$, nên $d_2 = 6$. Chi trả thêm phần đoạn ba chia đôi: $54 - 24 = \frac{6d_3}{2}$, nên $d_3 = 10$.

Dũng trả như Chi (54) cộng toàn bộ đoạn cuối: $54 + 6 \cdot 5 = 84$ nghìn đồng. Đáp án (E).

Kiểm tra: cả chuyến $8 + 6 + 10 + 5 = 29$ km, tiền 174 nghìn $= 12 + 24 + 54 + 84$. ✓ Bấy: quên 5 km Dũng đi một mình thì ra 54, bằng đúng phần của Chi.

2.35 127

$a : b = b : c$ nghĩa là $b^2 = ac$: ba số lập thành dãy có cùng tỉ số $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{p}{q}$ (phân số tối giản, $p > q \geq 1$).

Khi đó $c = \frac{bp}{q}$ và $a = \frac{bq}{p}$; để a, c nguyên với $\gcd(p, q) = 1$ cần $b = mpq$, suy ra $a = mq^2$, $b = mpq$, $c = mp^2$ và

$$a + b + c = m(q^2 + pq + p^2) = 133 = 7 \cdot 19.$$

Tìm $q^2 + pq + p^2$ là ước của 133 (tức 7, 19 hoặc 133; không thể bằng 1 vì $p > q \geq 1$):

- = 7: $(q, p) = (1, 2)$, $m = 19$: (19, 38, 76), $b = 38$.
- = 19: $(q, p) = (2, 3)$, $m = 7$: (28, 42, 63), $b = 42$.
- = 133: $(q, p) = (1, 11)$ cho (1, 11, 121), $b = 11$; và $(q, p) = (4, 9)$ cho (16, 36, 81), $b = 36$.

Tổng các giá trị của b : $38 + 42 + 11 + 36 = 127$. Đáp số: 127.

Bấy: chỉ xét tỉ số nguyên ($\frac{b}{a} = 2$ hoặc 11) mà bỏ sót các tỉ số phân số $\frac{3}{2}$ và $\frac{9}{4}$.

2.36 (A) $\frac{625}{81}$

Xét một bước với hình vuông cạnh 3 (diện tích 9): mỗi cạnh chia thành đoạn 1 và 2. Bốn tam giác vuông ở góc, mỗi cái có hai cạnh góc vuông 1 và 2, tổng diện tích $4 \cdot \frac{1 \cdot 2}{2} = 4$. Hình vuông bên trong có diện tích $9 - 4 = 5$.

Vậy mỗi bước diện tích nhân với $\frac{5}{9}$ (mọi hình vuông đều đồng dạng nên tỉ số này không phụ thuộc cạnh).

$$[S_4] = 81 \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^4 = 81 \cdot \frac{625}{6561} = \frac{625}{81}. \text{ Đáp án (A).}$$

Bấy: nghĩ cạnh nhân $\frac{2}{3}$ mỗi bước ra $81 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 16$; dừng ở S_3 ra $\frac{125}{9}$.

Chapter 3 — Algebra — Expressions, Equations & Word Problems

3.1 (D)	3.2 (A)	3.3 (E)	3.4 (B)	3.5 (C)	3.6 (D)
3.7 (A)	3.8 (B)	3.9 (E)	3.10 (B)	3.11 (C)	3.12 (A)
3.13 (D)	3.14 (B)	3.15 (C)	3.16 (A)	3.17 (B)	3.18 (D)
3.19 (E)	3.20 (A)	3.21 (C)	3.22 (B)	3.23 (A)	3.24 (D)
3.25 (E)	3.26 (C)	3.27 (E)	3.28 (A)	3.29 8	3.30 9
3.31 (D)	3.32 (C)	3.33 4	3.34 (B)	3.35 (E)	3.36 (C)

3.1 (D) 34

$$x^2 = (-3)^2 = 9, \text{ nên } 2x^2 = 18. -5x = -5 \cdot (-3) = 15.$$

Giá trị: $18 + 15 + 1 = 34$. Đáp án (D).

Bấy: tính $2x^2$ thành $(2x)^2 = 36$ thì ra 52; viết $-5x = -15$ thì ra 4.

3.2 (A) $4a + 5b$

Phá ngoặc: $3(2a - b) = 6a - 3b$; $-2(a - 4b) = -2a + 8b$ (dấu trừ đổi dấu cả hai hạng tử).

Gộp: $6a - 2a = 4a$ và $-3b + 8b = 5b$. Kết quả $4a + 5b$. Đáp án (A).

Bấy: viết $-2(a - 4b) = -2a - 8b$ thì ra $4a - 11b$.

3.3 (E) 3

Phá ngoặc: $7 - 2x + 6 = 3x - 2$, tức $13 - 2x = 3x - 2$.

Chuyển vế: $15 = 5x$, nên $x = 3$. Đáp án (E). Kiểm tra: $7 - 0 = 7 = 9 - 2$. ✓

Bấy: viết $-2(x - 3) = -2x - 6$ thì được $1 - 2x = 3x - 2$ và $x = \frac{3}{5}$.

3.4 (B) 9

Dịch: “five more than twice a number” là $2n + 5$; “13 less than four times the number” là $4n - 13$.

$2n + 5 = 4n - 13 \iff 18 = 2n \iff n = 9$. Đáp án (B). Kiểm tra: $23 = 36 - 13$. ✓

3.5 (C) $(x + 2)(x + 3)$

Đọc kích thước trên hình: chiều ngang gồm cạnh x và 3 thanh rộng 1, tức $x + 3$; chiều dọc gồm cạnh x và 2 hàng cao 1, tức $x + 2$.

Diện tích $(x + 2)(x + 3)$. Kiểm tra: $(x + 2)(x + 3) = x^2 + 5x + 6$ — đúng một hình vuông x^2 , năm thanh x và sáu ô 1. Đáp án (C).

Bấy: $(x + 1)(x + 6) = x^2 + 7x + 6$ có đúng sáu ô đơn vị nhưng **bảy** thanh.

3.6 (D) 21

Gọi số bút đỏ là r , số bút xanh $2r$. Giá trị: $3r + 5 \cdot 2r = 13r = 91$, nên $r = 7$.

Có 7 bút đỏ và 14 bút xanh, tổng 21 bút. Đáp án (D).

Cách nghĩ theo “nhóm”: mỗi nhóm 1 đỏ + 2 xanh trị giá 13 nghìn; có $91 \div 13 = 7$ nhóm, mỗi nhóm 3 bút. Bấy: trả lời 14 (chỉ số bút xanh).

3.7 (A) 54

Đặt ẩn cho người ít nhất để mọi đại lượng khác viết được theo ẩn đó: Chi c , Bình $2c$, An $2c + 10$.

$c + 2c + 2c + 10 = 120 \iff 5c = 110 \iff c = 22$. An được $2 \cdot 22 + 10 = 54$ nghìn đồng. Đáp án (A).

Kiểm tra: $22 + 44 + 54 = 120$. ✓ Bấy: trả lời 44 hay 22 — đọc lại xem để hỏi ai.

3.8 (B) 14

Chu vi: $(x + 3) + (2x - 1) + (3x - 4) = 6x - 2 = 34$, nên $x = 6$.

Ba cạnh là 9, 11, 14 (thỏa bất đẳng thức tam giác $9 + 11 > 14$). Cạnh dài nhất 14. Đáp án (B).

Bấy: khoanh $x = 6$, hoặc cạnh $x + 3 = 9$ (đúng đầu danh sách).

3.9 (E) 62

Mỗi khi x tăng 1, y tăng 3, nên $y = 3x + b$. Với $x = 1$: $5 = 3 + b$, $b = 2$. Vậy $y = 3x + 2$.

$x = 20$: $y = 62$. Đáp án (E).

Bấy: lấy $y = 3x$ thì ra 60; đếm “thêm 16 bước từ $x = 4$ ” nhưng chỉ cộng 15 lần 3 thì ra 59.

3.10 (B) 5

Gọi số ban đầu là n . Lần lượt: $n + 7$; $4n + 28$; $4n + 20$; $n + 5$; cuối cùng $n + 5 - n = 5$. Đáp án (B).

Đại số giải thích “trò ảo thuật”: chữ n triệt tiêu nên kết quả không phụ thuộc số ban đầu. Bấy: chia $4n + 20$ cho 4 mà chỉ chia số hạng đầu thì ra $n + 20 - n = 20$ — không có trong lựa chọn, dấu hiệu đã sai.

3.11 (C) 9

Tách thành hai bất phương trình. $3n - 7 < 2n + 5 \iff n < 12$. $2n + 5 \leq 4n - 1 \iff 6 \leq 2n \iff n \geq 3$.

Vậy $3 \leq n < 12$: có $11 - 3 + 1 = 9$ số nguyên. Đáp án (C).

Bấy: lấy cả $n = 12$ (nhầm dấu $<$ thành $\leq$) thì ra 10; quên “+1” thì ra 8.

3.12 (A) 12

Trong 3 phút, lượng nước giảm $60 - 45 = 15$ lít, tức 5 lít mỗi phút.

Bể có 60 lít lúc đầu, nên cạn sau $60 \div 5 = 12$ phút. Đáp án (A).

Bấy: lấy $45 \div 3 = 15$ là nhầm lượng nước còn lại với tốc độ chảy.

3.13 (D) 17

Khai triển: $(x - 3)(x + 5) = x^2 + 5x - 3x - 15 = x^2 + 2x - 15$. Vậy $k = 2$, $m = -15$.

$k - m = 2 - (-15) = 17$. Đáp án (D).

Bấy: tính $k + m = -13$, hoặc lấy $m = 15$ (quên dấu) thì ra -13 .

3.14 (B) 10

Mỗi nghiệm cho ta một phương trình với ẩn là a và b .

Thay $x = 2$ vào phương trình của Khoa: $2a - 2 = 6 + b$, tức $b = 2a - 8$.

Thay $x = -7$ vào phương trình của Linh: $-7b - 2 = -21 + a$, tức $a + 7b = 19$.

Thế: $a + 7(2a - 8) = 19 \iff 15a = 75 \iff a = 5$, $b = 2$. Vậy $ab = 10$. Đáp án (B).

Kiểm tra: $5x - 2 = 3x + 2$ cho $x = 2$; $2x - 2 = 3x + 5$ cho $x = -7$. ✓

3.15 (C) $\frac{7}{2}$

" $x = 3$ là nghiệm" nghĩa là thay $x = 3$ vào thì đẳng thức đúng. Ấn bây giờ là $a: 6 + a = 3a - 1$.

$7 = 2a$, nên $a = \frac{7}{2}$. Đáp án (C).

Kiểm tra: $2x + \frac{7}{2} = \frac{7}{2}x - 1 \iff \frac{9}{2} = \frac{3}{2}x \iff x = 3$. ✓

3.16 (A) 90

Gọi giá vé người lớn là a ; vé trẻ em rẻ hơn 40% nên bằng 60% của a , tức $0.6a$ (hệ số nhân, chương 1).

$3a + 5 \cdot 0.6a = 3a + 3a = 6a = 540$, nên $a = 90$. Đáp án (A).

Nhận xét gọn: năm vé trẻ em có giá bằng đúng ba vé người lớn. Bấy: lấy vé trẻ em bằng 40% vé người lớn thì $5a = 540$, $a = 108$.

3.17 (B) 19

A rẻ hơn B : $300 + 20v < 50v \iff 300 < 30v \iff v > 10$.

A rẻ hơn C : $300 + 20v < 900 \iff 20v < 600 \iff v < 30$.

Vậy $11 \leq v \leq 29$: có $29 - 11 + 1 = 19$ giá trị. Đáp án (B).

Trên đồ thị: đường A thấp nhất trong khoảng giữa hai giao điểm $v = 10$ và $v = 30$. Bấy: tính cả hai đầu mút (lúc bằng giá) thì ra 21; tính một đầu thì ra 20.

3.18 (D) 36

Gọi số xu túi trái, phải là L, R . Điều kiện sau: $L + 3 = R - 3$, tức $R = L + 6$.

Điều kiện trước: $R + 3 = 2(L - 3)$, tức $L + 9 = 2L - 6$, nên $L = 15$, $R = 21$. Tổng 36. Đáp án (D).

Nhìn nhanh: chuyển 3 xu sang trái làm hai túi bằng nhau, nên túi phải hơn túi trái 6 xu; chuyển 3 xu sang phải thì chênh 12 xu và chênh lệch đó bằng đúng số xu túi trái lúc đó.

3.19 (E) 153

Gọi cạnh hình vuông là s . Diện tích mới $(s + 5)(s - 3) = s^2 + 2s - 15$.

Tăng 9 m²: $s^2 + 2s - 15 = s^2 + 9 \iff 2s = 24 \iff s = 12$. Các s^2 triệt tiêu — phương trình bậc nhất!

Vườn mới $17 \times 9 = 153$ m². Đáp án (E). Bấy: khoanh 144 (diện tích vườn cũ).

3.20 (A) 12

Nhân ba phương trình: $(xyz)^2 = 12 \cdot 20 \cdot 15 = 3600$, nên $xyz = 60$ (các số dương).

Chia: $x = \frac{xyz}{yz} = \frac{60}{20} = 3, y = \frac{60}{15} = 4, z = \frac{60}{12} = 5$. Tổng 12. Đáp án (A).

Bấy: cộng $12 + 20 + 15 = 47$.

3.21 (C) 15

Gọi tuổi hai anh em là a và b . $(a + 1)(b + 1) - ab = a + b + 1$, nên $a + b + 1 = 25$, tức $a + b = 24$.

Cùng với $a - b = 6$: $a = 15, b = 9$. Đáp án (C).

Ý chính: khi mỗi số tăng 1, tích tăng thêm đúng **tổng** hai số cộng 1 — một "hình chữ nhật" $a \times b$ được nối thêm một dải dài a , một dải dài b và một ô vuông 1×1 .

3.22 (B) 21

Gọi ngày ở chính giữa là n . Hàng trên là $n - 8, n - 7, n - 6$, hàng giữa $n - 1, n, n + 1$, hàng dưới $n + 6, n + 7, n + 8$ (trên lịch, đi xuống một ô là cộng 7).

Các phần $\pm$ triệt tiêu: tổng $= 9n = 117$, nên $n = 13$, ngày lớn nhất là $n + 8 = 21$. Đáp án (B).

Kiểm tra trên tờ lịch: 13 là thứ Ba nên khung 3×3 quanh nó nằm gọn trong các cột thứ Hai–thứ Tư, các ngày 5–21. ✓

3.23 (A) 41

Thêm 3 kg làm lò xo dài thêm $35 - 26 = 9$ cm, nên mỗi kg làm dài thêm 3 cm.

Từ 5 kg lên 7 kg: thêm $2 \cdot 3 = 6$ cm, dài 41 cm. Đáp án (A). (Khi không treo gì, lò xo dài $26 - 6 = 20$ cm.)

Bấy: coi chiều dài tỉ lệ thuận với khối lượng: $\frac{35}{5} \cdot 7 = 49$ hoặc $\frac{26}{2} \cdot 7 = 91$. Quan hệ tuyến tính có **phần cố định** (chiều dài ban đầu 20 cm) nên không tỉ lệ thuận.

3.24 (D) 32

Gọi x bàn 3 chỗ, y bàn 7 chỗ: $3x + 7y = 100$. Muốn nhiều bàn nhất thì dùng ít bàn 7 chỗ nhất.

$y = 0$: $3x = 100$ không nguyên. $y = 1$: $3x = 93$, $x = 31$. Tổng 32 bàn. Đáp án (D).

(Các nghiệm khác (24, 4), (17, 7), ... đều ít bàn hơn: mỗi lần đổi 7 bàn 3 chỗ lấy 3 bàn 7 chỗ thì mất 4 bàn.) Bấy: $\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor = 33$ bàn không thể xếp đủ.

3.25 (E) 19

Gọi số câu đúng là c , số câu sai $22 - c$ (câu bỏ trống không tính). Điểm $3c - (22 - c) = 4c - 22 \geq 52$, nên $c \geq \frac{74}{4} = 18.5$.

c nguyên nên ít nhất 19. Kiểm tra: 19 câu đúng được $57 - 3 = 54$ điểm; 18 câu đúng được $54 - 4 = 50 < 52$. Đáp án (E).

Bấy: làm tròn 18.5 xuống thành 18.

3.26 (C) 60

$\frac{x}{3} = \frac{x}{5} + 8$. Nhân hai vế với 15: $5x = 3x + 120$, nên $x = 60$. Đáp án (C).

Theo phần (chương 1): $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$ của số đó bằng 8, nên $\frac{1}{15}$ là 4 và cả số là 60. Kiểm tra: $20 = 12 + 8$. ✓

Bấy: lấy $8 \cdot 15 = 120$ mà quên rằng hiệu là $\frac{2}{15}$ chứ không phải $\frac{1}{15}$.

3.27 (E) $\frac{7}{2}$

Không tìm được a, b riêng (một phương trình, hai ẩn), nhưng tìm được **tỉ số** của chúng: $2a + 3b = 7(a - b) \iff 10b = 5a \iff a = 2b$.

Biểu thức cần tính có tử và mẫu cùng "bậc hai", nên chỉ phụ thuộc tỉ số: $\frac{(2b)^2 + 3b^2}{2b \cdot b} = \frac{7b^2}{2b^2} = \frac{7}{2}$. Đáp án (E).

Mẹo: cho luôn $b = 1$, $a = 2$ rồi tính. Bấy: nhân chéo sai thành $2a + 3b = 7a - b$ thì ra $a = \frac{4}{5}b$ và một kết quả khác hẳn.

3.28 (A) 130

Gọi cạnh là $a > b$. Chu vi: $4a + 4b = 64$, nên $a + b = 16$. Hiệu diện tích: $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 32$, nên $a - b = 2$.

Vậy $a = 9$, $b = 7$, tổng diện tích $81 + 49 = 130$. Đáp án (A).

Có thể không cần a, b : $a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{2} = \frac{256 + 4}{2} = 130$. Bấy: lấy $(a+b)^2 = 256$ làm tổng diện tích (quên $2ab$).

3.29 8

Tách phần nguyên: $\frac{3n+20}{n+2} = \frac{3(n+2)+14}{n+2} = 3 + \frac{14}{n+2}$.

Biểu thức nguyên khi và chỉ khi $n+2$ là ước của 14 — kể cả ước **âm**: $n+2 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 7, \pm 14\}$.

Mỗi ước cho một n khác nhau ($n = -1, 0, 5, 12, -3, -4, -9, -16$). Đáp số: 8.

Bấy: chỉ đếm ước dương thì được 4; để hỏi số nguyên n , không phải số nguyên dương.

3.30 9

$|x - 3|$ là khoảng cách trên trục số từ x tới 3; $|x + 5| = |x - (-5)|$ là khoảng cách từ x tới -5 .

Hai điểm -5 và 3 cách nhau đúng 8. Nếu x nằm giữa (kể cả hai đầu), tổng hai khoảng cách bằng đúng 8; nếu x nằm ngoài, tổng lớn hơn 8 (phải đi “quá” một đầu rồi quay lại).

Vậy mọi số nguyên $-5 \leq x \leq 3$ đều thỏa mãn: $3 - (-5) + 1 = 9$ số. Đáp số: 9.

Bẫy: giải như phương trình thường, chỉ tìm được hai đầu mút $x = -5$, $x = 3$ và trả lời 2.

3.31 (D) 49

Nhân đôi biểu thức rồi ghép thành ba bình phương:

$$2(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2.$$

Ta có $a - b = 3$, $b - c = 5$, nên $c - a = -(3 + 5) = -8$. Tổng ba bình phương $9 + 25 + 64 = 98$; biểu thức bằng $\frac{98}{2} = 49$.

Đáp án (D).

Kiểm tra với $c = 0$, $b = 5$, $a = 8$: $64 + 25 + 0 - 40 - 0 - 0 = 49$. ✓ Bẫy: quên chia 2 ra 98; quên $(c - a)^2$ ra 34.

3.32 (C) 40

Gọi số ghế mua là n ; giá vốn mỗi ghế $\frac{6000}{n}$. Bán $n - 5$ ghế, mỗi ghế $\frac{6000}{n} + 50$, thu được $6000 + 1000 = 7000$:

$$(n - 5) \left(\frac{6000}{n} + 50 \right) = 7000 \iff 6000 + 50n - \frac{30000}{n} - 250 = 7000 \iff 50n - \frac{30000}{n} = 1250.$$

Nhân với $\frac{n}{50}$: $n^2 - 25n - 600 = 0 \iff (n - 40)(n + 15) = 0$, nên $n = 40$. Đáp án (C).

Kiểm tra: giá vốn 150 nghìn, bán 35 ghế giá 200 nghìn, thu 7000 nghìn, lãi 1000 nghìn. ✓ Bẫy: trả lời 35 (số ghế đã bán). Mẹo: thử đáp án — n phải là ước của 6000 để giá vốn tròn; 40 là ứng viên tự nhiên.

3.33 4

Tổng tuổi hiện nay $5 \cdot 24 = 120$. Nếu cả 5 người đều đã sinh ra từ 7 năm trước, tổng tuổi khi đó là $120 - 35 = 85$, trung bình $17 \neq 22$. Vậy có người **chưa sinh** lúc đó.

Nếu đúng một người chưa sinh, tuổi người đó $y < 7$, và bốn người còn lại khi đó có tổng tuổi $120 - y - 28 = 92 - y$. Trung bình 22: $92 - y = 88$, nên $y = 4$ — hợp lệ.

Nếu hai người chưa sinh, tổng tuổi hai người đó là $120 - 21 - 66 = 33$, nhưng mỗi người dưới 7 tuổi — vô lý. Ba hay bốn người còn vô lý hơn. Đáp số: 4.

3.34 (B) 5

Đặt $t = x^2 - 5x$ (khối lặp lại): $t^2 + 2t - 48 = 0 \iff (t - 6)(t + 8) = 0$, nên $t = 6$ hoặc $t = -8$.

$$x^2 - 5x = 6 \iff (x - 6)(x + 1) = 0: x = 6 \text{ hoặc } x = -1.$$

$x^2 - 5x = -8 \iff x^2 - 5x + 8 = 0$. Nhưng $x^2 - 5x + 8 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4} > 0$ với mọi số thực x , nên trường hợp này **vô nghiệm**.

Chỉ có hai nghiệm thực 6 và -1 , tổng 5. Đáp án (B).

Bẫy: thấy cả hai phương trình bậc hai đều có dạng $x^2 - 5x + \dots$ rồi cộng “tổng hai nghiệm bằng 5” hai lần thì ra 10 — quên kiểm tra phương trình thứ hai có nghiệm thực hay không.

3.35 (E) 35

Gọi hai số là n và $n + 1$. Khai triển $(n + 1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$, nên hiệu hai lập phương là $3n^2 + 3n + 1 = 3n(n + 1) + 1$. $3n(n + 1) + 1 = 919 \iff n(n + 1) = 306$. Tích hai số liên tiếp bằng 306: vì $17^2 = 289 < 306 < 324 = 18^2$, thử $17 \cdot 18 = 306$. ✓

Hai số là 17 và 18, tổng 35. Đáp án (E).

Lối tắt: $3n^2 + 3n + 1 \approx 3\left(n + \frac{1}{2}\right)^2$, nên $\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \approx 306$, $n + \frac{1}{2} \approx 17.5$ — tổng hai số $= 2n + 1 \approx 35$. Bẫy: khoanh 17 hoặc 18 (một trong hai số).

3.36 (C) 1 candy is left over

Gọi số nữ g , số nam b , số kẹo K : $K = 3g + 5b + 4$ và $K = 5g + 3b - 2$.

Không cần tìm g, b : cộng hai phương trình được $2K = 8g + 8b + 2$, tức $K = 4(g + b) + 1$. Chia mỗi bên 4 kẹo cần đúng $4(g + b)$ kẹo, nên còn thừa 1 viên. Đáp án (C).

Vì sao cộng lại hiệu quả: cách chia “mỗi bạn 4 viên” chính là **trung bình** của hai cách chia để cho (mỗi nữ $\frac{3+5}{2}$, mỗi nam $\frac{5+3}{2}$), nên phần thừa cũng là trung bình của “thừa 4” và “thiếu 2”: $\frac{4 + (-2)}{2} = 1$.

Lớp có thể là 5 nữ, 2 nam ($K = 29$) hay 13 nữ, 10 nam ($K = 93$) — cả hai đều thừa đúng 1 viên. Bẫy: tưởng “trung bình thì vừa đủ” và chọn (D); hoặc lấy trung bình của 4 và 2 (quên rằng “thiếu” là số âm) thì ra (A).

Chapter 4 — Patterns, Sequences & Logical Reasoning

4.1 (A)	4.2 (B)	4.3 (C)	4.4 (D)	4.5 (E)	4.6 (A)
4.7 (E)	4.8 (B)	4.9 (C)	4.10 (D)	4.11 (A)	4.12 (B)
4.13 (D)	4.14 (E)	4.15 (A)	4.16 (B)	4.17 (C)	4.18 (B)
4.19 (D)	4.20 (A)	4.21 (B)	4.22 (E)	4.23 (E)	4.24 (D)
4.25 (C)	4.26 (A)	4.27 (C)	4.28 (D)	4.29 (A)	4.30 (E)
4.31 (B)	4.32 31	4.33 (C)	4.34 70	4.35 (D)	4.36 (B)

4.1 (A) 119

Từ số hạng thứ nhất đến thứ ba là 2 bước: $2d = 17 - 5 = 12$, nên $d = 6$.

Số hạng thứ 20 = $5 + 19 \cdot 6 = 119$. Đáp án (A).

Dùng 20 bước thay vì 19 thì ra 125; quên chia 2 ($d = 12$) thì ra 233.

4.2 (B) 143

Số hạng thứ $k + 1$ là $1000 - 7k$. Nó dương khi $7k < 1000$, tức $k \leq 142$ (vì $7 \cdot 142 = 994$, $7 \cdot 143 = 1001$).

k chạy từ 0 đến 142: có 143 số dương (số dương nhỏ nhất là $1000 - 994 = 6$). Đáp án (B).

Trả lời 142 là quên số hạng đầu $k = 0$ — lỗi “hàng rào”.

4.3 (C) 19

Mỗi nhóm 5 hạt có 2 hạt xanh (blue). $48 = 5 \cdot 9 + 3$: 9 nhóm đầy đủ cho 18 hạt xanh.

3 hạt còn lại là đỏ, đỏ, xanh — thêm 1 hạt xanh. Tổng 19. Đáp án (C).

Bỏ quên phần lẻ thì ra 18.

4.4 (D) 153

Tách thành hai dãy: các số hạng ở vị trí chẵn là 6, 9, 12, ... (tăng 3 sau mỗi cặp bước $+5 - 2$).

Số hạng thứ 100 là số hạng thứ 50 của dãy chẵn: $6 + 49 \cdot 3 = 153$. Đáp án (D).

Nghĩ “mỗi bước tăng 3” thì ra $1 + 99 \cdot 3 = 298$; lấy nhầm dãy vị trí lẻ thì ra 148 hoặc 151.

4.5 (E) 1288

Các bội của 4 là 12, 16, ..., 100: có $\frac{100 - 12}{4} + 1 = 23$ số.

Tổng = $\frac{(12 + 100) \cdot 23}{2} = 56 \cdot 23 = 1288$. Đáp án (E).

Quên số 100 (“between” ở đây có “inclusive”) thì ra 1188; bắt đầu từ 16 thì ra 1276.

4.6 (A) Monday

Từ 13/3 năm nay đến 13/3 năm sau có đủ một năm, và khoảng đó chứa ngày 29/2 của năm nhuận: 366 ngày.

$366 = 7 \cdot 52 + 2$, nên thứ lùi đi 2: thứ Bảy → thứ Hai. Đáp án (A).

Quên ngày 29/2 thì ra Chủ nhật.

4.7 (E) 102.4

Mỗi lần gấp đôi, số lớp giấy nhân đôi: sau 10 lần có $2^{10} = 1024$ lớp.

Độ dày $1024 \cdot 0.1 = 102.4$ mm. Đáp án (E).

“Cộng thêm một lớp mỗi lần” cho 1 mm — sai vì gấp đôi là **nhân 2** (cấp số nhân); dừng ở 9 lần gấp thì ra 51.2.

4.8 (B) 242

$a_4 = a_1 \cdot 3^3 = 27a_1 = 54$ nên $a_1 = 2$. Năm số hạng: 2, 6, 18, 54, 162.

Tổng = 242 (hoặc $2 \cdot \frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 3^5 - 1 = 242$). Đáp án (B).

Viết nhầm $a_4 = a_1 \cdot 3^4$ thì a_1 không nguyên; lấy 162 là số hạng thứ năm chứ không phải tổng.

4.9 (C) 12

Mỗi cánh dài n ô góp vào chu vi hai cạnh dài n và một đầu cánh dài 1: $2n + 1$. Bốn cánh: $4(2n + 1) = 8n + 4$. (Kiểm tra: hình 1 có chu vi 12.)

$8n + 4 = 100 \Rightarrow n = 12$. Đáp án (C).

Lấy $100 : 4 = 25$ (tưởng chu vi bằng 4 lần cánh) là sai; tính chu vi theo số ô ($4n + 1$) rồi giải $4n + 1 = 100$ cũng không ra số nguyên.

4.10 (D) 2600

Hiệu liên tiếp: 5, 7, 9, 11 — hiệu thứ hai không đổi. Nhận ra: $3 = 2^2 - 1$, $8 = 3^2 - 1$, $15 = 4^2 - 1$, ... nên số hạng thứ n là $(n + 1)^2 - 1$.

Số hạng thứ 50 = $51^2 - 1 = 2600$. Đáp án (D).

Lệch chỉ số ($50^2 - 1 = 2499$) là lỗi hay gặp — luôn thử lại với $n = 1$.

4.11 (A) 7:00 p.m.

Mỗi 24 giờ đồng hồ quay về đúng giờ cũ. $2026 = 24 \cdot 84 + 10$.

Sau 2026 giờ giống như sau 10 giờ: 9:00 sáng + 10 giờ = 7:00 tối (7:00 p.m.). Đáp án (A).

Lấn lộn sáng/chiều thì ra 7:00 a.m.

4.12 (B) 4

Mỗi năm nhân với 1.5 = $\frac{3}{2}$ (chương 1: hệ số nhân). Sau n năm: $\left(\frac{3}{2}\right)^n$.

$\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8} = 3.375$; $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} \approx 5.06 > 5$. Vậy 4 năm. Đáp án (B).

Nghĩ “mỗi năm thêm 50% của số ban đầu” (cấp số cộng) thì cần hơn 8 năm — sai mô hình.

4.13 (D) 112

$a_3 + a_8 = 2a_1 + 9d = 50$ và $a_5 = a_1 + 4d = 22$ (nhân đôi: $2a_1 + 8d = 44$). Trừ: $d = 6$, rồi $a_1 = 22 - 24 = -2$.

$a_{20} = -2 + 19 \cdot 6 = 112$. Đáp án (D).

Cách nhanh hơn: không cần tìm số hạng đầu, vì từ a_5 đến a_{20} là 15 bước: $a_{20} = a_5 + 15d = 22 + 90 = 112$.

Bấy: tính $a_{20} = a_1 + 20d$ (thừa một bước) ra 118; hoặc dừng ở $a_{19} = 106$.

4.14 (E) 28

Số giữa bằng trung bình: $100 : 5 = 20$. Gọi công sai là d ; năm số là $20 - 2d$, $20 - d$, 20 , $20 + d$, $20 + 2d$.

Dùng $(m - k)^2 + (m + k)^2 = 2m^2 + 2k^2$ (chương 3): tổng bình phương = $(800 + 8d^2) + (800 + 2d^2) + 400 = 2000 + 10d^2$.

$2000 + 10d^2 = 2160 \Rightarrow d^2 = 16$, $d = 4$ (dãy tăng). Số lớn nhất = $20 + 2 \cdot 4 = 28$; dãy là 12, 16, 20, 24, 28. ✓ Đáp án (E).

Bấy: viết số lớn nhất là $20 + d$ (quên rằng nó cách số giữa hai bước) thì ra 24.

4.15 (A) 6

Mỗi ngày phần còn lại nhân với $\frac{2}{3}$ (phần của phần còn lại, chương 1). Sau n ngày còn $\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$\left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243}; \frac{32}{243} < \frac{1}{10} \iff 320 < 243 \text{ — sai. } \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729} \text{ và } 640 < 729 \text{ — đúng.}$$

Vậy cuối ngày thứ 6. Đáp án (A).

So sánh bằng nhân chéo tránh phải chia ra số thập phân. Tưởng mỗi ngày ăn $\frac{1}{3}$ cả bánh thì bánh hết sau 3 ngày — sai gốc.

4.16 (B) 39

Các hàng có 1, 3, 5, ... cốc. Tổng n số lẻ đầu tiên là n^2 (trung bình n , nhân với n số).

$$n^2 = 400 \Rightarrow n = 20 \text{ hàng. Hàng dưới cùng là số lẻ thứ 20: } 2 \cdot 20 - 1 = 39. \text{ Đáp án (B).}$$

Bấy: trả lời số hàng (20) thay vì số cốc ở hàng dưới; hoặc $2 \cdot 20 + 1 = 41$.

4.17 (C) $\frac{55}{89}$

$$\text{Tính vài số hạng: } a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3/2} = \frac{2}{3}, a_4 = \frac{1}{5/3} = \frac{3}{5}, a_5 = \frac{5}{8}, a_6 = \frac{8}{13}.$$

Quy luật: nếu $a_n = \frac{p}{q}$ thì $a_{n+1} = \frac{1}{1+p/q} = \frac{q}{p+q}$ — tử mới là mẫu cũ, mẫu mới là tổng. Tử và mẫu đi theo dãy

1, 1, 2, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... (mỗi số bằng tổng hai số trước).

$$a_7 = \frac{13}{21}, a_8 = \frac{21}{34}, a_9 = \frac{34}{55}, a_{10} = \frac{55}{89}. \text{ Đáp án (C).}$$

Lệch một chỉ số cho $\frac{34}{55}$ hoặc $\frac{89}{144}$.

4.18 (B) 9

Sau n ngày: Lan có $10(1 + 2 + \dots + n) = 5n(n+1)$; Minh có $1 + 2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ (nghìn đồng).

$n = 8$: Lan 360, Minh 255. $n = 9$: Lan 450, Minh 511. Lần đầu Minh vượt là cuối ngày 9. Đáp án (B).

Bấy: so số tiền trong một ngày ($2^{n-1} > 10n$ lần đầu ở ngày 8) thay vì tổng.

4.19 (D) Dũng

Câu của Bình ("Chi lấy") và câu của Chi ("Bình nói dối", tức "Chi không lấy") mâu thuẫn nhau: đúng một trong hai câu đúng.

Vì chỉ có một người nói thật, người đó là Bình hoặc Chi; do đó An và Dũng đều nói dối. Dũng nói dối nghĩa là chính Dũng lấy chìa khoá.

Kiểm tra: thủ phạm là Dũng thì An sai, Bình sai, Chi đúng, Dũng sai — đúng một câu đúng. ✓ Đáp án (D).

4.20 (A) 45

Bỏ hàng dưới cùng và hai đồng ở hai đầu mỗi hàng: hàng k (có k đồng) còn $k - 2$ đồng trắng, với $k = 3, \dots, n - 1$.

Số xu trắng = $1 + 2 + \dots + (n - 3)$ — một tam giác nhỏ hơn có $n - 3$ hàng. Hình 6: $1 + 2 + 3 = 6$ (khớp hình vẽ). Hình 12: $1 + \dots + 9 = 45$. Đáp án (A).

Bấy: tưởng phần trong là tam giác $n - 2$ hàng (ra 55) — nhưng cả ba cạnh đều bị bỏ, nên mất ba "lớp".

4.21 (B) 3090

Số đỏ là các số chia 5 dư 1 hoặc 2: 1, 6, ..., 96 (20 số, tổng $\frac{(1+96) \cdot 20}{2} = 970$) và 2, 7, ..., 97 (tổng 990).

Tổng các số đỏ = 1960, nên tổng các số xanh = $5050 - 1960 = 3090$. Đáp án (B).

Cách khác: 60 số xanh chia thành ba cấp số cộng 3..98, 4..99, 5..100, tổng $1010 + 1030 + 1050 = 3090$. Lấy $\frac{3}{5} \cdot 5050 = 3030$ là bỏ qua việc số xanh nằm ở cuối mỗi nhóm nên lớn hơn trung bình.

4.22 (E) 20

Sau t giây, A ở vị trí $5t$ và B ở vị trí $-3t$ (tính theo vòng 12). Hai kim trùng nhau khi hiệu $5t - (-3t) = 8t$ chia hết cho 12.

Nói cách khác: hai kim đi **ngược chiều** nên mỗi giây chúng “rời nhau” $5 + 3 = 8$ vị trí (vận tốc tương đối, chương 2). $8t$ chia hết cho 12 $\iff 2t$ chia hết cho 3 $\iff t$ chia hết cho 3.

Các thời điểm 3, 6, ..., 60: có 20 lần. Đáp án (E).

Bấy: coi hai kim cùng chiều (hiệu $2t$, ra 10 lần); hoặc nghĩ phải chờ cả hai về 0 (sau mỗi 12 giây, ra 5 lần).

4.23 (E) Wednesday

Chỉ cần số dư của 2^{100} khi chia cho 7. Số dư của 2, 4, 8, 16, ... là 2, 4, 1, 2, 4, 1, ... — chu kỳ 3 (vì $2^3 = 8$ chia 7 dư 1).

$100 = 3 \cdot 33 + 1$, nên 2^{100} chia 7 dư như 2^1 , tức dư 2. Thứ Hai +2 ngày = thứ Tư. Đáp án (E).

Dùng nhầm chu kỳ 4 của chữ số tận cùng (2^{100} tận cùng 6) thì ra Chủ nhật — nhưng thứ trong tuần cần số dư khi chia cho 7.

4.24 (D) 64

Tổng sau khi viết n là $\frac{n(n+1)}{2}$. Cần $n(n+1) > 4052$; vì $n^2 \approx 4052$ nên thử n gần 64.

$63 \cdot 64 = 4032 < 4052$ (tổng 2016); $64 \cdot 65 = 4160 > 4052$ (tổng 2080). Số cuối cùng là 64. Đáp án (D).

Lấy $\sqrt{2026} \approx 45$ là quên chia 2 trong công thức tổng.

4.25 (C) 100%

Lương tăng đều nên là cấp số cộng: năm n có lương $a + (n-1)d$. Năm 3: $a + 2d = 1.2a$, nên $d = 0.1a$ — mỗi năm tăng 10% của lương **năm đầu**.

Năm 11: $a + 10d = a + a = 2a$, nhiều hơn năm đầu 100%. Đáp án (C).

Bấy: coi đây là tăng theo phần trăm (cấp số nhân, chương 1) — cứ 2 năm nhân 1.2, sau 10 năm được $1.2^5 \approx 2.49$, tức khoảng 149%; hoặc đếm 9 bước thay vì 10 (ra 90%).

4.26 (A) 6

Mỗi nước đi của mã đi tổng cộng 3 ô ngang + dọc, nên luôn đổi màu ô (trắng $\leftrightarrow$ đen). Sau một số **lẻ** nước, mã đứng ở ô khác màu ô xuất phát — không thể là chính ô đó. Vậy n phải chẵn: chỉ còn 6.

Và $n = 6$ làm được: đi tới một ô rồi quay lại (2 nước), lặp 3 lần. Đáp án (A).

4.27 (C) $\frac{26}{5}$

Ý chính: tổng một số lẻ số hạng = số số hạng $\times$ số hạng giữa. Nên $S_{13} = 13a_7$ và $S_5 = 5a_3$.

Do đó $\frac{S_{13}}{S_5} = \frac{13a_7}{5a_3} = \frac{13 \cdot 2a_3}{5a_3} = \frac{26}{5}$ (tỉ số, chương 2). Đáp án (C).

Kiểm tra bằng số: $a_7 = 2a_3$ cho $a_1 + 6d = 2a_1 + 4d$, tức $a_1 = 2d$; lấy $d = 1$: dãy 2, 3, 4, ...; $S_5 = 20$, $S_{13} = 104$, tỉ số $\frac{104}{20} = \frac{26}{5}$.
✓

Bấy: tưởng tỉ số tổng bằng tỉ số số số hạng ($\frac{13}{5}$) hoặc bằng 2.

4.28 (D) 28

Viết ra: 2026, 226, 46, 28, 34, 19, 37, 31, 7, 28, ... (ví dụ $34 \rightarrow 3 + 16 = 19$, $7 \rightarrow 0 + 28 = 28$).

Từ số thứ 4 trở đi dãy lặp với chu kỳ 6: 28, 34, 19, 37, 31, 7. Số thứ n (với $n \geq 4$) ứng với vị trí $(n-4)$ chia 6 dư bao nhiêu trong chu kỳ.

$2026 - 4 = 2022 = 6 \cdot 337$, dư 0: số thứ 2026 là số đầu chu kỳ, 28. Đáp án (D).

Bấy: chia thẳng 2026 cho 6 (dư 4) như thể chu kỳ bắt đầu từ số đầu tiên, ra 28 hay 37 tùy cách đếm — phải trừ phần đầu không tuần hoàn trước.

4.29 (A) Khoa

Mốc là Mai. Mai nói thật nên đúng hai bạn cao hơn Mai: Mai đứng thứ 3 theo chiều cao. Hai bạn cao hơn (hạng 1, 2) nói thật, hai bạn thấp hơn (hạng 4, 5) nói dối.

Tú nói thật được không? Nếu có, Tú ở hạng 1–2 và Linh cao ngay trên Nam. Hai bạn này liền hạng mà không ai trong họ được chiếm hạng 3 (của Mai), nên Linh 4, Nam 5; còn Khoa, Tú ở hạng 1–2. Khi đó Linh (nói dối) nói “Tú cao hơn tôi” — câu này lại đúng. Mâu thuẫn. Vậy Tú nói dối: Tú ở hạng 4 hoặc 5.

Linh nói thật được không? Nếu có, Linh ở hạng 1–2 và Tú cao hơn Linh — nhưng Tú ở hạng 4–5. Mâu thuẫn. Vậy Linh cũng nói dối.

Linh, Tú ở hạng 4–5; Khoa, Nam ở hạng 1–2 và nói thật. Câu của Nam: Khoa cao ngay trên Nam, nên Khoa 1, Nam 2. Linh nói dối nên “Tú cao hơn Linh” sai: Linh 4, Tú 5. Kiểm tra: Khoa cao hơn Tú — đúng ✓; Tú nói “Linh cao ngay trên Nam” — sai ✓.

Thứ tự từ cao đến thấp: Khoa, Nam, Mai, Linh, Tú. Cao nhất là Khoa. Đáp án (A).

Bẫy: đọc ngược câu của Nam (“Nam cao ngay trên Khoa”) sẽ đặt Nam lên đầu, chọn (D).

4.30 (E) 60

Diện tích: $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Chu vi: phần nằm ngang gồm đáy dài n và các mặt trên của n cột, tổng $2n$. Phần thẳng đứng gồm cạnh trái cao 1, cạnh phải cao $2n - 1$ và $n - 1$ “bậc” mỗi bậc cao 2. Chu vi $= 2n + 1 + (2n - 1) + 2(n - 1) = 6n - 2$ (kiểm tra: hình 1 có chu vi 4, hình 2 có chu vi 10).

Cần $n^2 > 10(6n - 2)$, tức $n^2 - 60n + 20 > 0$, hay $n(n - 60) > -20$ (chương 3: bất phương trình). Với $n = 59$: $59 \cdot (-1) = -59 < -20$ — chưa được. Với $n = 60$: $0 > -20$ — được. Đáp án (E).

Bẫy: giải gần đúng $n^2 \approx 60n$ rồi chọn 59; hoặc quên các bậc thẳng đứng giữa các cột (chu vi $4n$, ra số khác hẳn).

4.31 (B) 20

Dãy được xác định hoàn toàn bởi hai số đầu x, y (nguyên dương). Viết các số hạng theo x, y :

$x, y, x + y, x + 2y, 2x + 3y, 3x + 5y, 5x + 8y, 8x + 13y$.

Cần đếm số cặp nguyên dương (x, y) với $8x + 13y = 2026$. Vì $8x$ và 2026 chẵn nên $13y$ chẵn, tức y chẵn. Thử $y = 2$: $8x = 2000$, $x = 250$ — được. Khi y tăng 8 thì $13y$ tăng $104 = 8 \cdot 13$, nên x giảm đúng 13 và vẫn nguyên; các y chẵn khác (như $y = 4, 6$) cho $2026 - 13y$ không chia hết cho 8. Vậy các nghiệm là $y = 2, 10, 18, \dots$ và $x = 250, 237, 224, \dots$

Điều kiện $x \geq 1$: $13y \leq 2018$, $y \leq 155$. Số lớn nhất dạng $2 + 8k$ không quá 155 là 154 (khi đó $x = 3$). Số nghiệm: $\frac{154 - 2}{8} + 1 = 20$. Đáp án (B).

Bẫy: quên “+1” khi đếm ra 19 (lỗi hàng rào); chỉ dùng điều kiện “ y chẵn” mà không kiểm tra chia hết cho 8 thì đếm $y = 2, 4, \dots, 154$ ra 77.

4.32 31

Giờ một chữ số h (từ 1 đến 9): ba chữ số là $h, h + d, h + 2d$ với chữ số hàng chục phút $h + d \leq 5$ và $0 \leq h + 2d \leq 9$.

Đếm theo h (các giá trị d hợp lệ):

$h = 1$: $d = 0, 1, 2, 3, 4$ (1:11, 1:23, 1:35, 1:47, 1:59) — 5 giờ.

$h = 2$: $d = -1, 0, 1, 2, 3$ — 5. $h = 3$: $d = -1, 0, 1, 2$ — 4. $h = 4$: $d = -2, -1, 0, 1$ — 4.

$h = 5$: $d = -2, -1, 0$ — 3. $h = 6$: $d = -3, -2, -1$ — 3. $h = 7$: $d = -3, -2$ — 2. $h = 8$: $d = -4, -3$ — 2. $h = 9$: $d = -4$ — 1.

Tổng: $5 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 2 + 2 + 1 = 29$.

Giờ hai chữ số (10, 11, 12): bốn chữ số 1, 0, ... cần $d = -1$ rồi -1 — không được; 1, 1, 1 cho 11:11; 1, 2, 3, 4 cho 12:34. Thêm 2.

Tổng cộng $29 + 2 = 31$. Đáp số: 31.

Lỗi hay gặp: chỉ đếm dãy tăng; quên điều kiện chữ số hàng chục phút không quá 5 (ví dụ 3:69 không tồn tại); hoặc quên các giờ có hai chữ số.

4.33 (C) $\frac{97}{2}$

Nhóm mẫu q có $q - 1$ phân số, tổng $\frac{1 + 2 + \dots + (q - 1)}{q} = \frac{q - 1}{2}$ (ghép đầu-cuối: mỗi cặp có tổng 1).

Các nhóm $q = 2, \dots, 14$ có $1 + 2 + \dots + 13 = 91$ phân số, tổng $\frac{1 + 2 + \dots + 13}{2} = \frac{91}{2}$.

Còn 9 phân số của nhóm $q = 15$: $\frac{1 + 2 + \dots + 9}{15} = \frac{45}{15} = 3$.

Tổng $= \frac{91}{2} + 3 = \frac{97}{2}$. Đáp án (C).

Bẫy: ước “trung bình mỗi phân số là $\frac{1}{2}$ ” rồi nhân với 100 ra 50 — sai vì 9 phân số cuối $\frac{1}{15}, \dots, \frac{9}{15}$ có trung bình $\frac{1}{3}$ chứ không phải $\frac{1}{2}$ (tổng là 3, không phải 4.5).

4.34 70

Ý chính: dãy $b - d, b, b + d$ có tổng $3b$. Tổng chia hết cho 9 $\iff b$ chia hết cho 3.

Với số giữa b , công sai $d \geq 1$ phải thỏa $b - d \geq 1$ và $b + d \leq 30$: có $\min(b - 1, 30 - b)$ cách chọn d .

$b = 3, 6, 9, 12, 15$: $\min = b - 1$, cho $2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$.

$b = 18, 21, 24, 27, 30$: $\min = 30 - b$, cho $12 + 9 + 6 + 3 + 0 = 30$.

Tổng $40 + 30 = 70$. Đáp số: 70.

Lỗi hay gặp: đếm theo số hạng đầu a và điều kiện $9 \mid 3a + 3d$ thì dễ đếm sót; chọn số giữa làm “tâm” khiến điều kiện chỉ còn $3 \mid b$.

4.35 (D) 2038

Mỗi năm thường đẩy thứ của ngày 1/1 năm sau đi 1; năm nhuận đẩy đi 2. Đặt thứ Sáu là 0 và cộng dồn (theo mod 7):

2028 bắt đầu thứ Bảy (+1, và 2028 nhuận) $\rightarrow$ 2029: +2, Thứ Hai $\rightarrow$ 2030 Thứ Ba $\rightarrow$ 2031 Thứ Tư $\rightarrow$ 2032 Thứ Năm (nhuận) $\rightarrow$ 2033 Thứ Bảy $\rightarrow$ 2034 Chủ nhật $\rightarrow$ 2035 Thứ Hai $\rightarrow$ 2036 Thứ Ba (nhuận) $\rightarrow$ 2037 Thứ Năm $\rightarrow$ 2038 Thứ Sáu, và 2038 không nhuận.

Năm 2038 dùng lại đúng lịch của 2027. Đáp án (D).

Bẫy: tưởng lịch lặp lại sau 7 năm (2034) hoặc chỉ nhớ chu kỳ 28 năm (2055) — chu kỳ 28 năm đúng nhưng không phải lần sớm nhất.

4.36 (B) 2389

Mỗi số như vậy ứng với đúng một tập chữ số (chọn các chữ số từ 1 đến 9 rồi xếp tăng; chữ số 0 không dùng được vì không thể đứng đầu và không thể đứng sau một chữ số nhỏ hơn nó). Nên có $\binom{9}{k}$ số có k chữ số.

Đếm theo khối: 1 chữ số: 9; 2 chữ số: $\binom{9}{2} = 36$; 3 chữ số: $\binom{9}{3} = 84$. Cộng dồn $9 + 36 + 84 = 129$. Số thứ 200 là số 4 chữ số thứ $200 - 129 = 71$.

Số 4 chữ số bắt đầu bằng 1: chọn 3 chữ số từ $\{2, \dots, 9\}$, có $\binom{8}{3} = 56$ số. Bắt đầu bằng 2: $\binom{7}{3} = 35$ số, chiếm vị trí 57–91 trong khối 4 chữ số. Ta cần số thứ $71 - 56 = 15$ bắt đầu bằng 2. Các số bắt đầu bằng 23 có $\binom{6}{2} = 15$ số: 2345, 2346, $\dots$, 2379, 2389 — số thứ 15 là số cuối, 2389. Đáp án (B).

Bẫy: lệch một vị trí ra 2379 (thứ 199) hoặc 2456 (thứ 201); quên 9 số một chữ số thì tìm số thứ 209, ra 2479; quên 36 số hai chữ số thì tìm số thứ 236, ra 3589.

Chapter 5 — Number Theory — Divisibility, Primes & Factors**5.1 (A)****5.2 (C)****5.3 (D)****5.4 (E)****5.5 (A)****5.6 (A)****5.7 (B)****5.8 (C)****5.9 (B)****5.10 (E)****5.11 (D)****5.12 (D)****5.13 (C)****5.14 (D)****5.15 (C)****5.16 (A)****5.17 (B)****5.18 (E)****5.19 (D)****5.20 (A)****5.21 (B)****5.22 (D)****5.23 (A)****5.24 (E)****5.25 (C)****5.26 (E)****5.27 (D)****5.28 (E)****5.29 17****5.30 (C)****5.31 (A)****5.32 60****5.33 8****5.34 (C)****5.35 624****5.36 (B)**

5.1 (A) 49

Số có đúng 3 ước có dạng p^2 với p nguyên tố (khuôn $3 = 2 + 1$): các ước là $1, p, p^2$. Trong các lựa chọn chỉ có $49 = 7^2$. Kiểm tra: $50 = 2 \cdot 5^2$ có 6 ước, $64 = 2^6$ có 7, $81 = 3^4$ có 5, $98 = 2 \cdot 7^2$ có 6. Đáp án (A). Chú ý: số chính phương như 64, 81 chưa chắc có 3 ước — phải là bình phương của một **số nguyên tố**.

5.2 (C) 17

2431 lẻ, tổng chữ số 10 (không chia hết cho 3), không tận cùng 0 hay 5. Thử 7: $7 \cdot 347 = 2429$, không chia hết. Thử 11 (tổng đan dấu $1 - 3 + 4 - 2 = 0$): $2431 = 11 \cdot 221$, và $221 = 13 \cdot 17$. Vậy $2431 = 11 \cdot 13 \cdot 17$; thừa số nguyên tố lớn nhất là 17. Đáp án (C).

Dừng ở $2431 = 11 \cdot 221$ mà tưởng 221 nguyên tố là sai lầm hay gặp — 221 là một “số nguyên tố giả”.

5.3 (D) 25

6 không phải số nguyên tố, nên phải phân tích trước: $6^4 = 2^4 \cdot 3^4$. Số ước $(4 + 1)(4 + 1) = 25$. Đáp án (D).

Bây: coi 6 như số nguyên tố, dùng công thức cho p^4 được 5.

5.4 (E) 13

Số còn lại là các số từ 2 đến 50 không chia hết cho 2, 3, 5. Chúng là số nguyên tố lớn hơn 5, **hoặc** hợp số mà mọi thừa số nguyên tố đều ≥ 7 — nhỏ nhất là $7 \cdot 7 = 49 \leq 50$.

Số nguyên tố từ 7 đến 47: 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47 — 12 số. Cộng thêm 49: tổng 13. Đáp án (E).

Bây: tưởng mọi số còn lại đều là số nguyên tố, quên 49, được 12. Muốn sàng hết tới 50 phải gạch cả bội của 7.

5.5 (A) 6

Hàng giữa là $2x$ và $5x$, nên ô trên cùng là $2x \cdot 5x = 10x^2 = 360$. Suy ra $x^2 = 36$, $x = 6$. Đáp án (A).

Nhìn bằng thừa số nguyên tố: $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$; số giữa hàng đáy được dùng **hai lần**, nên $x^2 = 360/(2 \cdot 5) = 36$.

5.6 (A) 2

3^{11} và 5^{13} đều là số lẻ (tích các số lẻ), nên tổng của chúng là số chẵn: 2 chia hết tổng. Đáp án (A).

Không cần tính số rất lớn này — tính chẵn lẻ trả lời ngay. (Tổng không chia hết cho 3 hay 5, vì đúng một số hạng chia hết cho mỗi số đó.)

5.7 (B) 10

Đếm thừa số 5 trong $45!$: $\lfloor 45/5 \rfloor + \lfloor 45/25 \rfloor = 9 + 1 = 10$ (số 25 góp thêm một thừa số). Thừa số 2 nhiều hơn, nên có 10 chữ số 0. Đáp án (B). Quên số 25 sẽ ra 9.

5.8 (C) 10

N/k chính phương khi mọi số mũ chẵn. Số mũ của 2 là 3 (lẻ) $\rightarrow$ phải bỏ một thừa số 2; của 3 là 4 (chẵn) $\rightarrow$ giữ; của 5 là 1 $\rightarrow$ bỏ thừa số 5. Vậy $k = 2 \cdot 5 = 10$ và $N/k = 2^2 \cdot 3^4 = 324 = 18^2$. Đáp án (C).

5.9 (B) 66

Phân tích: $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ (bốn thừa số, có 2 lặp lại), $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$ ✓, $75 = 3 \cdot 5^2$, $98 = 2 \cdot 7^2$, $99 = 3^2 \cdot 11$.

Chỉ 66 là tích của ba số nguyên tố khác nhau. Đáp án (B). (60 có ba số nguyên tố khác nhau là 2, 3, 5 nhưng tích của chúng là 30, không phải 60.)

5.10 (E) 36

Tính tổng các ước thực sự: 16: $1 + 2 + 4 + 8 = 15$; 21: $1 + 3 + 7 = 11$; 25: $1 + 5 = 6$; 32: $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$; 36: $1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 9 + 12 + 18 = 55$.

Chỉ $36 < 55$. Đáp án (E). (Nhanh hơn: $\sigma(36) = (1 + 2 + 4)(1 + 3 + 9) = 91$, trừ 36 được 55.)

5.11 (D) 14

Các số cần đếm có dạng $2^a 3^b \leq 50$. Liệt kê theo b :

• $b = 0$: 2, 4, 8, 16, 32 (5 số). • $b = 1$: 3, 6, 12, 24, 48 (5 số). • $b = 2$: 9, 18, 36 (3 số). • $b = 3$: 27 (1 số).

Tổng $5 + 5 + 3 + 1 = 14$. Đáp án (D).

5.12 (D) (8, 36)

ƯCLN chia hết cả hai số, mà mỗi số lại chia hết BCNN, nên ƯCLN phải là ước của BCNN. $8 \nmid 36$, nên cặp (8, 36) không thể xảy ra. Các cặp khác đều xảy ra: (4, 24) với 4, 24; (5, 60) với 15, 20; (6, 36) với 6, 36; (9, 45) với 9, 45. Đáp án (D).

5.13 (C) 116

Rút gọn trước: $\frac{30!}{28!} = 30 \cdot 29 = 870 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$. Mỗi số nguyên tố chỉ xuất hiện **một lần**.

Các lựa chọn: $58 = 2 \cdot 29$, $87 = 3 \cdot 29$, $116 = 2^2 \cdot 29$, $145 = 5 \cdot 29$, $174 = 2 \cdot 3 \cdot 29$. Chỉ 116 cần hai thừa số 2, nên không phải ước của 870. Đáp án (C).

5.14 (D) 120

Phân tích: $96 = 2^5 \cdot 3$ có $6 \cdot 2 = 12$ ước; $100 = 2^2 \cdot 5^2$ có 9; $108 = 2^2 \cdot 3^3$ có $3 \cdot 4 = 12$; $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ có $4 \cdot 2 \cdot 2 = 16$; $125 = 5^3$ có 4.

Lớn nhất là 120. Đáp án (D). Nhận xét: nhiều số nguyên tố **khác nhau** với số mũ nhỏ cho nhiều ước hơn một số mũ lớn.

5.15 (C) 28

Ước chung của n và 100 chính là ước của $\gcd(n, 100)$. Có đúng 2 ước chung khi $\gcd(n, 100)$ có đúng 2 ước, tức là một số nguyên tố — ước nguyên tố của 100: $\gcd(n, 100) = 2$ hoặc 5.

• $\gcd = 2$: n chẵn, không chia hết cho 4, không chia hết cho 5. Số chẵn không chia hết cho 4 trong $[1, 100]$: 2, 6, 10, ..., 98 — 25 số; bỏ 10, 30, 50, 70, 90: còn 20.

• $\gcd = 5$: n là bội lẻ của 5 nhưng không chia hết cho 25: 5, 15, ..., 95 (10 số) bỏ 25, 75: còn 8.

Tổng $20 + 8 = 28$. Đáp án (C). Bẫy: chỉ xét $\gcd = 2$ được 20; quên loại bội của 25 được 30.

5.16 (A) 19

Nhân ba đẳng thức: $(abc)^2 = 24 \cdot 54 \cdot 36 = (2^3 \cdot 3)(2 \cdot 3^3)(2^2 \cdot 3^2) = 2^6 \cdot 3^6$, nên $abc = 2^3 \cdot 3^3 = 216$.

Chia: $c = \frac{216}{24} = 9$, $a = \frac{216}{54} = 4$, $b = \frac{216}{36} = 6$. Kiểm tra: $4 \cdot 6 = 24$, $6 \cdot 9 = 54$, $9 \cdot 4 = 36$ ✓.

$a + b + c = 19$. Đáp án (A). Viết các tích dưới dạng thừa số nguyên tố giúp lấy căn bậc hai không cần tính 46 656.

5.17 (B) 5

Bội của 77 có ba chữ số: $77k$ với $2 \leq k \leq 12$ ($77 \cdot 13 = 1001$), tức 11 số. $77k$ lẻ khi k lẻ: $k = 3, 5, 7, 9, 11$ — 5 số. Đáp án (B). (Đếm cả số chẵn ra 11; tưởng $k = 1$ cũng cho số có ba chữ số thì được 6.)

5.18 (E) 465

Hàng thứ nhất có tổng $1 + 2 + 4 + 8 = 15$; hàng thứ hai là hàng thứ nhất nhân 5, tổng $15 \cdot 5$; hàng thứ ba tổng $15 \cdot 25$.

Tổng cả bảng: $15 \cdot (1 + 5 + 25) = 15 \cdot 31 = 465$. Đáp án (E). Đây chính là công thức $\sigma(2^3 \cdot 5^2) = (1 + 2 + 4 + 8)(1 + 5 + 25)$.

5.19 (D) 9

Các ước ghép cặp $d \leftrightarrow n/d$; chỉ ước $\sqrt{n}$ tự ghép với chính nó, nên số chính phương có số ước **lẻ**. (Cách khác: mọi số mũ $2a$ chẵn nên mọi thừa số $2a + 1$ lẻ.) Lựa chọn lẻ duy nhất là 9 (ví dụ 36 có 9 ước). Đáp án (D).

5.20 (A) 0

Số chữ số 0 của $n!$ bằng số thừa số 5. Khi n tăng, số này chỉ tăng ở các bội của 5: $20!, \dots, 24!$ có 4 chữ số 0; tới $25!$ thì số $25 = 5^2$ góp **hai** thừa số 5 cùng lúc, nên số chữ số 0 nhảy từ 4 lên 6.

Không có n nào cho đúng 5 chữ số 0. Đáp án (A).

Bấy: tưởng $25!, \dots, 29!$ có 5 chữ số 0 nên chọn 5; thực ra chúng có 6.

5.21 (B) 24

Có cột ở mỗi góc và khoảng cách đều nên khoảng cách phải chia hết cả 84 và 60; lớn nhất là $\gcd(84, 60) = 12$ m.

Trên một đường khép kín, số cột bằng số khoảng: chu vi $2(84 + 60) = 288$ m chia 12 được 24 cột. Đáp án (B).

Bấy: đếm mỗi cạnh $84/12 + 1 = 8$ và $60/12 + 1 = 6$ cột rồi cộng bốn cạnh được 28 — mỗi cột góc bị đếm hai lần; hoặc dùng công thức “số khoảng + 1” của đoạn thẳng được 25.

5.22 (D) 360

$360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ có $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ ước. Các ước ghép cặp $d \leftrightarrow 360/d$, và khi xếp tăng dần thì $d_i \cdot d_{25-i} = 360$ (ước nhỏ thứ i ghép với ước lớn thứ i). Vì $7 + 18 = 25$, $d_7 \cdot d_{18} = 360$. Đáp án (D).

Kiểm tra: $d_7 = 8$, $d_{18} = 45$, $8 \cdot 45 = 360$ ✓ — không cần liệt kê nếu thấy được cặp.

5.23 (A) 360

$\text{lcm}(1, \dots, 10) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Bỏ một số chỉ làm BCNN giảm khi số đó là **nơi duy nhất** chứa lũy thừa cao nhất của một số nguyên tố:

- bỏ 8: 2^3 mất, còn 2^2 : BCNN 1260. • bỏ 9: còn 3^1 : 840. • bỏ 5: số 10 vẫn chứa thừa số 5, BCNN không đổi. • bỏ 7: mất thừa số 7: $2520/7 = 360$. • bỏ các số khác: không đổi.

Nhỏ nhất là 360 (bỏ số 7). Đáp án (A). Bấy: nghĩ bỏ số lớn nhất (10) hoặc bỏ 8, 9 có lợi nhất.

5.24 (E) 30

Hằng đẳng thức (Chương 3): $(p - q)(p + q) = 72$. Nếu $q = 2$ thì $p^2 = 76$ không chính phương, nên p, q đều lẻ; khi đó $p - q$ và $p + q$ đều chẵn. Các cách viết 72 thành tích hai số chẵn $p - q < p + q$: $2 \cdot 36, 4 \cdot 18, 6 \cdot 12$.

- $2 \cdot 36$: $p = 19, q = 17$ ✓. • $4 \cdot 18$: $p = 11, q = 7$ ✓. • $6 \cdot 12$: $p = 9$ (không nguyên tố) ✗.

Tổng các giá trị của p : $19 + 11 = 30$. Đáp án (E). Chỉ tìm thấy một nghiệm sẽ chọn 11 hoặc 19.

5.25 (C) 30

$10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$ (số mũ của 2: $5 + 2 + 1 = 8$; của 3: $3 + 1 = 4$; của 5: 2). Thương $10!/d$ lẻ khi d “lấy hết” thừa số 2, tức $d = 2^8 \cdot e$ với e là ước của phần lẻ $3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Số cách chọn e : $5 \cdot 3 \cdot 2 = 30$. Đáp án (C). Cách nhìn khác: $d \mapsto 10!/d$ là song ánh giữa các ước cần đếm và các ước **lẻ** của $10!$, nên đáp số bằng số ước lẻ. Bấy: tính sai số mũ của 3 trong $10!$ là 3 (quên số 9 góp hai thừa số) sẽ ra $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

5.26 (E) 29

$2520 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Các chữ số là ước có một chữ số; thừa số 5 và 7 bắt buộc là hai chữ số 5 và 7. Phần còn lại $2^3 \cdot 3^2 = 72$.

Muốn N nhỏ nhất, trước hết cần **ít chữ số nhất**: 72 không phải một chữ số, nhưng $72 = 8 \cdot 9$ là hai chữ số — cách duy nhất. Vậy N có 4 chữ số 5, 7, 8, 9; xếp tăng dần: $N = 5789$.

Tổng các chữ số: $5 + 7 + 8 + 9 = 29$. Đáp án (E). Bấy: tách $72 = 2 \cdot 4 \cdot 9$ cho số 24579 (tổng 27) — nhiều chữ số hơn nên lớn hơn.

5.27 (D) 6

Liệt kê **mọi khuôn** của 12: $12, 6 \cdot 2, 4 \cdot 3, 3 \cdot 2 \cdot 2$, tức $N = p^{11}, p^5q, p^3q^2, p^2qr$. Vì $20 = 2^2 \cdot 5 \mid N$, N chứa ít nhất 2^2 và 5 — có ít nhất hai số nguyên tố, nên loại p^{11} .

- p^5q : số mũ 5 phải thuộc về 2 (nếu thuộc về 5 thì 2 chỉ có mũ 1): $N = 2^5 \cdot 5 = 160$ ✓.
- p^3q^2 : $2^3 \cdot 5^2 = 200$ ✓ hoặc $2^2 \cdot 5^3 = 500 > 300$ ✗.
- p^2qr : số mũ 2 thuộc về 2, nên $N = 2^2 \cdot 5 \cdot r = 20r$ với r nguyên tố khác 2, 5 và $20r < 300$, tức $r < 15$: $r = 3, 7, 11, 13$ cho 60, 140, 220, 260.

Tổng cộng $1 + 1 + 4 = 6$ số: 60, 140, 160, 200, 220, 260. Đáp án (D).

Bây: chỉ xét khuôn p^2qr được 4; chỉ xét các số chỉ có thừa số 2 và 5 (khuôn p^5q, p^3q^2) được 2.

5.28 (E) 32

Nếu $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ thì $d(n) = (a_1 + 1) \cdots (a_k + 1)$. Tích này là số nguyên tố chỉ khi có **đúng một** thừa số, tức $n = p^a$ là lũy thừa của một số nguyên tố, và $a + 1$ là số nguyên tố.

- $a = 1$ ($d = 2$): các số nguyên tố ≤ 100 — 25 số.
- $a = 2$ ($d = 3$): 4, 9, 25, 49 — 4 số.
- $a = 4$ ($d = 5$): 16, 81 — 2 số.
- $a = 6$ ($d = 7$): 64 — 1 số. ($a = 10$: $2^{10} > 100$.)

Tổng $25 + 4 + 2 + 1 = 32$. Đáp án (E).

Bây: chỉ đếm số nguyên tố được 25; thêm số chính phương của số nguyên tố mà quên 16, 81, 64 được 29.

5.29 17

$6^k = 2^k 3^k$, nên k là số nhỏ hơn trong hai số mũ của 2 và của 3 trong tích. Thừa số 3 hiếm hơn, nên tính số mũ của 3.

Số mũ của 3 trong $m!$ với $m = 1, \dots, 10$: 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4 (từ 9! có thêm hai thừa số của số 9). Tổng: $3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 17$.

Số mũ của 2: 0, 1, 1, 3, 3, 4, 4, 7, 7, 8, tổng 38 > 17 . Vậy $k = 17$. Đáp số: **17**.

Cách đếm khác: số j xuất hiện trong $m!$ với mọi $m \geq j$, tức $11 - j$ lần. Thừa số 3 đến từ 3 (8 lần), 6 (5 lần), 9 (2 lần, mỗi lần góp 2): $8 + 5 + 4 = 17$ ✓.

5.30 (C) 9

Một hợp số như vậy có thừa số nguyên tố nhỏ nhất ≥ 5 , nên nó $\geq 5 \cdot 5 = 25$ và là tích của các số nguyên tố ≥ 5 .

Liệt kê theo thừa số nhỏ nhất: $5 \cdot 5 = 25, 5 \cdot 7 = 35, 5 \cdot 11 = 55, 5 \cdot 13 = 65, 5 \cdot 17 = 85, 5 \cdot 19 = 95; 7 \cdot 7 = 49, 7 \cdot 11 = 77, 7 \cdot 13 = 91; 11 \cdot 11 = 121 > 100$. Có 9 số. Đáp án (C).

Cách khác: số nhỏ hơn 100 không chia hết cho 2, 3 có 33 số (gồm số 1); bỏ số 1 và 23 số nguyên tố khác 2, 3 còn 9. Lựa chọn 32 là quên bỏ các số nguyên tố.

5.31 (A) 30

BCNN từng cặp: $\text{lcm}(4, 6) = 12, \text{lcm}(6, 9) = 18, \text{lcm}(4, 9) = 36$; cả ba: $\text{lcm}(4, 6, 9) = 36$.

Nhận xét then chốt: cặp chuông 4 và 9 chỉ trùng nhau vào bội của 36 — lúc đó chuông 6 cũng reo. Vậy “đúng hai chuông” chỉ có thể là cặp (4, 6) vào bội của 12 không phải bội của 36, hoặc cặp (6, 9) vào bội của 18 không phải bội của 36.

Trong 360 phút: bội của 12: 30, bội của 18: 20, bội của 36: 10. Đáp số $(30 - 10) + (20 - 10) = 30$. Đáp án (A).

Bây: cộng cả ba cặp mà không bỏ các lần cả ba chuông cùng reo được $30 + 20 + 10 = 60$; chỉ cộng hai cặp (4, 6) và (6, 9) mà quên bỏ bội của 36 được $30 + 20 = 50$; bỏ bội của 36 ở hai cặp đó nhưng vẫn cộng 10 lần của cặp (4, 9) được 40.

5.32 60

$10^{10} = 2^{10} 5^{10}$ có $11 \cdot 11 = 121$ ước. Ghép cặp $d \leftrightarrow 10^{10}/d$: trong mỗi cặp đúng một số nhỏ hơn $10^5 = \sqrt{10^{10}}$, trừ ước 10^5 tự ghép với chính nó.

Số ước nhỏ hơn 10^5 : $\frac{121 - 1}{2} = 60$. Đáp số: **60**.

Bây: chia $121/2$ rồi làm tròn thành 61 (tính luôn chính 10^5).

5.33 8

Nếu $3 \nmid n$ thì không có ước nào là bội của 3 (số lượng 0 — chẵn). Nếu $3 \mid n$, các ước là bội của 3 có dạng $3e$ với $e \mid \frac{n}{3}$, và ngược lại; nên số lượng của chúng bằng $d\left(\frac{n}{3}\right)$.

$d(n/3) \leq 8 \iff n/3$ là số chính phương (ghép cặp ước). Vậy $n = 3k^2$ với $3k^2 \leq 200$, tức $k^2 \leq 66$, $k = 1, \dots, 8$.

Đáp số: **8** (các số 3, 12, 27, 48, 75, 108, 147, 192).

5.34 (C) 15

Tách theo tính chẵn lẻ. Hộp 6 và hộp 10 chẵn, hộp 15 lẻ. Một số lẻ muốn mua được phải dùng một số lẻ hộp 15; vì $2 \cdot 15 = 30 = 3 \cdot 10$, chỉ cần xét dùng đúng **một** hộp 15.

Số chẵn $n = 2m$: mua được bằng hộp 6 và hộp 10 $\iff m = 3a + 5b$. Các số m không viết được: 1, 2, 4, 7 (từ $m = 8$ trở đi luôn được: $8 = 3 + 5$, $9 = 3 \cdot 3$, $10 = 5 \cdot 2$, rồi cứ cộng thêm 3). Vậy số chẵn không mua được: 2, 4, 8, 14 — **4** số.

Số lẻ n : mua được $\iff n \geq 15$ và $n - 15$ là số chẵn mua được (hoặc bằng 0). Không được: 1, 3, $\dots$, 13 (7 số) và $15 + 2$, $15 + 4$, $15 + 8$, $15 + 14$, tức 17, 19, 23, 29 — **11** số lẻ.

Tổng cộng $4 + 11 = 15$ số; số lớn nhất không mua được là 29, nên mọi số từ 30 đến 50 đều mua được. Đáp án (C).

Bây: chỉ đếm số lẻ (11) hoặc chỉ đếm số chẵn (4); trả lời số lớn nhất không mua được (29); hay quên rằng có thể **trộn** nhiều loại hộp, chỉ loại bội của 6, 10, 15 thì ra 36.

5.35 624

$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (Chương 4), nên cần $2000 = 2^4 \cdot 5^3$ chia hết $n(n+1)$.

n và $n+1$ nguyên tố cùng nhau (ước chung chia hết hiệu bằng 1), nên toàn bộ $5^3 = 125$ nằm trong **một** số và toàn bộ $2^4 = 16$ nằm trong **một** số. Cặp $(n, n+1)$ phải chứa một bội của 125 và một bội của 16 (có thể là cùng một số, khi đó số đó là bội của 2000).

Thử các bội của 125 theo thứ tự: 125 (hàng xóm 124, 126 — không bội của 16), 250 (249, 251), 375 (374, 376 = $8 \cdot 47$), 500 (499, 501), 625: hàng xóm 624 = $16 \cdot 39 \checkmark$. Với $n = 624$: $\frac{624 \cdot 625}{2} = 195\,000$ chia hết cho 1000 $\checkmark$. Các bội của 125 trước đó (và chính chúng, vì không cái nào chia hết cho 16) đều không dùng được.

Đáp số: **624**.

5.36 (B) 24

Viết $n = 2^k \cdot m$ với m lẻ. Ước lẻ của n chính là ước của m , nên cần $d(m) = 3$, tức $m = p^2$ với p là số nguyên tố lẻ. Vậy $n = 2^k p^2$, $100 \leq n \leq 999$. Đếm theo p :

p	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31
p^2	9	25	49	121	169	289	361	529	841	961
k hợp lệ	4, 5, 6	2–5	2, 3, 4	0–3	0, 1, 2	0, 1	0, 1	0	0	0
số	3	4	3	4	3	2	2	1	1	1

Tổng: $3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 24$. Đáp án (B).

Bây: chỉ đếm các số chính phương lẻ p^2 có ba chữ số (quên nhân với lũy thừa của 2) được 10; quên $k = 0$ được ít hơn.

Chapter 6 — Digits, Remainders & Number Puzzles

6.1 (C)

6.2 (D)

6.3 (C)

6.4 (A)

6.5 (B)

6.6 (B)

6.7 (E)

6.8 (B)

6.9 (E)

6.10 (D)

6.11 (C)

6.12 (A)

6.13 (E)

6.14 (E)

6.15 (A)

6.16 (B)

6.17 (D)

6.18 (E)

6.19 (B)

6.20 (B)

6.21 (D)

6.22 (A)

6.23 (C)

6.24 (D)

6.25 (C)

6.26 (C)

6.27 (E)

6.28 3208

6.29 14

6.30 (A)

6.31 (B)

6.32 (D)

6.33 37

6.34 286

6.35 (C)

6.36 (E)

6.1 (C) 383

Viết số ban đầu là $10x + c$, với x là số hai chữ số còn lại sau khi xoá và c là chữ số hàng đơn vị. Hiệu là $(10x + c) - x = 9x + c = 345$.

Vì $0 \leq c \leq 9$, đây chính là phép chia có dư $345 = 9 \cdot 38 + 3$: $x = 38$, $c = 3$. Số ban đầu là 383 (thử lại $383 - 38 = 345$ ✓). Đáp án (C).

6.2 (D) $419 \times 53 = 22\,207$

Chữ số tận cùng đều khớp ($7 \cdot 9 = 63$, $8 \cdot 7 = 56$, ...), nên dùng phép thử 9: so số dư theo 9 của hai vế.

(A) $347 \equiv 5$, $29 \equiv 2$, tích $\equiv 10 \equiv 1$; vế phải $10\,073 \equiv 11 \equiv 2$ ✗. (B) $268 \equiv 7$, $37 \equiv 1$, tích $\equiv 7$; $9926 \equiv 26 \equiv 8$ ✗. (C) $586 \equiv 1$, $47 \equiv 2$, tích $\equiv 2$; $27\,532 \equiv 19 \equiv 1$ ✗. (D) $419 \equiv 5$, $53 \equiv 8$, tích $\equiv 40 \equiv 4$; $22\,207 \equiv 13 \equiv 4$ ✓. (E) $733 \equiv 4$, $64 \equiv 1$, tích $\equiv 4$; $46\,812 \equiv 21 \equiv 3$ ✗.

Chỉ (D) qua được phép thử, và vì đề nói có đúng một phép tính đúng, đáp án là (D). (Thật vậy $419 \cdot 53 = 22\,207$.)

6.3 (C) 12

$\overline{AB} + \overline{BA} = 11(A + B) \leq 11 \cdot 17 = 187$, nên tổng ba chữ số có chữ số đầu $C = 1$.

Khi đó $11A + 11B = \overline{1A1} = 101 + 10A$, tức $A + 11B = 101$. Vì $A \leq 9$ nên $11B \geq 92$, $B \geq 9$: $B = 9$, $A = 101 - 99 = 2$.

Thử lại $29 + 92 = 121$ ✓ (các chữ cái khác nhau). $A + B + C = 2 + 9 + 1 = 12$. Đáp án (C).

6.4 (A) 1

$N \equiv S(N) = 41 \equiv 5 \pmod{9}$. Do đó $2N \equiv 10 \equiv 1 \pmod{9}$. Đáp án (A).

Lưu ý: không cần biết N , cũng không cần biết tổng chữ số của $2N$. Quên nhân 2 sẽ ra 5.

6.5 (B) 360

$\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b) = 45$ nên $a - b = 5$. Các cặp (a, b) : $(5, 0)$, $(6, 1)$, $(7, 2)$, $(8, 3)$, $(9, 4)$, tức các số 50, 61, 72, 83, 94.

Tổng $50 + 61 + 72 + 83 + 94 = 360$. Đáp án (B). Bỏ số 50 (vì nghĩ 05 không phải số) sẽ ra 310 — nhưng đề đã nói rõ đảo 70 được 7.

6.6 (B) 1

$10 \equiv -1 \pmod{11}$, nên $10^{2025} \equiv (-1)^{2025} = -1$ (số mũ lẻ).

$2026 = 11 \cdot 184 + 2$, nên $2026 \equiv 2$. Tổng $\equiv -1 + 2 = 1$. Đáp án (B).

Bấy: coi $10^{2025} \equiv 1$ (như modulo 9) sẽ ra 3.

6.7 (E) 33

Với $k \geq 5$, $k!$ chứa cả thừa số 5 và thừa số $8 = 2 \cdot 4$, nên chia hết cho 40 (chẳng hạn $5! = 120 = 3 \cdot 40$).

Chỉ còn $1! + 2! + 3! + 4! = 1 + 2 + 6 + 24 = 33 < 40$. Số dư là 33. Đáp án (E).

Bấy: coi luôn $4! = 24$ là “đủ lớn” để bỏ đi sẽ ra 9.

6.8 (B) 40

Số dư của $n^2 + 1$ khi chia 5 chỉ phụ thuộc số dư của n :

$n \bmod 5$	0	1	2	3	4
$n^2 + 1 \bmod 5$	1	2	0	0	2

Vậy $n \equiv 2$ hoặc $3 \pmod{5}$: mỗi khối 5 số liên tiếp có đúng 2 số. Từ 1 đến 100 có 20 khối: 40 số. Đáp án (B).

6.9 (E) Column E

Mẫu lặp lại sau mỗi **hai hàng**, tức mỗi 10 số: các số chia 10 dư 1, 2, 3, 4, 5 nằm ở cột A, B, C, D, E ; các số chia 10 dư 6, 7, 8, 9, 0 nằm ở cột E, D, C, B, A .

2026 chia 10 dư 6, giống số 6: cột E . Đáp án (E).

Bẫy: nghĩ chu kỳ là 5 (số cột), lấy 2026 chia 5 dư 1 rồi trả lời cột A .

6.10 (D) 120

Lớn hơn 75% nghĩa là gấp $\frac{7}{4}$ lần: $10b + a = \frac{7}{4}(10a + b)$. Nhân 4: $40b + 4a = 70a + 7b$, tức $33b = 66a$, $b = 2a$.

Với $a = 1, 2, 3, 4$ (để $b \leq 9$): 12, 24, 36, 48 (ví dụ $21 = \frac{7}{4} \cdot 12$ ✓). Tổng 120. Đáp án (D).

Bỏ sót 48 sẽ ra 72; đọc “lớn hơn 75%” thành “bằng 75%” sẽ không có số nào thỏa.

6.11 (C) 2

$9 \equiv 1 \pmod{8}$, nên mọi $9^k \equiv 1$. Tổng gồm 2026 số hạng, đồng dư với 2026.

$2026 = 8 \cdot 253 + 2$, số dư là 2. Đáp án (C). Chỉ nhìn một số hạng (9^k dư 1) rồi trả lời 1 là bẫy thường gặp.

6.12 (A) 11

Số có dạng $\overline{a(a+c)c} = 100a + 10(a+c) + c = 110a + 11c = 11(10a + c)$, luôn chia hết cho 11 (ví dụ $583 = 11 \cdot 53$). Đáp án (A).

Các số khác không bắt buộc: $110 = 11 \cdot 10$ thuộc dạng này nhưng không chia hết cho 13, 17, 37, 101.

6.13 (E) 37

$$\overline{ababab} = \overline{ab} \cdot 10000 + \overline{ab} \cdot 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \cdot 10101.$$

Phân tích $10101 = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37$ (Chương 5). Vậy mọi số dạng này chia hết cho 37. Đáp án (E).

Không phải 11: tổng đan dấu của 10101 là $1 - 0 + 1 - 0 + 1 = 3$, và chẳng hạn $121212 = 12 \cdot 10101$ không chia hết cho 11.

6.14 (E) 22

Số chính phương k^2 chia 9 chỉ có thể dư 0, 1, 4, 7 (thử $k \equiv 0, 1, \dots, 8$: $k^2 \equiv 0, 1, 4, 0, 7, 7, 0, 4, 1$).

Tổng chữ số đồng dư với chính số đó modulo 9. Các đáp án: $15 \equiv 6$, $17 \equiv 8$, $20 \equiv 2$, $21 \equiv 3$, $22 \equiv 4$. Chỉ 22 có thể; thật vậy $43^2 = 1849$ có tổng chữ số $1 + 8 + 4 + 9 = 22$. Đáp án (E).

6.15 (A) 45

$$99\,999 \times 2026 = 2026 \cdot 100\,000 - 2026 = 202\,600\,000 - 2026 = 202\,597\,974.$$

Tổng chữ số: $2 + 0 + 2 + 5 + 9 + 7 + 9 + 7 + 4 = 45$. Đáp án (A).

Vì sao luôn ra 45 (với mọi k từ 1 đến 99 999): phép trừ biến khối đầu thành $k - 1$ và năm chữ số cuối thành $100\,000 - k$; chữ số của $100\,000 - k$ là “phần bù 9” của các chữ số của $k - 1$ (viết đủ năm chữ số), nên hai khối cộng lại cho $5 \cdot 9 = 45$. Ở đây: 2025 và $97\,974$: $9 + 36 = 45$.

6.16 (B) 3

$M = 1$ (tổng hai số ba chữ số có bốn chữ số). **Cột đơn vị:** $2N$ tận cùng bằng N nên $N = 0$, không nhớ.

Cột chục: $2U = O + 10c$ (c là nhớ, 0 hoặc 1). **Cột trăm:** $2S + c = O + 10$.

Nếu $c = 1$: $O = 2U - 10$ chẵn, nhưng $2S + 1 = O + 10$ cho O lẻ — vô lý. Vậy $c = 0$: $O = 2U$ và $S = 5 + U$, với $U \leq 4$; $U \neq 0$ (vì $N = 0$) và $U \neq 1$ (vì $M = 1$).

$U = 2$: $720 + 720 = 1440$; $U = 3$: $830 + 830 = 1660$; $U = 4$: $940 + 940 = 1880$. Các chữ cái đều khác nhau. Có 3 giá trị. Đáp án (B).

6.17 (D) 666

$\overline{DDD} = 111D = 3 \cdot 37 \cdot D$. Số nguyên tố 37 phải chia hết $\overline{AB}$ hoặc C ; mà $C \leq 9$, nên $37 \mid \overline{AB}$: $\overline{AB} = 37$ hoặc 74.

$\overline{AB} = 37$: $37C = 111D \Rightarrow C = 3D$: $(C, D) = (3, 1)$ trùng $C = A$, $(6, 2)$ cho 222, $(9, 3)$ trùng $D = A$.

$\overline{AB} = 74$: $74C = 111D \Rightarrow 2C = 3D$: $(3, 2)$ cho 222; $(6, 4)$ trùng $D = B$; $(9, 6)$ cho $74 \cdot 9 = 666$ với 7, 4, 9, 6 khác nhau ✓.

Lớn nhất là 666. Đáp án (D). Bấy: $444 = 74 \cdot 6$ nhưng $D = B = 4$; $888 = 74 \cdot 12$ nhưng 12 không phải chữ số.

6.18 (E) 286

Lập bảng số dư theo $n \bmod 7$:

$n \bmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$n^2 + n + 1 \bmod 7$	1	3	0	6	0	3	1

Vậy $n \equiv 2$ hoặc 4 (mod 7). Các số 2, 9, ..., 996: $\frac{996-2}{7} + 1 = 143$ số; các số 4, 11, ..., 998: cũng 143 số. Tổng 286. Đáp án (E).

Bấy: ước lượng $\frac{2}{7} \cdot 1000 \approx 285,7$ rồi làm tròn xuống 285 — phải đếm chính xác phần lẻ cuối.

6.19 (B) 225

Vì $n \equiv S(n) \pmod{9}$, tổng chữ số chia hết cho 9 **khi và chỉ khi** n chia hết cho 9. Bài toán chữ số trở thành bài đếm bội số.

$2026 = 9 \cdot 225 + 1$, nên có 225 bội của 9 từ 1 đến 2026. Đáp án (B).

Bấy: làm tròn $2026/9 \approx 225,1$ lên thành 226; hoặc đếm bội của 3 (675).

6.20 (B) 9315

$45 = 5 \cdot 9$. Chia hết cho 5 và chữ số cuối lẻ nên chữ số cuối là 5.

Gọi số là $\overline{abc5}$ với a, b, c lẻ. Tổng $a + b + c$ của ba số lẻ là số lẻ, nên $a + b + c + 5$ **chẵn**; chia hết cho 9 nên bằng 18 hoặc 36. $a + b + c \leq 27$ nên $a + b + c = 13$.

Lớn nhất: $a = 9$, còn $b + c = 4$ với b, c lẻ, b lớn nhất: $b = 3, c = 1$. Số cần tìm là $9315 = 45 \cdot 207$. Đáp án (B).

9135 cũng là bội của 45 có chữ số lẻ nhưng nhỏ hơn; 9735 và 9915 có tổng chữ số 24.

6.21 (D) 16

Với số $\overline{abcd}$, tổng bốn số là $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 1111a + 111b + 11c + d = 2026$.

$a = 1$ (vì $a \geq 2$ cho tổng ≥ 2222). Còn $111b + 11c + d = 915$. Vì $11c + d \leq 99 + 9 = 108$, ta có $111b \geq 807, b \geq 8$; và $111b \leq 915$ cho $b \leq 8$. Vậy $b = 8, 11c + d = 27$, suy ra $c = 2, d = 5$ ($c = 1$ cho $d = 16$ — loại).

Số của Mai là 1825 (thử lại $1825 + 182 + 18 + 1 = 2026$ ✓), tổng chữ số 16. Đáp án (D).

6.22 (A) 54

Bội của 9 có tổng chữ số chia hết cho 9; với số ba chữ số, tổng chữ số nằm từ 1 đến 27, nên chỉ có thể là 9, 18 hoặc 27.

Tổng 27: chỉ 999. **Tổng 9:** với $a = 1, \dots, 9$, cặp (b, c) có $b + c = 9 - a$ có $10 - a$ cách: $9 + 8 + \dots + 1 = 45$ số.

Đếm phần bù: $100 - 45 - 1 = 54$. Đáp án (A). Quên số 999 sẽ ra 55.

6.23 (C) 6

Với số $\overline{ab}$: $4 \cdot \overline{ba} - 4 \cdot \overline{ab} = 4 \cdot 9(b - a) = 36(b - a) = 108$, nên $b - a = 3$.

$a \geq 1$ (số hai chữ số) và $b = a + 3 \leq 9$: $a = 1, \dots, 6$, tức các số 14, 25, 36, 47, 58, 69. Có 6 số. Đáp án (C).

Bấy: cho cả $a = 0$ (số 03 không phải số hai chữ số) sẽ ra 7.

6.24 (D) 66 662 026

Chọn tham lam từ trái sang phải: mỗi chữ số được chọn phải để lại đủ chỗ cho các chữ số còn lại. Đánh số vị trí 1–20; chữ số 6 ở các vị trí 4, 8, 12, 16, 20.

Chữ số thứ 1 chọn trong vị trí 1–13 (còn 7 chữ số phía sau): lớn nhất là 6, lấy vị trí sớm nhất là 4. Chữ số thứ 2 chọn trong vị trí 5–14: lấy 6 ở vị trí 8. Chữ số thứ 3 trong vị trí 9–15: 6 ở vị trí 12. Chữ số thứ 4 trong vị trí 13–16: 6 ở vị trí 16.

Còn phải chọn 4 chữ số từ 4 vị trí 17–20: bắt buộc lấy hết 2, 0, 2, 6. Kết quả 66 662 026. Đáp án (D).

66 666 226 không thực hiện được: sau chữ số 6 thứ năm (vị trí 20) không còn chữ số nào.

6.25 (C) 13

$2026 = 12n + r$ với $0 \leq r < n$. Từ $r \geq 0$: $12n \leq 2026$, $n \leq 168$. Từ $r < n$: $2026 < 13n$, $n > 155,8$, tức $n \geq 156$.

Vậy $n = 156, 157, \dots, 168$: có $168 - 156 + 1 = 13$ giá trị (ví dụ $2026 = 12 \cdot 156 + 154$ với $154 < 156$ ✓). Đáp án (C).

Bấy: đếm $168 - 156 = 12$ (quên cộng 1 khi đếm các số nguyên liên tiếp).

6.26 (C) 5

$76 \cdot 76 = 5776$ tận cùng 76, nên mọi lũy thừa 76^n đều tận cùng 76.

$24^2 = 576$ tận cùng 76, nên $24^{2026} = (24^2)^{1013}$ tận cùng như 76^{1013} , tức 76.

Tổng tận cùng $76 + 76 = 152$, hai chữ số cuối là 52: chữ số hàng chục là 5. Đáp án (C).

Bấy: cộng chữ số hàng chục $7 + 7 = 14$ mà quên số nhớ từ hàng đơn vị $6 + 6 = 12$ sẽ ra 4; đọc nhầm hàng đơn vị của 52 sẽ ra 2.

6.27 (E) 8

Phân tích (Chương 5): số mũ của 2 trong $15!$ là $7 + 3 + 1 = 11$, của 3 là $5 + 1 = 6$, của 5 là 3, của 7 là 2, và có thêm 11, 13:

$$15! = 2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 = 10^3 \cdot (2^8 \cdot 3^6 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13).$$

Chữ số khác 0 cuối cùng là chữ số tận cùng của ngoặc. Tận cùng: $2^8 = 256 \rightarrow 6$, $3^6 = 729 \rightarrow 9$, $7^2 = 49 \rightarrow 9$, $11 \rightarrow 1$, $13 \rightarrow 3$.

Nhân dần chỉ giữ hàng đơn vị: $6 \cdot 9 = 54 \rightarrow 4$, $4 \cdot 9 = 36 \rightarrow 6$, $6 \cdot 1 = 6$, $6 \cdot 3 = 18 \rightarrow 8$. Đáp án (E).

Bấy: bỏ ba thừa số 5 nhưng **quên bỏ ba thừa số 2** đi cùng chúng (dùng 2^{11}) sẽ ra 4.

6.28 3208

Chữ số đầu: $\overline{TOP} \leq 999$ nên $4 \cdot \overline{TOP} \leq 3996$, suy ra $S \leq 3$.

Modulo 3: khai triển $4(100T + 10O + P) = 1000S + 100P + 10O + T$ thành $399T + 30O = 1000S + 96P$. Vế trái chia hết cho 3; vế phải đồng dư $S \pmod{3}$ (vì $1000 \equiv 1, 96 \equiv 0$). Vậy $3 \mid S$, kết hợp $1 \leq S \leq 3$: $S = 3$.

Chặn T: $S = 3$ nghĩa là $3000 \leq 4 \cdot \overline{TOP} \leq 3999$, nên $750 \leq \overline{TOP} \leq 999$, $T \in \{7, 8, 9\}$. Chữ số đơn vị: $4P$ tận cùng bằng T , nên T chẵn: $T = 8$, và $4P$ tận cùng 8 cho $P \in \{2, 7\}$.

Thay vào $399 \cdot 8 + 30O = 3000 + 96P$: $30O = 96P - 192$. $P = 2$ cho $O = 0$; $P = 7$ cho $O = 16$ — loại.

Vậy $802 \times 4 = 3208$, các chữ cái $T = 8, O = 0, P = 2, S = 3$ khác nhau. Đáp số: 3208.

6.29 14

Chữ số tăng ngặt nên không có chữ số 0 (0 không thể đứng đầu, cũng không thể đứng sau một chữ số lớn hơn). Mỗi số như vậy ứng với đúng một tập 4 chữ số của $\{1, \dots, 9\}$.

Chia hết cho 9 $\Leftrightarrow$ tổng chữ số chia hết cho 9. Tổng nằm giữa $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ và $6 + 7 + 8 + 9 = 30$, nên tổng là 18 hoặc 27.

Tổng 27 (phải có chữ số 9, vì không có 9 thì tổng lớn nhất là $5 + 6 + 7 + 8 = 26$; ba chữ số còn lại có tổng 18): $\{3, 7, 8, 9\}$, $\{4, 6, 8, 9\}$, $\{5, 6, 7, 9\}$ — 3 tập.

Tổng 18 (liệt kê theo chữ số nhỏ nhất): bắt đầu bằng 1: 1269, 1278, 1359, 1368, 1458, 1467; bắt đầu bằng 2: 2349, 2358, 2367, 2457; bắt đầu bằng 3: 3456 — 11 số.

Tổng cộng $3 + 11 = 14$. Đáp số: 14.

6.30 (A) 90

Chia hết cho 11 $\Leftrightarrow$ tổng đan dấu $d - c + b - a$ chia hết cho 11. Dùng điều kiện $a + b = c + d$, tức $d = a + b - c$:

$$d - c + b - a = (a + b - c) - c + b - a = 2(b - c).$$

Vậy $11 \mid 2(b - c)$, mà $\gcd(2, 11) = 1$ nên $11 \mid b - c$. Vì $-9 \leq b - c \leq 9$, phải có $b = c$, và khi đó $d = a$: số có dạng $\overline{abba}$.

Ngược lại, mọi số $\overline{abba} = 1001a + 110b = 11(91a + 10b)$ đều chia hết cho 11 và có $a + b = b + a$. Đếm: a có 9 cách, b có 10 cách: 90. Đáp án (A).

Hai điều kiện tưởng như độc lập lại ép số thành **số đối xứng** (palindrome). (615 là số các số có $a + b = c + d$, chưa xét điều kiện 11.)

6.31 (B) 120

Gọi các số dư là r_3, r_4, r_5, r_6 . Số dư theo 6 quyết định hai số dư khác: r_3 là số dư của r_6 khi chia 3, và r_4 cùng tính chẵn lẻ với r_6 (cả hai cùng tính chẵn lẻ với n).

Để $r_3 \neq r_6$ cần $r_6 \geq 3$. Xét từng trường hợp:

r_6	r_3	r_4 (cùng chẵn lẻ, khác r_3, r_6)	r_5 (khác ba số kia)	số cách
3	0	1	2 hoặc 4	2
4	1	0 hoặc 2	2 cách mỗi trường hợp	4
5	2	1 hoặc 3	3 cách mỗi trường hợp	6

Mỗi bộ (r_4, r_5, r_6) hợp lệ ứng với đúng một số dư của n khi chia cho 60 (biết $n \bmod 4$ và $n \bmod 3$ thì biết $n \bmod 12$, thêm $n \bmod 5$ thì biết $n \bmod 60$). Vậy cứ 60 số liên tiếp có đúng $2 + 4 + 6 = 12$ số thỏa.

$600 = 10 \cdot 60$, nên có 120 số. Đáp án (B).

Bấy: quên rằng buộc chẵn lẻ giữa r_4 và r_6 sẽ đếm cả những bộ số dư không thể xảy ra.

6.32 (D) 287

$2^n \bmod 7$ có chu kỳ 3 (2, 4, 1) vì $2^3 = 8 \equiv 1$; $n^2 \bmod 7$ có chu kỳ 7. Vậy điều kiện lặp lại với chu kỳ $\text{lcm}(3, 7) = 21$.

Lập bảng cho $n = 1, \dots, 21$, so sánh 2^n và n^2 theo modulo 7:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
2^n	2	4	1	2	4	1	2	4	1	2	4
n^2	1	4	2	2	4	1	0	1	4	2	2
n	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	
2^n	1	2	4	1	2	4	1	2	4	1	
n^2	4	1	0	1	4	2	2	4	1	0	

Khớp tại $n = 2, 4, 5, 6, 10, 15$: 6 giá trị mỗi chu kỳ 21. $1000 = 21 \cdot 47 + 13$: 47 chu kỳ đủ cho 282 số; 13 số cuối ứng với $n = 1, \dots, 13$ của chu kỳ, chứa 2, 4, 5, 6, 10: thêm 5. Tổng 287. Đáp án (D).

Bấy: bỏ quên phần dư 13 số cuối ra 282.

6.33 37

Quan sát: khi đặt phép cộng $a + b$ theo cột, mỗi lần **nhớ**, một cột mất 10 và cột bên trái được thêm 1, nên tổng chữ số giảm đi 9. Vì thế $S(a) + S(b) = S(a + b) + 9 \cdot (\text{số lần nhớ}) = 10 + 9k$.

Số lần nhớ lớn nhất: cột đơn vị: hai chữ số có tổng 6 hoặc 16 — có thể nhớ (tổng 16). Cột chục: tổng hai chữ số cộng nhớ 1 bằng 2 hoặc 12 — có thể nhớ (hai chữ số có tổng 11). Cột trăm: cộng nhớ 1 phải tận cùng 0 — có thể nhớ (hai chữ số có tổng 9). Cột nghìn: cộng nhớ 1 phải bằng 2, không tạo thêm chữ số mới nên không nhớ. Tối đa $k = 3$.

Vậy $S(a) + S(b) \leq 10 + 27 = 37$, và đạt được: $a = 1999, b = 27$ cho $28 + 9 = 37$. Đáp số: 37.

6.34 286

Gọi $x = \overline{ab}$ ($10 \leq x \leq 99$) và $y = \overline{cd}$ ($0 \leq y \leq 99$, có thể là 00, 05, ...). Khi đó $\overline{abcd} = 100x + y$, và $x \mid 100x + y \iff x \mid y$.
 Với mỗi x , số giá trị $y \in \{0, 1, \dots, 99\}$ là bội của x bằng $\lfloor \frac{99}{x} \rfloor + 1$ (tính cả $y = 0$). Nhóm theo giá trị của $\lfloor 99/x \rfloor$:

x	10–11	12	13–14	15–16	17–19	20–24	25–33	34–49	50–99
$\lfloor 99/x \rfloor$	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$\sum \lfloor 99/x \rfloor = 18 + 8 + 14 + 12 + 15 + 20 + 27 + 32 + 50 = 196$; cộng thêm 90 (mỗi x một số $y = 0$): $196 + 90 = 286$. Đáp số: 286.

Bẫy: quên trường hợp $\overline{cd} = 00$ (như 4700) ra 196.

6.35 (C) 6699

Ba chữ số có tổng tối đa 27, nên cần ít nhất 4 chữ số. Với $\overline{abcd}$: chia hết cho 11 $\iff (a + c) - (b + d)$ chia hết cho 11.

Ta có $(a + c) + (b + d) = 30$ là số chẵn, nên hiệu $(a + c) - (b + d)$ cũng chẵn: bằng 0 hoặc ± 22 . Hiệu ± 22 cần một cặp có tổng $26 > 18$ — không thể. Vậy $a + c = b + d = 15$.

Nhỏ nhất: chọn a nhỏ nhất với $a + c = 15$, $c \leq 9$: $a = 6$, $c = 9$; rồi b nhỏ nhất với $b + d = 15$: $b = 6$, $d = 9$. Số cần tìm là $6699 = 11 \cdot 609$. Đáp án (C).

6798 và 9966 cũng là bội của 11 có tổng chữ số 30 nhưng lớn hơn; 3999, 5898 có tổng 30 nhưng không chia hết cho 11.

6.36 (E) 7

Vì $S(n) \equiv n \pmod{9}$, mỗi bước biến n thành $n + S(n) \equiv 2n \pmod{9}$: số dư **nhân đôi** sau mỗi bước.

$2026 \equiv 1 \pmod{9}$, nên sau k bước số dư là $2^k \pmod{9}$ (kiểm tra: $2036 \equiv 11 \equiv 2 \checkmark$).

$2^6 = 64 \equiv 1 \pmod{9}$, chu kỳ 6. $100 = 6 \cdot 16 + 4$, nên $2^{100} \equiv 2^4 = 16 \equiv 7$. Đáp án (E).

Không cần (và không nên) tính các số thật — chúng tăng rất nhanh; chỉ cần theo dõi số dư.

Chapter 7 — Counting I — Lists, Rules & Casework

7.1 (A)	7.2 (C)	7.3 (D)	7.4 (B)	7.5 (D)	7.6 (B)
7.7 (A)	7.8 (C)	7.9 (D)	7.10 (E)	7.11 (C)	7.12 (E)
7.13 (E)	7.14 (C)	7.15 (D)	7.16 (A)	7.17 (B)	7.18 (C)
7.19 (D)	7.20 (B)	7.21 (A)	7.22 (B)	7.23 (D)	7.24 (E)
7.25 (C)	7.26 (E)	7.27 (D)	7.28 (E)	7.29 (D)	7.30 (A)
7.31 (B)	7.32 (C)	7.33 (C)	7.34 156	7.35 131	7.36 63

7.1 (A) 35

Số thứ k (đếm từ $k = 0$) là $17 + 7k$; số cuối $500 = 17 + 7 \cdot 69$ nên $k = 0, 1, \dots, 69$ — danh sách có 70 số.

$17 + 7k$ lẻ khi và chỉ khi $7k$ chẵn, tức k chẵn: $k = 0, 2, \dots, 68$, có 35 giá trị. Các số lẻ, chẵn xen kẽ bắt đầu bằng số lẻ và kết thúc bằng số chẵn nên chia đôi đều. Đáp án (A).

7.2 (C) 49

Đường thẳng: các mốc 0, 25, ..., 600 — có $\frac{600}{25} + 1 = 25$ mốc.

Vòng tròn: mốc ở vị trí 600 m trùng với mốc xuất phát, nên chỉ có $\frac{600}{25} = 24$ mốc.

Tổng $25 + 24 = 49$. Đáp án (C). Coi vòng tròn như đường thẳng được 50; coi đường thẳng như vòng tròn được 48.

7.3 (D) 20

Số học sinh tham gia ít nhất một môn: $35 - 6 = 29$. Theo biểu đồ Venn, $21 + 17 - (\text{cả hai}) = 29$, nên số chơi cả hai môn là $38 - 29 = 9$.

Đúng một môn: $29 - 9 = 20$ (hoặc $(21 - 9) + (17 - 9) = 12 + 8 = 20$). Đáp án (D).

Lưu ý: 9 là số tham gia cả hai, 29 là số tham gia ít nhất một — đọc kỹ câu hỏi.

7.4 (B) 4

Liệt kê cặp cạnh $a \leq b$ với $ab = 60$ theo a tăng dần, kèm chu vi $2(a + b)$: $(1, 60)$: 122; $(2, 30)$: 64; $(3, 20)$: 46; $(4, 15)$: 38; $(5, 12)$: 34; $(6, 10)$: 32.

Các chu vi nhỏ hơn 50: bốn hình cuối. Đáp án (B).

Lưu ý: dừng ở $a = 6$ vì $a = 10$ cho lại cặp $(6, 10)$; tổng số hình chữ nhật diện tích 60 là 6, không phải 12 (số ước của 60).

7.5 (D) 6

Nhận xét tính chẵn lẻ: B luôn chẵn, C luôn lẻ, tổng 10 chẵn, nên A phải **lẻ**: $A \in \{1, 3\}$.

Chia theo B : $B = 2$: $A + C = 8$: $(1, 7), (3, 5)$. $B = 4$: $A + C = 6$: $(1, 5), (3, 3)$. $B = 6$: $A + C = 4$: $(1, 3), (3, 1)$. Mỗi trường hợp 2 kết quả.

Tổng 6. Đáp án (D). ($48 = 4 \cdot 3 \cdot 4$ là tổng số kết quả có thể.)

7.6 (B) 10

Rào đầu ở mốc 13 m, rào cuối ở mốc $100 - 10,5 = 89,5$ m. Khoảng cách giữa rào đầu và rào cuối: $89,5 - 13 = 76,5$ m, gồm $\frac{76,5}{8,5} = 9$ khoảng.

Số rào = $9 + 1 = 10$. Đáp án (B). Đáp án 9 là số *khoảng* — lỗi lệch một.

7.7 (A) 39

Chia theo áo sơ mi. **Áo kẻ sọc**: không áo khoác, $1 \cdot 3 \cdot 1 = 3$ bộ. **Bốn áo còn lại**: phần áo khoác có 3 lựa chọn (không mặc, áo khoác 1, áo khoác 2): $4 \cdot 3 \cdot 3 = 36$ bộ.

Tổng $3 + 36 = 39$. Đáp án (A).

Bỏ qua điều kiện của áo kẻ sọc được $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$; quên lựa chọn “không mặc áo khoác” sẽ ra số nhỏ hơn hẳn.

7.8 (C) 243

Viết mọi số từ 0 tới 999 thành dãy ba chữ số (thêm số 0 ở đầu, ví dụ $7 \rightarrow 007$). Thêm số 0 không tạo ra chữ số 7 mới, nên đếm trên các dãy ba chữ số cũng được. (Dãy 000 không có chữ số 7 nên không ảnh hưởng.)

Chọn vị trí của chữ số 7: 3 cách; hai vị trí còn lại mỗi vị trí là một trong 9 chữ số khác 7. Tổng $3 \cdot 9 \cdot 9 = 243$. Đáp án (C).

Chỉ đếm số có ba chữ số (hàng trăm khác 0) được 225; đếm “ít nhất một chữ số 7” được 271.

7.9 (D) 12

Ghi số đường đi tới từng điểm, theo thứ tự mũi tên: $A = 1$; $P = 1$, $Q = 1$ (chỉ đến từ A); $M = A + P + Q = 3$; $R = P + M = 1 + 3 = 4$; $S = Q + M + R = 1 + 3 + 4 = 8$; $B = R + S = 4 + 8 = 12$.

Đáp án (D). Chú ý: phải tính R trước S vì có đường $R \rightarrow S$.

7.10 (E) 63

Với chữ số $a \geq 1$ (hàng chục) và b (hàng đơn vị): $ab > a + b \iff ab - a - b + 1 > 1 \iff (a - 1)(b - 1) > 1$.

Chia theo a : $a = 1$: về trái bằng 0 — không số nào. $a = 2$: cần $b - 1 > 1$, tức $b \geq 3$: 7 số. $a = 3, \dots, 9$: $a - 1 \geq 2$, chỉ cần $b - 1 \geq 1$, tức $b \geq 2$: mỗi a có 8 số, cộng $7 \cdot 8 = 56$.

Tổng $7 + 56 = 63$. Đáp án (E). Quên trường hợp $a = 2$ ra 56.

7.11 (C) 41

Chia hai trường hợp: có dùng đường chéo hay không.

Không dùng: đi sang phải hoặc lên. Ghi số trên lưới (cách làm như hình ở mục 7.5) được 35 đường.

Có dùng: đi từ A tới đầu đường chéo $(1, 1)$: 2 cách (phải–lên hoặc lên–phải); đi đường chéo; rồi từ $(2, 2)$ tới $B = (4, 3)$: cần 2 bước phải, 1 bước lên, có 3 cách (bước lên đứng thứ nhất, thứ hai hoặc thứ ba). Quy tắc nhân: $2 \cdot 3 = 6$.

Tổng $35 + 6 = 41$. Đáp án (C).

7.12 (E) 7

Chữ số đầu khác 0 và các chữ số tăng dần nên không có chữ số 0. Liệt kê $a < b < c$, $a + b + c = 12$ theo a :

$a = 1$: (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6) — 4 số. $a = 2$: (3, 7), (4, 6) — 2 số. $a = 3$: (4, 5) — 1 số. $a = 4$: cần $b + c = 8$ với $c > b \geq 5$, không có.

Tổng $4 + 2 + 1 = 7$. Đáp án (E). Mỗi bộ chữ số chỉ cho đúng một số vì thứ tự đã bị ép là tăng dần.

7.13 (E) 42

Với $n > 0$: $10^2 = 100$ không thỏa (bất đẳng thức chặt), $31^2 = 961 < 1000 < 32^2 = 1024$. Vậy $n \in \{11, 12, \dots, 31\}$: $31 - 11 + 1 = 21$ số.

Với mỗi n dương thỏa mãn, $-n$ cũng thỏa mãn ($(-n)^2 = n^2$), còn $n = 0$ thì không. Tổng $2 \cdot 21 = 42$. Đáp án (E).

Bấy: quên số nguyên âm ra 21; tính $31 - 11 = 20$ (lệch một).

7.14 (C) 3

Gọi số đồng 5, 10, 25 xu là n, d, q : $n + d + q = 10$ và $5n + 10d + 25q = 100$, tức $n + 2d + 5q = 20$. Trừ phương trình đầu: $d + 4q = 10$ (Chương 3).

Chia theo q : $q = 0$: $d = 10, n = 0$; $q = 1$: $d = 6, n = 3$; $q = 2$: $d = 2, n = 6$; $q \geq 3$ thì $d < 0$.

Có 3 cách. Đáp án (C).

7.15 (D) 25

Gọi số chơi cờ vây là g thì số chơi cờ vua là $2g$. Theo biểu đồ Venn: $2g + g - 5 = 40$, nên $g = 15$ và có 30 người chơi cờ vua.

Chỉ chơi cờ vua: $30 - 5 = 25$. Đáp án (D). Trả lời số chơi cờ vua (30) là quên trừ phần chung.

7.16 (A) 10

Gọi a, b, c là số lần ghi 7, 3, 2 điểm: $7a + 3b + 2c = 23$. Chia theo a (có ít giá trị nhất: 0 tới 3). Trong mỗi trường hợp, $3b$ phải cùng tính chẵn lẻ với phần còn lại để $2c$ chẵn.

$a = 0$: $3b + 2c = 23$, b lẻ, $3b \leq 23$: $b \in \{1, 3, 5, 7\}$ — 4. $a = 1$: $3b + 2c = 16$, b chẵn: $b \in \{0, 2, 4\}$ — 3. $a = 2$: $3b + 2c = 9$, b lẻ: $b \in \{1, 3\}$ — 2. $a = 3$: $3b + 2c = 2$: $b = 0$ — 1.

Tổng $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Đáp án (A).

7.17 (B) 77

Theo chiều dài 60 m có các mốc 0, 5, ..., 60: 13 mốc; bỏ hai mốc ở hai đầu, còn 11 mốc bên trong. Theo chiều rộng: $\frac{40}{5} + 1 = 9$ mốc, còn 7 mốc bên trong.

Một cây nằm hẳn bên trong khi cả hai tọa độ đều là mốc bên trong: $11 \cdot 7 = 77$. Đáp án (B).

Tổng số cây là $13 \cdot 9 = 117$; số cây trên bờ là $117 - 77 = 40$ (cũng bằng $\frac{2 \cdot (60+40)}{5}$, vì bờ là một vòng kín).

7.18 (C) 5

Quy đồng: $4y + 4x = xy$, tức $xy - 4x - 4y + 16 = 16$, hay $(x - 4)(y - 4) = 16$ (Chương 3).

Vì $\frac{1}{x} < \frac{1}{4}$ nên $x > 4$; tương tự $y > 4$. Vậy $x - 4, y - 4$ là hai số nguyên dương có tích 16. Chia theo $x - 4 \in \{1, 2, 4, 8, 16\}$: mỗi giá trị cho đúng một y . Có 5 cặp: (5, 20), (6, 12), (8, 8), (12, 6), (20, 5). Đáp án (C).

Bấy: coi (5, 20) và (20, 5) là một ra 3.

7.19 (D) 38

Liệt kê **tập chữ số** khác nhau có tổng 6, theo số phần tử. Một chữ số: {6}. Hai: {0, 6}, {1, 5}, {2, 4}. Ba:

{0, 1, 5}, {0, 2, 4}, {1, 2, 3}. Bốn: {0, 1, 2, 3}. Năm chữ số khác nhau có tổng ít nhất $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$ — không có.

Đếm cách sắp (chữ số đầu khác 0): {6}: 1; {0, 6}: 1; {1, 5}, {2, 4}: 2 mỗi tập; {0, 1, 5}, {0, 2, 4}: $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ mỗi tập; {1, 2, 3}: 6; {0, 1, 2, 3}: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 18$.

Tổng $1 + 1 + 4 + 8 + 6 + 18 = 38$. Đáp án (D). Cho phép chữ số 0 đứng đầu sẽ đếm thừa.

7.20 (B) 5

Gọi x_1, x_2, x_3 là số thành viên học đúng 1, đúng 2, đúng 3 lớp. Đếm số **suất học** theo hai cách: cộng số các lớp được $25 + 22 + 21 = 68$; mặt khác người học k lớp được đếm k lần, nên $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 68$.

Lại có $x_1 + x_2 + x_3 = 50$ và $x_2 = 8$. Trừ hai đẳng thức: $x_2 + 2x_3 = 18$, nên $8 + 2x_3 = 18$, $x_3 = 5$. Đáp án (B).

Đây là “đếm hai lần” (đếm cùng một đại lượng theo hai cách) — công cụ rất mạnh với biểu đồ Venn ba tập.

7.21 (A) 11

Ghi số đường tới từng chữ cái, mỗi số bằng tổng các số ở (một hoặc hai) chữ cái phía trên chạm vào nó; ngôi sao ghi 0.

Hàng C : 1. Hàng O : 1, 1. Hàng U : 1, 2, 1. Hàng N : 1, 3, 0, 1 (vị trí thứ ba là ngôi sao). Hàng T : $1 + 3 = 4$, $3 + 0 = 3$, $0 + 1 = 1$. Hàng E : $4 + 3 = 7$, $3 + 1 = 4$. Hàng R : $7 + 4 = 11$.

Đáp án (A). Nếu không có ngôi sao, phép ghi số cho 20.

7.22 (B) 117

Một hình chữ nhật nằm trong hình chữ thập thì nằm hẳn trong thanh ngang hoặc hẳn trong thanh dọc (nếu nó vừa nhô ra trái/phải khỏi cột giữa vừa nhô lên/xuống khỏi hàng giữa thì sẽ chứa một ô góc bị khuyết).

Thanh ngang 2×6 : hình chữ nhật xác định bởi hai đường dọc (trong 7 đường) và hai đường ngang (trong 3 đường). Số cặp đường dọc: liệt kê theo đường trái, $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$; số cặp đường ngang: 3. Có $21 \cdot 3 = 63$ hình. Thanh dọc cũng 63.

Hình nằm trong **cả hai** thanh là hình nằm trong ô vuông 2×2 ở giữa: $3 \cdot 3 = 9$ hình, bị đếm hai lần.

Tổng $63 + 63 - 9 = 117$. Đáp án (B). Quên trừ phần chung ra 126.

7.23 (D) 18

Mọi tam giác phải có ít nhất một cạnh nằm trên đường chéo (chỉ với các đoạn ngang và dọc thì chỉ tạo được hình chữ nhật). Chia trường hợp theo số đường chéo dùng làm cạnh.

Dùng cả hai đường chéo: đỉnh là giao điểm X của hai đường chéo, cạnh thứ ba là một đoạn cắt cả hai đường chéo: một trong 4 đoạn dọc (cạnh trái, hai đoạn chia, cạnh phải) hoặc cạnh trên, cạnh dưới — 6 tam giác.

Dùng đúng một đường chéo, chẳng hạn đường từ góc dưới trái lên góc trên phải: hai cạnh còn lại là một đoạn dọc và một cạnh ngang gặp nhau ở góc vuông. Với cạnh dưới: đoạn dọc thứ 1, 2, 3 (tính từ trái) — 3 tam giác; với cạnh trên: đoạn dọc thứ 0, 1, 2 — 3 tam giác. Đường chéo kia cũng 6.

Tổng $6 + 6 + 6 = 18$. Đáp án (D).

7.24 (E) 128

Chia theo hiệu $d = a - b$. Với $d = 0$: 20 cặp. Với $d = 1$: $a = b + 1$, $b \in \{1, \dots, 19\}$ — 19 cặp; $d = -1$ cũng 19. Tương tự $d = \pm 2$: 18 mỗi loại, $d = \pm 3$: 17 mỗi loại.

Tổng $20 + 2(19 + 18 + 17) = 20 + 108 = 128$. Đáp án (E).

Trên bảng 20×20 , các cặp này là một “dải” 7 đường chéo quanh đường chéo chính. Quên rằng cặp có thứ tự (chỉ lấy $a \geq b$) được $20 + 19 + 18 + 17 = 74$.

7.25 (C) 25

Số có k chữ số loại này: mỗi chữ số 2 cách, có 2^k số. Trước các số có 4 chữ số là $2 + 4 + 8 = 14$ số.

Trong các số có 4 chữ số, thay $1 \rightarrow 0$, $2 \rightarrow 1$: thứ tự tăng dần giữ nguyên, và các số biến thành 0000, 0001, $\dots$, 1111 — chính là các số 0 tới 15 viết ở hệ nhị phân. $2121 \rightarrow 1010_2 = 10$, nên 2121 đứng thứ $10 + 1 = 11$ trong nhóm 4 chữ số.

Vị trí: $14 + 11 = 25$. Đáp án (C). Quên các số ngắn hơn ra 11; quên “+1” ra 24.

7.26 (E) 14

Chia các cách tới n theo **bước cuối**: bước cuối là “cộng 1” (từ $n - 1$) hoặc “nhân đôi” (từ $n/2$, chỉ khi n chẵn). Gọi $w(n)$ là số cách: $w(n) = w(n - 1) + w(n/2)$ khi n chẵn, $w(n) = w(n - 1)$ khi n lẻ, và $w(1) = 1$.

$w(2) = 1 + 1 = 2$, $w(3) = 2$, $w(4) = 2 + 2 = 4$, $w(5) = 4$, $w(6) = 4 + 2 = 6$, $w(7) = 6$, $w(8) = 6 + 4 = 10$, $w(9) = 10$, $w(10) = 10 + 4 = 14$.

Đáp án (E). (Ở $w(2)$: từ 1 có thể cộng 1 hoặc nhân đôi — hai cách khác nhau dù cùng ra 2.)

7.27 (D) 240

Một tam giác như vậy được xác định duy nhất bởi ba lựa chọn nối tiếp: **đỉnh góc vuông** V , đỉnh H cùng hàng với V (đầu cạnh ngang), đỉnh W cùng cột với V (đầu cạnh dọc). Ngược lại, mỗi tam giác chỉ có một góc vuông nên không bị đếm lặp.

V : 20 cách. H : một trong 4 chấm còn lại trên cùng hàng (mỗi hàng 5 chấm). W : một trong 3 chấm còn lại trên cùng cột (mỗi cột 4 chấm). Quy tắc nhân: $20 \cdot 4 \cdot 3 = 240$. Đáp án (D).

Bẫy: chia đôi vì sợ đếm lặp ra 120 — không cần, vì vai trò của H (ngang) và W (dọc) không đổi chỗ được.

7.28 (E) 256

Vì không bao giờ đi sang trái, đường đi đi qua các đường phố dọc $x = 0, 1, 2, 3, 4$ theo đúng thứ tự, và mỗi lần chuyển từ đường dọc x sang $x + 1$ bằng đúng một đoạn ngang. Trên mỗi đường dọc, vì không được quay lại giao lộ cũ, đường đi chỉ đi thẳng lên hoặc thẳng xuống (hoặc đứng yên) từ chỗ vào tới chỗ ra.

Vậy một đường đi được xác định hoàn toàn bởi **hàng của bốn đoạn ngang** (từ $x = 0$ sang 1, ..., từ $x = 3$ sang 4). Mỗi đoạn ngang chọn một trong 4 hàng $y = 0, 1, 2, 3$, độc lập; trên đường dọc cuối cùng đi thẳng tới B . Có $4^4 = 256$ đường. Đáp án (E).

Bẫy: chỉ đếm đường ngắn nhất (phải và lên) ra 35.

7.29 (D) 40

Mỗi số dạng $2^a 3^b$ ứng với đúng một cặp (a, b) (phân tích ra thừa số nguyên tố là duy nhất — Chương 5), nên chỉ cần đếm cặp.

Chia theo b (ít giá trị hơn): cần $2^a < \frac{1000}{3^b}$.

b	0	1	2	3	4	5	6
$1000/3^b \approx$	1000	333	111	37	12,3	4,1	1,4
a từ 0 tới	9	8	6	5	3	2	0
số giá trị	10	9	7	6	4	3	1

($3^7 = 2187$ đã quá lớn.) Tổng $10 + 9 + 7 + 6 + 4 + 3 + 1 = 40$. Đáp án (D).

Bẫy: mỗi hàng quên giá trị $a = 0$ (số 3^b) sẽ thiếu đúng 7, ra 33; quên $1 = 2^0 3^0$ ra 39.

7.30 (A) 96

Bốn chữ số khác nhau nhỏ nhất là $0 + 1 + 2 + 3 = 6$, nên các bộ có tổng 10 không nhiều — liệt kê $a < b < c < d$ theo a :

$a = 0$: $\{0, 1, 2, 7\}$, $\{0, 1, 3, 6\}$, $\{0, 1, 4, 5\}$, $\{0, 2, 3, 5\}$. $a = 1$: $\{1, 2, 3, 4\}$. ($a \geq 2$: tổng ít nhất $2 + 3 + 4 + 5 = 14$.)

Bộ không có chữ số 0: $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ số. Bộ có chữ số 0: hàng nghìn có 3 lựa chọn (khác 0), ba hàng sau $3 \cdot 2 \cdot 1$: 18 số mỗi bộ.

Tổng $24 + 4 \cdot 18 = 96$. Đáp án (A). Quên loại số 0 đứng đầu ra $5 \cdot 24 = 120$.

7.31 (B) 10

Tổng chữ số bằng 9 nên số đó chia hết cho 9 (Chương 5); cùng với chia hết cho 4, nó chia hết cho 36. Ngược lại, bội của 36 có tổng chữ số là bội của 9: 9 hoặc 18 (dưới 500 thì tổng chữ số không vượt $4 + 9 + 9 = 22$).

Liệt kê các bội của 36 dưới 500: 36, 72, 108, 144, 180, 216, 252, 288, 324, 360, 396, 432, 468 — có 13 số. Các số có tổng chữ số 18: 288, 396, 468.

Còn $13 - 3 = 10$ số. Đáp án (B). Quên loại các số có tổng chữ số 18 ra 13.

7.32 (C) 144

Diện tích $w \cdot h$ lẻ khi và chỉ khi **cả hai** cạnh w, h đều lẻ. Hình chữ nhật được chọn bằng một “đoạn ngang” (vị trí và độ dài theo chiều ngang) và một “đoạn dọc”, độc lập — quy tắc nhân.

Trên một hàng 6 ô, đoạn dài w có $7 - w$ vị trí. Đoạn có độ dài lẻ: $w = 1: 6; w = 3: 4; w = 5: 2$ — tổng 12.

Số hình có diện tích lẻ: $12 \cdot 12 = 144$. Đáp án (C).

Kiểm tra: tổng số hình chữ nhật là $21 \cdot 21 = 441$ (mỗi chiều có $6 + 5 + \dots + 1 = 21$ đoạn), số có diện tích chẵn là $441 - 144 = 297$.

7.33 (C) 51

Một số chia hết cho 3 khi và chỉ khi tổng chữ số chia hết cho 3, nên chỉ cần biết **số dư khi chia cho 3** của từng chữ số (Chương 5). Các chữ số lẻ: 3, 9 có dư 0 (2 chữ số); 1, 7 có dư 1 (2 chữ số); 5 có dư 2 (1 chữ số).

Một chữ số: 3, 9 — 2 số.

Hai chữ số: dư (0, 0): $2 \cdot 2 = 4$; dư (1, 2) hoặc (2, 1): $2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 4$ — 8 số.

Ba chữ số: cả ba dư 0: $2^3 = 8$; cả ba dư 1: $2^3 = 8$; cả ba dư 2: 1; ba số dư khác nhau 0, 1, 2 theo một thứ tự nào đó: 6 thứ tự, mỗi thứ tự $2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ cách — 24. Cộng 41 số.

Tổng $2 + 8 + 41 = 51$. Đáp án (C). Chỉ đếm số có ba chữ số ra 41.

7.34 156

Mỗi lần xuất hiện của “12” hoặc nằm **bên trong** một số, hoặc **vắt qua ranh giới** giữa số n (tận cùng bằng 1) và số $n + 1$ (bắt đầu bằng 2). Hai loại rời nhau; trong mỗi loại chia theo vị trí của khối “12”.

Bên trong một số. Hai chữ số: 12 — 1. Ba chữ số: dạng $\overline{12x}$ (120–129): 10; dạng $\overline{x12}$ ($x = 1..9$): 9. Bốn chữ số (từ 1000 tới 2026): dạng $\overline{12xx}$: 100; dạng $\overline{x12x}$: chỉ 1120–1129 (212x vượt 2026): 10; dạng $\overline{xx12}$: 1012, 1112, ..., 1912 và 2012: 11. Cộng: $1 + 19 + 121 = 141$.

Vắt qua ranh giới. Cần $n + 1$ bắt đầu bằng 2 và n tận cùng bằng 1, tức $n + 1$ tận cùng bằng 2: $n + 1 \in \{2, 22, 202, 212, \dots, 292, 2002, 2012, 2022\}$ — có $1 + 1 + 10 + 3 = 15$ số.

Tổng $141 + 15 = 156$. Đáp số: **156**.

Một số như 1212 chứa hai khối “12” ở hai vị trí khác nhau và được đếm hai lần — đúng, vì ta đếm số lần xuất hiện.

7.35 131

Ý then chốt: tích là số chính phương khi và chỉ khi mỗi số nguyên tố xuất hiện với số mũ chẵn (Chương 5). Gom các chữ số theo “**phần không chính phương**” của chúng: nhóm **1** = {1, 4, 9}, nhóm **2** = {2, 8}, nhóm **3** = {3}, nhóm **5** = {5}, nhóm **6** = {6}, nhóm **7** = {7}. Tích chính phương khi tích các nhãn nhóm là số chính phương.

Một chữ số: nhóm 1: 3 số.

Hai chữ số: hai chữ số cùng nhóm: nhóm 1: $3 \cdot 3 = 9$; nhóm 2: $2 \cdot 2 = 4$; mỗi nhóm 3, 5, 6, 7: 1 — tổng 17.

Ba chữ số: (a) cả ba thuộc nhóm 1: 27. (b) một chữ số nhóm 1 và hai chữ số cùng nhóm $k \neq 1$: chọn vị trí chữ số nhóm 1 (3), giá trị của nó (3), rồi hai chữ số còn lại: nhóm 2 cho 4, mỗi nhóm 3, 5, 6, 7 cho 1 — được $9 \cdot (4 + 4) = 72$. (c) ba nhóm khác nhau, không có nhóm 1, tích nhãn chính phương: chỉ $2 \cdot 3 \cdot 6 = 36$; chọn chữ số nhóm 2 (2 cách) và sắp ba chữ số (6 cách): 12.

Ba chữ số: $27 + 72 + 12 = 111$. Tổng $3 + 17 + 111 = 131$. Đáp số: **131**.

7.36 63

Xét từng hàng như một xâu 3 ô. Một hàng không có hai ô kế nhau được chọn có 5 kiểu: 000, 100, 010, 001, 101 (1 = được chọn).

Hai hàng kế nhau không được chọn cùng một cột. Chia theo **hàng giữa**:

- Hàng giữa 000: hàng trên và hàng dưới mỗi hàng tự do 5 kiểu: 25.
- Hàng giữa 010: hàng trên/dưới không được có cột giữa: chỉ 000, 100, 001, 101 — 4 kiểu mỗi hàng: 16.
- Hàng giữa 100: hàng trên/dưới không được có cột trái: 000, 010, 001 — 3 kiểu: 9. Hàng giữa 001 tương tự: 9.
- Hàng giữa 101: hàng trên/dưới chỉ được 000 hoặc 010: $2 \cdot 2 = 4$.

Tổng $25 + 16 + 9 + 9 + 4 = 63$. Đáp số: **63**.

Ý tưởng: chia trường hợp theo phần “trung tâm” của cấu hình (hàng giữa), vì khi biết nó, hai phần còn lại trở nên **độc lập** và nhân được.

Chapter 8 — Counting II — Arrangements, Choices & Complements

8.1 (C)	8.2 (A)	8.3 (D)	8.4 (B)	8.5 (C)	8.6 (B)
8.7 (D)	8.8 10	8.9 (E)	8.10 (D)	8.11 (A)	8.12 (E)
8.13 (B)	8.14 (E)	8.15 (A)	8.16 (B)	8.17 (D)	8.18 (B)
8.19 (E)	8.20 210	8.21 (C)	8.22 (C)	8.23 (D)	8.24 25
8.25 (A)	8.26 (E)	8.27 (A)	8.28 70	8.29 (C)	8.30 (B)
8.31 (E)	8.32 (B)	8.33 (E)	8.34 (C)	8.35 2765	8.36 (D)

8.1 (C) 64

Rút 7! ra: $9! = 9 \cdot 8 \cdot 7!$ và $8! = 8 \cdot 7!$. Vậy $\frac{9! - 8!}{7!} = 9 \cdot 8 - 8 = 72 - 8 = 64$. Đáp án (C).

Hoặc: $9! - 8! = 8! (9 - 1) = 8 \cdot 8!$, chia 7! được $8 \cdot 8 = 64$. Đừng bao giờ tính $9! = 362880$ ra rồi mới chia.

8.2 (A) 50

Phần bù: tất cả $\binom{8}{3} = 56$ cách chọn 3 loại; số cách chứa **cả** dưa và cá cơm: chọn nốt loại thứ ba trong 6 loại kia: 6 cách.

Đáp số $56 - 6 = 50$. Đáp án (A).

8.3 (D) 9

Các chữ số 2, 0, 2, 6 có hai chữ số 2 giống nhau: số cách xếp là $\frac{4!}{2!} = 12$. Loại các cách có chữ số 0 đứng đầu: xếp 2, 2, 6 vào ba vị trí sau: $\frac{3!}{2!} = 3$.

Đáp số $12 - 3 = 9$. Đáp án (D).

8.4 (B) 120

Gom hai lá thành khối “Ace–King” với thứ tự đã bị ép (1 cách bên trong). Còn 5 đơn vị: $5! = 120$. Đáp án (B).

Nếu cho phép cả hai thứ tự trong khối thì được 240; “Ace ở bên trái King” (không cần sát) là $\frac{720}{2} = 360$.

8.5 (C) 56

Mỗi đường đi là một xâu 5 chữ R và 3 chữ U; chọn vị trí cho 3 chữ U trong 8 bước: $\binom{8}{3} = 56$. Đáp án (C).

8.6 (B) 61

Phần bù: mã không có chữ A — mỗi vị trí 4 cách: $4^3 = 64$. Tổng số mã $5^3 = 125$. Đáp số $125 - 64 = 61$. Đáp án (B).

$48 = 3 \cdot 4^2$ là số mã có **đúng một** chữ A; 75 là kết quả đếm trùng của cách “chọn chỗ cho chữ A rồi điền tùy ý”.

8.7 (D) 60

Xếp hai bạn Việt Nam vào 2 trong 3 huy chương (có thứ tự, vì huy chương khác nhau): $P(3, 2) = 3 \cdot 2 = 6$ cách. Huy chương còn lại cho 1 trong 10 vận động viên khác: 10 cách.

Tổng $6 \cdot 10 = 60$. Đáp án (D).

Nếu chỉ chọn 2 huy chương cho hai bạn mà quên hai bạn có thể đổi chỗ cho nhau thì được $3 \cdot 10 = 30$.

8.8 10

Mỗi trận là một cặp **có thứ tự** (đội chủ nhà, đội khách), nên với n đội có $n(n-1)$ trận.

$n(n-1) = 90 = 10 \cdot 9$, nên $n = 10$. Đáp số: 10.

Nếu mỗi cặp chỉ đá một trận thì số trận là $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ — gấp đôi lên vì có lượt đi, lượt về.

8.9 (E) 46

Không có ba điểm nào trên một đường tròn thẳng hàng, nên mọi bộ ba điểm là một tam giác: $\binom{8}{3} = 56$.

Phần bù: tam giác không có đỉnh đỏ = ba đỉnh xanh: $\binom{5}{3} = 10$. Đáp số $56 - 10 = 46$. Đáp án (E).

Lưu ý: $30 = 3 \cdot \binom{5}{2}$ chỉ là số tam giác có đúng một đỉnh đỏ.

8.10 (D) 28

Một lựa chọn là bộ (t, j, w) số nguyên không âm với $t + j + w = 6$. Sao và vạch (được rỗng): $\binom{6+2}{2} = \binom{8}{2} = 28$. Đáp án (D).

Kiểm tra bằng chia trường hợp theo t : $t = 0, 1, \dots, 6$ cho $7 + 6 + \dots + 1 = 28$. Nếu bắt buộc mỗi loại ít nhất một thì chỉ $\binom{5}{2} = 10$.

8.11 (A) 12

Cố định An. Bình ngồi ở một trong 2 ghế cạnh An: 2 cách. Ba bạn còn lại vào 3 ghế: $3! = 6$ cách. Tổng $2 \cdot 6 = 12$. Đáp án (A).

Cách khác: gom An–Bình thành khối, quanh bàn có 4 đơn vị: $(4-1)! \cdot 2 = 12$.

8.12 (E) 630

Chọn 2 trai: $\binom{7}{2} = 21$. Chọn 2 gái: $\binom{6}{2} = 15$. Ghép đôi: bạn trai thứ nhất chọn 1 trong 2 bạn gái làm đồng đội (2 cách), cặp còn lại tự xác định.

Tổng $21 \cdot 15 \cdot 2 = 630$. Đáp án (E). Quên bước ghép đôi sẽ chỉ được 315.

8.13 (B) 144

Cách 1 — đặt chữ bắt buộc trước. Đặt A và B vào 2 trong 4 vị trí (có thứ tự): $P(4, 2) = 12$. Hai vị trí còn lại lấy 2 trong 4 chữ C, D, E, F , có thứ tự: $P(4, 2) = 12$. Tổng 144.

Cách 2 — bao hàm–loại trừ. Tất cả $P(6, 4) = 360$; thiếu A : $P(5, 4) = 120$; thiếu B : 120; thiếu cả hai: $P(4, 4) = 24$. $360 - 120 - 120 + 24 = 144$ ✓. Đáp án (B).

Chọn vị trí cho A, B mà không phân biệt ai ở đâu ($\binom{4}{2} = 6$) sẽ ra 72.

8.14 (E) 52

Tổng số bộ ba: $\binom{8}{3} = 56$. Bộ ba thẳng hàng: chỉ có trên 4 cạnh (mỗi cạnh có đúng 3 điểm: hai đỉnh và trung điểm), mỗi cạnh 1 bộ.

Các đường khác — đường chéo, đường nối hai trung điểm — chỉ chứa 2 điểm của hình (tâm hình vuông không phải là điểm đã cho). Đáp số $56 - 4 = 52$. Đáp án (E).

8.15 (A) 840

Cách 1. Chọn ủy ban $\binom{8}{4} = 70$; trong ủy ban chọn chủ tịch (4) rồi thư ký (3): $70 \cdot 12 = 840$.

Cách 2. Chọn chủ tịch (8), thư ký (7), rồi 2 thành viên thường trong 6 người còn lại $\binom{6}{2} = 15$: $8 \cdot 7 \cdot 15 = 840$. Hai cách khớp nhau. Đáp án (A).

Lấy $P(8, 4) = 1680$ là coi cả bốn vị trí đều khác nhau — nhưng hai thành viên thường không có vai trò riêng.

8.16 (B) 310

Phần bù: đội toàn giáo viên $\binom{5}{4} = 5$ hoặc toàn học sinh $\binom{6}{4} = 15$. Tổng số đội $\binom{11}{4} = 330$.

Đáp số $330 - 5 - 15 = 310$. Đáp án (B). Chỉ trừ một loại sẽ ra 315 hoặc 325.

8.17 (D) 60

Mỗi hình bình hành được xác định duy nhất bởi 2 đường ngang (hai cạnh song song) và 2 đường xiên (hai cạnh còn lại).

Số cách: $\binom{4}{2} \cdot \binom{5}{2} = 6 \cdot 10 = 60$. Đáp án (D).

8.18 (B) 15

Chia hai trường hợp theo màu hai đầu.

- Hai đầu đỏ: 5 vị trí giữa chứa 2 đỏ, 3 xanh: $\binom{5}{2} = 10$.
- Hai đầu xanh: 5 vị trí giữa chứa 4 đỏ, 1 xanh: $\binom{5}{1} = 5$.

Tổng 15. Đáp án (B). (Tất cả có $\binom{7}{3} = 35$ hàng; 20 hàng còn lại có hai đầu khác màu.)

8.19 (E) 204

Ý chính: mỗi tập 3 chữ số khác nhau xếp được **đúng một** cách tăng dần và đúng một cách giảm dần. Vậy đếm số tập.

- **Tăng dần:** chữ số 0 không được dùng (nó sẽ đứng đầu): $\binom{9}{3} = 84$.
- **Giảm dần:** chữ số 0, nếu có, luôn đứng cuối nên được phép: $\binom{10}{3} = 120$.

Hai loại rời nhau (một số không thể vừa tăng vừa giảm). Tổng $84 + 120 = 204$. Đáp án (E).

Bẫy: coi hai loại giống nhau và nhân đôi số tăng dần ra $2 \cdot 84 = 168$ (quên rằng số giảm dần được dùng chữ số 0); dùng $P(10, 3)$ là quên rằng thứ tự đã bị ép.

8.20 210

Mỗi đường đi gồm 7 bước: 2 bước theo chiều dài x , 2 bước theo chiều y , 3 bước theo chiều cao z . Đường đi ứng một-một với xâu gồm 2 chữ X , 2 chữ Y , 3 chữ Z .

Số xâu: $\frac{7!}{2!2!3!} = \frac{5040}{24} = 210$. Đáp số: 210.

8.21 (C) 480

Cố định An ở ghế trên cùng. Bình bị ép vào ghế đối diện: 1 cách. Chi không được ngồi 2 ghế cạnh An: còn $6 - 2 = 4$ ghế. Năm người còn lại vào 5 ghế: $5! = 120$.

Tổng $4 \cdot 120 = 480$. Đáp án (C).

Không có điều kiện về Chi thì được $6! = 720$.

8.22 (C) 3600

Phần bù: không có hai trong ba bạn nào đứng cạnh nhau. Chèn khe: xếp 4 bạn còn lại ($4! = 24$), tạo 5 khe; xếp Anh, Bảo, Chi vào 3 khe khác nhau theo thứ tự: $P(5, 3) = 60$. Phần bù có $24 \cdot 60 = 1440$ cách.

Đáp số $7! - 1440 = 5040 - 1440 = 3600$. Đáp án (C).

Bẫy: trả lời phần bù 1440; đếm trực tiếp “chọn một cặp (3 cách), gom khối ($2 \cdot 6!$)” ra 4320 — các cách có cả ba bạn đứng liền nhau bị đếm hai lần.

8.23 (D) 240

Cách 1. Chọn 3 số: $\binom{5}{3} = 10$. Xếp các số theo thứ tự tăng dần; gán cho chúng 3 màu khác nhau theo thứ tự đó: $P(4, 3) = 24$ (gán màu là có thứ tự, vì “số 1 màu đỏ, số 2 màu xanh” khác “số 1 màu xanh, số 2 màu đỏ”). Tổng 240.

Cách 2. Rút lần lượt: lá đầu 20 cách; lá thứ hai khác số và khác màu: $4 \cdot 3 = 12$; lá thứ ba: $3 \cdot 2 = 6$. Được 1440 bộ có thứ tự, mỗi tay bài đếm $3! = 6$ lần: $1440/6 = 240$ ✓. Đáp án (D).

Bẫy: chọn 3 số và 3 màu rồi nhân ($10 \cdot 4 = 40$) là quên ghép màu với số; quên chia 6 ra 1440.

8.24 25

Không có giới hạn trên: số nghiệm nguyên dương của $a + b + c = 12$ là $\binom{11}{2} = 55$ (sao và vạch).

Phần bù: có người nhận từ 7 kẹo trở lên. Chỉ một người có thể như vậy (hai người thì đã ≥ 14). Nếu Ana nhận ≥ 7 : cho Ana trước 6 kẹo, còn 6 kẹo chia sao cho mỗi người ít nhất 1: $\binom{5}{2} = 10$ cách. Ba người: 30.

Đáp số $55 - 30 = 25$. Đáp số: 25.

Kiểm tra bằng chia trường hợp theo a : với $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ thì $b + c = 12 - a$ với $1 \leq b, c \leq 6$ có lần lượt 2, 3, 4, 5, 6, 5 cách; tổng 25 ✓.

8.25 (A) 576

Năm vị trí xen kẽ nên mẫu chỉ có thể là $TGTGT$ (3 trai, 2 gái) hoặc $GTGTG$ (2 trai, 3 gái).

- $TGTGT$: xếp 3 trong 4 bạn trai vào các vị trí 1, 3, 5: $P(4, 3) = 24$; 2 trong 4 bạn gái vào vị trí 2, 4: $P(4, 2) = 12$. Được 288.
- $GTGTG$: tương tự $P(4, 3) \cdot P(4, 2) = 288$.

Tổng 576. Đáp án (A).

Bấy: đã cộng hai mẫu $TGTGT$ và $GTGTG$ rồi lại nhân 2 cho “bắt đầu bằng trai hay gái” ra 1152 — hai mẫu đó chính là hai cách bắt đầu; bỏ điều kiện xen kẽ thì có $P(8, 5) = 6720$.

8.26 (E) 130

Chia theo số cờ mỗi màu (r, b, g) với $r \leq 3, b \leq 2, g \leq 2, r + b + g = 5$; mỗi bộ cho $\frac{5!}{r!b!g!}$ tín hiệu:

- $(3, 2, 0)$ và $(3, 0, 2)$: mỗi bộ $\frac{120}{2!} = 10$.
- $(3, 1, 1)$: $\frac{120}{6} = 20$.
- $(2, 2, 1)$, $(2, 1, 2)$, $(1, 2, 2)$: mỗi bộ $\frac{120}{4} = 30$.

Tổng $10 + 10 + 20 + 30 + 30 + 30 = 130$. Đáp án (E).

Mẹo không sót: liệt kê bộ (r, b, g) theo r giảm dần — $r = 3$ rồi $r = 2$ rồi $r = 1$ ($r = 0$ không được vì $b + g \leq 4$).

8.27 (A) 120

Chọn cặp vợ chồng nằm trong nhóm: 5 cách. Hai người còn lại phải đến từ **hai cặp khác nhau** trong 4 cặp còn lại: chọn 2 cặp $\binom{4}{2} = 6$, rồi mỗi cặp chọn chồng hoặc vợ: $2 \cdot 2 = 4$.

Tổng $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$. Đáp án (A).

Kiểm tra: không có cặp nào $\binom{5}{4} \cdot 2^4 = 80$; hai cặp $\binom{5}{2} = 10$; và $80 + 120 + 10 = 210 = \binom{10}{4}$ ✓.

Bấy: chọn cặp (5 cách) rồi chọn 2 người bất kỳ trong 8 người còn lại $\binom{8}{2} = 28$ ra 140 — tính cả trường hợp hai người đó là một cặp, và mỗi nhóm hai cặp bị đếm hai lần. Lấy $210 - 80 = 130$ là đếm “ít nhất một cặp”.

8.28 70

Mỗi bước lên U luôn đi liền với một bước phải R ngay sau nó, nên ta “dán” chúng thành khối UR . Đường đi gồm 4 khối UR và $8 - 4 = 4$ bước R lẻ. Ngược lại, mọi cách xếp 4 khối UR và 4 chữ R cho một đường đi hợp lệ (bước lên nào cũng có bước phải theo sau).

Số cách xếp 8 đơn vị gồm 4 khối giống nhau và 4 chữ R giống nhau: $\binom{8}{4} = 70$. Đáp số: 70.

Bấy: quên rằng buộc ra $\binom{12}{4} = 495$. Chú ý điều kiện cũng cấm bước cuối là U (không còn bước nào theo sau) — cách dán khối tự động xử lý cả điều này lẫn điều “không có hai bước lên liền nhau”.

8.29 (C) 24

Vẽ mũi tên “ X tặng Y ”. Mỗi người có đúng một mũi tên đi ra và một mũi tên đi vào, nên các mũi tên tạo thành những **vòng khép kín**. Không ai tự tặng mình (vòng dài 1) và không có hai người tặng nhau (vòng dài 2). Với 5 người, chỉ còn khả năng: vòng dài 5 (vì $5 = 3 + 2$ phải có vòng dài 2).

Số vòng dài 5: bắt đầu từ bạn thứ nhất, bạn ấy tặng 1 trong 4 người, người đó tặng 1 trong 3 người còn lại, ... : $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ (đây chính là số cách xếp 5 người quanh bàn tròn: $(5 - 1)!$). Đáp án (C).

Bấy: chỉ cấm tự tặng mình ra 44; số cách có một vòng 3 và một cặp tặng nhau là $\binom{5}{2} \cdot 2 = 20$.

8.30 (B) 147

Cách 1 — đếm theo số chung. Với mỗi số k , có đúng 7 quân chứa k ($k|0, \dots, k|6$, kể cả quân đôi $k|k$); chúng tạo $\binom{7}{2} = 21$ cặp. Hai quân khác nhau không thể có **hai** số chung (hai số xác định duy nhất một quân), nên mỗi cặp ghép được chỉ được đếm đúng một lần. Tổng $7 \cdot 21 = 147$.

Cách 2 — đếm theo từng quân rồi chia đôi. Quân thường $a|b$ ghép được với $6 + 6 = 12$ quân; quân đôi $k|k$ ghép với 6 quân. Tổng $21 \cdot 12 + 7 \cdot 6 = 294$, mỗi cặp đếm hai lần: 147 ✓.

Đáp án (B). Bấy: quên chia đôi ra 294; cho rằng quân nào cũng ghép được với 12 quân ra $\frac{28 \cdot 12}{2} = 168$; $\binom{28}{2} = 378$ là mọi cặp.

8.31 (E) 90

Cách 1 — theo công sai. Sắp xếp tăng: $b - d, b, b + d$ với $d \geq 1$. Với công sai d , số hạng đầu chạy từ 1 đến $20 - 2d$: $20 - 2d$ cách, $d = 1, \dots, 9$. Tổng $18 + 16 + \dots + 2 = 90$.

Cách 2 — theo hai đầu mút. Ba số tạo cấp số cộng $\Leftrightarrow$ số nhỏ nhất và lớn nhất **cùng tính chẵn lẻ** (khi đó số giữa là trung bình cộng của chúng, tự động khác hai đầu). Số cặp cùng tính chẵn lẻ: $\binom{10}{2} + \binom{10}{2} = 45 + 45 = 90$ ✓.

Đáp án (E). Chỉ đếm một loại chẵn lẻ sẽ được 45.

8.32 (B) 11

Với m ga có $P(m, 2) = m(m - 1)$ loại vé. Gọi số ga cũ là n , số ga mới là $k \geq 2$:

$$(n + k)(n + k - 1) - n(n - 1) = 46. \text{ Khai triển: } 2nk + k^2 - k = 46, \text{ tức } k(2n + k - 1) = 46 = 2 \cdot 23.$$

Vì $k \geq 2$ và $2n + k - 1 > k$, chỉ có $k = 2, 2n + 1 = 23$, nên $n = 11$. (Kiểm tra: $13 \cdot 12 - 11 \cdot 10 = 156 - 110 = 46$ ✓.) Đáp án (B).

Nếu cho phép $k = 1$ thì $2n = 46, n = 23$ cũng thoả — chính vì vậy đề phải nói “nhiều hơn một ga mới”. Đọc kỹ điều kiện để chọn đúng nghiệm.

8.33 (E) 13

Gọi số bạn trai là b , bạn gái là g . Từ $\binom{g}{2} = \frac{g(g-1)}{2} = 6$ được $g(g - 1) = 12$, nên $g = 4$.

$$\binom{b}{2} = b \cdot g \text{ cho } \frac{b(b-1)}{2} = 4b; \text{ chia hai vế cho } b > 0: b - 1 = 8, b = 9. \text{ Kiểm tra: } \binom{9}{2} = 36 = 9 \cdot 4 \text{ ✓.}$$

Lớp có $9 + 4 = 13$ học sinh. Đáp án (E). Bấy: trả lời số bạn trai 9 hoặc số bạn gái 4.

8.34 (C) 70

Có $6 \cdot 2/2 = 6$ cái bắt tay. Bắt đầu từ một người, đi theo cái bắt tay sang người kế, rồi tiếp tục bằng cái bắt tay còn lại của người đó... vì ai cũng bắt tay đúng 2 người, ta đi thành **vòng khép kín**. Mỗi vòng có ít nhất 3 người, nên với 6 người chỉ có hai kiểu: một vòng 6 người, hoặc hai vòng 3 người.

• **Một vòng 6 người:** giống xếp 6 người quanh bàn tròn, nhưng vòng bắt tay đọc theo chiều nào cũng như nhau, nên chia thêm 2: $\frac{(6-1)!}{2} = 60$.

• **Hai vòng 3 người:** chia 6 người thành hai nhóm 3 không tên: $\frac{1}{2} \binom{6}{3} = 10$; trong mỗi nhóm ba người bắt tay đôi một — chỉ 1 cách.

Tổng $60 + 10 = 70$. Đáp án (C).

Bấy: quên kiểu hai vòng 3 ra 60; không chia 2 khi tách nhóm ra 80; không chia 2 cho chiều của vòng ra $120 + 10 = 130$.

8.35 2765

Đếm phần bù: tích **không** chia hết cho 4, tức là trong tích có nhiều nhất một thừa số 2. Chia các số từ 1 đến 30 thành ba loại: 15 số lẻ; 8 số chia 4 dư 2 (2, 6, 10, ..., 30), mỗi số chứa đúng một thừa số 2; 7 số chia hết cho 4.

Tích không chia hết cho 4 khi và chỉ khi: cả ba số lẻ, **hoặc** hai số lẻ và một số chia 4 dư 2. (Hai số chẵn bất kỳ đã cho tích chia hết cho 4; một số chia hết cho 4 cũng vậy.)

$$\bullet \text{ Ba số lẻ: } \binom{15}{3} = 455. \bullet \text{ Hai số lẻ, một số dạng } 4k + 2: \binom{15}{2} \cdot 8 = 105 \cdot 8 = 840.$$

Phần bù có $455 + 840 = 1295$ cách. Tất cả $\binom{30}{3} = 4060$ cách. Đáp số $4060 - 1295 = 2765$. Đáp số: 2765.

Bấy: chỉ trừ trường hợp ba số lẻ (coi “có một số chẵn” là đủ) ra 3605 — nhưng $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$ không chia hết cho 4.

8.36 (D) 315

Tạm coi hai nhóm có tên (nhóm 1, nhóm 2). Chọn học sinh chung: 7 cách. Nhóm 1 cần thêm 2 bạn trong 6 bạn còn lại: $\binom{6}{2} = 15$; nhóm 2 cần thêm 2 bạn trong 4 bạn chưa dùng (không được trùng thêm ai với nhóm 1): $\binom{4}{2} = 6$. Có $7 \cdot 15 \cdot 6 = 630$ cách có thứ tự.

Hai nhóm không có tên, và hai nhóm luôn khác nhau, nên mỗi cách bị đếm đúng 2 lần: $\frac{630}{2} = 315$. Đáp án (D).

Bẫy: quên chia 2 ra 630; nhóm 2 chọn 2 bạn trong cả 6 bạn còn lại thì có thể trùng thêm người với nhóm 1 — sai điều kiện “đúng một”.

Chapter 9 — Probability & Statistics

9.1 (E)	9.2 (B)	9.3 (D)	9.4 (A)	9.5 (A)	9.6 (C)
9.7 (B)	9.8 (C)	9.9 (D)	9.10 (E)	9.11 (C)	9.12 (B)
9.13 (B)	9.14 (A)	9.15 (D)	9.16 (D)	9.17 (D)	9.18 (B)
9.19 (C)	9.20 (B)	9.21 (C)	9.22 (A)	9.23 (C)	9.24 (A)
9.25 (E)	9.26 (E)	9.27 (C)	9.28 (B)	9.29 (E)	9.30 11
9.31 (A)	9.32 (D)	9.33 (C)	9.34 17	9.35 (D)	9.36 (B)

9.1 (E) 30

Đổi ra tổng: bốn số có tổng $4 \cdot 15 = 60$, năm số có tổng $5 \cdot 18 = 90$. Số thứ năm là $90 - 60 = 30$. Đáp án (E).

Kiểm tra bằng độ lệch: số mới phải bù cho bốn số cũ, mỗi số thiếu 3 so với 18 (tổng thiếu 12), nên nó bằng $18 + 12 = 30$.

9.2 (B) 3

Đọc biểu đồ: 30, 45, 20, 40, 55, 65, 60, tổng 315, trung bình mỗi ngày $315 : 7 = 45$.

Các ngày bán **nhều hơn** 45: thứ Sáu (55), thứ Bảy (65), Chủ nhật (60) — 3 ngày. Thứ Ba bán đúng 45, không tính. Đáp án (B).

9.3 (D) $\frac{2}{3}$

Số nguyên tố trong các nhãn: 2, 3, 5. Xác suất bằng tổng góc chia 360° : $\frac{100+80+60}{360} = \frac{240}{360} = \frac{2}{3}$. Đáp án (D).

Bẫy: coi bốn ô như nhau ra $\frac{3}{4}$ — các ô có góc khác nhau nên không đồng khả năng.

9.4 (A) 72

Phần trăm đi bộ: $100\% - 40\% - 25\% - 15\% = 20\%$. Góc quạt: $20\% \cdot 360^\circ = 72^\circ$. Đáp án (A).

Lưu ý: số 40 học sinh không cần dùng; góc chỉ phụ thuộc vào tỉ lệ (20% của lớp là 8 học sinh).

9.5 (A) 30

Các số lẻ từ 11 đến 49 cách đều nhau (cấp số cộng), nên trung bình bằng trung bình của số đầu và số cuối: $\frac{11+49}{2} = 30$. Đáp án (A).

Lý do: ghép cặp $11 + 49 = 13 + 47 = \dots = 60$, mỗi cặp có trung bình 30 (và 20 số tạo thành đúng 10 cặp).

9.6 (C) 10

Tần số của 0, 1, ..., 6 cuốn: 2, 2, 1, 3, 4, 2, 1 (tổng 15 học sinh).

Tổng số sách: $0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 45$, trung bình $45 : 15 = 3$.

Trung vị ở vị trí 8: cộng dồn 2, 4, 5, 8 nên vị trí 8 là 3. Mode là 4 (cột cao nhất, 4 chấm).

Tổng $3 + 3 + 4 = 10$. Đáp án (C).

9.7 (B) $\frac{4}{15}$

$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, nên số được chọn phải không chia hết cho 2, 3, 5. Liệt kê: 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 — 8 số.

Kiểm tra bằng phần bù và bao hàm–loại trừ: số bội của 2, 3, 5 trong 1..30 là $15 + 10 + 6 - 5 - 3 - 2 + 1 = 22$, còn lại $30 - 22 = 8$.

Xác suất $\frac{8}{30} = \frac{4}{15}$. Đáp án (B). Bẫy: chỉ loại số chẵn và bội của 3 (quên 5, 25) ra $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

9.8 (C) $\frac{1}{4}$

Hai đồng xu và xúc xắc độc lập. $P(\text{ít nhất một ngửa}) = 1 - P(\text{cả hai sấp}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. $P(\text{xúc xắc} > 4) = P(5 \text{ hoặc } 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

Nhân: $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$. Đáp án (C). Bẫy: đọc “at least one” thành “cả hai ngửa”, $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ (A); hoặc lấy $P(\text{ít nhất một ngửa}) = \frac{1}{2}$ ra $\frac{1}{6}$ (B).

9.9 (D) 36

Xác suất ra bi xanh lá là $1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$. Gọi N là tổng số bi: số bi xanh lá $\frac{5N}{12}$, số bi xanh dương $\frac{3N}{12}$.

Hiệu $\frac{2N}{12} = \frac{N}{6} = 6$, nên $N = 36$. Kiểm tra: 12 đỏ, 9 xanh dương, 15 xanh lá. Đáp án (D).

9.10 (E) 4

Đọc biểu đồ: 14, 17, 19, 19, 19, 21, 23, 26, 28, 30, 35, 35, 43 (đã sắp xếp sẵn). Có 13 số nên trung vị là số thứ 7: 23.

Mode là 19 (ba lần; 35 chỉ hai lần). Hiệu $23 - 19 = 4$. Đáp án (E).

9.11 (C) 3

Tăng trưởng trung bình mỗi tuần: $\frac{22-4}{6} = 3$ cm (tổng mức tăng của 6 tuần chính là cao lúc cuối trừ cao lúc đầu).

Mức tăng từng tuần: 4, 2, 5, 4, 2, 1. Lớn hơn 3: tuần 1, 3, 4 — 3 tuần. Đáp án (C).

9.12 (B) $\frac{1}{12}$

Cả hai số lẻ: mỗi con chọn trong $\{1, 3, 5\}$, có 9 ô. Trong 9 ô đó, tổng lớn hơn 6 khi là (3, 5), (5, 3), (5, 5) (vì $1 + 5 = 6$ không lớn hơn 6).

Xác suất $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Đáp án (B). Bẫy: hiểu “greater than 6” thành “ít nhất 6”, tính thêm (1, 5), (5, 1), (3, 3) ra $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ (D).

9.13 (B) 0.6

Sửa lỗi làm tổng tăng $86 - 68 = 18$ điểm, còn số học sinh vẫn là 30. Trung bình tăng $\frac{18}{30} = 0,6$. Đáp án (B).

Không cần biết trung bình ban đầu: thay đổi của trung bình = thay đổi của tổng chia số lượng. Bẫy: trả lời 18 (thay đổi của tổng) hoặc chia cho 60.

9.14 (A) 14

Giả sử có 3 bạn nam, 2 bạn nữ (chỉ tỉ lệ là quan trọng). Tổng tuổi cả câu lạc bộ: $5 \cdot 13,4 = 67$. Tổng tuổi nam: $3 \cdot 13 = 39$. Tổng tuổi nữ: 28, trung bình 14. Đáp án (A).

Cách độ lệch: mỗi bạn nam thấp hơn 13,4 là 0,4 tuổi, 3 bạn thiếu 1,2; 2 bạn nữ phải dư 1,2, tức mỗi bạn dư 0,6: $13,4 + 0,6 = 14$.

9.15 (D) $\frac{17}{2}$

Xác suất các ô: $\frac{144}{360} = \frac{2}{5}$, $\frac{108}{360} = \frac{3}{10}$, $\frac{72}{360} = \frac{1}{5}$, $\frac{36}{360} = \frac{1}{10}$.

$E = 0 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{3}{10} + 10 \cdot \frac{1}{5} + 50 \cdot \frac{1}{10} = 0 + 1,5 + 2 + 5 = 8,5 = \frac{17}{2}$. Đáp án (D).

Bẫy: lấy trung bình bốn số $\frac{0+5+10+50}{4} = \frac{65}{4}$, bỏ qua kích thước các ô.

9.16 (D) $\frac{13}{36}$

Hai số có ước chung lớn hơn 1 khi chúng cùng chia hết cho 2, hoặc cùng chia hết cho 3, hoặc cùng chia hết cho 5.

Cùng chẵn: $3 \cdot 3 = 9$ ô. Cùng chia hết cho 3 ($\{3, 6\}$): $2 \cdot 2 = 4$ ô, trong đó (6, 6) đã đếm. Cùng chia hết cho 5: chỉ (5, 5).

Tổng $9 + 4 - 1 + 1 = 13$, xác suất $\frac{13}{36}$. Đáp án (D). Bấy: quên ô (5, 5) ra $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$, hoặc đếm (6, 6) hai lần.

9.17 (D) $\frac{1}{4}$

Một số chia hết cho 4 khi số tạo bởi hai chữ số cuối chia hết cho 4 (chương 6). Hai chữ số cuối khác nhau lấy từ $\{1, 2, 3, 4\}$: các số chia hết cho 4 là 12, 24, 32.

Mỗi đuôi như vậy, hai chữ số còn lại xếp ở đầu theo 2 cách: $3 \cdot 2 = 6$ số trong $4! = 24$ số. Xác suất $\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$. Đáp án (D).

Bấy: quên đuôi 32 ra $\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$ (B).

9.18 (B) $-4\,250$

Kỳ vọng giải thưởng của một vé: $\frac{1 \cdot 500\,000 + 2 \cdot 200\,000 + 5 \cdot 50\,000}{200} = \frac{1\,150\,000}{200} = 5\,750$ đồng.

Trừ giá vé: $5\,750 - 10\,000 = -4\,250$ đồng. Đáp án (B).

Ý nghĩa: trung bình mỗi vé “lỗ” 4 250 đồng — chính là phần trường thu được: $200 \cdot 10\,000 - 1\,150\,000 = 850\,000 = 200 \cdot 4\,250$.

Bấy: quên trừ giá vé ra 5 750; hoặc tính $10\,000 - 5\,750$ mà nhầm dấu.

9.19 (C) 4

Sắp xếp $a \leq b \leq 8 \leq d \leq e$, tổng 40, $e = a + 11$. Vì 8 phải là mode duy nhất, 8 xuất hiện ít nhất 2 lần.

8 xuất hiện đúng 2 lần thì các số khác phải đôi một khác nhau. Hoặc $b = 8$ (dãy $a, 8, 8, d, e$ với $a < 8 < d < e$): $a + d + e = 24$, $e = a + 11$ nên $2a + d = 13$: $a = 1, d = 11, e = 12$ ✓; $a = 2, d = 9, e = 13$ ✓; $a = 3, d = 7$ ✗ ($d > 8$). Hoặc $d = 8$ (dãy $a, b, 8, 8, e$ với $a < b < 8 < e$): $a + b + e = 24$, $2a + b = 13$: $a = 3, b = 7, e = 14$ ✓; $a = 4, b = 5, e = 15$ ✓; $a = 5, b = 3$ ✗.

8 xuất hiện 3 lần: $a, 8, 8, 8, e$ với $a + e = 16$, $e - a = 11$ — không có nghiệm nguyên. **4 lần trở lên**: số còn lại phải bằng $40 - 32 = 8$, cả dãy là 8, khoảng biến thiên 0.

Có 4 dãy: $\{1, 8, 8, 11, 12\}$, $\{2, 8, 8, 9, 13\}$, $\{3, 7, 8, 8, 14\}$, $\{4, 5, 8, 8, 15\}$. Đáp án (C).

9.20 (B) $\frac{16}{35}$

Có $\binom{7}{3} = 35$ cách rút. Bốn thẻ lẻ (1, 3, 5, 7), ba thẻ chẵn. Tổng ba số lẻ khi số thẻ lẻ được rút là **lẻ**: 1 hoặc 3.

Một thẻ lẻ, hai thẻ chẵn: $4 \cdot \binom{3}{2} = 12$. Ba thẻ lẻ: $\binom{4}{3} = 4$. Tổng 16, xác suất $\frac{16}{35}$. Đáp án (B).

Bấy: đoán $\frac{1}{2}$ “vì lẻ và chẵn như nhau” — ở đây số thẻ lẻ và chẵn không bằng nhau.

9.21 (C) $\frac{2}{11}$

Đo góc từ số 12 theo chiều kim đồng hồ. Sau t phút (tính từ 3:00), kim phút ở $6t$ độ, kim giờ ở $90 + \frac{t}{2}$ độ (kim giờ đi 30° mỗi giờ, tức $\frac{1}{2}$ độ mỗi phút). Kim phút đuổi kim giờ với tốc độ $5,5$ độ/phút.

Góc giữa hai kim là $|90 - 5,5t|$ (khi $t \leq 60$ giá trị này đi từ 90° xuống 0 rồi lên tới 240° , tức góc thật là 120° lúc 4:00). Góc nhỏ hơn 30° khi $60 < 5,5t < 120$, tức $\frac{120}{11} < t < \frac{240}{11}$ — một khoảng dài $\frac{120}{11}$ phút.

Xác suất $\frac{120/11}{60} = \frac{2}{11}$. Đáp án (C). Bấy: coi kim giờ đứng yên ở số 3 thì khoảng là từ phút 10 đến phút 20, ra $\frac{1}{6}$.

9.22 (A) $\frac{4}{7}$

Đặt $P(k) = ck$. Tổng xác suất bằng 1: $c(1 + 2 + \dots + 6) = 21c = 1$, nên $c = \frac{1}{21}$.

$P(\text{chẵn}) = \frac{2+4+6}{21} = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}$. Đáp án (A).

Cách nhìn khác: tưởng tượng 21 “vé” — số k có k vé; 12 trong 21 vé mang số chẵn.

9.23 (C) $\frac{8}{25}$

Sơ đồ cây hai tầng. Hai lá thuận lợi:

- Mưa thứ Bảy, khô Chủ nhật: $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$.
- Khô thứ Bảy, mưa Chủ nhật: $\frac{3}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{25}$.

Tổng $\frac{5}{25} + \frac{3}{25} = \frac{8}{25}$. Đáp án (C).

Bẫy: dùng sai nhánh — nhân $\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{5}$ cho trường hợp thứ hai (xác suất mưa thứ Bảy thay vì khô) ra $\frac{1}{5} + \frac{2}{25} = \frac{7}{25}$.

9.24 (A) $\frac{1}{25}$

Nhắc lại chương 5: nếu $n = p^a q^b \dots$ thì n có $(a+1)(b+1) \dots$ ước. Có đúng 3 ước khi tích đó bằng 3 (số nguyên tố), tức $n = p^2$ với p nguyên tố. Các ước là $1, p, p^2$.

$p^2 \leq 100 \Rightarrow p \in \{2, 3, 5, 7\}$: $n = 4, 9, 25, 49$. Xác suất $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$. Đáp án (A).

Bẫy: lấy mọi số chính phương (10 số) ra $\frac{1}{10}$ — nhưng 16 có 5 ước, 36 có 9 ước, còn 1 chỉ có 1 ước.

9.25 (E) $\frac{1}{10}$

Chỉ cần quan tâm vị trí của nam và nữ: chọn 3 vị trí cho nam trong 6 vị trí, $\binom{6}{3} = 20$ cách, đồng khả năng.

Xen kẽ có đúng 2 mẫu: BGBGBG và GBGBGB. Xác suất $\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$. Đáp án (E).

Kiểm tra bằng cách đếm người: $2 \cdot 3! \cdot 3! = 72$ cách trong $6! = 720$ — cùng kết quả. Bẫy: quên mẫu bắt đầu bằng nữ ra $\frac{1}{20}$.

9.26 (E) 115

Bốn số đã biết sắp xếp: 72, 78, 85, 90 (tổng 325). Trung vị phụ thuộc vị trí của x — chia ba trường hợp.

- $x \leq 78$: trung vị 78, trung bình phải là 81, tổng 405, $x = 80 > 78$ — mâu thuẫn.
- $78 \leq x \leq 85$: trung vị là x : $\frac{325+x}{5} = x + 3 \Rightarrow 4x = 310, x = 77,5$ — không thuộc khoảng.
- $x \geq 85$: trung vị 85, trung bình 88, tổng 440, $x = 115 \geq 85$ ✓.

Đáp án (E). Bẫy: không kiểm tra điều kiện của trường hợp nên chọn 80.

9.27 (C) 3

Tổng là $10 \cdot 3,5 = 35$. Gọi a là số chữ số 1, f là số chữ số 5; vì 5 là mode duy nhất nên $f \geq a + 1$.

$a = 4$? Khi đó $f \geq 5$. Nếu $f = 5$: còn 1 số, tổng phải là $35 - 4 - 25 = 6 > 5$ — không được. Nếu $f = 6$: đã đủ 10 số, tổng $4 + 30 = 34 \neq 35$. Không được. Với $a \geq 5$ thì $a + f \geq 11 > 10$.

$a = 3$ được: 1, 1, 1, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5 có tổng $3 + 12 + 20 = 35$, và 5 xuất hiện 4 lần, nhiều hơn mọi số khác (mỗi số 3 lần).

Đáp án (C). Ý tưởng: tổng cố định kéo về một phía (nhiều số 1 làm tổng nhỏ), mode duy nhất kéo về phía kia (bắt buộc nhiều số 5) — thử giá trị lớn nhất có thể rồi lùi dần.

9.28 (B) $\frac{1}{2}$

Có $\binom{8}{3} = 56$ cách chọn. Ba điểm không thẳng hàng phải có hai điểm ở một hàng và một điểm ở hàng kia. Đặt hàng dưới $y = 0$, hàng trên $y = 1$, các cột $x = 0, 1, 2, 3$.

Góc vuông có cạnh dọc: đỉnh góc vuông ở điểm P , một cạnh là đoạn dọc từ P lên/xuống (1 cách), cạnh kia đi ngang từ P tới 3 điểm cùng hàng: $8 \cdot 3 = 24$ tam giác.

Góc vuông ở đỉnh đối diện cạnh nằm ngang: đỉnh $(c, 1)$, hai đỉnh $(a, 0), (b, 0)$; góc vuông tại $(c, 1)$ khi $(a - c)(b - c) + 1 = 0$, tức $(a - c)(b - c) = -1$: $a = c - 1, b = c + 1$. Cần $1 \leq c \leq 2$: 2 cách mỗi hàng, cả hai hàng: 4 tam giác (như tam giác tô màu).

Tổng 28, xác suất $\frac{28}{56} = \frac{1}{2}$. Đáp án (B). Bẫy: chỉ đếm tam giác có cạnh dọc ra $\frac{24}{56} = \frac{3}{7}$.

9.29 (E) $\frac{5}{27}$

Cố định hai con trắng và xanh, gọi hiệu của chúng là $d = |w - b|$. Số giá trị con đỏ nằm **chặt** giữa hai số là $d - 1$ (khi $d \geq 2$).

Số cặp có thứ tự (w, b) với hiệu d là $2(6 - d)$. Tổng số kết quả thuận lợi:

$$\sum_{d=2}^5 2(6 - d)(d - 1) = 2(4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 4) = 2 \cdot 20 = 40.$$

Xác suất $\frac{40}{216} = \frac{5}{27}$. Đáp án (E).

Kiểm tra bằng đối xứng: khi ba số khác nhau (120 kết quả), mỗi con có khả năng đứng giữa như nhau, nên con đỏ đứng giữa trong $\frac{120}{3} = 40$ kết quả — khớp. Bấy: chỉ đếm thứ tự trắng < đỏ < xanh, quên thứ tự ngược lại, ra $\frac{20}{216} = \frac{5}{54}$ (A).

9.30 11

Gọi n là số điểm, S là tổng, $m = \frac{S}{n}$. Bỏ điểm cao nhất $H: \frac{S-H}{n-1} = m - 2 \Rightarrow H = S - (n-1)(m-2) = m + 2(n-1)$.

Tương tự bỏ điểm thấp nhất $L: \frac{S-L}{n-1} = m + 3 \Rightarrow L = m - 3(n-1)$.

Trừ: $H - L = 5(n-1) = 50 \Rightarrow n = 11$. Đáp số: 11.

Nhìn bằng độ lệch: bỏ H làm $n-1$ số còn lại có trung bình thấp hơn 2, nghĩa là H cao hơn m đúng $2(n-1)$; tương tự L thấp hơn m đúng $3(n-1)$.

9.31 (A) $1 - \frac{\pi}{4}$

Điểm “bị loại” là điểm cách một điểm đánh dấu không quá 1: hợp của 9 hình tròn bán kính 1. Các tâm cách nhau ít nhất 2 nên các hình tròn không chồng lên nhau (chỉ tiếp xúc).

Phần nằm trong hình vuông: ở 4 đỉnh là 4 phần tư hình tròn (tổng π), ở 4 trung điểm cạnh là 4 nửa hình tròn (tổng 2π), ở tâm là một hình tròn đủ (π). Tổng diện tích bị loại 4π .

Xác suất $\frac{16-4\pi}{16} = 1 - \frac{\pi}{4}$. Đáp án (A). Bấy: coi 9 hình tròn đều nằm trọn trong hình vuông (9π — vượt cả 16!), hoặc chỉ tính hình tròn ở tâm ra $1 - \frac{\pi}{16}$.

9.32 (D) $\frac{7}{20}$

Trung bình là số nguyên khi tổng chia hết cho 3. Chia 10 số theo số dư khi chia cho 3: dư 0: $\{3, 6, 9\}$ (3 số); dư 1: $\{1, 4, 7, 10\}$ (4 số); dư 2: $\{2, 5, 8\}$ (3 số).

Tổng ba số chia hết cho 3 khi ba số cùng số dư, hoặc có đủ ba số dư khác nhau:

Cùng dư: $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{3}{3} = 1 + 4 + 1 = 6$. Khác dư: $3 \cdot 4 \cdot 3 = 36$. Tổng 42 trong $\binom{10}{3} = 120$: $\frac{42}{120} = \frac{7}{20}$. Đáp án (D).

Bấy: đoán $\frac{1}{3}$ — đúng gần đúng, nhưng các lớp dư không đều nhau (lớp dư 1 có 4 số).

9.33 (C) $\frac{3}{20}$

Đối về tổng. $1 + 2 + \dots + 10 = 55$. Nếu ba số được chọn có tổng s thì bảy số còn lại có tổng $55 - s$, và trung bình của chúng nguyên $\Leftrightarrow 7 \mid 55 - s \Leftrightarrow s$ chia 7 dư 6 (vì 55 chia 7 dư 6).

Tổng ba số khác nhau nằm từ $1 + 2 + 3 = 6$ đến $8 + 9 + 10 = 27$, nên $s \in \{6, 13, 20, 27\}$.

$s = 6$: chỉ $\{1, 2, 3\}$. $s = 27$: chỉ $\{8, 9, 10\}$. $s = 13$: $\{1, 2, 10\}, \{1, 3, 9\}, \{1, 4, 8\}, \{1, 5, 7\}, \{2, 3, 8\}, \{2, 4, 7\}, \{2, 5, 6\}, \{3, 4, 6\}$ — 8 bộ. $s = 20$: thay mỗi số x bằng $11 - x$ biến một bộ tổng 13 thành một bộ tổng $33 - 13 = 20$ (và ngược lại), nên cũng 8 bộ.

Có $1 + 8 + 8 + 1 = 18$ bộ trong $\binom{10}{3} = 120$ bộ: xác suất $\frac{18}{120} = \frac{3}{20}$. Đáp án (C).

Bấy: quên hai bộ ở đầu mút ($s = 6$ và $s = 27$) ra $\frac{16}{120} = \frac{2}{15}$; đoán “tổng chia 7 dư mấy cũng như nhau” ra $\frac{1}{7}$; đọc nhầm thành trung bình của **ba số được chọn** nguyên (42 bộ) ra $\frac{7}{20}$; đếm tử số theo thứ tự ($18 \cdot 6 = 108$) mà mẫu không thứ tự ra $\frac{9}{10}$.

9.34 17

Trong mỗi khối 6 số liên tiếp $6q + 1, \dots, 6q + 6$, đúng 4 số chia hết cho 2 hoặc 3 (các số dư 0, 2, 3, 4) — tỉ lệ đúng $\frac{2}{3}$.

Viết $n = 6q + r$, $0 \leq r \leq 5$. Các khối đầy đủ cho đúng $\frac{2}{3}$ của $6q$ số; tỉ lệ chung $> \frac{2}{3}$ khi và chỉ khi phần thừa r số cuối có hơn $\frac{2r}{3}$ số tốt. Trong $6q + 1, \dots, 6q + r$, số tốt là: $r = 1$: 0 (cần $> \frac{2}{3}$) ✗; $r = 2$: 1 ($6q + 2$; cần $> \frac{4}{3}$) ✗; $r = 3$: 2 (cần > 2) ✗; $r = 4$: 3 (cần $> \frac{8}{3}$) ✓; $r = 5$: 3 (cần $> \frac{10}{3}$) ✗; $r = 0$: bằng đúng $\frac{2}{3}$ ✗.

Vậy $n \equiv 4 \pmod{6}$: $n = 4, 10, \dots, 100$, có $\frac{100-4}{6} + 1 = 17$ giá trị. Đáp số: 17.

9.35 (D) $\frac{21}{5}$

Gọi E là kỳ vọng tổng điểm. Xét lần gieo đầu: với xác suất $\frac{5}{6}$ ra 1–5 và dừng, góp $\frac{1+2+3+4+5}{6} = \frac{15}{6}$; với xác suất $\frac{1}{6}$ ra 6, ghi 6 điểm và **trò chơi bắt đầu lại y như cũ**, nên phần còn lại có kỳ vọng vẫn là E .

$$E = \frac{15}{6} + \frac{1}{6}(6 + E) \Rightarrow \frac{5}{6}E = \frac{21}{6} \Rightarrow E = \frac{21}{5}. \text{ Đáp án (D).}$$

Kiểm tra trực giác: không có luật gieo lại thì kỳ vọng là 3,5; luật mới thêm chút ít. Bấy: chỉ cho gieo lại một lần ra $\frac{15}{6} + \frac{1}{6}(6 + 3,5) = \frac{49}{12}$.

9.36 (B) $\frac{31}{70}$

Có $\binom{8}{4} = 70$ cách chia đồng khả năng. Tổng tất cả là 36. Đổi vai Lan và Minh là một phép ghép đôi các cách chia, nên $P(\text{Lan lớn hơn}) = P(\text{Minh lớn hơn})$; chỉ cần đếm số trường hợp **hoà**: Lan có tổng 18.

Bộ 4 số có tổng 18 chứa số 8: ba số còn lại tổng 10 từ $\{1, \dots, 7\}$: $\{1, 2, 7\}$, $\{1, 3, 6\}$, $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 3, 5\}$ — 4 bộ. Bộ không chứa 8 là phần bù của một bộ chứa 8 (cũng tổng 18) — thêm 4 bộ. Có 8 trường hợp hoà.

$$P = \frac{70-8}{2 \cdot 70} = \frac{31}{70}. \text{ Đáp án (B). Bấy: trả lời } \frac{1}{2} \text{ mà quên hoà.}$$

Chapter 10 — Angles, Triangles & Polygons

10.1 (B)	10.2 (C)	10.3 (B)	10.4 (C)	10.5 (D)	10.6 (E)
10.7 (D)	10.8 (D)	10.9 (E)	10.10 (A)	10.11 (A)	10.12 (B)
10.13 (B)	10.14 (C)	10.15 (A)	10.16 (D)	10.17 (A)	10.18 (B)
10.19 (C)	10.20 (D)	10.21 (C)	10.22 (D)	10.23 (A)	10.24 (E)
10.25 (B)	10.26 (E)	10.27 (C)	10.28 (A)	10.29 (D)	10.30 (B)
10.31 (B)	10.32 (D)	10.33 (A)	10.34 (E)	10.35 (E)	10.36 (C)

10.1 (B) 55

Góc rẽ ở mỗi góc chính là **góc ngoài** của đa giác. Đi hết một vòng và quay về hướng ban đầu, Lan đã quay đúng 360° .

Sáu góc đã biết có tổng $40 + 55 + 60 + 35 + 70 + 45 = 305$, nên góc rẽ thứ bảy là $360 - 305 = 55^\circ$. Đáp án (B).

Bấy: 125° là góc *trong* tại góc đó, không phải góc rẽ.

10.2 (C) 15

Chia 180° thành $2 + 3 + 7 = 12$ phần bằng nhau, mỗi phần 15° . Góc lớn nhất là $7 \cdot 15 = 105^\circ$, lớn hơn góc vuông $105 - 90 = 15^\circ$. Đáp án (C). (Đây là tam giác tù.)

10.3 (B) 135

Số đường chéo $\frac{n(n-3)}{2} = 20$, tức $n(n-3) = 40 = 8 \cdot 5$, nên $n = 8$ (bát giác).

Góc ngoài $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$, góc trong $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$. Đáp án (B).

10.4 (C) 3

Bất đẳng thức tam giác: $13 - 6 < c < 13 + 6$, tức $7 < c < 19$. Các số nguyên tố trong khoảng này: 11, 13, 17 — có 3 giá trị. Đáp án (C).

Bấy: lấy cả hai đầu mút 7 và 19 (cũng là số nguyên tố) sẽ ra 5; với $c = 7$ hoặc $c = 19$ tam giác bị bẹp.

10.5 (D) 75

Góc so le trong: $\angle PQR = 48^\circ$ (bằng góc giữa ℓ và PQ). Góc kề bù tại R : $\angle PRQ = 180^\circ - 123^\circ = 57^\circ$.

Tổng ba góc của tam giác PQR : $x = 180 - 48 - 57 = 75$. Đáp án (D).

Cách nhanh hơn: góc ngoài 123° tại R bằng tổng hai góc trong không kề: $x + 48 = 123$.

10.6 (E) 6, 7, 12

Chỉ cần so tổng hai số nhỏ với số lớn nhất: $2 + 3 = 5$ (bằng, không được), $3 + 4 < 8$, $4 + 5 < 10$, $5 + 6 < 12$, còn $6 + 7 = 13 > 12$. Đáp án (E).

Lưu ý (A): tổng bằng cạnh lớn nhất cho ba điểm thẳng hàng — không phải tam giác.

10.7 (D) 90

Định lý góc ngoài: $5x = (2x + 8) + (x + 28) = 3x + 36$, nên $x = 18$.

Các góc trong: $\angle A = 44^\circ$, $\angle B = 46^\circ$, $\angle C = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Góc lớn nhất là 90° — tam giác vuông tại C . Đáp án (D).

10.8 (D) 102

Các góc tại O : tam giác đều 60° , hình vuông 90° , ngũ giác đều $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$. Quanh một điểm có 360° : $x = 360 - 60 - 90 - 108 = 102$. Đáp án (D).

10.9 (E) 64

Đường chéo hình chữ nhật bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm, nên $OA = OB$: tam giác OAB cân tại O , $\angle OBA = \angle OAB = 32^\circ$.

$\angle AOB = 180^\circ - 64^\circ = 116^\circ$, nên góc nhọn giữa hai đường chéo là $180^\circ - 116^\circ = 64^\circ$ (cũng bằng $2 \cdot 32^\circ$, theo định lý góc ngoài). Đáp án (E).

10.10 (A) 45

Đi từ Q tới P : sang trái 3, lên 1. Đi từ Q tới R : sang phải 1, lên 3. Hai tam giác vuông nhỏ (cạnh góc vuông 1 và 3) bằng nhau (c.g.c), và hai góc nhọn của chúng ở Q bù đắp nhau thành 90° , nên $QP = QR$ và $\angle PQR = 90^\circ$.

Tam giác PQR vuông cân tại Q , nên $\angle QPR = 45^\circ$. Đáp án (A).

10.11 (A) 80

$\angle A = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$. Gấp giấy là phép đối xứng qua DE , nên $\angle ADE = \angle A'DE$ và $\angle AED = \angle A'ED$.

Tại D : $\angle ADA' = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$, nên $\angle ADE = 70^\circ$. Tam giác ADE : $\angle AED = 180^\circ - 60^\circ - 70^\circ = 50^\circ$.

Vậy $\angle AEA' = 100^\circ$ và $\angle CEA' = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$. Đáp án (A).

Kiểm tra tại A' : $\angle BA'D = 180 - 70 - 40 = 70$, $\angle DA'E = 60$, $\angle EA'C = 180 - 50 - 80 = 50$; tổng 180. ✓

10.12 (B) 4

Hai cạnh còn lại $a \leq b$ có tổng $15 - 7 = 8$: các cặp $(1, 7)$, $(2, 6)$, $(3, 5)$, $(4, 4)$.

Kiểm tra bất đẳng thức tam giác (tổng hai cạnh nhỏ lớn hơn cạnh lớn nhất): $(1, 7, 7)$: $1 + 7 > 7$ ✓; $(2, 6, 7)$: $8 > 7$ ✓; $(3, 5, 7)$: $8 > 7$ ✓; $(4, 4, 7)$: $8 > 7$ ✓. Có 4 tam giác. Đáp án (B).

Bẫy: bỏ sót $(1, 7, 7)$ vì nghĩ cạnh 1 “quá ngắn” — nó vẫn hợp lệ vì hai cạnh còn lại bằng nhau.

10.13 (B) 13

Bất đẳng thức tam giác: $15 - 8 < c < 15 + 8$, tức $8 \leq c \leq 22$: có 15 số nguyên.

Tam giác **thường** (scalene) có ba cạnh khác nhau, nên loại $c = 8$ và $c = 15$. Còn 13 giá trị. Đáp án (B).

Bẫy: quên chữ “scalene” ra 15.

10.14 (C) 42

Vì $AD \parallel BC$, góc so le trong cho $\angle APB = \angle PAD$. Mà AP là phân giác nên $\angle PAD = \angle PAB$. Vậy $\angle BAP = \angle BPA$: tam giác ABP cân tại B , $BP = AB = 7$.

Tương tự tam giác DCP cân tại C : $CP = CD = 7$. Do đó $BC = 14$ và chu vi bằng $2(7 + 14) = 42$. Đáp án (C).

Nhận xét thêm: $\angle APD = 90^\circ$ (hai phân giác của hai góc trong cùng phía).

10.15 (A) 6

Đường chéo AC là cạnh chung của hai tam giác ABC và ACD .

Tam giác ABC : $9 - 4 < AC < 9 + 4$, tức $5 < AC < 13$. Tam giác ACD : $7 - 5 < AC < 7 + 5$, tức $2 < AC < 12$.

Cả hai: $5 < AC < 12$, nên $AC \in \{6, 7, 8, 9, 10, 11\}$ — 6 giá trị. Đáp án (A).

Bẫy: chỉ dùng một tam giác ra 7 hoặc 9.

10.16 (D) 18

Tại B và C , các góc $\angle PBC$ và $\angle PCB$ là **góc ngoài** của đa giác đều, mỗi góc bằng $\frac{360^\circ}{n}$.

Tam giác PBC : $140 + 2 \cdot \frac{360}{n} = 180$, nên $\frac{360}{n} = 20$ và $n = 18$. Đáp án (D).

Bẫy: chỉ trừ một góc ngoài ($180 - \frac{360}{n} = 140$) ra $n = 9$.

10.17 (A) 18

Gọi góc nhỏ nhất a , công sai d . Góc lớn nhất $a + 4d = 2a$, nên $a = 4d$.

Tổng các góc ngũ giác: $5a + 10d = 540$, tức $20d + 10d = 540$, $d = 18$. Các góc là 72, 90, 108, 126, 144 (đều nhỏ hơn 180° , ngũ giác lồi được). Đáp án (A). Để ý góc giữa luôn bằng trung bình 108° .

10.18 (B) 7

Tổng góc trong của đa giác 18 cạnh (kể cả lõm) là $16 \cdot 180 = 2880^\circ$. Gọi b là số góc 270° :

$90(18 - b) + 270b = 2880 \Rightarrow 1620 + 180b = 2880 \Rightarrow b = 7$. Đáp án (B).

Kiểm tra với hình chữ thập 12 cạnh: $b = \frac{12-4}{2} = 4$ góc lõm. Tổng quát: số góc 270° luôn ít hơn số góc 90° đúng 4.

10.19 (C) 120

Xét tứ giác $AEPD$ (phần chung của hai hình vuông). Tại A : $\angle EAD = \angle BAD - \angle BAE = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. Tại E và D : hai góc vuông của hai hình vuông.

Tổng bốn góc tứ giác là 360° : $\angle DPE = 360^\circ - 60^\circ - 90^\circ - 90^\circ = 120^\circ$. Đáp án (C).

Tổng quát: quay một góc θ (với $0^\circ < \theta < 90^\circ$) thì $\angle DPE = 180^\circ - \theta$.

10.20 (D) 15

Bất đẳng thức đa giác (mở rộng của bất đẳng thức tam giác): các đoạn ghép được đa giác khi và chỉ khi đoạn dài nhất **ngắn hơn tổng các đoạn còn lại**.

Nếu x dài nhất: $x < 2 + 3 + 5 + 6 = 16$. Nếu 6 dài nhất: $6 < 2 + 3 + 5 + x$, luôn đúng. Vậy $x = 1, 2, \dots, 15$: 15 giá trị. Đáp án (D).

Bẫy: dùng “hiệu” như với tam giác ($x > 6 - 5\dots$) — với đa giác nhiều cạnh, chỉ cần điều kiện cạnh lớn nhất.

10.21 (C) 42

Đặt $\angle XAP = \alpha$, $\angle YBP = \beta$. Theo quy tắc đường gấp khúc (mục 10.1) cho điểm P : $\alpha + \beta = \angle APB = 84^\circ$.

Điểm Q cũng nằm giữa hai đường song song, với $\angle XAQ = \frac{\alpha}{2}$ và $\angle YBQ = \frac{\beta}{2}$. Áp dụng quy tắc một lần nữa: $\angle AQB = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{84^\circ}{2} = 42^\circ$. Đáp án (C).

Không cần biết riêng α và β — chỉ cần tổng. Bẫy: 84 (quên chia đôi).

10.22 (D) 45

$DA = DC = DE$, nên có hai tam giác cân chung đỉnh D .

Tam giác DCE : góc ở đỉnh 30° , nên $\angle DEC = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Tam giác DAE : $\angle ADE = 90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$, nên $\angle DEA = \frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$.

$\angle AEC = \angle DEC - \angle DEA = 75^\circ - 30^\circ = 45^\circ$. Đáp án (D). Thử với góc $\angle CDE$ khác, đáp số vẫn là 45° (bằng nửa góc ADC).

10.23 (A) 105

Trong lục giác đều, tam giác BCD cân tại C với góc đỉnh 120° , nên $\angle CBD = 30^\circ$ và $\angle ABD = 120^\circ - 30^\circ = 90^\circ$. Vậy $BD \perp AB$. Mà $BG \perp AB$, nên G nằm trên đường chéo BD .

$BG = BA = BC$ và $\angle GBC = 30^\circ$: tam giác BGC cân tại B , $\angle BGC = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$.

Vì B, G, D thẳng hàng: $\angle CGD = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ$. Đáp án (A).

10.24 (E) 9

Góc ngoài $\frac{360}{n}$ là số nguyên khi n là ước của 360 (Chương 5).

Số đường chéo $\frac{n(n-3)}{2} \leq 100$: $n = 15$ cho 90, $n = 16$ cho 104; nên $n \leq 15$.

Ước của 360 từ 3 đến 15: 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15 — có 9 giá trị. Đáp án (E).

Bảy: chỉ thử các số chẵn, quên 9 và 15, ra 7; bỏ $n = 3$ vì tam giác “không có đường chéo” (thật ra $0 \leq 100$ vẫn thỏa) ra 8.

10.25 (B) 10

Gọi cạnh ngắn nhất a , dài nhất $3a$, cạnh giữa b với $a \leq b \leq 3a$. Bất đẳng thức tam giác: $a + b > 3a$, tức $b > 2a$. Vậy $b \in \{2a + 1, \dots, 3a\}$: đúng a lựa chọn.

Chu vi $4a + b \leq 30$: $a = 1$: $b = 3$ (chu vi 7); $a = 2$: $b = 5, 6$; $a = 3$: $b = 7, 8, 9$; $a = 4$: $b = 9, \dots, 12$ (chu vi đến 28); $a = 5$: chu vi ít nhất $20 + 11 = 31$ — loại.

Tổng $1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Đáp án (B).

10.26 (E) 150

$BA = BC = BE$ và $CB = CE = CD$ — hai bộ ba đoạn bằng nhau.

Tam giác ABE cân tại B : $\angle ABE = 104^\circ - 60^\circ = 44^\circ$, nên $\angle AEB = \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} = 68^\circ$.

$\angle BCD = 180^\circ - 104^\circ = 76^\circ$, nên $\angle ECD = 76^\circ - 60^\circ = 16^\circ$; tam giác CED cân tại C : $\angle CED = \frac{180^\circ - 16^\circ}{2} = 82^\circ$.

Quanh E : $\angle AED = 360^\circ - 68^\circ - 60^\circ - 82^\circ = 150^\circ$. Đáp án (E). (Với mọi góc $\angle ABC$ giữa 60° và 120° , đáp số vẫn là 150° .)

10.27 (C) 45

Ý tưởng: **ghép hai góc thành một góc** bằng cách lật một góc xuống dưới trục. Lấy $A' = (4, -1)$ đối xứng với A qua OE : $\angle A'OE = \angle AOE$, nên tổng cần tìm là $\angle A'OB$.

Từ A' đi tới O : sang trái 4, lên 1. Từ A' đi tới B : sang phải 1, lên 4. Hai tam giác vuông nhỏ có cạnh góc vuông 1 và 4 bằng nhau và “xoay” 90° so với nhau, nên $A'O = A'B$ và $\angle OA'B = 90^\circ$.

Tam giác $OA'B$ vuông cân tại A' , vậy $\angle A'OB = 45^\circ$. Đáp án (C).

Không thể đo từng góc (không phải góc “đẹp”), nhưng tổng của chúng thì đẹp — dấu hiệu nên tìm một tam giác vuông cân trên lưới.

10.28 (A) 30

Lấy M là trung điểm của AB . Khi đó $AM = \frac{1}{2}AB = AC$, và $\angle MAC = 60^\circ$, nên tam giác AMC cân có góc ở đỉnh 60° : nó là tam giác **đều**. Suy ra $MC = MA = MB$.

Điểm M trên cạnh AB cách đều ba đỉnh, nên (như Ví dụ ở mục 10.2) $\angle ACB = 90^\circ$. Hoặc trực tiếp: tam giác MBC cân tại M , góc ngoài $\angle AMC = 60^\circ = 2\angle MBC$, nên $\angle ABC = 30^\circ$. Đáp án (A).

Đây là tam giác “nửa tam giác đều” $30^\circ-60^\circ-90^\circ$: cạnh đối diện góc 30° bằng nửa cạnh huyền.

10.29 (D) 21

Lớn nhất: đường gấp khúc $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E$ dài $12 + 5 + 3 + 2 = 22$, và đoạn thẳng AE không dài hơn nó (bất đẳng thức tam giác áp dụng nhiều lần). $AE = 22$ khi năm điểm thẳng hàng theo đúng thứ tự.

Nhỏ nhất: E cách B không quá $5 + 3 + 2 = 10$, nên $AE \geq AB - BE \geq 12 - 10 = 2$; đạt khi C, D, E nằm trên đoạn BA , gấp ngược về phía A .

Khi “uốn” dần đường gấp khúc từ trạng thái này sang trạng thái kia, AE thay đổi liên tục nên nhận mọi giá trị từ 2 tới 22. Số giá trị nguyên: $22 - 2 + 1 = 21$. Đáp án (D).

Bấy: nghĩ AE có thể bằng 0 (chỉ đúng khi đoạn dài nhất không vượt tổng các đoạn còn lại — ở đây $12 > 10$) ra 23.

10.30 (B) 18

Bất đẳng thức tứ giác: bốn đoạn ghép được một tứ giác khi và chỉ khi đoạn dài nhất ngắn hơn tổng ba đoạn còn lại (nếu không, ba đoạn kia duỗi thẳng cũng không với tới). Với tổng 16: đoạn dài nhất $c < 16 - c$, tức $c \leq 7$.

Đếm bộ $a \leq b \leq d \leq c$ theo c (ba số còn lại có tổng $16 - c$, mỗi số $\leq c$):

$c = 7$: tổng 9: $(1, 1, 7), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 4, 4), (2, 2, 5), (2, 3, 4), (3, 3, 3)$ — 7 bộ. $c = 6$: tổng 10, mỗi số ≤ 6 :

$(1, 3, 6), (1, 4, 5), (2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (3, 3, 4)$ — 6 bộ. $c = 5$: tổng 11, mỗi số ≤ 5 : $(1, 5, 5), (2, 4, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 4)$ — 4 bộ. $c = 4$: $(4, 4, 4)$ — 1 bộ.

Tổng $7 + 6 + 4 + 1 = 18$. Đáp án (B). (Không có điều kiện tứ giác thì có 34 bộ.)

10.31 (B) 6

Đi từ A tới B : sang phải 4, lên 2. “Xoay” bước đi này 90° được bước sang trái 2, lên 4 (hoặc ngược lại): hai tam giác vuông nhỏ bằng nhau, nên đoạn mới bằng AB và vuông góc với AB .

Góc vuông tại A : $C = (-2, 4)$ hoặc $(2, -4)$. **Góc vuông tại B :** $C = (4 - 2, 2 + 4) = (2, 6)$ hoặc $(6, -2)$.

Góc vuông tại C (AB là cạnh huyền): C cách trung điểm $(2, 1)$ một nửa bước xoay, tức $(2, 1) \pm (-1, 2)$: $C = (1, 3)$ hoặc $(3, -1)$ — đều là điểm nguyên (kiểm tra: từ $C = (1, 3)$ tới A là trái 1, xuống 3; tới B là phải 3, xuống 1).

Tổng 6 điểm. Đáp án (B). Bấy: quên trường hợp AB là cạnh huyền ra 4.

10.32 (D) 8

Hai tam giác bằng nhau khi ba cạnh bằng nhau (c.c.c), nên chỉ cần đếm các bộ ba độ dài khác nhau. Trên lưới 3×3 , mỗi đoạn được xác định bởi “độ lệch” ngang–dọc (p, q) với $0 \leq p \leq q \leq 2$: $(0, 1), (1, 1), (0, 2), (1, 2), (2, 2)$ — năm loại đoạn.

Liệt kê theo bộ ba loại cạnh: $(0, 1), (0, 1), (1, 1)$ — vuông cân nhỏ; $(0, 1), (0, 2), (1, 2)$ — vuông 1×2 ; $(0, 2), (0, 2), (2, 2)$ — vuông cân lớn; $(1, 1), (1, 1), (0, 2)$ — vuông cân nằm nghiêng; $(0, 1), (1, 1), (1, 2)$; $(0, 1), (1, 2), (2, 2)$; $(1, 1), (1, 2), (1, 2)$ (hình trong đề); $(0, 2), (1, 2), (1, 2)$.

Có 8 dạng. Đáp án (D). Kiểm tra từng dạng bằng cách đặt đỉnh ở $(0, 0)$ giúp không bỏ sót.

10.33 (A) 600

Mỗi lần lẩn, lục giác quay quanh một đỉnh của hình vuông. Ở đỉnh đó có ba góc kề nhau: góc vuông của hình vuông 90° , góc trong của lục giác 120° , và khoảng mà lục giác phải quét qua. Lúc bắt đầu, cạnh lục giác nằm dọc cạnh này; lúc kết thúc, cạnh kế tiếp của lục giác nằm dọc cạnh kia. Góc quay bằng $360^\circ - 90^\circ - 120^\circ = 150^\circ$.

Vì hai hình cùng độ dài cạnh, mỗi cạnh hình vuông vừa đúng một cạnh lục giác, nên sau mỗi cạnh lại có một lần quay. Đi hết 4 đỉnh của hình vuông để trở lại cạnh AB : $4 \cdot 150^\circ = 600^\circ$. Đáp án (A).

Bấy: quên trừ góc vuông của hình vuông, lấy mỗi lần quay $360^\circ - 120^\circ = 240^\circ$, ra $4 \cdot 240 = 960$ (E).

10.34 (E) 72

Đặt $\angle ACB = x$, thì $\angle ABC = 2x$ và phân giác cho $\angle ABD = \angle DBC = x$.

Tam giác DBC có $\angle DBC = \angle DCB = x$, nên cân tại D : $DB = DC$. Kết hợp $AB = CD$: $AB = DB$, tam giác ABD cân tại B .

Góc ngoài tại D của tam giác DBC : $\angle ADB = x + x = 2x$. Tam giác ABD cân tại B nên $\angle BAD = \angle ADB = 2x$.

Tổng ba góc tam giác ABC : $2x + 2x + x = 180^\circ$, $x = 36^\circ$, nên $\angle BAC = 72^\circ$. Đáp án (E).

Bấy: dừng ở $x = 36$ (đó là $\angle C$).

10.35 (E) 7

Chặn trên. Tổng góc trong là $8 \cdot 180^\circ = 1440^\circ$. Nếu có k góc vuông, $10 - k$ góc còn lại có tổng $1440 - 90k$, mà mỗi góc trong nhỏ hơn 360° : $1440 - 90k < 360(10 - k)$, tức $270k < 2160$, $k < 8$. Vậy $k \leq 7$.

Đạt được. Đa giác “bậc thang” với các đỉnh $(0, 0)$, $(4, 0)$, $(4, 1)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(2, 2)$, $(2, 3)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(0, 4)$ có 10 cạnh, 7 góc 90° và 3 góc 270° (kiểm tra: $7 \cdot 90 + 3 \cdot 270 = 1440$).

Đáp số 7. Đáp án (E). Bấy: nghĩ như đa giác lồi (tổng góc ngoài 360° cho tối đa 4 góc vuông).

10.36 (C) 40

$\angle DAF = 90^\circ - 45^\circ - 20^\circ = 25^\circ$. Tính trực tiếp $\angle CEF$ cần lượng giác, nên ta **quay**.

Quay tam giác ADF quanh A một góc 90° sao cho D tới B ; F tới điểm F' trên đường thẳng CB , phía ngoài B (vì $\angle ABF' = \angle ADF = 90^\circ$). Khi đó $AF' = AF$ và $\angle F'AE = \angle F'AB + \angle BAE = 25^\circ + 20^\circ = 45^\circ = \angle FAE$.

Hai tam giác AEF' và AEF có $AF' = AF$, chung AE , góc xen giữa bằng nhau: bằng nhau (c.g.c). Do đó $\angle AEF = \angle AEF' = \angle AEB = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ$.

Tại E trên đường thẳng BC : $\angle CEF = 180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$. Đáp án (C).

Hệ quả đẹp của cùng phép quay: $EF = BE + DF$, nên chu vi tam giác CEF luôn bằng hai lần cạnh hình vuông.

Chapter 11 — Area, Perimeter & the Pythagorean Theorem

11.1 (B)	11.2 (E)	11.3 (B)	11.4 (D)	11.5 (B)	11.6 (C)
11.7 (B)	11.8 (A)	11.9 (C)	11.10 (A)	11.11 (D)	11.12 (E)
11.13 (C)	11.14 (A)	11.15 (E)	11.16 (B)	11.17 (D)	11.18 (D)
11.19 (E)	11.20 (B)	11.21 (C)	11.22 (A)	11.23 (C)	11.24 (B)
11.25 14	11.26 4	11.27 (A)	11.28 (C)	11.29 (D)	11.30 (E)
11.31 (B)	11.32 (C)	11.33 (C)	11.34 9	11.35 110	11.36 53

11.1 (B) 10

Đóng khung: hình vuông nghiêng nằm trong khung 4×4 (diện tích 16). Bốn góc là bốn tam giác vuông cạnh 3 và 1, mỗi cái $\frac{3}{2}$. Diện tích $= 16 - 4 \cdot \frac{3}{2} = 10$. Đáp án (B).

Kiểm tra bằng Pythagoras: cạnh hình vuông là $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, bình phương lên được 10. Bấy: đếm ô “trông như” nằm trong hình ra 9; lấy cả khung ra 16.

11.2 (E) 11, 60, 61

Dùng định lý đảo: kiểm tra $a^2 + b^2 = c^2$ với c là cạnh lớn nhất.

(A) $25 + 121 = 146 \neq 144$. (B) $81 + 1521 = 1602 \neq 1600$. (C) $144 + 1156 = 1300 \neq 1296$. (D) $169 + 7056 = 7225 = 85^2 \neq 86^2$. (E) $121 + 3600 = 3721 = 61^2$. Đáp án (E).

Mẹo: với $c = b + 1$ ta có $c^2 - b^2 = b + c$, nên chỉ cần $a^2 = b + c$: $121 = 60 + 61$ — kiểm tra nhầm trong vài giây.

11.3 (B) $\frac{5}{2}$

Sau t giờ, hai quãng đường $12t$ và $16t$ là hai cạnh góc vuông; khoảng cách là cạnh huyền. Tỉ số $12 : 16 = 3 : 4$ nên cạnh huyền là $20t$ (bộ ba 3, 4, 5 nhân $4t$).

$20t = 50$ nên $t = \frac{5}{2}$ giờ. Đáp án (B).

Bấy: cộng hai vận tốc (28 km/h) như thể hai bạn đi ngược chiều trên một đường thẳng, ra $\frac{50}{28} = \frac{25}{14}$.

11.4 (D) 52

Hai mảnh chia nhau toàn bộ chu vi của hình chữ nhật ($2(10 + 6) = 32$), và **mỗi mảnh** còn có thêm đường cắt làm một phần biên. Đường cắt dài $2 + 4 + 4 = 10$ nên được cộng hai lần.

Tổng chu vi = $32 + 2 \cdot 10 = 52$. Đáp án (D).

Bấy: tưởng cắt không làm thay đổi chu vi (32), hoặc chỉ cộng đường cắt một lần (42).

11.5 (B) 96

Hạ đường vuông góc từ C xuống AB tại H : $AH = CD = 9$ nên $HB = 15 - 9 = 6$. Tam giác vuông CHB có cạnh huyền 10, cạnh 6, nên $CH = 8$ (bộ ba 6, 8, 10) — đó là chiều cao.

Diện tích $\frac{1}{2}(15 + 9) \cdot 8 = 96$. Đáp án (B).

Bấy: dùng $BC = 10$ làm chiều cao ra 120.

11.6 (C) 68

Hai đường chéo của hình thoi vuông góc và cắt nhau tại trung điểm mỗi đường, nên hình thoi gồm bốn tam giác vuông bằng nhau với hai cạnh góc vuông 8 và 15.

Cạnh hình thoi = $\sqrt{8^2 + 15^2} = 17$ (bộ ba 8, 15, 17); chu vi $4 \cdot 17 = 68$. Đáp án (C).

Bấy: dùng cả đường chéo làm cạnh góc vuông ($\sqrt{16^2 + 30^2} = 34$, chu vi 136) hoặc cộng hai đường chéo ra 46.

11.7 (B) 49

Cách 1 (trừ diện tích): hình vuông lớn có cạnh bằng cạnh huyền 13, diện tích 169. Bốn tam giác chiếm $4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 120$. Phần trống $169 - 120 = 49$.

Cách 2 (độ dài): dọc theo cạnh 12 của một tam giác, cạnh 5 của tam giác bên cạnh chiếm một đoạn; phần còn lại $12 - 5 = 7$ là cạnh lỗ vuông: $7^2 = 49$. Đáp án (B).

Hình này chính là một chứng minh của định lý Pythagoras: $c^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}ab + (b - a)^2 = a^2 + b^2$.

11.8 (A) 20

Cạnh hình vuông là 8. Hai đường chéo cắt nhau tại tâm; mỗi tam giác lớn là $\frac{1}{4}$ hình vuông: 16.

Nửa còn lại (32) gồm tam giác vừa ở góc — cạnh góc vuông 4, diện tích 8 — và phần 24 còn lại, được chia thành hình vuông nhỏ, hình bình hành và hai tam giác nhỏ. Mỗi tam giác nhỏ có cạnh góc vuông $2\sqrt{2}$ (nửa đường chéo hình vuông nhỏ), diện tích 4; hình vuông nhỏ và hình bình hành mỗi hình bằng hai tam giác nhỏ: 8.

Ba mảnh tô màu: $8 + 8 + 4 = 20$. Đáp án (A). Kiểm tra: $16 + 16 + 8 + 8 + 8 + 4 + 4 = 64$.

11.9 (C) $6\sqrt{5}$

Tam giác ADE chiếm $\frac{1}{4}$ hình vuông: $\frac{1}{4} \cdot 144 = 36$. Mà $S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE = 6 \cdot DE$, nên $DE = 6$.

$AE = \sqrt{12^2 + 6^2} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$. Đáp án (C).

Bấy: cho tam giác chiếm $\frac{1}{3}$ hình vuông (đọc “gấp 3” thành “ $\frac{1}{3}$ ”) ra $DE = 8$ và $AE = \sqrt{144 + 64} = 4\sqrt{13}$.

11.10 (A) 6

Lan đi $15 + 8 = 23$ m. Đường chéo là cạnh huyền của tam giác vuông 8, 15: $\sqrt{64 + 225} = \sqrt{289} = 17$ m.

Mình đi ngắn hơn $23 - 17 = 6$ m. Đáp án (A). Bấy: chọn quãng đường của Minh (17) hay của Lan (23) thay vì hiệu; lấy hiệu hai cạnh $15 - 8 = 7$.

11.11 (D) 20

Đặt góc vuông ở gốc, hai cạnh góc vuông dọc hai trục. Cạnh huyền là đường thẳng gồm các điểm có tổng hai khoảng cách tới hai cạnh góc vuông bằng 10 (vì tam giác vuông cân: đi ngang bao nhiêu thì hạ xuống bấy nhiêu).

Đỉnh đối diện của hình chữ nhật nằm trên cạnh huyền nên chiều dài + chiều rộng = 10, chu vi = 20 với **mọi** hình chữ nhật như vậy. Đáp án (D).

Mẹo: để nói “kích thước không cho” → đáp số không phụ thuộc kích thước; thử trường hợp đặc biệt hình vuông 5×5 : chu vi 20.

11.12 (E) 40

Hình chữ nhật mới $(a+4)(b+4) = ab + 4a + 4b + 16$. Phần tăng: $4(a+b) + 16 = 96$, nên $a+b = 20$.

Chu vi ban đầu $2(a+b) = 40$. Đáp án (E).

Nhìn bằng hình: phần thêm vào gồm hai dải rộng 4 dọc theo hai cạnh ($4a$ và $4b$) cộng ô vuông 4×4 ở góc. Bấy: dừng ở $a+b = 20$ và chọn 20.

11.13 (C) 25

Gọi khung bao của đa giác là hình chữ nhật $w \times h$. Đi một vòng quanh đa giác, các đoạn ngang phải phủ ít nhất hai lần bề rộng (một lần “đi”, một lần “về”), các đoạn dọc phủ ít nhất hai lần chiều cao. Vậy $20 \geq 2(w+h)$, tức $w+h \leq 10$.

Đa giác nằm trong khung nên diện tích $\leq wh$. Với $w+h \leq 10$, tích wh lớn nhất khi $w=h=5$: 25. Hình vuông 5×5 đạt được. Đáp án (C).

Bấy: nghĩ chu vi 20 thì diện tích 20; hoặc chọn hình chữ nhật 4×6 (24).

11.14 (A) 30

Cạnh lớn nhất $x+8$ là cạnh huyền: $x^2 + (x+7)^2 = (x+8)^2$.

Khai triển: $2x^2 + 14x + 49 = x^2 + 16x + 64$, tức $x^2 - 2x - 15 = 0$, $(x-5)(x+3) = 0$, nên $x = 5$. Các cạnh 5, 12, 13.

Diện tích $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30$. Đáp án (A). Bấy: quên $\frac{1}{2}$ ra 60; coi cạnh huyền 13 là cạnh góc vuông ra $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 13 = 78$.

11.15 (E) 17

Tam giác PAB và PCD có đáy $AB = CD$ và hai đường cao cộng lại bằng AD : $S_{PAB} + S_{PCD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD$ — một nửa hình chữ nhật. Tương tự $S_{PBC} + S_{PDA}$ cũng bằng một nửa hình chữ nhật.

Vậy $13 + 22 = 18 + S_{PDA}$, nên $S_{PDA} = 17$. Đáp án (E).

Bấy: ghép nhầm cặp, lấy $35 - 22 = 13$ (trừ S_{PCD} thay vì S_{PBC}). Chú ý hai tam giác đối diện **không** bằng nhau ($13 \neq 22$) — chỉ **tổng** của chúng cố định.

11.16 (B) $\frac{15}{2}$

Định lý Pick: $S = I + \frac{B}{2} - 1$. Trên biên chỉ có ba đỉnh, nên $B = 3$; bên trong $I = 7$.

$S = 7 + \frac{3}{2} - 1 = \frac{15}{2}$. Đáp án (B).

Bấy: quên trừ 1 ra $\frac{17}{2}$; nghĩ diện tích bằng số điểm bên trong ra 7.

11.17 (D) $72\sqrt{3}$

Lục giác đều gồm 6 tam giác đều cạnh s quanh tâm. Khoảng cách giữa hai cạnh đối diện bằng **hai lần** chiều cao của một tam giác đều: chiều cao = 6.

Tam giác $30^\circ-60^\circ-90^\circ$: chiều cao $\frac{\sqrt{3}}{2}s = 6$, nên $s = \frac{12}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}$.

Mỗi tam giác đều có diện tích $\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 6 = 12\sqrt{3}$; cả lục giác $6 \cdot 12\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$. Đáp án (D).

Bấy: tưởng cạnh bằng 6 (nhầm chiều cao với cạnh) ra $54\sqrt{3}$.

11.18 (D) 384

A và C đều cách đều B và D , nên nằm trên đường trung trực của BD , đường này vuông góc với BD tại trung điểm M ($MB = 12$).

$$AM = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5 \text{ và } CM = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16.$$

- A, C khác phía BD (hình lõm, “cánh diều”): $AC = 21$, diện tích $\frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 21 = 252$.
- A, C cùng phía (hình lõm, “mũi tên”): diện tích $= S_{BCD} - S_{BAD} = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 16 - \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 5 = 192 - 60 = 132$.

Tổng $252 + 132 = 384$. Đáp án (D). Bẫy: chỉ xét hình lõm ra 252.

11.19 (E) 46

Liệt kê cặp cạnh có tích 120: $(1, 120), (2, 60), (3, 40), (4, 30), (5, 24), (6, 20), (8, 15), (10, 12)$. Cần $a^2 + b^2$ là số chính phương. Chỉ có $(8, 15)$: $64 + 225 = 289 = 17^2$. (Thử nhanh: $10^2 + 12^2 = 244, 5^2 + 24^2 = 601, 6^2 + 20^2 = 436$ đều không chính phương.)

Chu vi $2(8 + 15) = 46$. Đáp án (E). Bẫy: chọn hình “gần vuông nhất” 10×12 ra 44; quên nhân 2 ra 23; trả lời đường chéo 17 hay gấp đôi nó (34).

11.20 (B) $\frac{3}{8}$

Đặt $A = (0, 0), B = (8, 0), C = (8, 6), P = (x, y)$. Tam giác PAB có đáy 8, cao y : $4y < 12 \iff y < 3$.

Tam giác PBC có đáy 6, cao là khoảng cách tới BC , tức $8 - x$: $3(8 - x) < 18 \iff x > 2$.

Miền thoả mãn là hình chữ nhật 6×3 (với $2 < x < 8, 0 < y < 3$), diện tích 18 trên tổng 48: xác suất $\frac{18}{48} = \frac{3}{8}$. Đáp án (B).

Ý tưởng: điều kiện về diện tích tam giác có một đáy cố định chỉ là điều kiện về **khoảng cách tới một cạnh**.

11.21 (C) 18

Trừ ba tam giác ở “góc”:

- ADE : đáy $AE = \frac{1}{2}AB$, chiều cao bằng chiều cao hình bình hành ứng với đáy AB : $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 = 12$.
- FCD : tương tự với đáy $FC = \frac{1}{2}BC$: 12.
- EBF : nằm trong tam giác ABC (diện tích 24); $EB = \frac{1}{2}AB$ và $BF = \frac{1}{2}BC$ nên $S_{EBF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 = 6$ (hai lần áp dụng “chung đường cao”: $S_{EBC} = 12$, rồi $S_{EBF} = \frac{1}{2}S_{EBC}$).

$$S_{DEF} = 48 - 12 - 12 - 6 = 18. \text{ Đáp án (C).}$$

Bẫy: tưởng DEF là một nửa hình (24) hay một phần tư (12).

11.22 (A) $24\sqrt{3} - 36$

Gọi cạnh hình vuông là s . Hai tam giác nhỏ ở hai bên đáy là tam giác $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ có cạnh góc vuông đứng s (đối diện góc 60°), nên cạnh góc vuông nằm trên đáy là $\frac{s}{\sqrt{3}}$.

$$\text{Đáy: } \frac{s}{\sqrt{3}} + s + \frac{s}{\sqrt{3}} = 12, \text{ tức } s \left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}}\right) = 12, s = \frac{12\sqrt{3}}{\sqrt{3} + 2}.$$

Trục căn: nhân tử và mẫu với $2 - \sqrt{3}$ (vì $(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3}) = 1$): $s = 12\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) = 24\sqrt{3} - 36 \approx 5,57$. Đáp án (A).

Ước lượng giúp loại nhanh: thử $s = 6$ thì $6 + 2 \cdot \frac{6}{\sqrt{3}} \approx 12,9 > 12$ — quá lớn, nên $s < 6$ và chỉ còn (A). Bẫy: lấy nửa cạnh tam giác (6) hoặc cả chiều cao $6\sqrt{3}$ làm cạnh hình vuông.

11.23 (C) 10

Đặt $BC = a, AC = b$. Tam giác vuông ACM : $b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 52$. Tam giác vuông BCN : $a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 73$.

Không cần tìm a, b : cộng hai phương trình, $\frac{5}{4}(a^2 + b^2) = 125$, nên $AB^2 = a^2 + b^2 = 100$ và $AB = 10$. Đáp án (C).

(Nếu muốn: $a = 8, b = 6$.) Bẫy: cộng thẳng $52 + 73 = 125$ rồi khai căn ra $5\sqrt{5}$.

11.24 (B) $4\sqrt{5}$

Đặt con đường là trục ngang, chân của A ở 0, chân của B ở 12; P ở vị trí x .

$PA^2 = x^2 + 4^2$, $PB^2 = (12 - x)^2 + 8^2$. Cho bằng nhau: $x^2 + 16 = 144 - 24x + x^2 + 64$, nên $24x = 192$, $x = 8$.

$PA = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$. Đáp án (B).

Kiểm tra: $PB = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80}$ — đúng. Bấy: đặt P ở giữa hai chân ($x = 6$) thì $PA \neq PB$.

11.25 14

Đoạn nối hai điểm cách nhau a cột và b hàng ($0 \leq a \leq b \leq 4$, không đồng thời bằng 0) có độ dài $\sqrt{a^2 + b^2}$. Có $15 - 1 = 14$ cặp (a, b) : $\binom{5}{2}$ cặp khác nhau cộng 5 cặp $a = b$, bỏ cặp $(0, 0)$.

Các giá trị $a^2 + b^2$: 1, 4, 9, 16 (với $a = 0$); 2, 5, 10, 17; 8, 13, 20; 18, 25; 32. Mười bốn số này đều khác nhau — chú ý $25 = 3^2 + 4^2$ có thể trùng với $0^2 + 5^2$, nhưng lưới chỉ rộng 4 nên không có đoạn dài 5 nằm ngang. Đáp số: 14.

Trên lưới lớn hơn cần cẩn thận: ví dụ $5^2 + 5^2 = 1^2 + 7^2 = 50$ cho hai đoạn khác “dạng” nhưng cùng độ dài.

11.26 4

Hai cạnh $a \leq b$ có $a + b = 15$, nên $a \in \{1, 2, \dots, 7\}$. Đường chéo ngắn hơn 12 nghĩa là $a^2 + b^2 < 144$.

Lập bảng $a^2 + b^2$: (1, 14): 197; (2, 13): 173; (3, 12): 153; (4, 11): 137; (5, 10): 125; (6, 9): 117; (7, 8): 113.

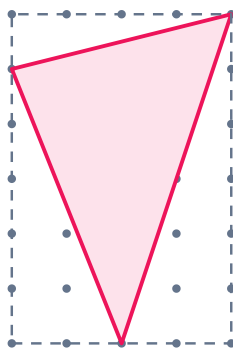
Bốn hình cuối thoả mãn. Đáp số: 4.

Nhận xét: với chu vi cố định, $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$ càng nhỏ khi ab càng lớn — hình càng “vuông” thì đường chéo càng ngắn, nên các hình thoả mãn là một dãy liên ở cuối bảng.

11.27 (A) 11

Ý tưởng: mỗi độ dài $\sqrt{a^2 + b^2}$ là cạnh huyền của một tam giác vuông có cạnh nằm theo lưới. $17 = 4^2 + 1^2$, $29 = 2^2 + 5^2$, $40 = 2^2 + 6^2$. Thử ghép ba “bước” sao cho chúng khép kín: $(4, 1) + (-2, -6) + (-2, 5) = (0, 0)$ — được!

Vậy tam giác có thể đặt lên lưới với các đỉnh $(0, 5)$, $(4, 6)$, $(2, 0)$ (hình). Đóng khung $4 \times 6 = 24$, trừ ba tam giác vuông $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1 = 2$, $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 6 = 6$, $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5 = 5$: diện tích $24 - 13 = 11$. Đáp án (A).



Không cần công thức Heron (ngoài chương trình lớp 8): cạnh có dạng căn của tổng hai bình phương là “lời mời” đặt hình lên lưới.

11.28 (C) 39

Tìm BC . $ABCD$ là hình thang vuông ($AB \parallel CD$ vì cùng vuông góc với BC). Hạ $AH \perp CD$: $DH = 9 - 4 = 5$, $AH = BC = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$.

Tìm E . Đặt $BE = x$, $EC = 12 - x$. $AE^2 = 16 + x^2$, $DE^2 = 81 + (12 - x)^2$, và tam giác AED vuông tại E : $AE^2 + DE^2 = 169$. Rút gọn: $2x^2 - 24x + 72 = 0$, tức $(x - 6)^2 = 0$, $x = 6$ (chỉ một vị trí).

Diện tích. Hình thang $\frac{1}{2}(4 + 9) \cdot 12 = 78$; trừ $S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$ và $S_{ECD} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 = 27$: $S_{AED} = 78 - 12 - 27 = 39$. Đáp án (C).

Kiểm tra: $AE = \sqrt{52}$, $DE = \sqrt{117}$, $\frac{1}{2}\sqrt{52 \cdot 117} = \frac{1}{2} \cdot 78 = 39$. Bấy: chọn diện tích cả hình thang 78.

11.29 (D) $\frac{14}{5}$

$AB = 10$. Hạ đường cao CH xuống AB : $CH = \frac{6 \cdot 8}{10} = \frac{24}{5}$ (đổi đáy qua diện tích 24).

Tam giác vuông CHB : $BH = \sqrt{6^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{900 - 576}{25}} = \frac{18}{5}$.

Tam giác CBD cân tại C nên đường cao CH cũng là trung tuyến: $BD = 2 \cdot \frac{18}{5} = \frac{36}{5}$. Vậy $AD = 10 - \frac{36}{5} = \frac{14}{5}$. Đáp án (D).

Bấy: dừng ở $AH = 10 - \frac{18}{5} = \frac{32}{5}$ — đó là khoảng cách từ A tới chân đường cao, chưa phải tới D .

11.30 (E) $\frac{73}{2}$

Hai tam giác vuông ABE (vuông tại B) và ECF (vuông tại C): vì $\angle AEB + \angle FEC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$ nên $\angle BAE = \angle CEF$. Hai tam giác vuông có cạnh huyền bằng nhau ($AE = EF$) và một góc nhọn bằng nhau nên bằng nhau.

Suy ra $EC = AB = 8$, do đó $BE = 11 - 8 = 3$ (và $CF = BE = 3$, F nằm trên CD vì $3 < 8$).

$AE^2 = 8^2 + 3^2 = 73$, và tam giác vuông cân AEF có diện tích $\frac{1}{2}AE^2 = \frac{73}{2}$. Đáp án (E).

Kiểm tra bằng cách trừ góc: $S_{AEF} = 88 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 - \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 5 = 88 - 24 - 27,5 = 36,5$.

11.31 (B) 20

Sau t giây ($0 \leq t \leq \frac{25}{3}$): X cách B một đoạn $25 - 3t$, Y cách B một đoạn $4t$, hai đoạn vuông góc tại B . Khoảng cách d thỏa $d^2 = (25 - 3t)^2 + (4t)^2 = 25t^2 - 150t + 625$.

Hoàn thành bình phương: $d^2 = 25(t^2 - 6t + 9) + 400 = 25(t - 3)^2 + 400 \geq 400$, dấu bằng khi $t = 3$. Vậy d nhỏ nhất là 20 (lúc đó X cách B 16 cm, Y cách B 12 cm: bộ ba 12, 16, 20). Đáp án (B).

Bấy: thử vài thời điểm nguyên như $t = 2$ ($\sqrt{19^2 + 8^2} = \sqrt{425} \approx 20,6$) rồi chọn 21; hoặc chọn khoảng cách ban đầu 25.

11.32 (C) $\frac{120}{13}$

Hai đường chéo vuông góc tại trung điểm: nửa AC là 12, nên nửa BD là $\sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ và $BD = 10$.

P nằm trên BD nên chia tam giác ABD thành ABP và ADP , có đáy $AB = AD = 13$ và đường cao chính là hai khoảng cách d_1, d_2 cần tìm:

$$\frac{1}{2} \cdot 13 d_1 + \frac{1}{2} \cdot 13 d_2 = S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot \frac{AC}{2} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 60.$$

Vậy $d_1 + d_2 = \frac{120}{13}$, với mọi vị trí của P . Đáp án (C).

Kiểm tra với $P = B$: khoảng cách tới AB bằng 0, khoảng cách tới AD là đường cao từ B của tam giác ABD : $\frac{2 \cdot 60}{13} = \frac{120}{13}$ — khớp.

11.33 (C) 13

Kéo dài hai cạnh bên cắt nhau tại X . Ba đoạn song song dài 7, x , 17 là đáy của ba tam giác đồng dạng chung đỉnh X , nên diện tích của chúng tỉ lệ với 49, x^2 , 289: gọi là $49k$, x^2k , $289k$.

Hình thang có diện tích $289k - 49k = 240k$. Phần trên (giữa đáy 7 và đoạn cắt) là $x^2k - 49k$, phải bằng $120k$: $x^2 = 169$, $x = 13$. Đáp án (C).

Bấy: lấy trung bình cộng 12 — đó là đường trung bình, chia đôi chiều cao chứ không chia đôi diện tích (phần dưới rộng hơn nên chiếm nhiều hơn). Công thức tổng quát: $x = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$.

11.34 9

Chia miền chữ L thành hai hình chữ nhật: R_1 nằm dưới, 16×4 , tâm $(8, 2)$; R_2 nằm trên bên trái, 8×12 , tâm $(4, 10)$ (đặt góc dưới trái ở gốc toạ độ).

Mọi đường thẳng đi qua tâm một hình chữ nhật đều chia nó thành hai nửa bằng nhau (đối xứng tâm). Đường thẳng qua cả hai tâm chia đôi cả R_1 lẫn R_2 , nên chia đôi cả miền chữ L.

Đường qua $(8, 2)$ và $(4, 10)$ có hệ số góc -2 : $y = -2x + 18$. Nó đi qua $(1, 16)$ — đúng là P ! Gặp cạnh dưới $y = 0$ tại $x = 9$. Vì quay đường thẳng quanh P làm diện tích một bên tăng dần, chỉ có một đường qua P chia đôi miền. Đáp số: 9.

Ý tưởng: với hình ghép từ hai hình có tâm đối xứng, đường chia đôi diện tích “miền phi” là đường nối hai tâm.

11.35 110

Tổng diện tích mười hình vuông: $1^2 + 2^2 + \dots + 10^2 = 385$. Đoạn thẳng đi từ $(0, 0)$ tới $(55, 10)$ (vì $1 + 2 + \dots + 10 = 55$), có phương trình $y = \frac{2x}{11}$.

Đoạn thẳng có nằm trong các hình vuông không? Ở mép phải hình vuông thứ k , $x = \frac{k(k+1)}{2}$ nên $y = \frac{k(k+1)}{11} \leq k$ (vì $k+1 \leq 11$). Vậy trên mỗi hình vuông, đoạn thẳng luôn thấp hơn cạnh trên, và phần hình nằm dưới đoạn thẳng chính là toàn bộ tam giác vuông với hai cạnh góc vuông 55 và 10: diện tích 275.

Phần phía trên: $385 - 275 = 110$. Đáp số: 110.

Lưu ý: nếu đoạn thẳng nhô lên khỏi một hình vuông (ví dụ nếu xếp hình lớn trước), phần tam giác “lơ lửng” ngoài các hình vuông không được tính — luôn kiểm tra điều kiện này trước khi lấy hiệu.

11.36 53

Gọi diện tích là S . Cạnh ứng với mỗi đường cao là $\frac{2S}{\text{đường cao}}$: các cạnh là $\frac{2S}{12}$, $\frac{2S}{15}$, $\frac{2S}{h}$, tỉ lệ với $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{15}$, $\frac{1}{h}$. Ngược lại, ba số dương thoả bất đẳng thức tam giác thì có tam giác với các cạnh tỉ lệ như vậy, và phóng to/thu nhỏ để đường cao thứ nhất bằng 12 thì hai đường cao kia tự khớp.

Bất đẳng thức tam giác (chương 10): $\frac{1}{h} < \frac{1}{12} + \frac{1}{15} = \frac{9}{60}$, tức $h > \frac{20}{3}$; và $\frac{1}{h} > \frac{1}{12} - \frac{1}{15} = \frac{1}{60}$, tức $h < 60$. (Điều kiện thứ ba $\frac{1}{15} + \frac{1}{h} > \frac{1}{12}$ cũng chính là $h < 60$.)

Vậy $h \in \{7, 8, \dots, 59\}$: có 53 giá trị. Đáp số: 53.

Bấy: áp bất đẳng thức tam giác thẳng lên các đường cao ($3 < h < 27$) — sai, vì đường cao tỉ lệ **ngược** với cạnh.

Chapter 12 — Circles, Coordinates & 3D Solids

12.1 (E)	12.2 (B)	12.3 (D)	12.4 (B)	12.5 (D)	12.6 (C)
12.7 (C)	12.8 (E)	12.9 (A)	12.10 (D)	12.11 (A)	12.12 (C)
12.13 (C)	12.14 (B)	12.15 (D)	12.16 (D)	12.17 (D)	12.18 (B)
12.19 (E)	12.20 (A)	12.21 (B)	12.22 (A)	12.23 (C)	12.24 (E)
12.25 (E)	12.26 (C)	12.27 10	12.28 32	12.29 (E)	12.30 (C)
12.31 (D)	12.32 (D)	12.33 (A)	12.34 24	12.35 (B)	12.36 (B)

12.1 (E) 8

Gọi bán kính là r : $\pi r^2 = 2 \cdot 2\pi r$. Chia hai vế cho πr : $r = 4$.

Đường kính $2r = 8$. Đáp án (E). Lựa chọn (C) là bán kính — đọc kỹ để hỏi đường kính.

12.2 (B) 8π

Biên của một mảnh gồm **nửa đường tròn lớn** (bán kính 4) dài $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 4 = 4\pi$ và **cả đường cong chữ S**, tức hai nửa đường tròn bán kính 2, mỗi nửa dài 2π .

Chu vi $4\pi + 2\pi + 2\pi = 8\pi$ — đúng bằng chu vi đường tròn lớn. Đáp án (B). Quên một nửa của chữ S ra 6π .

12.3 (D) 36π

Chu vi tỉ lệ với bán kính, nên bán kính cũng theo tỉ lệ $2 : 3$. Hình tròn nhỏ: $\pi r^2 = 16\pi$, $r = 4$; hình tròn lớn có bán kính 6.

Diện tích 36π . Đáp án (D). Nói gọn: tỉ số diện tích là bình phương tỉ số độ dài, $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$, và $16\pi \cdot \frac{9}{4} = 36\pi$. Nhân theo tỉ số $\frac{3}{2}$ (quên bình phương) ra 24π .

12.4 (B) 2

$PQ^2 = (a-1)^2 + (3-(-1))^2 = (a-1)^2 + 16 = 25$, nên $(a-1)^2 = 9$, $a-1 = \pm 3$: $a = 4$ hoặc $a = -2$.

Tổng $4 + (-2) = 2$. Đáp án (B). Hình học: P nằm trên đường thẳng $y = 3$, cắt đường tròn tâm Q bán kính 5 tại hai điểm đối xứng qua $x = 1$, nên tổng hai hoành độ là $2 \cdot 1$. Chỉ lấy nghiệm dương ra 4.

12.5 (D) $\frac{24}{5}$

$A = (8, 0)$, $B = (0, 6)$, $AB = 10$. Khoảng cách từ O tới đường thẳng là đường cao h hạ từ O xuống cạnh huyền của tam giác vuông OAB .

Tính diện tích hai cách: $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h$, nên $h = \frac{48}{10} = \frac{24}{5}$. Đáp án (D).

Lựa chọn 5 là khoảng cách từ O tới **trung điểm** AB — xa hơn đường cao.

12.6 (C) $4\sqrt{3}$

Mỗi mặt có diện tích $96 : 6 = 16$, nên cạnh bằng 4.

Đường chéo không gian: $\sqrt{4^2 + 4^2 + 4^2} = 4\sqrt{3}$. Đáp án (C). Lựa chọn $4\sqrt{2}$ là đường chéo một mặt.

12.7 (C) $60\pi + 10$

Trái nhả ra được hình chữ nhật cao 10. Chiều dài bằng chu vi đáy $2\pi \cdot 3 = 6\pi$ cộng phần chồng 1 cm.

Diện tích $(6\pi + 1) \cdot 10 = 60\pi + 10$. Đáp án (C). Quên phần chồng ra 60π ; tính cả hai nắp $(60\pi + 18\pi)$ ra 78π .

12.8 (E) 60

Đếm theo sáu hướng nhìn. Từ trước: mỗi cột (theo chiều rộng) thấy ba “bậc đứng” cao 1, tổng $4 \cdot 3 = 12$; từ sau thấy bức tường cao 3, rộng 4: 12. Từ trên: ba mặt bậc mỗi cột, 12; từ dưới: $4 \cdot 3 = 12$. Hai bên hông: mỗi bên là hình bậc thang $1 + 2 + 3 = 6$.

Tổng $12 + 12 + 12 + 12 + 6 + 6 = 60$. Đáp án (E). Quên mặt đáy ra 48.

12.9 (A) 36π

$4\pi r^2 = 36\pi$ nên $r^2 = 9$, $r = 3$. Thể tích $\frac{4}{3}\pi \cdot 27 = 36\pi$. Đáp án (A).

Hình cầu bán kính 3 có diện tích mặt và thể tích “bằng nhau về số” — chỉ là trùng hợp của $r = 3$. Quên $\frac{1}{3}$ ra 108π .

12.10 (D) 8π

Chu vi $2\pi \cdot 9 = 18\pi$, chia theo tỉ lệ $2 : 3 : 4$ (tổng 9 phần), mỗi phần 2π .

Cung dài nhất: $4 \cdot 2\pi = 8\pi$. Đáp án (D). Dùng πr làm chu vi ra 4π .

12.11 (A) 12

Khoảng cách từ M tới trục hoành là 3. Theo định lý dây cung, nửa dây PQ là $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, nên $PQ = 8$ ($P = (-2, 0)$, $Q = (6, 0)$).

Diện tích $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$. Đáp án (A). Quên $\frac{1}{2}$ ra 24; lấy đáy là đường kính 10 ra 15.

12.12 (C) 144

Hình chóp có đáy là mặt dưới 6×6 , đỉnh là tâm mặt trên nên chiều cao bằng cả cạnh khối: $h = 6$. Thể tích hình chóp $\frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6 = 72$.

Phần gỗ bỏ đi: $216 - 72 = 144$ — gấp đôi phần giữ lại. Đáp án (C).

Bẫy: trả lời thể tích hình chóp (72); dùng $\frac{1}{2}$ thay cho $\frac{1}{3}$ ra $216 - 108 = 108$; lấy chiều cao 3 (nhầm với hình chóp có đỉnh ở tâm khối) ra $216 - 36 = 180$.

12.13 (C) 10

Hai tiếp tuyến kẻ từ một đỉnh tới đường tròn dài bằng nhau. Gọi độ dài tiếp tuyến từ A, B, C, D là a, b, c, d . Khi đó $AB = a + b$, $BC = b + c$, $CD = c + d$, $DA = d + a$.

Suy ra $AB + CD = a + b + c + d = BC + DA$: $7 + 12 = 9 + DA$, $DA = 10$. Đáp án (C).

Quy tắc “tổng hai cặp cạnh đối bằng nhau” đúng cho **mọi** tứ giác ngoại tiếp đường tròn.

12.14 (B) $6 + 2\pi$

Dây đai gồm các đoạn thẳng và các cung tròn xen kẽ. Mỗi đoạn thẳng song song và dài bằng đoạn nối hai tâm tương ứng: ba tâm tạo tam giác đều cạnh 2, nên ba đoạn thẳng dài tổng cộng 6.

Ở mỗi ống, dây ôm một cung; ba cung đó có tổng góc bằng tổng các góc ngoài của tam giác, tức 360° — ghép lại thành đúng một đường tròn bán kính 1, dài 2π .

Độ dài dây $6 + 2\pi$. Đáp án (B). Tưởng mỗi ống bị ôm nửa vòng ra $6 + 3\pi$.

12.15 (D) 16

Gọi cạnh là s và đỉnh dưới trái là $(a, 0)$. Đỉnh trên trái (a, s) nằm trên $y = x$ nên $s = a$.

Đỉnh trên phải $(a + s, s) = (2s, s)$ nằm trên $y = -2x + 20$: $s = -4s + 20$, $s = 4$.

Diện tích 16. Đáp án (D).

12.16 (D) 12π

Mặt cắt cách tâm d là hình tròn có bán kính ρ với $\rho^2 + d^2 = 6^2$ (định lý dây cung trong mặt cắt qua tâm).

$d = 2$: $\rho^2 = 32$, diện tích 32π . $d = 4$: $\rho^2 = 20$, diện tích 20π . Hiệu 12π . Đáp án (D).

Nhận xét gọn: hiệu luôn bằng $\pi(d_2^2 - d_1^2) = \pi(16 - 4)$, không phụ thuộc bán kính quả cầu. Tính hiệu bán kính rồi bình phương là sai.

12.17 (D) 17

4 phút là $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ vòng, tức cabin đã quay 120° kể từ điểm thấp nhất. Góc giữa bán kính tới cabin và bán kính hướng **lên** là $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

Hạ đường vuông góc từ cabin xuống đường thẳng đứng qua tâm: tam giác vuông $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ có cạnh huyền 10, cạnh kề góc 60° bằng 5. Cabin cao hơn tâm 5 m.

Độ cao $12 + 5 = 17$ m. Đáp án (D). Nhắm sang phía dưới tâm ra $12 - 5 = 7$.

12.18 (B) $\frac{40\pi}{3} - 10\sqrt{3}$

Mặt cắt ngang là hình tròn bán kính 2; nước chiếm “viên phân” phía dưới dây cung nằm ngang cách tâm $2 - 1 = 1$.

Nửa dây: $\sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$. Tam giác tạo bởi tâm và hai đầu dây có các cạnh 2, 2, $2\sqrt{3}$ và chiều cao 1 — đó là tam giác $30^\circ-30^\circ-120^\circ$, nên góc ở tâm chắn viên phân là 120° .

Viên phân = quạt 120° trừ tam giác: $\frac{1}{3} \cdot 4\pi - \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$. Nhân với chiều dài 10: $\frac{40\pi}{3} - 10\sqrt{3}$. Đáp án (B).

Bấy: quên trừ tam giác ra $\frac{40\pi}{3}$; tưởng nước chiếm $\frac{1}{4}$ bể vì sâu bằng $\frac{1}{4}$ đường kính ra 10π .

12.19 (E) 162

Đặt các cạnh là $k, 2k, 3k$. Diện tích toàn phần $2(2k^2 + 6k^2 + 3k^2) = 22k^2 = 198$, nên $k^2 = 9$, $k = 3$.

Các cạnh 3, 6, 9; thể tích 162. Đáp án (E).

12.20 (A) 66π

Chia hai dữ kiện cho nhau: $\frac{\pi r^2 h}{2\pi r h} = \frac{r}{2} = \frac{72\pi}{48\pi} = \frac{3}{2}$, nên $r = 3$; từ $2\pi \cdot 3 \cdot h = 48\pi$ được $h = 8$.

Hai đáy: $2 \cdot 9\pi = 18\pi$. Diện tích toàn phần $48\pi + 18\pi = 66\pi$. Đáp án (A). Dùng đường kính 6 thay bán kính khi tính hai đáy ra $48\pi + 72\pi = 120\pi$; nhắm sang thể tích ra 72π .

12.21 (B) $\frac{3}{2}$

Cạnh cuộn quanh là chu vi đáy: $2\pi r = 18 \Rightarrow r = \frac{9}{\pi}$, chiều cao 12: $V_1 = \pi \cdot \frac{81}{\pi^2} \cdot 12 = \frac{972}{\pi}$.

Cách kia: $r = \frac{6}{\pi}$, chiều cao 18: $V_2 = \pi \cdot \frac{36}{\pi^2} \cdot 18 = \frac{648}{\pi}$. Tỉ số $\frac{972}{648} = \frac{3}{2}$. Đáp án (B).

Nhận xét: $V = \frac{(\text{chu vi})^2 \cdot h}{4\pi}$ nên tỉ số là $\frac{18^2 \cdot 12}{12^2 \cdot 18} = \frac{18}{12}$ — cạnh cuộn quanh càng dài, thể tích càng lớn. Cùng một tờ giấy (cùng diện tích mặt xung quanh) **không** cho cùng thể tích.

12.22 (A) 4

Thể tích nửa hình cầu: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 = 144\pi$. Đáy hình trụ: $\pi \cdot 6^2 = 36\pi$.

Độ sâu $144\pi : 36\pi = 4$ — đúng bằng $\frac{2}{3}$ bán kính. Đáp án (A). Dùng cả hình cầu ra 8.

12.23 (C) 18π

Đường chéo kia (dài 6, vuông góc với trục) cho bán kính lớn nhất 3. Khối tròn xoay gồm **hai hình nón chung đáy**, bán kính 3, mỗi hình cao 3 (nửa đường chéo trục).

Thể tích $2 \cdot \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 3 = 18\pi$. Đáp án (C). Tưởng là hình trụ bán kính 3, cao 6 ra 54π ; chỉ tính một hình nón ra 9π .

12.24 (E) 12

Mọi thể tích tính theo đơn vị π . Cốc: $9 \cdot 12 = 108$. Khối nón: $\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 12 = 36$, nên tràn ra 36, còn 72 (mức nước 8 khi rút nón ra).

Quả bóng có đường kính 6 = đường kính cốc, thể tích $\frac{4}{3} \cdot 27 = 36$. Nếu nước ngập bóng tới độ cao $h \geq 6$ thì $9h - 36 = 72$, $h = 12$ — nước lên vừa đúng miệng cốc, không tràn. Đáp án (E).

Lý do sâu xa: khối nón và quả bóng có cùng thể tích 36π , nên bỏ cái này ra, thả cái kia vào thì mực nước trở về như cũ.

12.25 (E) $48 + 4\pi$

Đồng xu luôn tiếp xúc hình vuông nên nó phủ dải rộng 2 (bằng đường kính) bao quanh hình vuông.

Dọc mỗi cạnh: hình chữ nhật 6×2 , bốn cạnh được 48. Ở mỗi góc, đồng xu xoay quanh đỉnh và phủ một phần tư hình tròn **bán kính 2**; bốn phần tư ghép thành một hình tròn bán kính 2, diện tích 4π .

Tổng $48 + 4\pi$. Đáp án (E). Dùng bán kính 1 ở các góc ra $48 + \pi$.

12.26 (C) $6\sqrt{3} - 6$

Quả bóng chạm sàn và hai tường nên tâm cách cả ba mặt phẳng đúng 6: đặt K ở gốc thì tâm là $(6, 6, 6)$.

K tới tâm là đường chéo không gian của khối lập phương cạnh 6: $\sqrt{6^2 + 6^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}$. Điểm gần K nhất của quả bóng nằm trên đoạn nối K với tâm, cách K một khoảng $6\sqrt{3} - 6$. Đáp án (C). Chỉ dùng hai chiều (đường chéo hình vuông) ra $6\sqrt{2} - 6$.

12.27 10

$abc = 2(ab + bc + ca)$. Chia hai vế cho abc : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$.

Vì a nhỏ nhất: $\frac{3}{a} \geq \frac{1}{2}$ nên $a \leq 6$; và $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ nên $a \geq 3$.

- $a = 3$: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$, nhân ra: $(b - 6)(c - 6) = 36$ với $b \leq c$: $36 = 1 \cdot 36 = 2 \cdot 18 = 3 \cdot 12 = 4 \cdot 9 = 6 \cdot 6 \rightarrow 5$ hộp.
- $a = 4$: $(b - 4)(c - 4) = 16 = 1 \cdot 16 = 2 \cdot 8 = 4 \cdot 4 \rightarrow 3$ hộp.
- $a = 5$: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10} \rightarrow (3b - 10)(3c - 10) = 100$; thừa số $3b - 10 \geq 5$ phải chia 3 dư 2: chỉ $5 \cdot 20 \rightarrow$ hộp $(5, 5, 10)$.
- $a = 6$: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{3}$ với $b \geq 6$: chỉ $b = c = 6$.

Tổng $5 + 3 + 1 + 1 = 10$. Đáp số: 10.

Kỹ thuật “khử mẫu rồi thêm hằng số để phân tích thành tích” biến phương trình phân số thành bài đếm ước số.

12.28 32

Cần $a^2 + b^2 + c^2 = d^2$ với $a < b < c$. Hộp $2 \times 3 \times 6$ có đường chéo 7 (thể tích 36), nhưng hộp $1 \times 4 \times 8$ có đường chéo $\sqrt{1 + 16 + 64} = 9$ và thể tích chỉ 32. Ta chứng minh không có hộp nào thể tích ≤ 31 .

Tính chẵn lẻ: bình phương số lẻ chia 4 dư 1, số chẵn chia hết cho 4; d^2 chia 4 dư 0 hoặc 1. Nếu hai hoặc ba trong a, b, c lẻ thì tổng chia 4 dư 2 hoặc 3 — vô lý. Vậy nhiều nhất một cạnh lẻ.

Liệt kê các hộp $a < b < c$, $abc \leq 31$, có không quá một cạnh lẻ. $a = 1$ thì b, c chẵn: $(2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 10), (2, 12), (2, 14), (4, 6)$ cho tổng 21, 41, 69, 105, 149, 201, 53 — không số nào chính phương. $a = 2$: $bc \leq 15$ nên $(b, c) = (3, 4)$ cho 29; $(3, 5)$ có hai cạnh lẻ. $a \geq 3$ thì $abc \geq 3 \cdot 4 \cdot 5 > 31$.

Đáp số: 32.

Bây: tìm đường chéo nhỏ nhất (hộp $2 \times 3 \times 6$) rồi kết luận thể tích 36.

12.29 (E) 144

Gọi cạnh là a và O là tâm mặt phẳng đáy của nửa hình cầu (cũng là tâm mặt đáy của khối lập phương). Một đỉnh trên V nằm trên mặt cầu nên $OV = 6$.

Hạ V thẳng xuống đáy được điểm V' là một đỉnh dưới: $VV' = a$ (đứng) và OV' bằng nửa đường chéo mặt đáy, $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tam giác $OV'V$ vuông tại V' : $\frac{a^2}{2} + a^2 = 36$, nên $a^2 = 24$.

Diện tích toàn phần $6a^2 = 144$. Đáp án (E).

Bẫy: lấy khoảng cách ngang bằng cạnh a (thay vì nửa đường chéo) ra $2a^2 = 36$ và đáp số 108; lấy cả đường chéo mặt đáy $a\sqrt{2}$ ra $3a^2 = 36$ và đáp số 72.

12.30 (C) 12

Các điểm nguyên trên đường tròn đi theo nhóm đối xứng. Nếu (a, b) nằm trên đường tròn với $0 < a < b$ thì cả 8 điểm $(\pm a, \pm b)$, $(\pm b, \pm a)$ đều nằm trên đó. Nếu $a = 0$ thì nhóm chỉ có 4 điểm $(\pm b, 0)$, $(0, \pm b)$; nếu $a = b$ cũng chỉ 4 điểm.

Vậy “đúng 8 điểm” nghĩa là n viết được thành $a^2 + b^2$ với $0 < a < b$ theo **đúng một** cách và không viết được dạng $0^2 + b^2$ hay $a^2 + 0^2$.

Liệt kê $a^2 + b^2 \leq 50$ với $0 < a < b$: 5, 10, 13, 17, 20, 25, 26, 29, 34, 37, 40, 41, 45, 50. Loại $25 = 0^2 + 5^2$ (12 điểm) và $50 = 5^2 + 5^2$ (12 điểm). Còn 12 giá trị. Đáp án (C).

12.31 (D) $\frac{2}{3}$

Các điểm cách tâm không quá 2 tạo thành hình cầu bán kính 2. Hình trụ có đường kính 4 và cao 4, nên hình cầu nằm gọn bên trong, chạm hai đáy và mặt xung quanh.

Xác suất $= \frac{\frac{4}{3}\pi \cdot 2^3}{\pi \cdot 2^2 \cdot 4} = \frac{32\pi/3}{16\pi} = \frac{2}{3}$. Đáp án (D).

Đây là phát hiện nổi tiếng của Archimedes: hình cầu chiếm đúng $\frac{2}{3}$ hình trụ bao quanh nó. Quên $\frac{4}{3}$ của thể tích cầu ra $\frac{1}{2}$.

12.32 (D) $18 + 9\sqrt{3}$

Đáy $AB = 6$ cố định, nên cần chiều cao lớn nhất: C phải xa đường thẳng AB nhất, tức C là điểm của đường tròn trên đường thẳng qua O vuông góc với AB , ở phía bên kia tâm.

$OA = OB = AB = 6$ nên tam giác OAB đều; khoảng cách từ O tới AB là đường cao tam giác đều: $3\sqrt{3}$. Chiều cao lớn nhất $6 + 3\sqrt{3}$.

Diện tích lớn nhất $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot (6 + 3\sqrt{3}) = 18 + 9\sqrt{3}$. Đáp án (D). Quên đoạn $3\sqrt{3}$ (lấy chiều cao bằng bán kính) ra 18.

12.33 (A) 32

Mỗi nửa hình tròn có diện tích $\frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 = 8\pi$. Gọi L là phần chung. Phần thuộc đúng một nửa hình tròn là $(8\pi - L) + (8\pi - L) = 16\pi - 2L$.

Hai tâm $(4, 0)$ và $(0, 4)$; hai đường tròn cắt nhau tại góc A và tại tâm hình vuông $(4, 4)$. Với đường tròn tâm $(4, 0)$, hai bán kính tới A và tới $(4, 4)$ vuông góc nhau, nên phần chung gồm hai “viên phân” 90° , mỗi viên bằng quạt $\frac{1}{4}\pi \cdot 16$ trừ tam giác vuông $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4$: $L = 2(4\pi - 8) = 8\pi - 16$.

Đáp số $16\pi - 2(8\pi - 16) = 32$ — mọi π triệt tiêu! Đáp án (A). Cộng hai nửa hình tròn mà không trừ phần chung ra 16π .

12.34 24

Tách theo hai trục: $|x| + |x - 6|$ bằng 6 khi $0 \leq x \leq 6$ và bằng $6 + 2u$ nếu x nằm ngoài đoạn $[0, 6]$ một khoảng u . Tương tự $|y| + |y - 2| = 2 + 2v$, với v là khoảng cách từ y tới đoạn $[0, 2]$.

Điều kiện thành $8 + 2u + 2v = 12$, tức $u + v = 2$ (đi ra ngoài hình chữ nhật $A-B$ tổng cộng 2 bước).

- $u = 0, v = 2$: $x \in \{0, \dots, 6\}$ (7 giá trị), $y \in \{-2, 4\}$: 14 điểm.
- $u = 2, v = 0$: $x \in \{-2, 8\}$, $y \in \{0, 1, 2\}$: 6 điểm.
- $u = v = 1$: $x \in \{-1, 7\}$, $y \in \{-1, 3\}$: 4 điểm.

Tổng $14 + 6 + 4 = 24$. Đáp số: 24.

Hình tạo bởi các điểm này là một bát giác “bo góc chéo” bao quanh hình chữ nhật — phiên bản đường phố của đường elip.

12.35 (B) $16 - \pi$

Tâm đồng xu chạy trên hình chữ nhật nhỏ 8×4 (cách mỗi cạnh 1). Đồng xu phủ một dải rộng 2 sát các cạnh, nên có hai loại vùng không bao giờ bị phủ.

Phần giữa: các điểm cách cả bốn cạnh hơn 2: hình chữ nhật $(10 - 4) \times (6 - 4) = 6 \times 2$, diện tích 12.

Bốn góc: ở góc, đồng xu kẹt giữa hai cạnh, tâm không vượt quá điểm cách mỗi cạnh 1; phần ô vuông 1×1 ở góc nằm ngoài một phần tư hình tròn bán kính 1 không bị phủ: $1 - \frac{\pi}{4}$ mỗi góc.

Tổng $12 + 4(1 - \frac{\pi}{4}) = 16 - \pi$. Đáp án (B). Quên các góc ra 12.

12.36 (B) 10

$\angle ACB = 90^\circ$ khi và chỉ khi C nằm trên đường tròn đường kính AB (khác A, B). Tâm là trung điểm $(4, 3)$, bán kính $\frac{1}{2}\sqrt{8^2 + 6^2} = 5$.

Điểm nguyên trên đường tròn: $(4 + p, 3 + q)$ với $p^2 + q^2 = 25$: $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 5)$, $(\pm 3, \pm 4)$, $(\pm 4, \pm 3)$ — 12 điểm. Hai trong số đó là $A = (4 - 4, 3 - 3)$ và $B = (4 + 4, 3 + 3)$.

Còn 10 điểm. Đáp án (B). Quên loại A, B ra 12.

Chapter 13 — Problem-Solving Strategies

13.1 (B)	13.2 (A)	13.3 (D)	13.4 (C)	13.5 (B)	13.6 (A)
13.7 (D)	13.8 (B)	13.9 (E)	13.10 (E)	13.11 (A)	13.12 (C)
13.13 (E)	13.14 (C)	13.15 (D)	13.16 (B)	13.17 (D)	13.18 (C)
13.19 (B)	13.20 (D)	13.21 (A)	13.22 (A)	13.23 (C)	13.24 (B)
13.25 (A)	13.26 (E)	13.27 (C)	13.28 (B)	13.29 (D)	13.30 (B)
13.31 (D)	13.32 (E)	13.33 (A)	13.34 (E)	13.35 (C)	13.36 (A)

13.1 (B) 20

Mỗi level là “nhân 2 rồi trừ 15”, nên đi ngược là “cộng 15 rồi chia 2”:

$$55 \rightarrow \frac{55 + 15}{2} = 35 \rightarrow \frac{35 + 15}{2} = 25 \rightarrow \frac{25 + 15}{2} = 20.$$

Kiểm tra xuôi: $20 \rightarrow 25 \rightarrow 35 \rightarrow 55$. Đáp án (B). Dừng sau một hoặc hai bước ngược sẽ ra 35 hoặc 25.

13.2 (A) 6:25 p.m.

Đi ngược trên trục thời gian: phải có mặt lúc $7:45 - 15 \text{ phút} = 7:30$; phải rời nhà lúc $7:30 - 25 \text{ phút} = 7:05$; phải bắt đầu ăn lúc $7:05 - 40 \text{ phút} = 6:25 \text{ p.m.}$ Đáp án (A).

Quên 15 phút đến sớm thì ra 6:40; quên thời gian đi đường thì ra 6:50; 7:05 là giờ rời nhà chứ không phải giờ bắt đầu ăn.

13.3 (D) 14

Chẵn lẻ: tổng của các số chẵn luôn chẵn, nên tổng 100 (chẵn) đòi hỏi số các số lẻ phải là số chẵn. Không thể có 15 số lẻ; nhiều nhất là 14.

Xây dựng: mười bốn số 1 và một số 86: $14 + 86 = 100$. Đáp án (D).

Chọn 15 là quên điều kiện chẵn lẻ.

13.4 (C) 12

Thử có hệ thống: hai cạnh có tích 72 và tổng $36 : 2 = 18$. Liệt kê các cặp ước của 72 theo thứ tự: $1 \cdot 72$ (tổng 73), $2 \cdot 36$ (38), $3 \cdot 24$ (27), $4 \cdot 18$ (22), $6 \cdot 12$ (18) ✓.

Cạnh dài là 12. Đáp án (C). Tổng giảm dần khi hai cạnh xích lại gần nhau, nên không cần thử tiếp.

13.5 (B) 3

Có 11 mức điểm (chuồng). Vì $25 > 2 \cdot 11$, theo nguyên lý Dirichlet có một mức điểm có ít nhất 3 học sinh.

Không chắc được 4: chia 3 học sinh cho 3 mức điểm và 2 học sinh cho mỗi mức trong 8 mức còn lại ($9 + 16 = 25$) thì không mức nào có 4 người. Vậy $k = 3$. Đáp án (B).

13.6 (A) 6

Tham lam: $50 + 20 + 10 + 5 + 2 + 1 = 88 - 6$ tờ.

Không thể ít hơn: phần do các tờ 1, 2, 5 nghìn tạo ra phải tận cùng bằng 8, nên cần ít nhất 3 tờ nhỏ (một hay hai tờ chỉ cho 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 10). Nếu phần nhỏ là 8 thì 80 nghìn còn lại cần ít nhất 3 tờ lớn ($50 + 20 + 10$); nếu phần nhỏ là 18 thì cần ít nhất 4 tờ nhỏ và 70 còn lại cần 2 tờ; nếu phần nhỏ từ 28 trở lên thì riêng tờ nhỏ (mỗi tờ không quá 5 nghìn) đã cần ít nhất 6 tờ. Mọi trường hợp đều ≥ 6 tờ. Đáp án (A).

13.7 (D) 17

Hai nửa chu vi cộng lại bằng 10. Với nửa chu vi k , hình chữ nhật có diện tích lớn nhất là hình gần vuông nhất:

nửa chu vi	2 + 8	3 + 7	4 + 6	5 + 5
diện tích lớn nhất	$1 + 16 = 17$	$2 + 12 = 14$	$4 + 9 = 13$	$6 + 6 = 12$

Tốt nhất là đẩy về **cực biên**: một hình nhỏ nhất có thể (1×1) và một hình vuông 4×4 . Đáp án (D).

Bảy: chia đều que cho hai hình ra 12; 25 là một hình vuông 5×5 — chỉ có một hình chữ nhật.

13.8 (B) 4

Thử lựa chọn ở giữa trước: $x = 5$ cho $32 + 243 = 275$, quá lớn. Về trái tăng theo x nên chỉ cần thử nhỏ hơn: $x = 4$ cho $16 + 81 = 97$. Đáp án (B).

13.9 (E) 8

Chỉ biết tỉ số, nên đáp số không phụ thuộc vào từng số: chọn giá trị đặc biệt $x = 2, y = 3$.

$\frac{2+6}{4-3} = 8$. Đáp án (E). Chọn nhầm $x = 3, y = 2$ (đảo tỉ số) sẽ ra $\frac{7}{4}$.

13.10 (E) 400

Làm tròn: $0,49 \approx 0,5, 3,98 \approx 4, 20,3 \approx 20, 0,101 \approx 0,1$. Biểu thức xấp xỉ $\frac{0,5 \cdot 4 \cdot 20}{0,1} = \frac{40}{0,1} = 400$ (giá trị đúng khoảng 392).

Các lựa chọn cách nhau gấp 10 lần nên ước lượng là đủ. Đáp án (E).

13.11 (A) 0

Vẽ trục số: đặt trường ở 0, hướng đông là chiều dương. Ngân hàng ở 3, công viên ở $3 - 5 = -2$, sở thú ở $-2 + 6 = 4$, thư viện ở $4 - 4 = 0$.

Thư viện ở đúng chỗ của trường: khoảng cách 0 km. Đáp án (A).

13.12 (C) 44

Đổi góc nhìn: mỗi trận loại đúng một người. Để còn lại một nhà vô địch phải loại 44 người, nên có đúng 44 trận — dù các vòng được sắp xếp thế nào. Đáp án (C).

22 (hay 23) chỉ là số trận của vòng đầu.

13.13 (E) $(-1, 1)$

Đi ngược, gỡ bước cuối trước, mỗi bước thay bằng phép ngược của nó:

- Gỡ “sang phải 3”: dời sang trái 3: $(4, -1) \rightarrow (1, -1)$.
- Gỡ “quay 90° ngược chiều kim đồng hồ”: quay 90° **cùng** chiều kim đồng hồ, $(x, y) \rightarrow (y, -x)$: $(1, -1) \rightarrow (-1, -1)$.
- Gỡ “đối xứng qua trục x ”: đối xứng lại lần nữa: $(-1, -1) \rightarrow (-1, 1)$.

Kiểm tra xuôi: $(-1, 1) \rightarrow (-1, -1) \rightarrow (1, -1) \rightarrow (4, -1)$. Đáp án (E).

Bảy: quên gỡ phép đối xứng ra $(-1, -1)$; gỡ phép quay bằng cách quay tiếp ngược chiều kim đồng hồ ra $(1, -1)$; gỡ sai thứ tự (đối xứng trước) ra $(-2, -4)$.

13.14 (C) 13 500

Đổi góc nhìn — ghép cặp. Viết mọi số thành ba chữ số bằng cách thêm số 0 ở đầu (007, 042, ...) và thêm số 000: tổng chữ số không đổi. Ghép n với $999 - n$ (ví dụ 042 với 957): ở mỗi hàng hai chữ số cộng lại bằng 9, nên mỗi cặp có tổng chữ số 27.

Có 1000 số từ 000 đến 999, tức 500 cặp: tổng $500 \cdot 27 = 13\,500$. Đáp án (C).

Bẫy: 27 000 là nhân 27 với 1000 (đếm mỗi cặp hai lần); 4500 chỉ là tổng các chữ số hàng đơn vị.

13.15 (D) 18

Đại lượng đơn điệu: tổng số hiệu các ô có quân. Mỗi nước đi làm tổng này giảm đúng 1.

Ban đầu tổng là $3 + 4 + 7 + 9 + 10 = 33$. Không đi được nữa khi không quân nào có ô trống ngay bên trái, tức năm quân ở các ô 1–5, tổng 15. Vậy luôn có đúng $33 - 15 = 18$ nước đi, dù đi theo thứ tự nào. Đáp án (D).

Bẫy: 33 là tổng ban đầu, quên trừ vị trí cuối cùng.

13.16 (B) 36

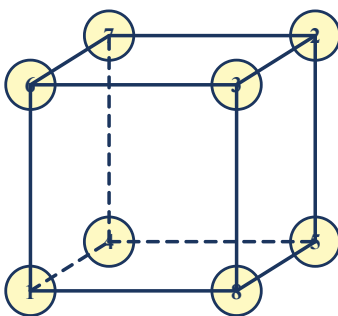
Giá trị đặc biệt: để không nói P ở đâu trên BC , nên đáp số không phụ thuộc vào P . Cho P trùng B : khi đó M là trung điểm AB và tam giác MBC có đáy BC , chiều cao bằng nửa chiều cao từ A : diện tích 36.

Lý do tổng quát: M là trung điểm AP và P nằm trên BC , nên khoảng cách từ M đến BC bằng nửa khoảng cách từ A đến BC . Hai tam giác chung đáy BC , nên $[MBC] = \frac{1}{2} \cdot 72 = 36$. Đáp án (B).

13.17 (D) 18

Chặn bằng trung bình. Mỗi đỉnh nằm trên đúng 3 mặt, nên tổng của sáu tổng là $3(1 + 2 + \dots + 8) = 108$. Trung bình mỗi mặt là 18, vậy tổng lớn nhất ít nhất là 18.

Xây dựng. Cách đặt dưới đây cho cả sáu mặt cùng tổng 18 (ví dụ mặt đáy $1 + 4 + 8 + 5$, mặt trên $6 + 7 + 3 + 2$, mặt trước $1 + 6 + 8 + 3$).



Đáp án (D).

13.18 (C) 2

Chặn bằng chẵn lẻ. Ba tổng hàng cộng lại bằng $1 + 2 + \dots + 9 = 45$, số lẻ; nên trong ba tổng hàng có một số lẻ các tổng lẻ — ít nhất 1. Tương tự với ba tổng cột. Vậy có ít nhất 2 tổng lẻ.

Xây dựng. Hàng 1: 1, 2, 4; hàng 2: 6, 3, 5; hàng 3: 8, 7, 9. Tổng hàng 7, 14, 24; tổng cột 15, 12, 18 — đúng hai tổng lẻ. Đáp án (C).

Bẫy: chọn 0 là quên rằng tổng của cả bảng là số lẻ.

13.19 (B) 2

Gom nhóm và ước lượng: $\frac{1}{2} = 0,5$; $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \approx 0,58$; $\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \approx 0,2 + 0,17 + 0,14 + 0,13 = 0,64$; $\frac{1}{9} + \frac{1}{10} \approx 0,21$.

Tổng khoảng $0,5 + 0,58 + 0,64 + 0,21 \approx 1,93$ (chính xác là $\approx 1,929$), gần 2 nhất. Đáp án (B).

13.20 (D) 24

Xếp các số theo số dư khi chia cho 7. Hai số có tổng chia hết cho 7 khi số dư là $(0, 0)$, $(1, 6)$, $(2, 5)$ hoặc $(3, 4)$.

Xui nhất: lấy nhiều nhất một số chia hết cho 7, và từ mỗi cặp số dư $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ chỉ lấy một loại. Trong 1–50: số dư 1 có 8 số $(1, 8, \dots, 50)$, các số dư khác có 7 số. Chọn được $1 + 8 + 7 + 7 = 23$ số mà chưa có cặp nào.

Với 24 số thì không tránh được (bốn “chuồng” $\{0\}$, $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ chứa nhiều nhất $1 + 8 + 7 + 7$ số an toàn). Đáp án (D).
Quên cộng 1 thì ra 23.

13.21 (A) 4

Vẽ và quét: kéo một đường thẳng đứng dọc biểu đồ. Từ 9:15 đến 9:30 có bốn cuộc họp A, B, C, H cùng diễn ra, nên cần ít nhất 4 phòng.

Bốn phòng là đủ: phòng 1: A, D, G ; phòng 2: B, E (B kết thúc 10:00 đúng lúc E bắt đầu); phòng 3: C, F ; phòng 4: H . Đáp án (A).

13.22 (A) $n^2 + 3n$

Giá trị đặc biệt để loại: $n = 0$ làm (B), (C), (D) bằng 1 — lẻ, loại. $n = 1$ làm (E) bằng 3 — lẻ, loại.

Còn (A): $n^2 + 3n = n(n + 3)$, và $n, n + 3$ luôn khác tính chẵn lẻ nên một trong hai số chẵn — tích luôn chẵn. Đáp án (A).

Lưu ý: chỉ thử $n = 0$ thì (E) vẫn qua; cần thêm giá trị thứ hai.

13.23 (C) 7

Chặn: chia 1–20 thành 7 nhóm $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}, \dots, \{16, 17, 18\}, \{19, 20\}$. Hai số trong cùng nhóm hơn kém nhau 1 hoặc 2, nên mỗi nhóm có nhiều nhất một số được chọn: tối đa 7 số.

Xây dựng: 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19. Đáp án (C).

Bấy: 10 là lấy các số lẻ — chỉ tránh được hiệu 1, nhưng 1 và 3 hơn kém nhau 2.

13.24 (B) 2

Nhóm lũy thừa cho dễ so: $\frac{2^{20}}{3^{12}} = \frac{2^{5 \cdot 4}}{3^{3 \cdot 4}} = \left(\frac{32}{27}\right)^4$.

$\frac{32}{27} \approx 1,185$; bình phương $\approx 1,40$; bình phương lần nữa $\approx 1,97$. Gần 2 nhất. Đáp án (B).

(Giá trị đúng: $1\,048\,576/531\,441 \approx 1,973$.)

13.25 (A) 3

Luôn có hai điểm cách nhau không quá 3 cm: tám điểm chia đường tròn thành 8 cung, tổng độ dài 24 cm, nên cung ngắn nhất không quá $24 : 8 = 3$ cm (lập luận trung bình).

Không thể nhỏ hơn 3: đặt tám điểm cách đều thì hai điểm bất kỳ cách nhau ít nhất 3 cm dọc đường tròn.

Vậy $d = 3$. Đáp án (A).

13.26 (E) 32

Đi ngược từ đích. Ghi vào mỗi ô tổng lớn nhất có thể đi từ ô đó tới E : giá trị ô = số trong ô + giá trị lớn hơn giữa ô bên phải và ô bên dưới. Tính từ góc dưới phải ngược lên:

32	30	29	14
29	23	21	11
19	18	12	10
17	13	4	3

Ô S nhận 32, ứng với đường $2 \rightarrow 1 \rightarrow 8 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 3$. Đáp án (E).

Bấy: đi tham lam (mỗi bước chọn ô kế lớn hơn) cho $2 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 7 \rightarrow 3$, tổng 31.

13.27 (C) 7

Xây dựng trước. Cắt theo từng hàng chỉ được $2 + 2 + 1 + 1 = 6$ mảnh, theo từng cột chỉ được 5 mảnh. Trộn hai hướng thì tốt hơn: hai mảnh ngang ở hàng trên cùng (bỏ ô góc trái), một mảnh ngang ở ba ô cuối hàng thứ hai, và bốn mảnh dọc ở bốn cột đầu của ba hàng dưới — tổng 7 mảnh, còn trống 3 ô (hình phải).

Chặn bằng tô màu. Đánh số hàng r và cột c từ 0 (từ góc trên trái), rồi ghi vào mỗi ô số dư của $r + c$ khi chia cho 3; các ô cùng số nằm trên những đường chéo đi xuống về bên trái. Ba ô liên tiếp trong một hàng hay một cột có $r + c$ là ba số nguyên liên tiếp, nên **mỗi mảnh che đúng một ô mỗi loại 0, 1, 2**. Đếm: loại 0 có 9 ô, loại 1 có 8 ô, loại 2 chỉ có 7 ô (tô hồng, hình trái). Mỗi mảnh dùng hết một ô loại 2, nên có nhiều nhất 7 mảnh.

0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0		
0	1	2	0	1		

Đáp án (C).

Bấy: 8 là chia diện tích $24 : 3$ (tô theo đường chéo hướng kia, số dư của $r - c$, cũng chỉ cho cận 8 vì ba loại đều có 8 ô); 6 và 5 là chỉ cắt theo hàng hoặc chỉ theo cột rồi tin đó là tốt nhất; 9 là lấy nhầm loại đông nhất thay vì loại ít nhất.

13.28 (B) 7

Trường hợp xui nhất (6 học sinh chưa đủ). Sáu học sinh chọn sáu cặp câu lạc bộ khác nhau: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Hai cặp khác nhau không bao giờ chứa nhau.

Chuồng là các “chuỗi”. Chia 15 cách chọn (tập con khác rỗng của 4 câu lạc bộ) thành 6 chuỗi, trong mỗi chuỗi tập trước nằm trong tập sau:

$\{A\} \subset \{A, B\} \subset \{A, B, C\} \subset \{A, B, C, D\}$; $\{B\} \subset \{B, C\} \subset \{B, C, D\}$; $\{C\} \subset \{C, D\} \subset \{A, C, D\}$;
 $\{D\} \subset \{A, D\} \subset \{A, B, D\}$; $\{A, C\}$; $\{B, D\}$.

Với 7 học sinh, theo nguyên lý Dirichlet có hai bạn có lựa chọn cùng một chuỗi — lựa chọn của bạn này nằm trong lựa chọn của bạn kia (hoặc trùng nhau). Đáp án (B).

Bấy: 16 là chuẩn bị cho trường hợp phải chọn *giống* hết nhau (15 cách chọn +1); 6 là quên cộng 1.

13.29 (D) 24

Giá trị đặc biệt. Để nói P là điểm bất kỳ, nên lấy P là tâm: sáu tam giác $PAB, PBC, \dots$ bằng nhau, mỗi tam giác có diện tích 8, tổng ba tam giác được tô là 24.

Vì sao không phụ thuộc P . Kéo dài ba cạnh AB, CD, EF : chúng tạo thành một tam giác đều lớn chứa lục giác. Gọi s là cạnh lục giác và d_1, d_2, d_3 là khoảng cách từ P đến ba đường thẳng đó; tổng diện tích ba tam giác là $\frac{s}{2}(d_1 + d_2 + d_3)$. Theo tính chất của tam giác đều (Chương 11), $d_1 + d_2 + d_3$ bằng chiều cao của tam giác lớn — không đổi. Đáp án (D).

Bấy: 16 là một phần ba diện tích — đúng cho hai tam giác ứng với hai cạnh *đối diện* (như PAB và PDE), không phải cho ba tam giác xen kẽ.

13.30 (B) 97

Bất biến. Cho mỗi chip ở ô k “giá trị” 2^{k-1} . Một nước đi bỏ hai chip giá trị 2^{k-1} và thêm một chip giá trị 2^k : tổng giá trị không đổi, luôn bằng 100.

Trạng thái cuối. Khi không đi được nữa, mỗi ô có nhiều nhất 1 chip, nên 100 phải được viết thành tổng các lũy thừa **khác nhau** của 2: $100 = 64 + 32 + 4$ — còn đúng 3 chip.

Đôi góc nhìn. Mỗi nước đi làm số chip giảm đúng 1. Từ 100 chip xuống 3 chip cần 97 nước, bất kể đi theo thứ tự nào. Đáp án (B).

Bấy: 99 là tưởng cuối cùng chỉ còn một chip; 3 là số chip cuối, không phải số nước.

13.31 (D) 80

Biến tổng tích thành tổng bình phương. Gọi dãy là $a_1, \dots, a_6$ và $S = \sum a_i a_{i+1}$. Vì $(a_i - a_{i+1})^2 = a_i^2 + a_{i+1}^2 - 2a_i a_{i+1}$, cộng năm đẳng thức: $2S = 2(1^2 + 2^2 + \dots + 6^2) - a_1^2 - a_6^2 - D = 182 - a_1^2 - a_6^2 - D$, với D là tổng bình phương năm hiệu liên kế.

Chặn. Muốn S lớn thì $a_1^2 + a_6^2 + D$ phải nhỏ. Dãy đi từ a_1 lên tới 6 rồi xuống a_6 , nên tổng năm hiệu (trị tuyệt đối) ít nhất là $(6 - a_1) + (6 - a_6)$. Nếu hai đầu là 1 và 2: năm hiệu nguyên dương có tổng ≥ 9 , nên $D \geq 2^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 1^2 = 17$, và $a_1^2 + a_6^2 + D \geq 1 + 4 + 17 = 22$. Nếu hai đầu khác $\{1, 2\}$: hoặc $a_1^2 + a_6^2 \geq 17$ và $D \geq 5$ (năm hiệu đều ≥ 1) — trừ khi hai đầu là $\{1, 3\}$ hay $\{2, 3\}$; với $\{1, 3\}$: tổng hiệu ≥ 8 , $D \geq 14$, được ≥ 24 ; với $\{2, 3\}$: $D \geq 11$, được ≥ 24 . Vậy luôn $a_1^2 + a_6^2 + D \geq 22$, nên $2S \leq 182 - 22 = 160$, $S \leq 80$.

Xây dựng. 1, 3, 5, 6, 4, 2: $3 + 15 + 30 + 24 + 8 = 80$. Đáp án (D).

Bấy: thứ tự tự nhiên 1, 2, $\dots$, 6 chỉ cho 70; 82 là kết quả khi xếp quanh vòng tròn (thêm tích của hai số ở hai đầu).

13.32 (E) 16

Xây dựng: chọn 15, 16, $\dots$, 30 (16 số). Tổng hai số khác nhau nhỏ nhất là $15 + 16 = 31 > 30$, nên không số nào là tổng của hai số khác.

Chặn: gọi m là số lớn nhất được chọn. Ghép các số $1, \dots, m - 1$ thành cặp $\{a, m - a\}$ với $a < \frac{m}{2}$ (nếu m chẵn thì $\frac{m}{2}$ đứng riêng). Mỗi cặp chứa nhiều nhất một số được chọn, vì nếu chọn cả a và $m - a$ (khác nhau) thì $m = a + (m - a)$. Do đó số lượng được chọn không quá $\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + (1 \text{ nếu } m \text{ chẵn}) + 1 = \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + 1 \leq 16$.

Đáp án (E). Bấy: 15 — lấy các số lẻ (tổng hai số lẻ là số chẵn) là một ví dụ đẹp nhưng chưa tốt nhất.

13.33 (A) At least one of the differences is even.

Chẵn lẻ + Dirichlet. Giả sử cả chín hiệu đều lẻ. Hiệu của hai số lằng giềng lẻ khi và chỉ khi hai số đó khác tính chẵn lẻ, nên số đứng ngay sau (theo chiều kim đồng hồ) mỗi số lẻ phải là một số chẵn. Năm số lẻ 1, 3, 5, 7, 9 cho năm vị trí “đứng ngay sau” khác nhau, nhưng chỉ có bốn số chẵn 2, 4, 6, 8 — theo nguyên lý Dirichlet, có hai số lẻ cùng đứng ngay trước một số chẵn, vô lý. Vậy luôn có ít nhất một hiệu chẵn: (A) đúng.

Loại các khẳng định còn lại bằng ví dụ. Xếp theo thứ tự 1, 2, 3, $\dots$, 9: các hiệu là tám số 1 và $9 - 1 = 8$ — chỉ một hiệu chẵn, không hiệu nào chia hết cho 3, không hiệu nào bằng 2; loại (B), (C), (E). Xếp 1, 3, 5, 7, 9, 2, 4, 6, 8: các hiệu là 2, 2, 2, 2, 7, 2, 2, 2, 7 — không hiệu nào bằng 1; loại (D). Đáp án (A).

Bấy: (E) — từ “có hai số lẻ đứng cạnh nhau” vội suy ra chúng hơn kém 2, trong khi cặp đó có thể là 9 và 1 (hiệu 8); (B) — tưởng năm số lẻ phải tạo ra hai cặp lẻ-lẻ; (C) — chép máy móc lập luận chẵn lẻ sang số dư khi chia 3, nhưng chín số chia đều cho ba loại dư nên xếp xen kẽ được; (D) — chỉ thử thứ tự tự nhiên, nơi có rất nhiều hiệu bằng 1.

13.34 (E) 25

Bất biến chẵn lẻ: $a + b$ và $|a - b|$ cùng tính chẵn lẻ, nên tính chẵn lẻ của tổng các số trên bảng không đổi. Ban đầu tổng là 55, lẻ; vậy số cuối cùng lẻ.

Chặn trên: hiệu của hai số không âm không vượt số lớn hơn, nên số lớn nhất trên bảng không bao giờ tăng: số cuối ≤ 10 , vậy là một trong 1, 3, 5, 7, 9.

Mọi số lẻ $k \leq 9$ đều đạt: trước hết ghép 10 với $10 - k$ để được k . Tám số còn lại là 1, $\dots$, 9 bỏ đi $10 - k$; ghép chúng thành bốn cặp số liên tiếp (ví dụ $k = 5$: (1, 2), (3, 4), (6, 7), (8, 9)) được bốn số 1, rồi 1, 1 $\rightarrow$ 0 hai lần và 0, 0 $\rightarrow$ 0. Cuối cùng k và 0 cho k .

Tổng các giá trị có thể: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$. Đáp án (E). Bấy: 9 là chỉ tìm giá trị lớn nhất; $16 = 1 + 3 + 5 + 7$ là bỏ sót giá trị 9.

13.35 (C) 28

Chia theo khối. Số nguyên lớn nhất có bình phương $\leq n$ bằng k đúng khi $k^2 \leq n \leq k^2 + 2k$ (vì $(k + 1)^2 = k^2 + 2k + 1$).

Trong khối đó, các bội của k là k^2 , $k^2 + k$, $k^2 + 2k$ — đúng 3 số, với mọi k . Thử trường hợp nhỏ: $k = 2$: các số 4, 6, 8 trong 4–8 ✓.

Với $k = 1, \dots, 9$ các khối nằm trọn trong 1–99: $9 \cdot 3 = 27$ số. Khối $k = 10$ chỉ còn $n = 100$, chia hết cho 10: thêm 1. Tổng 28. Đáp án (C).

Bấy: 27 là quên $n = 100$; 30 là tính khối $k = 10$ đủ ba số.

13.36 (A) 3

Giá trị đặc biệt: các lựa chọn đều là hằng số, nên thử $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$: $\frac{1+1-8}{-2} = 3$. Thử thêm một bộ để chắc chắn: $a = 1$, $b = 2$, $c = -3$ cho $\frac{1+8-27}{-6} = 3$.

Lý do: $c = -(a+b)$ nên $a^3 + b^3 + c^3 = a^3 + b^3 - (a+b)^3 = -3ab(a+b) = 3abc$. Đáp án (A).

Practice Test 1 — Full Practice Test 1

1 (C)	2 (A)	3 (E)	4 (B)	5 (B)	6 (D)
7 (E)	8 (C)	9 (E)	10 (C)	11 (A)	12 (B)
13 (C)	14 (A)	15 (B)	16 (D)	17 (D)	18 (B)
19 (A)	20 (E)	21 (D)	22 (D)	23 (A)	24 (E)
25 (C)					

1 (C) 3

Viết hai tích quanh số 100: $99 \times 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1$ và $98 \times 102 = (100 - 2)(100 + 2) = 100^2 - 4$ (hằng đẳng thức hiệu hai bình phương — **difference of squares**).

Hiệu là $(10000 - 1) - (10000 - 4) = 4 - 1 = 3$. Đáp án (C).

Thấy $99 + 101 = 98 + 102$ rồi kết luận hai tích bằng nhau sẽ chọn nhầm 0: cùng tổng nhưng hai thừa số càng gần nhau thì tích càng lớn. Quên phần -1 (coi 99×101 là 10000) sẽ ra 4; viết nhầm $98 \times 102 = 10000 - 2$ (quên bình phương số 2) sẽ ra 1; bỏ dấu trừ trước số 1 khi rút gọn, $(10000 - 1) - (10000 - 4)$ thành $1 + 4$, sẽ ra 5.

2 (A) 128 000

Mỗi ngày Minh đi **hai** lượt (đi học và về nhà), nên cả tháng là $2 \cdot 22 = 44$ lượt, tốn $44 \cdot 7\,000 = 308\,000$ đồng nếu mua vé lẻ.

Mua vé tháng tiết kiệm $308\,000 - 180\,000 = 128\,000$ đồng. Đáp án (A).

Quên trừ giá vé tháng sẽ chọn 308 000; cộng thay vì trừ ra 488 000; lấy cả tháng 30 ngày thay vì 22 ngày đi học ra $60 \cdot 7\,000 - 180\,000 = 240\,000$; chỉ tính chiều đi rồi dừng ở tiền vé lẻ $22 \cdot 7\,000$ ra 154 000.

3 (E) 54

Nổi tâm lục giác với sáu đỉnh: lục giác đều cạnh 3 gồm 6 tam giác đều cạnh 3.

Một tam giác đều cạnh 3 chia được thành $3^2 = 9$ tam giác đều cạnh 1 (các hàng có 1, 3, 5 tam giác nhỏ). Vậy có $6 \cdot 9 = 54$ tam giác nhỏ. Đáp án (E).

Khi cạnh gấp 3 thì diện tích gấp $3^2 = 9$, không phải gấp 3: nghĩ “gấp 3” sẽ ra $6 \cdot 3 = 18$. Chỉ đếm một tam giác cạnh 3 sẽ ra 9. Chỉ đếm tam giác nhỏ “đỉnh hướng lên” (mỗi tam giác cạnh 3 có $1 + 2 + 3 = 6$ cái) ra 36; trong cả lục giác, số tam giác hướng lên bằng số tam giác hướng xuống, nên quên hẳn một chiều ra 27.

4 (B) 8

Đọc biểu đồ: tháng 1–3 Lan đọc $4 + 6 + 5 = 15$ cuốn. Nhiều hơn 20% nghĩa là $15 \cdot 1,2 = 18$ cuốn trong tháng 4–6.

Tháng 4 và tháng 5 đã có $7 + 3 = 10$ cuốn, nên tháng 6 là $18 - 10 = 8$ cuốn. Đáp án (B).

Quên trừ hai tháng 4, 5 sẽ chọn 18; quên phần “nhiều hơn 20%” (cho hai quý bằng nhau) sẽ ra $15 - 10 = 5$; hiểu “20% nhiều hơn” thành “nhiều hơn 20 cuốn” sẽ ra $35 - 10 = 25$; quên cả 20% lẫn việc trừ hai tháng ra 15.

5 (B) 4

$36 = 4 \cdot 9$ với 4 và 9 nguyên tố cùng nhau, nên số phải chia hết cho cả 4 và 9.

Chia hết cho 4: hai chữ số cuối $\overline{2b}$ chia hết cho 4, tức $b \in \{0, 4, 8\}$ (20, 24, 28). Chia hết cho 9: tổng chữ số $7 + a + 2 + b = 9 + a + b$ chia hết cho 9, tức $a + b$ là 0, 9 hoặc 18.

$b = 0$: $a = 0$ hoặc $a = 9$ (7020, 7920); $b = 4$: $a = 5$ (7524); $b = 8$: $a = 1$ (7128). Có 4 số. Đáp án (B).

Quên rằng a được bằng 0 (bỏ 7020) sẽ ra 3; chỉ đòi b chia hết cho 4 sẽ thêm 7722 và 7326, ra 6; bỏ hẳn điều kiện chia hết cho 4 thì đếm ra 12; bỏ điều kiện chia hết cho 9 (chỉ xét chia hết cho 4) thì a tùy ý, ra $3 \cdot 10 = 30$.

6 (D) 5

Diện tích cần sơn một lớp: $4,5 \cdot 2,4 - 0,9 \cdot 2 = 10,8 - 1,8 = 9 \text{ m}^2$. Hai lớp là 18 m^2 .

$18 : 4 = 4,5$ hộp; không mua được nửa hộp nên phải mua 5 hộp. Đáp án (D).

Làm tròn xuống thành 4 hộp là thiếu sơn; quên trừ cửa ra $21,6 : 4 = 5,4$, tức 6 hộp; quên lớp thứ hai cho $9 : 4 = 2,25$, tức 3 hộp (hoặc 2 nếu còn làm tròn xuống).

7 (E) 300

Không cần tìm riêng từng quả: cộng hai lần cân. 5 quả táo và 5 quả lê nặng $760 + 740 = 1500 \text{ g}$, nên một táo và một lê nặng $1500 : 5 = 300 \text{ g}$. Đáp án (E).

(Trừ hai lần cân cho thấy táo nặng hơn lê 20 g, nên táo 160 g, lê 140 g — đó là các đáp án nhiễu cho người trả lời nhầm câu hỏi. Chia 1500 cho 10 quả ra 150 là khối lượng trung bình của một quả, chưa phải một táo cộng một lê.)

8 (C) 1

Trong tam giác cân, đường cao xuống đáy cũng là trung tuyến, chia tam giác thành hai tam giác vuông.

$\triangle ABC$: nửa đáy 3, cạnh huyền 5, nên chiều cao $\sqrt{25 - 9} = 4$ và diện tích $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12$. $\triangle DEF$: nửa đáy 4, chiều cao $\sqrt{25 - 16} = 3$, diện tích $\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 12$.

Hai diện tích bằng nhau, tỉ số là 1. Đáp án (C). (Cả hai đều ghép từ hai tam giác vuông 3–4–5, chỉ ghép theo hai cách khác nhau.)

Lấy tỉ số hai đáy $\frac{6}{8}$ là quên rằng chiều cao cũng thay đổi; bình phương tỉ số đó ra $\frac{9}{16}$ là áp dụng nhầm quy tắc hình đồng dạng cho hai tam giác không đồng dạng; chỉ so hai chiều cao ra $\frac{4}{3}$, bình phương tỉ số chiều cao đó ra $\frac{16}{9}$.

9 (E) $\frac{1}{4}$

Một khối 2×2 được xác định bởi ô góc trên-trái của nó; ô này nằm trong 4 cột đầu và 4 hàng đầu, nên có $4 \cdot 4 = 16$ khối.

Ô chính giữa (hàng 3, cột 3) nằm trong khối khi và chỉ khi ô góc trên-trái ở hàng 2 hoặc 3 và cột 2 hoặc 3: $2 \cdot 2 = 4$ khối. Xác suất là $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$. Đáp án (E).

Bây: chia cho 25 ô (thay vì 16 khối) sẽ ra $\frac{4}{25}$; tính xác suất chọn trúng ô giữa trong 25 ô là trả lời một câu hỏi khác ($\frac{1}{25}$); đếm vị trí khối theo 6×6 điểm lưới thay vì 4×4 ô góc ra $\frac{4}{36} = \frac{1}{9}$; chỉ nhận khối có ô giữa làm ô góc trên-trái ra $\frac{1}{16}$.

10 (C) 165

Ruy băng gồm hai vòng kín và cái nơ. Vòng thứ nhất chạy dọc chiều dài: qua mặt trên (30), xuống mặt bên (10), qua mặt đáy (30), lên mặt bên đối diện (10), dài $2 \cdot 30 + 2 \cdot 10 = 80 \text{ cm}$. Vòng thứ hai chạy theo chiều rộng: $2 \cdot 20 + 2 \cdot 10 = 60 \text{ cm}$.

Cộng cả nơ: $80 + 60 + 25 = 165 \text{ cm}$. Đáp án (C). (Mỗi chiều dài và chiều rộng được phủ 2 lần, chiều cao được phủ 4 lần.)

Quên cái nơ ra 140. Chỉ tính chiều cao 2 lần, kiểu $2(30 + 20 + 10) + 25$, ra 145. Tưởng một vòng chạy ngang quanh bốn mặt bên ($2 \cdot 30 + 2 \cdot 20 = 100$) rồi cộng vòng theo chiều rộng (60) ra 185, hoặc cộng vòng theo chiều dài (80) ra 205.

11 (A) 23

$3^5 = 243$ và $5^3 = 125$, nên $3^5 + 5^3 = 368$.

Chia liên tiếp cho 2: $368 = 2 \cdot 184 = 4 \cdot 92 = 8 \cdot 46 = 16 \cdot 23$, và 23 là số nguyên tố. Vậy $368 = 2^4 \cdot 23$; thừa số nguyên tố lớn nhất là 23. Đáp án (A).

Các đáp án nhiễu đều là chỗ dừng chia quá sớm: $368 = 2 \cdot 184 = 4 \cdot 92 = 8 \cdot 46$, nhưng 184, 92, 46 đều chẵn nên chưa phải số nguyên tố; chọn chính 368 là quên phân tích.

12 (B) 42

Diện tích hình chữ nhật là 120, nên $[ADE] = 24$. Tam giác ADE vuông tại D : $\frac{1}{2} \cdot AD \cdot DE = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot DE = 24$, suy ra $DE = 6$ và $CE = 15 - 6 = 9$.

Theo định lý Pythagoras, $AE = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Chu vi $ABCE$ là $15 + 8 + 9 + 10 = 42$. Đáp án (B).

Lấy nhầm $AE = AD = 8$ sẽ ra 40; dùng cả cạnh $CD = 15$ thay cho CE ra 48; chu vi hình chữ nhật $ABCD$ là 46 (cũng ra 46 nếu tính nhầm $AE = 8 + 6 = 14$ thay vì dùng Pythagoras); cộng mọi đoạn thẳng trong hình (cả AD và DE) ra 56.

13 (C) $\frac{1}{2}$

Có $4 \cdot 4 = 16$ kết quả đồng khả năng. Số nguyên tố có hai chữ số (trừ 2 và 5) phải tận cùng bằng chữ số lẻ, nên chữ số hàng đơn vị là 1, 3 hoặc 7; còn lại xét từng số.

đơn vị	các số	nguyên tố
1	11, 21, 31, 71	11, 31, 71
3	13, 23, 33, 73	13, 23, 73
7	17, 27, 37, 77	17, 37

Có 8 số nguyên tố, xác suất $\frac{8}{16} = \frac{1}{2}$. Đáp án (C).

Quên rằng hai lần quay có thể ra cùng một số (bỏ sót 11) sẽ ra $\frac{7}{16}$. Tương số tận cùng bằng 1 không thể nguyên tố (vì 1 không phải số nguyên tố) ra $\frac{5}{16}$. Chỉ loại bội của 3 (21, 27, 33) mà quên $77 = 7 \cdot 11$ ra $\frac{9}{16}$; coi mọi số tận cùng 1, 3, 7 đều nguyên tố ra $\frac{12}{16} = \frac{3}{4}$.

14 (A) 245 000

Mỗi bạn góp thêm 3 000 đồng thì cả lớp chuyển từ thiếu 20 000 sang thừa 25 000, tức thu thêm 45 000 đồng. Vậy lớp có $45\,000 : 3\,000 = 15$ học sinh.

Giá món quà: $15 \cdot 15\,000 + 20\,000 = 245\,000$ đồng (kiểm tra: $15 \cdot 18\,000 - 25\,000 = 245\,000$). Đáp án (A).

Lấy $15 \cdot 18\,000 = 270\,000$ rồi quên trừ phần thừa sẽ chọn nhầm 270 000; cộng thay vì trừ phần thừa ra 295 000; cộng phần thiếu vào 270 000 ra 290 000; lấy nhầm số tiền thừa làm số tiền thiếu, $15 \cdot 15\,000 + 25\,000$, ra 250 000.

15 (B) 1

Xét số dư khi chia cho 3. Nếu $p \neq 3$ thì p chia 3 dư 1 hoặc 2, nên p^2 chia 3 dư 1 (vì $1^2 = 1$, $2^2 = 4$). Khi đó $p^2 + 14$ chia 3 dư $1 + 14 = 15$, tức chia hết cho 3 — và nó lớn hơn 3, nên không phải số nguyên tố.

Chỉ còn $p = 3$: $9 + 14 = 23$ là số nguyên tố. Vậy có đúng 1 số p . Đáp án (B).

Thử vài số nhỏ ($p = 2$: 18; $p = 5$: 39; $p = 7$: 63) rồi kết luận “không có” sẽ chọn nhầm 0 — phải thử cả $p = 3$, chính là trường hợp mà lập luận chia hết cho 3 không áp dụng. Tương $5^2 + 14 = 39$ là số nguyên tố (thật ra $39 = 3 \cdot 13$) sẽ đếm ra 2; đoán “vô số” vì có vô số số nguyên tố là bỏ qua phép thử chia hết cho 3.

16 (D) 37

Từ một điểm bên ngoài, ta thấy nhiều nhất ba mặt của khối lớn (ba mặt chung một đỉnh). Các khối nhỏ *không* nhìn thấy là những khối không chạm vào ba mặt đó: chúng tạo thành một khối $3 \times 3 \times 3$, gồm 27 khối.

Vậy số khối nhìn thấy nhiều nhất là $64 - 27 = 37$. Đáp án (D).

Kiểm tra bằng bao hàm–loại trừ (inclusion–exclusion): $3 \cdot 16 - 3 \cdot 4 + 1 = 37$. Cộng $3 \cdot 16 = 48$ là đếm lặp các khối trên cạnh; trừ các cạnh mà quên cộng lại khối ở góc ra 36; 27 là số khối bị che; 16 là chỉ nhìn một mặt.

17 (D) $\frac{9}{28}$

Mỗi quân là một cặp *không thứ tự* $a|b$ với $0 \leq a \leq b \leq 6$. Liệt kê theo số nhỏ hơn a các quân có tổng ít nhất 8:

$a = 2$: 2|6; $a = 3$: 3|5, 3|6; $a = 4$: 4|4, 4|5, 4|6; $a = 5$: 5|5, 5|6; $a = 6$: 6|6. Có 9 quân, nên xác suất là $\frac{9}{28}$. Đáp án (D).

Đếm cặp có thứ tự trên $7 \cdot 7 = 49$ khả năng ra $\frac{15}{49}$ — nhưng các quân đôi không được chọn nhiều hơn quân thường, nên mô hình 49 cặp đều nhau là sai. Bỏ quên các quân đôi (chỉ còn 21 quân, 6 quân tốt) ra $\frac{2}{7}$. Hiểu “ít nhất 8” thành “lớn hơn 8” ra $\frac{6}{28} = \frac{3}{14}$. Tính như hai con xúc xắc 1–6 ra $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$.

18 (B) 8

Lúc đầu có $0,25 \cdot 40 = 10$ lít nước quả; lúc sau cần $0,4 \cdot 40 = 16$ lít.

Rút ra x lít đồ uống thì mất $0,25x$ lít nước quả, rồi đổ vào x lít nước quả nguyên chất: lượng nước quả tăng $x - 0,25x = 0,75x$.
 $0,75x = 16 - 10 = 6$, nên $x = 8$. Đáp án (B).

Bẫy: quên rằng phần rút ra cũng mang theo nước quả, viết $10 + x = 16$, sẽ ra 6; tưởng chỉ đổ thêm nước quả mà không rút ($10 + y = 0,4(40 + y)$) sẽ ra 10; viết nhầm $0,25x = 6$ (chỉ để ý phần nước quả bị rút) ra 24; 16 là lượng nước quả lúc sau, không phải lượng rút ra.

19 (A) 6

Hai đường tròn tiếp xúc ngoài thì khoảng cách hai tâm bằng tổng hai bán kính (tiếp điểm nằm trên đoạn nối tâm).

Ba cạnh tam giác tâm là $1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $2 + 3 = 5$. Vì $3^2 + 4^2 = 5^2$, tam giác vuông với hai cạnh góc vuông 3 và 4, diện tích $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$. Đáp án (A).

Quên hệ số $\frac{1}{2}$ ra 12; lấy nhầm cạnh huyền 5 làm cạnh góc vuông ra $\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 = 7,5$ hoặc $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 = 10$; cộng đường kính thay vì bán kính (cạnh 6, 8, 10) ra 24.

20 (E) 256

Giảm cùng một phần trăm mỗi tháng nghĩa là mỗi tháng giá được **nhân** với cùng một số r (không phải trừ cùng một lượng).

Sau hai tháng: $625r^2 = 400$, nên $r^2 = \frac{16}{25}$, $r = \frac{4}{5}$ (mỗi tháng giảm 20%).

Sau bốn tháng: $625r^4 = 400 \cdot \frac{16}{25} = 256$ nghìn đồng. Đáp án (E). (Hai tháng sau lại nhân với $\frac{16}{25}$ như hai tháng đầu.)

Bẫy chính: trừ đều 225 nghìn mỗi hai tháng sẽ ra $400 - 225 = 175$ (cộng phần trăm, “hai tháng giảm 36% thì bốn tháng giảm 72%”, cũng ra 175). Cộng phần trăm theo tháng, “bốn lần 20% là 80%”, ra $625 \cdot 0,2 = 125$. 144 là mức giảm của hai tháng sau và 225 là mức giảm của hai tháng đầu, không phải giá.

21 (D) 11

Lấy đi một nửa làm tròn lên thì số còn lại là một nửa làm tròn xuống. Theo dõi chống xu:

$2026 \rightarrow 1013 \rightarrow 506 \rightarrow 253 \rightarrow 126 \rightarrow 63 \rightarrow 31 \rightarrow 15 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$.

Có 11 mũi tên, nên sau 11 phút chống xu hết lần đầu. Đáp án (D).

Nhìn cách khác: mỗi phút chỉ “xoá chữ số cuối” trong cách viết nhị phân của số xu; vì $2^{10} = 1024 \leq 2026 < 2048 = 2^{11}$, số 2026 có 11 chữ số nhị phân, nên cần 11 phút. Lấy 2^{10} rồi trả lời 10 là lệch một bước — từ 1024 xu vẫn cần 11 lần chia đôi mới về 0 (dừng lại khi còn 1 xu cũng ra 10).

Đếm cả 12 số trong dãy (tính cả số 2026 ban đầu) ra 12; làm tròn xuống thay vì lên rồi lấy nốt đồng xu cuối cũng ra 12. Đếm số lần chống xu lẻ (phải làm tròn) ra 8. Hiểu “một nửa” là một nửa của 2026 xu ban đầu thì 2 phút là hết.

22 (D) $25\sqrt{3} + \frac{50\pi}{3}$

Đặt $M = (5, 0)$ trên cạnh đáy. Không có hàng rào thì con dê với tới nửa hình tròn tâm M bán kính 10 (phía trong ruộng). Đỉnh cao nhất của nửa hình tròn là $(5, 10)$, vừa chạm cạnh trên, nên chỉ hai cạnh bên cắt bớt vùng này.

Cung tròn gặp cạnh trái tại P với $MP = 10$ và khoảng cách ngang từ M là 5, nên P cao $\sqrt{100 - 25} = 5\sqrt{3}$. Tam giác vuông có cạnh huyền 10 và một cạnh góc vuông 5 là nửa tam giác đều, nên $\angle PMA = 60^\circ$ (A là góc trái dưới). Tương tự ở bên phải tại điểm Q .

Vùng với tới gồm hai tam giác vuông (mỗi cái diện tích $\frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5\sqrt{3} = \frac{25\sqrt{3}}{2}$) và hình quạt PMQ có góc $180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$, diện tích $\frac{60}{360} \cdot \pi \cdot 10^2 = \frac{50\pi}{3}$.

Tổng: $25\sqrt{3} + \frac{50\pi}{3} \approx 95,7 \text{ m}^2$. Đáp án (D).

Quên hàng rào ra cả nửa hình tròn $50\pi \approx 157$ — lớn hơn cả mảnh ruộng 100 m^2 , phải loại ngay. Chỉ tính hình quạt ra $\frac{50\pi}{3}$, chỉ tính hai tam giác ra $25\sqrt{3}$; quên một trong hai tam giác ra $\frac{25\sqrt{3}}{2} + \frac{50\pi}{3}$.

23 (A) $\frac{1}{4}$

Đếm trận đấu. Mỗi trận loại đúng một người, nên 8 người cần đúng 7 trận. Có $\binom{8}{2} = 28$ cặp người chơi, và mỗi trận là một cặp.

Mọi người đều ngang sức và được xếp chỗ ngẫu nhiên, nên mọi cặp có cùng xác suất gặp nhau, gọi là p . Số trận trung bình là $28p$, nhưng số trận luôn bằng 7, nên $28p = 7$, $p = \frac{1}{4}$. Đáp án (A).

Kiểm tra theo từng vòng: gặp ở vòng 1 với xác suất $\frac{1}{7}$; ở bán kết cần Minh nằm cùng nửa nhánh 4 người nhưng khác cặp ($\frac{2}{7}$) và cả hai thắng trận đầu ($\frac{1}{4}$): $\frac{1}{14}$; ở chung kết: $\frac{4}{7} \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{28}$. Tổng $\frac{4+2+1}{28} = \frac{1}{4}$.

Quên rằng cả hai người phải thắng (chỉ nhân một thừa số $\frac{1}{2}$ mỗi vòng) sẽ ra $\frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$; quên hẳn điều kiện thắng thì cộng ra $\frac{1}{7} + \frac{2}{7} + \frac{4}{7} = 1$; quên rằng muốn vào chung kết mỗi người phải thắng hai trận (dùng $\frac{1}{4}$ thay cho $\frac{1}{16}$) ra $\frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$. Tính theo Lan: trung bình Lan đấu $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$ trận, mỗi trận gặp Minh với xác suất $\frac{1}{7}$, ra $\frac{1}{4}$; cộng thêm số trận của Minh là đếm mỗi trận Lan–Minh hai lần, ra $\frac{1}{2}$.

24 (E) 13

Một hình vuông có hai đỉnh P, Q cho trước thì hoặc PQ là **cạnh** (2 hình vuông, mỗi phía một hình), hoặc PQ là **đường chéo** (đúng 1 hình vuông). Xét 6 cặp điểm trong A, B, C, D .

Bốn cặp là cạnh (như AB): nhận AB làm cạnh có chính $ABCD$ và hình vuông lật ra ngoài (nét đứt); nhận AB làm đường chéo có một hình vuông nhỏ. Mỗi cạnh cho 2 hình vuông mới: $4 \cdot 2 = 8$.

Hai cặp là đường chéo (AC, BD): nhận AC làm đường chéo chỉ có $ABCD$; nhận AC làm cạnh có 2 hình vuông lớn mới. Tổng $2 \cdot 2 = 4$.

Các hình vuông mới đều khác nhau (mỗi hình chỉ chứa đúng hai trong bốn điểm), nên tổng cộng $1 + 8 + 4 = 13$. Đáp án (E).

Quên các hình vuông dựng trên hai đường chéo ra $1 + 8 = 9$ (quên các hình vuông nhỏ nhận cạnh làm đường chéo cũng ra 9); mỗi đường chéo chỉ dựng một hình vuông thay vì hai ra 11; quên đếm chính $ABCD$ ra 12; chỉ nghĩ tới hình vuông nhận cạnh của $ABCD$ làm cạnh ra $1 + 4 = 5$.

25 (C) 144

Gọi a_n là số cách viết n thành tổng có thứ tự của các số lẻ dương. Tính tay vài giá trị: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ ($1 + 1$), $a_3 = 2$ ($3; 1 + 1$), $a_4 = 3$ ($1 + 3; 3 + 1; 1 + 1 + 1 + 1$) — gọi ý dãy Fibonacci.

Vì sao: xét số hạng cuối. Nếu nó là 1, bỏ nó đi được một cách viết $n - 1$. Nếu nó ≥ 3 , trừ nó đi 2 (vẫn lẻ, vẫn dương) được một cách viết $n - 2$. Cả hai phép biến đổi đều đảo ngược được, nên $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

Dãy: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, nên $a_{12} = 144$. Đáp án (C).

Lệch chỉ số sẽ chọn nhầm $89 = a_{11}$ hoặc $233 = a_{13}$; bỏ điều kiện “lẻ” thì mọi cách viết có thứ tự là $2^{11} = 2048$; không phân biệt thứ tự (chỉ đếm tập các số hạng) thì chỉ có 15 cách.

Practice Test 2 — Full Practice Test 2

1 (C)	2 (E)	3 (A)	4 (B)	5 (B)	6 (B)
7 (D)	8 (A)	9 (C)	10 (E)	11 (D)	12 (C)
13 (C)	14 (A)	15 (A)	16 (A)	17 (B)	18 (E)
19 (D)	20 (E)	21 (D)	22 (D)	23 (E)	24 (B)
25 (C)					

1 (C) $\frac{5}{6}$

Mỗi mẫu số là tích hai số liên tiếp: $2 = 1 \cdot 2$, $6 = 2 \cdot 3$, $12 = 3 \cdot 4$, $20 = 4 \cdot 5$, $30 = 5 \cdot 6$, và $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

Tổng bằng $(1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{5} - \frac{1}{6}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ — các số hạng ở giữa triệt tiêu nhau (telescoping). Đáp án (C).

Bây: cộng tử với tử, mẫu với mẫu ra $\frac{5}{70} = \frac{1}{14}$; viết tổng thành $1 - \frac{1}{30}$ (lấy mẫu số cuối) ra $\frac{29}{30}$; đếm lệch một số hạng ra $1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ hoặc $1 - \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$.

2 (E) 176

Đếm số **khoảng** (đợt cầu thang) chứ không đếm số tầng: từ tầng 2 lên tầng 9 là $9 - 2 = 7$ đợt, từ tầng 9 xuống tầng 5 là $9 - 5 = 4$ đợt.

Tổng $7 + 4 = 11$ đợt, mỗi đợt 16 bậc: $11 \times 16 = 176$ bậc. Đáp án (E).

Bầy “trồng cây” (fencepost): đếm tầng 2, 3, ..., 9 là 8 tầng rồi nhân 16 ra 128; chỉ tính lượt lên ra 112; chỉ tính lượt xuống ra 64; chỉ tính độ chênh giữa tầng cuối và tầng đầu ($5 - 2 = 3$ đợt) ra 48.

3 (A) $\frac{4}{9}$

Lấy hình vuông 6×6 (diện tích 36) trừ ba tam giác vuông ở góc nằm ngoài tam giác tô:

tam giác dưới-trái có hai cạnh góc vuông 6 và 2: diện tích 6; tam giác bên phải có hai cạnh 2 và 6: diện tích 6; tam giác trên-trái có hai cạnh 4 và 4: diện tích 8.

Phần tô: $36 - 6 - 6 - 8 = 16$, chiếm $\frac{16}{36} = \frac{4}{9}$. Đáp án (A).

Bầy: quên tam giác 4×4 ra $\frac{24}{36} = \frac{2}{3}$; dùng công thức dây giày mà quên chia đôi ra $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$; trả lời phần không tô ra $\frac{5}{9}$; tin rằng “tam giác có ba đỉnh trên cạnh hình vuông luôn chiếm một nửa” ra $\frac{1}{2}$ (chỉ đúng khi một cạnh tam giác trùng cạnh hình vuông).

4 (B) 45

Gom thành từng “bộ” gồm một tờ mỗi loại: mỗi bộ trị giá $1000 + 2000 + 5000 = 8000$ đồng.

Số bộ: $120\,000 : 8000 = 15$. Mỗi bộ có 3 tờ nên tổng cộng $15 \times 3 = 45$ tờ. Đáp án (B).

Bầy: dừng ở 15 (đó là số tờ mỗi loại); hiểu nhầm “số tiền mỗi loại bằng nhau” ($40\,000$ đồng mỗi loại: $40 + 20 + 8$ tờ) ra 68; coi tờ 2000 đồng là “mệnh giá trung bình” ($120\,000 : 2000$) ra 60; chia cho mệnh giá nhỏ nhất ra 120.

5 (B) 6

$45 = 5 \times 9$ (nguyên tố cùng nhau): số phải chia hết cho 5 và cho 9.

Chia hết cho 5 mà không có chữ số 0 $\rightarrow$ chữ số hàng đơn vị là 5. Số có dạng $\overline{ab5}$ với tổng chữ số $a + b + 5$ chia hết cho 9, tức $a + b = 4$ hoặc $a + b = 13$.

- $a + b = 4$, các chữ số khác nhau, khác 0 và khác 5: $(1, 3), (3, 1) \rightarrow 135, 315$ (loại 225 vì lặp chữ số).
- $a + b = 13$: $(4, 9), (9, 4), (6, 7), (7, 6) \rightarrow 495, 945, 675, 765$ (loại 585, 855 vì lặp chữ số 5).

Tổng cộng 6 số. Đáp án (B).

Bầy: quên điều kiện “khác nhau” ra 9; quên điều kiện “khác 0” ra 15; đếm mọi bộ ba chữ số của 45 ra 20; chỉ xét tổng chữ số bằng 9 ra 2.

6 (B) 81

Đường kính trong của mỗi vòng là $5 - 2 \times 0.5 = 4$ cm. Khi kéo căng, mép trong của hai vòng liền nhau tì vào nhau, nên mỗi vòng thêm vào chỉ làm chuỗi dài thêm 4 cm (hai vòng liền nhau chồng lên nhau đúng $2 \times 0.5 = 1$ cm).

Vòng đầu dài 5 cm, 19 vòng sau mỗi vòng thêm 4 cm: $5 + 19 \times 4 = 81$ cm. (Hoặc $20 \times 5 - 19 \times 1 = 81$.) Đáp án (B).

Bầy: không trừ phần chồng ra 100; chỉ trừ một lần ra 99; trừ 0.5 cm cho mỗi chỗ móc ra 90.5; lấy 20 lần đường kính trong ra 80 — quên hai mép ngoài của hai vòng đầu, cuối.

7 (D) 102

Trong 10 quyển, các quyển thứ 3, 6, 9 được giảm nửa giá — chỉ có 3 quyển (quyển thứ 10 chưa đủ một nhóm ba).

Số tiền: $10 \times 12 - 3 \times 6 = 120 - 18 = 102$ nghìn đồng. Đáp án (D).

Bầy: làm tròn lên 4 quyển giảm giá ra 96; tính “trung bình 10 nghìn một quyển” cho cả 10 quyển ra 100; chỉ tính ba nhóm 30 nghìn mà quên quyển thứ 10 ra 90; chỉ giảm một lần ra 114.

8 (A) 14

Gọi n là số thành viên lúc đầu. Tổng tuổi trước: $30n$; sau khi thêm người 60 tuổi: $30n + 60 = 32(n + 1)$.

Suy ra $30n + 60 = 32n + 32$, nên $2n = 28$, $n = 14$. Đáp án (A).

Cách nghĩ nhanh: người mới hơn trung bình mới $60 - 32 = 28$ tuổi; phần dư đó được “chia” để nâng mỗi người cũ thêm 2 tuổi, nên có $28 : 2 = 14$ người cũ.

Bẫy: lấy $60 - 30 = 30$ rồi chia 2 ra 15 — đó là số thành viên sau khi có người mới, chưa trừ 1; dừng ở $2n = 28$; viết $30n + 60 = 32n$ (quên người mới ở vế phải) ra 30; chia cả 60 tuổi của người mới cho mức tăng 2 ($60 : 2 = 30$ người, bớt người mới còn 29) — quên rằng 32 tuổi trong số đó là phần của chính người mới.

9 (C) 80

Đếm số cạnh hình vuông nhỏ nằm trên chu vi: hình chữ L có 12 cạnh như vậy (bằng chu vi hình vuông 3×3 bao quanh nó, vì “bậc thang” chỉ đổi chỗ các cạnh).

Cạnh mỗi hình vuông nhỏ: $48 : 12 = 4$. Diện tích: $5 \times 4^2 = 80$. Đáp án (C).

Bẫy: lấy $5 \times 4 = 20$ cạnh (tính cả cạnh chung bên trong) ra cạnh 2.4, diện tích 28.8; đếm thiếu còn 10 cạnh ra 115.2; tưởng hình là hình vuông có chu vi 48 (cạnh 12) ra 144; quên bình phương (5×4) ra 20.

10 (E) 72

Chuyển 6 viên từ A sang B làm hai hộp bằng nhau, nên lúc đầu A nhiều hơn B đúng 12 viên (không phải 6).

Nếu chuyển 6 viên từ B sang A : hiệu thành $12 + 12 = 24$, và lúc đó A gấp đôi B , tức B còn 24 viên. Vậy lúc đầu $B = 30$, $A = 42$, tổng 72. Đáp án (E).

Bẫy: tưởng A hơn B đúng 6 viên dẫn tới $B = 24$, $A = 30$, tổng 54; ở lần chuyển thứ hai chỉ cộng 6 vào A mà quên trừ 6 ở B ($b + 18 = 2b$) ra $B = 18$, $A = 30$, tổng 48; trả lời số bi của một hộp (30 hoặc 42).

11 (D) 414

Đếm theo số chữ số; mỗi chữ số được chọn trong 1–9 (9 cách).

• Một chữ số: 9 số. • Hai chữ số: $9 \times 9 = 81$ số. • Ba chữ số không vượt quá 500: chữ số hàng trăm là 1, 2, 3, 4 (số 500 có chữ số 0 nên bị loại; hàng trăm 5 thì các số 501 trở đi đã vượt 500), hai chữ số sau mỗi chữ số 9 cách: $4 \times 81 = 324$ số.

Tổng: $9 + 81 + 324 = 414$. Đáp án (D).

Bẫy: chỉ bỏ các số tận cùng bằng 0 ($500 - 50$) ra 450 — quên các số như 105, 207; chỉ đếm các số ba chữ số ra 324; quên các số một chữ số ra $81 + 324 = 405$; trả lời số các số không gõ được ra 86.

12 (C) 17

Mỗi lần gấp đôi, số lớp dây gấp đôi: $2 \rightarrow 4 \rightarrow 8$ lớp. Mỗi vết cắt đi qua cả 8 lớp, nên cắt sợi dây tại 8 điểm khác nhau.

Hai vết cắt cho $2 \times 8 = 16$ điểm cắt trên sợi dây ban đầu. Cắt một đoạn dây tại 16 điểm thì được $16 + 1 = 17$ mẫu (như trồng cây: số khoảng nhiều hơn số điểm cắt một). Đáp án (C).

Bẫy: quên +1 ra 16; tưởng gấp ba lần chỉ tạo 6 lớp (mỗi lần thêm 2 lớp) ra $2 \times 6 + 1 = 13$; tính đúng một vết cắt cho $8 + 1 = 9$ mẫu rồi nhân đôi cho hai vết cắt ra 18; coi 8 lớp là 8 sợi dây rời, mỗi sợi bị hai vết cắt chia thành 3 mẫu, ra 24 — quên rằng các lớp nối với nhau ở chỗ gấp.

13 (C) 6

Đặt $AE = CF = x$, khi đó $DE = DF = 10 - x$. Lấy hình vuông trừ ba tam giác vuông quanh $\triangle BEF$:

$$[ABE] = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot x = 5x, [CBF] = 5x, [DEF] = \frac{1}{2}(10 - x)^2. \text{ Do đó}$$

$$[BEF] = 100 - 10x - \frac{1}{2}(100 - 20x + x^2) = 50 - \frac{1}{2}x^2.$$

Các số hạng bậc nhất triệt tiêu nhau: $50 - \frac{1}{2}x^2 = 32$ cho $x^2 = 36$, $x = 6$. Đáp án (C).

Bẫy: quên tam giác DEF ($100 - 10x = 32$) ra 6.8; khai triển sai $(10 - x)^2 = 100 - x^2$ dẫn tới $x^2 - 20x + 36 = 0$, ra $x = 2$ (hoặc 18); giải đúng nhưng trả lời $DE = 10 - 6 = 4$.

14 (A) 162

Tìm xy trước: $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ nên $36 = 30 + 2xy$, suy ra $xy = 3$.

Hằng đẳng thức $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 216 - 3 \cdot 3 \cdot 6 = 216 - 54 = 162$. (Hoặc $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 6 \cdot (30 - 3) = 162$.) Đáp án (A).

Bẫy: viết $x^3 + y^3 = (x + y)^3$ ra 216; dùng $(x + y)(x^2 + y^2)$ mà quên trừ xy ra 180; quên nhân $(x + y)$ ở số hạng $3xy(x + y)$ ra $216 - 9 = 207$; sai dấu ra $216 + 54 = 270$.

15 (A) 6

Chặn dưới. Hình nhìn trước cho biết ba cột dọc của lưới (theo hướng nhìn) có cột cao nhất lần lượt là 3, 1, 2. Ba cột cao nhất đó nằm ở ba cột dọc khác nhau của lưới, nên khối có ít nhất $3 + 1 + 2 = 6$ khối lập phương.

Đặt được 6. Hình nhìn bên đòi ba hàng của lưới có cột cao nhất là 2, 3, 1 — cũng chính là ba số 3, 1, 2. Vậy đặt đúng ba cột: cột cao 3 ở (cột dọc cao 3, hàng cao 3), cột cao 1 ở (cột dọc cao 1, hàng cao 1), cột cao 2 ở (cột dọc cao 2, hàng cao 2); sáu ô còn lại để trống. Cả hai hình nhìn đều đúng. Đáp án (A).

Bẫy: tính số khối *nhieu nhất* (mỗi ô cao bằng số nhỏ hơn trong hai giới hạn: $6 + 3 + 5$) ra 14; cộng hai hình nhìn ra $6 + 6 = 12$; cho mỗi cột dọc đầy đủ ba ô cùng chiều cao ($3 \times (3 + 1 + 2)$) ra 18; lấp đầy khối $3 \times 3 \times 3$ ra 27.

16 (A) 36

Đếm số cặp nhảy theo hai cách (double counting): đếm từ phía các bạn nam được $3b$; đếm từ phía các bạn nữ được $2g$. Hai cách đếm cùng một tập nên $3b = 2g$.

Với $b + g = 30$: $3b = 2(30 - b) \Rightarrow 5b = 60 \Rightarrow b = 12, g = 18$. Số cặp: $3 \times 12 = 36$. Đáp án (A).

Bẫy: cộng $3b + 2g = 72$ (mỗi cặp bị đếm hai lần); coi mọi bạn đều nhảy 3 lần ($30 \times 3 = 90$, hoặc chia đôi ra 45); coi mọi bạn đều nhảy 2 lần ra 60.

17 (B) 3

Ảnh của tam giác qua đường $x = 3$ có các đỉnh $(5, 1)$, $(1, 1)$, $(5, 4)$: cùng cạnh đáy từ $(1, 1)$ đến $(5, 1)$, nhưng góc vuông nằm ở bên phải.

Phần chung là tam giác có đáy là đoạn từ $(1, 1)$ đến $(5, 1)$ (dài 4) và đỉnh là giao điểm hai cạnh huyền. Do đối xứng, giao điểm nằm trên $x = 3$. Cạnh huyền ban đầu đi từ $(1, 4)$ xuống $(5, 1)$: mỗi khi x tăng 1 thì y giảm $\frac{3}{4}$, nên tại $x = 3$ có $y = 4 - \frac{3}{2} = 2.5$.

Chiều cao phần chung: $2.5 - 1 = 1.5$. Diện tích: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1.5 = 3$. Đáp án (B).

Bẫy: đo chiều cao từ trục x (2.5 thay vì 1.5) ra 5; chỉ tính một nửa phần chung (bên trái $x = 3$) ra 1.5; trả lời diện tích tam giác (6) hay diện tích phần hợp ($6 + 6 - 3 = 9$).

18 (E) 16

Nếu số hai chữ số là $\overline{ab}$ thì số sáu chữ số là $\overline{ababab} = \overline{ab} \times 10000 + \overline{ab} \times 100 + \overline{ab} = \overline{ab} \times 10101$.

Vậy mọi số như thế đều chia hết cho 10101; ngược lại, một số chia hết *mọi* số như thế thì chia hết 10×10101 và 11×10101 , nên chia hết hiệu của chúng là 10101. Các số cần đếm chính là các ước dương của 10101.

$10101 = 3 \times 3367 = 3 \times 7 \times 481 = 3 \times 7 \times 13 \times 37$ (bốn số nguyên tố khác nhau), nên số ước là $2^4 = 16$. Đáp án (E).

Bẫy: chỉ đếm các ước nguyên tố ra 4; quên đếm ước 1 ra 15; nhớ nhầm mẹo $\overline{abcabc} = \overline{abc} \times 1001$ rồi đếm ước của $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ ra 8; nhầm với dạng $\overline{abab} = \overline{ab} \times 101$ ra 2 ước của 101.

19 (D) $\frac{1}{105}$

Coi các thẻ cùng chữ là như nhau: số cách xếp chữ khác nhau là $\frac{7!}{2!2!2!} = 630$ (ba chữ R, O, T mỗi chữ hai lần, A một lần) — và các cách này đồng khả năng.

Dãy đọc xuôi ngược như nhau (palindrome): chữ đứng giữa phải là chữ xuất hiện số lẻ lần, tức A. Ba vị trí đầu là một hoán vị của R, O, T ($3! = 6$ cách); ba vị trí cuối bị xác định. Xác suất $= \frac{6}{630} = \frac{1}{105}$. Đáp án (D).

Bẫy: lấy 6 chia cho $7! = 5040$ (tử đếm theo chữ, mẫu đếm theo thẻ) ra $\frac{1}{840}$; tưởng chỉ có một dãy (ROTATOR) ra $\frac{1}{630}$, hay chia dãy đó cho $7!$ ra $\frac{1}{5040}$; cho phép bất kỳ chữ nào đứng giữa ra $\frac{24}{630} = \frac{4}{105}$.

20 (E) 37

Đặt toạ độ: các điểm là (x, y) với $0 \leq x, y \leq 4$, trừ bốn góc $(0, 0), (0, 4), (4, 0), (4, 4)$. Phân loại hình vuông theo “bước cạnh” (p, q) : từ một đỉnh sang đỉnh kế đi ngang p và dọc q .

- Cạnh nằm ngang, dài 1: 12 hình (dài ngang có $4 \times 2 = 8$ ô, hai đầu dài dọc thêm 4 ô). Dài 2: 5 hình (một ở giữa, bốn hình lệch về bốn nhánh). Dài 3 hoặc 4: không có, vì luôn cần một điểm góc đã bị bỏ. Cộng 17.
- Bước $(1, 1)$: hình vuông “đứng trên một đỉnh”, có tâm là một điểm mà cả bốn điểm kế trên, dưới, trái, phải đều có mặt — đó là 9 điểm của khối 3×3 ở giữa: 9 hình.
- Bước $(1, 2)$ hoặc $(2, 1)$: 8 hình; bước $(1, 3)$ hoặc $(3, 1)$: 2 hình; bước $(2, 2)$: 1 hình (nối bốn đầu mút $(2, 0), (4, 2), (2, 4), (0, 2)$).

Tổng: $17 + 9 + 8 + 2 + 1 = 37$. Đáp án (E).

Bấy: chỉ đếm hình vuông có cạnh nằm ngang ra 17; thêm loại nghiêng dễ thấy $(1, 1)$ rồi dừng ra 26; quên loại $(1, 2)$ ra 29; quên loại $(1, 3)$ ra 35.

21 (D) 4

Xét ba trường hợp theo cặp cạnh bằng nhau. Đường thẳng đi qua B và $(0, 8)$; viết điểm của nó dưới dạng $C = (6 - 3t, 4t)$, khi đó $BC = 5|t|$.

- $CA = CB$: C nằm trên trung trực $x = 3$ của AB , tức $C = (3, 4)$: 1 điểm.
- $BC = BA = 6$: $5|t| = 6, t = \pm \frac{6}{5}$: 2 điểm $(2.4, 4.8)$ và $(9.6, -4.8)$.
- $AC = AB = 6$: $(6 - 3t)^2 + (4t)^2 = 36 \iff 25t^2 - 36t = 0 \iff t = 0$ hoặc $t = \frac{36}{25}$. Nhưng $t = 0$ cho $C = B$ — không có tam giác! Chỉ còn 1 điểm $(1.68, 5.76)$.

Bốn điểm này khác nhau và không điểm nào nằm trên đường thẳng AB (trục hoành), nên có $1 + 2 + 1 = 4$ vị trí. Đáp án (D).

Bấy: quên loại $C = B$ (đường tròn tâm A bán kính 6 đi qua chính B) ra 5; mỗi trường hợp chỉ lấy một điểm ra 3; chỉ nghĩ tới tam giác cân tại C ra 1; thấy B nằm trên đường tròn tâm A rồi bỏ luôn cả trường hợp $AC = AB$, lại quên trường hợp $CA = CB$, chỉ còn hai điểm của trường hợp $BC = BA$, ra 2.

22 (D) 27

Chia lục giác đều thành 24 tam giác đều nhỏ: mỗi tam giác đều trong 6 tam giác $OAB, OBC, \dots$ (O là tâm) chia tiếp thành 4 tam giác nhỏ bằng nối trung điểm. Mỗi tam giác nhỏ có diện tích $72 : 24 = 3$.

Gọi cạnh lục giác là 2. M và N cách tâm một khoảng bằng đường cao tam giác đều cạnh 2, tức $\sqrt{3}$, và $\angle MON = 120^\circ$; do đó $MN = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3$. Tam giác đều MNP cạnh 3 gồm 9 tam giác đều cạnh 1, tức 9 tam giác nhỏ: diện tích $9 \times 3 = 27$. Đáp án (D).

(Tỉ số $\frac{27}{72} = \frac{3}{8}$.)

Bấy: nhầm với tam giác ACE (nối các đỉnh cách một), có diện tích bằng nửa lục giác, ra 36; lấy tam giác nối trung điểm của ACE ra 9; tưởng MN bằng cạnh lục giác (tam giác đều cạnh 2 gồm 4 tam giác nhỏ) ra 12; áp dụng sai quy tắc “nối trung điểm thì được $\frac{1}{4}$ ” cho lục giác ra $72 : 4 = 18$.

23 (E) 7

Tích N chia hết cho 25 (có thừa số 5 và 15) và là số lẻ, nên hai chữ số cuối là 25 hoặc 75. Để phân biệt, xét số dư khi chia cho 4: $25 \equiv 1, 75 \equiv 3 \pmod{4}$.

Các số lẻ có dạng $4k + 1$ (dư 1) hoặc $4k + 3$ (dư $3 \equiv -1$). Từ 1 đến 99 có 25 số dạng $4k + 3$ (3, 7, ..., 99), nên $N \equiv (-1)^{25} = -1 \equiv 3 \pmod{4}$.

Vậy N tận cùng bằng 75, chữ số hàng chục là 7. Đáp án (E).

Bấy: đếm sai số các thừa số dạng $4k + 3$ (ra số chẵn, như 24) thì kết luận $N \equiv 1 \pmod{4}$, tận cùng 25, ra 2; quen với bài “số chữ số 0 tận cùng của giai thừa” nên tưởng tích nhiều thừa số 5 thì tận cùng 00, ra 0 — nhưng tích lẻ, không có thừa số 2; trả lời luôn số dư 3 khi chia cho 4 ra 3; trả lời chữ số hàng đơn vị ra 5.

24 (B) 8

Số đỉnh đỏ. Mỗi đỉnh thuộc 3 mặt. Cộng số đỉnh đỏ trên 6 mặt được $6 \times 2 = 12$, và mỗi đỉnh đỏ được đếm 3 lần, nên có đúng 4 đỉnh đỏ.

Xét mặt trên (có đúng 2 đỏ). Trường hợp 1: hai đỉnh đỏ của mặt trên là hai đầu một **cạnh** (4 cách). Mặt bên chứa cạnh đó đã đủ 2 đỏ nên cạnh đáy của nó phải xanh cả hai; mặt bên đối diện chưa có đỏ nên cạnh đáy của nó đỏ cả hai. Mọi mặt đều thoả: 4 cách.

Trường hợp 2: hai đỉnh đỏ của mặt trên nằm trên một **đường chéo** (2 cách chọn đường chéo). Mỗi mặt bên chứa đúng một đỉnh đỏ ở trên nên cần đúng một đỉnh đỏ ở dưới; hai đỉnh đỏ ở đáy phải là một đường chéo của đáy — có 2 đường chéo, cả hai đều được. $2 \times 2 = 4$ cách.

Tổng $4 + 4 = 8$. Đáp án (B). (Nhìn tổng thể: 2 cách là bốn đỉnh của một tứ diện đều, 6 cách là hai cạnh đối nhau của hình lập phương.)

Bây: chỉ thấy các cặp cạnh đối nhau ra 6; đếm “chọn một cạnh đỏ (12 cách), cạnh đối tự xác định” làm mỗi cấu hình bị đếm hai lần ra 12 (thêm hai tứ diện ra 14); bỏ qua điều kiện mặt mà chỉ chọn 4 đỉnh đỏ ra $\binom{8}{4} = 70$.

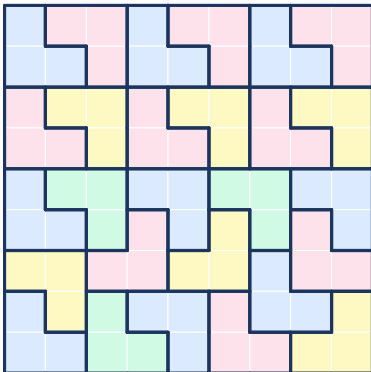
25 (C) 27

Điều kiện cần. Mỗi mảnh có diện tích 3, nên $3 \mid n^2$, tức $3 \mid n$: chỉ còn $n = 3, 6, 9, 12$.

$n = 3$ **không được**. Bốn ô góc của hình 3×3 đôi một cách nhau 2 ô, nên một mảnh chữ L (nằm gọn trong một hình vuông 2×2) phủ được nhiều nhất một ô góc. Cần 4 mảnh cho 4 góc, nhưng chỉ có $9 : 3 = 3$ mảnh. Vô lý.

$n = 6$ **và** $n = 12$ **được**. Hai mảnh chữ L ghép thành hình chữ nhật 2×3 , và hình vuông 6×6 , 12×12 chia được thành các hình 2×3 .

$n = 9$ **được** — điều bất ngờ: dù 9×9 không chia được thành các hình 2×3 (vì 9 lẻ), vẫn có cách lát, ví dụ như hình dưới (27 mảnh).



Vậy các giá trị là 6, 9, 12, tổng 27. Đáp án (C).

Bây: chỉ kiểm tra diện tích, nhận cả $n = 3$, ra $3 + 6 + 9 + 12 = 30$; nghĩ rằng phải ghép từ các hình 2×3 nên n phải chẵn, bỏ $n = 9$, ra $6 + 12 = 18$; mắc cả hai lỗi (nhận $n = 3$, bỏ $n = 9$) ra $3 + 6 + 12 = 21$; không xét điều kiện nào, cộng mọi n từ 1 đến 12, ra 78.

Practice Test 3 — Full Practice Test 3

1 (D)	2 (A)	3 (D)	4 (A)	5 (C)	6 (A)
7 (D)	8 (A)	9 (C)	10 (E)	11 (B)	12 (B)
13 (D)	14 (E)	15 (E)	16 (E)	17 (E)	18 (C)
19 (C)	20 (B)	21 (B)	22 (B)	23 (A)	24 (D)
25 (C)					

1 (D) 36

Một ngày có $24 \cdot 60 = 1440$ phút. $2,5\% = \frac{2,5}{100} = \frac{1}{40}$, nên $2,5\%$ của một ngày là $1440 : 40 = 36$ phút. Đáp án (D).

Tính theo giờ cũng được: $2,5\% \cdot 24 = 0,6$ giờ $= 0,6 \cdot 60 = 36$ phút. Bây nằm ở bước đổi đơn vị: 0,6 giờ *không* phải 60 phút hay 6 phút; dừng ở 0,6 là trả lời bằng giờ; dời dấu phẩy sai một chữ số (0,25%) ra 3,6.

2 (A) 38

Từ 7:30 đến 11:15 là 3 giờ 45 phút = 225 phút. Năm tiết thì có 4 lần nghỉ (giữa tiết 1–2, 2–3, 3–4, 4–5): một lần 20 phút và ba lần 5 phút, tổng 35 phút.

Thời gian học là $225 - 35 = 190$ phút, mỗi tiết $190 : 5 = 38$ phút. Đáp án (A).

Đếm thiếu một lần nghỉ (chỉ 3 lần) ra $(225 - 30) : 5 = 39$; coi mọi lần nghỉ đều 5 phút ra 41; quên lần nghỉ dài ra $(225 - 15) : 5 = 42$; quên hẳn giờ nghỉ ra 45.

3 (D) 116

Diện tích sàn: $7 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 35 - 6 = 29 \text{ m}^2$. Một viên gạch cạnh $50 \text{ cm} = 0,5 \text{ m}$ có diện tích $0,5 \cdot 0,5 = 0,25 \text{ m}^2$, tức 4 viên phủ một mét vuông.

Số viên: $29 \cdot 4 = 116$. Đáp án (D). (Đếm trực tiếp: hình chữ nhật $14 \times 10 = 140$ viên, trừ góc khuyết $6 \times 4 = 24$ viên.)

Bẫy: chia 29 cho 0,5 (cạnh, không phải diện tích viên gạch) ra 58; quên trừ góc khuyết ra 140; 29 là diện tích; nhầm chu vi 24 m với diện tích ra $24 \cdot 4 = 96$.

4 (A) 24

Chia trường hợp theo đường đi.

Đi qua B: $3 \cdot 2 = 6$ cách. Lúc về, nếu về qua B thì chỉ còn 1 đường C–B và 2 đường B–A chưa dùng: 2 cách; hoặc về bằng đường thẳng C–A: 1 cách. Được $6 \cdot 3 = 18$ chuyển.

Đi đường thẳng: 1 cách; lúc về bắt buộc qua B: $3 \cdot 2 = 6$ cách. Được 6 chuyển.

Tổng $18 + 6 = 24$. Đáp án (A).

Không có điều kiện thì có $7 \cdot 7 = 49$ chuyển; chỉ cấm “về đúng tuyến đã đi” ra $7 \cdot 6 = 42$; quên rằng đường thẳng A–C cũng không được đi hai lần ra 25; về qua B mà quên loại các đường đã dùng thì ra 48.

5 (C) 91

$2^{10} = 1024$ nằm giữa $10^3 = 1000$ và $11^3 = 1331$, nên lập phương nhỏ nhất thoả mãn là 11^3 .

$2^{20} = (2^{10})^2 = 1\,048\,576$. Ta có $101^3 = 1\,030\,301 < 2^{20} < 102^3 = 1\,061\,208$, nên lập phương lớn nhất là 101^3 .

Các số $n = 11, 12, \dots, 101$: có $101 - 11 + 1 = 91$ số. Đáp án (C).

Bẫy: làm tròn $2^{20} \approx 10^6 = 100^3$ rồi lấy $n \leq 99$ ra 89 (hoặc tính cả $n = 10$ ra 90) — thật ra 2^{20} lớn hơn một triệu khá nhiều. Quên cận dưới thì đếm $n = 1, \dots, 101$ ra 101 (hoặc $1, \dots, 100$ ra 100).

6 (A) 15

Bốn năm nữa mỗi người thêm 4 tuổi, nên tổng tuổi hiện nay là $32 - 8 = 24$. Mai gấp 3 lần Bảo nên Bảo $24 : 4 = 6$ tuổi, Mai 18 tuổi.

Hiệu số tuổi luôn là $18 - 6 = 12$. Khi Mai gấp 5 lần Bảo thì hiệu bằng 4 lần tuổi Bảo lúc đó: Bảo $12 : 4 = 3$ tuổi, Mai 15 tuổi (tức 3 năm trước). Đáp án (A).

Chỉ trừ 4 thay vì 8 hay coi 32 là tổng hiện nay sẽ ra Bảo 8, Mai 24, hiệu 16 và đáp số sai 20; 18 là tuổi Mai hiện nay, 22 là tuổi Mai 4 năm nữa; $5 \cdot 6 = 30$ là lấy 5 lần tuổi Bảo hiện nay.

7 (D) 6075

Dãy lặp lại theo khối 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2 gồm 8 số (số 1 tiếp theo đã là đầu khối mới), tổng mỗi khối là 24.

$2026 = 8 \cdot 253 + 2$: có 253 khối đủ và thêm hai số 1, 2. Tổng là $253 \cdot 24 + 1 + 2 = 6072 + 3 = 6075$. Đáp án (D).

Bỏ quên hai số lẻ ra 6072, chỉ thêm số 1 ra 6073; làm tròn lên 254 khối ra 6096. Coi chu kỳ là 9 số 1, 2, 3, 4, 5, 4, 3, 2, 1 (tính số 1 hai lần) ra $225 \cdot 25 + 1 = 5626$.

8 (A) 25

Hình chữ nhật có chiều rộng w , chiều dài $2w$, chu vi $2(w + 2w) = 6w = 60$, nên $w = 10$: hình chữ nhật 10×20 , diện tích 200 cm^2 .

Hình vuông có cạnh $60 : 4 = 15$, diện tích 225 cm^2 . Chênh lệch $225 - 200 = 25 \text{ cm}^2$. Đáp án (A).

Lấy chu vi bằng nửa chu vi (quên nhân 2) cho hình chữ nhật 20×40 và hình vuông cạnh 30, chênh $900 - 800 = 100$; 900 là diện tích hình vuông cạnh 30 ấy. 200 và 225 là diện tích từng hình, chưa trừ.

9 (C) 8

Gọi số phiếu là $a > b > c > d \geq 0$. Nếu người thắng có a phiếu thì ba người còn lại có nhiều nhất $a - 1, a - 2, a - 3$ phiếu, nên tổng nhiều nhất là $4a - 6$.

Cần $4a - 6 \geq 25$, tức $a \geq 7,75$, nên $a \geq 8$. Và 8 đạt được: $8 + 7 + 6 + 4 = 25$. Đáp án (C).

Lấy $25 : 4 \approx 6$ rồi chọn 6 hoặc 7 là quên điều kiện “không ai bằng nhau” (7 chỉ đủ khi cho phép 7, 6, 6, 6). Chia $7 + 6 + 5 + 4 = 22$ rồi dồn 3 phiếu thừa cho người thắng ra 10 — hợp lệ nhưng chưa nhỏ nhất. 13 là số phiếu quá bán, để không đòi.

10 (E) 105

Tam giác cân tại A nên $\angle ABC = \angle ACB = \frac{180^\circ - 40^\circ}{2} = 70^\circ$. Tia phân giác chia đôi: $\angle ABD = 35^\circ$.

Trong $\triangle ABD$: $\angle ADB = 180^\circ - 40^\circ - 35^\circ = 105^\circ$. Đáp án (E).

75° là góc kề bù $\angle BDC$ — đọc nhầm góc trên hình; 70° là $\angle C$, 35° là nửa góc B , 40° là góc A .

11 (B) 12

Tính từ trong ra ngoài. $x \diamond 2 = 2x - x + 2 = x + 2$.

$(x + 2) \diamond 3 = 3(x + 2) - (x + 2) + 3 = 2(x + 2) + 3 = 2x + 7$. Giải $2x + 7 = 31$: $x = 12$. Đáp án (B). (Thử lại: $12 \diamond 2 = 14$, $14 \diamond 3 = 42 - 14 + 3 = 31$.)

Phép $\diamond$ không có tính kết hợp: tính $x \diamond (2 \diamond 3) = x \diamond 7 = 6x + 7$ sẽ ra 4. Dừng ở $2x = 24$ là quên chia 2; chuyển về sai dấu ($2x = 31 + 7$) ra 19; quên phép $\diamond 3$ bên ngoài ($x + 2 = 31$) ra 29.

12 (B) 1012

Phân tích $2026 = 2 \cdot 1013$. Kiểm tra 1013 là số nguyên tố: $\sqrt{1013} < 32$ và 1013 không chia hết cho 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31.

Số $n < 2026$ nguyên tố cùng nhau với 2026 khi và chỉ khi n lẻ và không chia hết cho 1013. Từ 1 đến 2025 có 1013 số lẻ; trong đó chỉ có 1013 là bội của 1013 (vì $3 \cdot 1013 > 2026$). Còn $1013 - 1 = 1012$ số. Đáp án (B).

Bấy: đếm mọi số lẻ ra 1013 (quên chính số 1013); bỏ cả số 1 ra 1011 — nhưng $\gcd(1, 2026) = 1$. Chỉ loại bội của 1013 mà quên loại số chẵn ra 2024.

13 (D) 72π

Bán kính OT vuông góc với tiếp tuyến AB tại tiếp điểm T ; tam giác OAB cân tại O nên T là trung điểm, $AT = 6$.

Gọi R, r là bán kính hai đường tròn. Pythagoras trong tam giác vuông OTA : $R^2 = r^2 + 6^2$, nên diện tích vành khăn là $\pi R^2 - \pi r^2 = 36\pi$ — không cần biết từng bán kính.

Vành khăn bằng hình tròn nhỏ: $\pi r^2 = 36\pi$. Hình tròn lớn = vành khăn + hình tròn nhỏ = 72π . Đáp án (D).

Dừng ở 36π là mới tính vành khăn. Nghĩ “diện tích gấp đôi thì bán kính gấp đôi” ($R = 2r$) dẫn tới $3\pi r^2 = 36\pi$, hình tròn nhỏ 12π , hình tròn lớn 48π — sai vì diện tích tỉ lệ với bình phương bán kính. Lấy $AB = 12$ làm bán kính ra 144π .

14 (E) 9.5

Bốn bài đầu có tổng $4 \cdot 7 = 28$. Gọi điểm bài 5 là x ; điểm trung bình của cả năm bài là $\frac{28+x}{5}$.

Để cho $x = \frac{28+x}{5} + 2$, tức $5x = 28 + x + 10$, $4x = 38$, $x = 9,5$. Đáp án (E). (Kiểm tra: trung bình năm bài là $\frac{37,5}{5} = 7,5$, và $9,5 = 7,5 + 2$.)

Lấy “trung bình” là trung bình cũ ($7 + 2$) ra 9; nghĩ trung bình chỉ tăng $\frac{2}{5}$ (thành 7,4) ra 9,4; 7,5 là trung bình mới chứ không phải điểm bài 5; chuyển về sai dấu ($5x = 28 + x - 10$) ra 4,5.

15 (E) 17

Tử số n bị đổi trạng thái một lần cho mỗi ước lẻ của n . Tử mở ở cuối khi và chỉ khi n có lẻ số ước lẻ.

Viết $n = 2^a \cdot m$ với m lẻ; các ước lẻ của n chính là các ước của m . Số ước của m lẻ khi và chỉ khi m là số chính phương. Vậy $n = 2^a \cdot m^2$ với m lẻ.

Liệt kê: $m = 1$: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64; $m = 3$: 9, 18, 36, 72; $m = 5$: 25, 50, 100; $m = 7$: 49, 98; $m = 9$: 81. Có $7 + 4 + 3 + 2 + 1 = 17$ tử mở. Đáp án (E).

Bẫy: 10 là đáp số của bài quen thuộc (đủ 100 học sinh, chỉ các số chính phương); chỉ thấy các lũy thừa của 2 (chỉ có một ước lẻ) ra 7; chỉ thấy các số chính phương lẻ ra 5; gộp hai họ đó mà quên các số như 18, 36, 50, 72, 98, 100 ra 11.

16 (E) 13

$|x - 3| + |x + 5|$ là tổng khoảng cách từ x tới 3 và tới -5 trên trục số.

Nếu x nằm giữa -5 và 3, tổng luôn bằng $8 \leq 12$. Nếu $x > 3$, tổng là $(x - 3) + (x + 5) = 2x + 2 \leq 12$, tức $x \leq 5$. Nếu $x < -5$, tổng là $-2x - 2 \leq 12$, tức $x \geq -7$.

Vậy $-7 \leq x \leq 5$: có $5 - (-7) + 1 = 13$ số nguyên. Đáp án (E).

Quên cộng 1 khi đếm số nguyên trong đoạn ra 12; bỏ hai đầu mút (coi như bất đẳng thức chặt) ra 11; chỉ đếm đoạn giữa từ -5 đến 3 ra 9; 8 là độ dài đoạn đó chứ không phải số các số nguyên.

17 (E) $\frac{5}{14}$

Có $\binom{8}{2} = 28$ cặp đồng khả năng. Tích chia hết cho 6 khi nó chia hết cho cả 2 và 3; trong các số 1–8 chỉ có 3 và 6 chia hết cho 3.

Cặp chứa 6: tích luôn chia hết cho 6, có 7 cặp. **Cặp chứa 3 nhưng không chứa 6:** số kia phải chẵn, là 2, 4 hoặc 8: 3 cặp.

Có 10 cặp, xác suất $\frac{10}{28} = \frac{5}{14}$. Đáp án (E).

Chỉ đếm cặp chứa 6 ra $\frac{1}{4}$; chỉ đếm cặp “3 với số chẵn” ra $\frac{3}{28}$; cho phép rút lại cùng thẻ và tính cặp có thứ tự (21 trong 64) là bài khác; ghép thẻ 3 với mọi thẻ chẵn (2, 4, 6, 8) mà quên các cặp “6 với số lẻ” ra $\frac{4}{28} = \frac{1}{7}$.

18 (C) 7

Tách phần nguyên: $\frac{n+18}{n-2} = \frac{(n-2)+20}{n-2} = 1 + \frac{20}{n-2}$. Vậy cần $n-2$ là ước (dương hoặc âm) của 20.

Với n nguyên dương thì $n-2 \geq -1$. Các ước của 20 không nhỏ hơn -1 : $-1, 1, 2, 4, 5, 10, 20$, cho $n = 1, 3, 4, 6, 7, 12, 22$. Có 7 số. Đáp án (C). (Thử $n = 1$: $\frac{19}{-1} = -19$ là số nguyên.)

Chỉ xét ước dương của 20 ra 6 — quên $n = 1$; tính cả ước -2 ra $n = 0$ (không dương) được 8; lấy mọi ước $\pm$ của 20 ra 12.

Tách sai $n+18 = (n-2) + 16$ (trừ 2 thay vì cộng 2) rồi đếm ước dương của 16 ra 5.

19 (C) $\frac{40}{3}$

Thể tích nước: $20 \cdot 15 \cdot 10 = 3000 \text{ cm}^3$. Thử giả sử khối lập phương còn nhô lên khỏi mặt nước: khi đó nước chỉ trải trên phần đáy còn trống $300 - 100 = 200 \text{ cm}^2$, độ sâu $3000 : 200 = 15 \text{ cm}$ — nhưng $15 > 10$, tức nước đã ngập khối, mâu thuẫn.

Vậy khối ngập hoàn toàn: nước cộng khối chiếm $3000 + 1000 = 4000 \text{ cm}^3$ trên đáy 300 cm^2 , độ sâu $\frac{4000}{300} = \frac{40}{3} \approx 13,3 \text{ cm}$. Đáp án (C).

Bẫy chính là 15: phép tính “trừ diện tích khối” chỉ đúng khi khối nhô lên. $\frac{10}{3}$ là mực nước dâng thêm chứ chưa phải độ sâu; lấy thể tích khối là $10 \cdot 10 = 100$ ra $10 + \frac{1}{3} = \frac{31}{3}$; nghĩ nước dâng đúng bằng chiều cao khối ra 20.

20 (B) 37

Mỗi bên cần $\frac{1200}{50} + 1 = 25$ cột (nhớ cột ở cả hai đầu). Chỉ cần đếm các vị trí mới trùng với cột cũ.

Phía bắc: vị trí vừa là bội của 40 vừa là bội của 50 là bội của $\text{lcm}(40, 50) = 200$: 0, 200, ..., 1200 — 7 cột giữ lại, cần $25 - 7 = 18$ cột mới.

Phía nam: cột cũ ở $20 + 40k$. Số này là bội của 50 khi $20 + 40k \in \{100, 300, 500, 700, 900, 1100\}$ (các bội của 50 có dạng $200m + 100$; kiểm tra $100 = 20 + 40 \cdot 2$). Có 6 cột giữ lại, cần 19 cột mới.

Tổng $18 + 19 = 37$. Đáp án (B).

Coi phía nam giống phía bắc (7 cột giữ lại) ra 36; coi cả hai bên đều giữ 6 cột ra 38; quên giữ cột cũ ra 50; 48 là số cột cũ phải bỏ đi ($24 + 24$), không phải số cột mới.

21 (B) 3

Lưới a hàng, b cột có $a + 1$ đường ngang, mỗi đường b que, và $b + 1$ đường dọc, mỗi đường a que: tổng $b(a + 1) + a(b + 1) = 2ab + a + b$ que (kiểm tra: $2 \cdot 2 \cdot 3 + 2 + 3 = 17$).

$2ab + a + b = 2026$. Nhân 2 rồi cộng 1 để phân tích thành nhân tử (mẹo “thêm hằng số”): $4ab + 2a + 2b + 1 = 4053$, tức $(2a + 1)(2b + 1) = 4053$.

$4053 = 3 \cdot 7 \cdot 193$ (193 là số nguyên tố). Các cách viết $4053 = uv$ với $3 \leq u \leq v$, u, v lẻ: $3 \cdot 1351$, $7 \cdot 579$, $21 \cdot 193$, cho $(a, b) = (1, 675)$, $(3, 289)$, $(10, 96)$. Có 3 lưới. Đáp án (B).

Tính cả cặp $1 \cdot 4053$ (ứng với $a = 0$, không phải lưới) ra 4; đếm cặp có thứ tự ra 6; 8 là số ước của 4053; bỏ sót lưới “mỏng” 1×675 ra 2.

22 (B) $6\sqrt{3}$

Quay 60° quanh tâm biến tam giác đều thành tam giác “ngược” (giống quay 180°), tạo hình ngôi sao sáu cánh. Mỗi cạnh của tam giác này bị hai cạnh của tam giác kia chia thành ba đoạn bằng nhau, mỗi đoạn dài 2.

Phần chung là lục giác đều cạnh 2, ghép từ 6 tam giác đều cạnh 2, mỗi tam giác diện tích $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3}$. Diện tích phần chung: $6\sqrt{3}$. Đáp án (B).

Kiểm tra cách khác: tam giác lớn có diện tích $\frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 36 = 9\sqrt{3}$, gồm phần chung và 3 “cánh” tam giác đều cạnh 2 ($3\sqrt{3}$), nên phần chung là $9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}$.

Trừ cả 6 cánh của ngôi sao (thay vì 3 cánh thuộc tam giác này) ra $3\sqrt{3}$; $9\sqrt{3}$ là diện tích một tam giác; $12\sqrt{3}$ là diện tích cả ngôi sao; $18\sqrt{3}$ là tổng hai tam giác.

23 (A) 48

Đường chéo hình chữ nhật là đường kính: $\sqrt{6^2 + 8^2} = 10$, bán kính đường tròn 5.

Hãy cộng rồi trừ. Hình gồm hình chữ nhật và bốn nửa hình tròn có diện tích $48 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 4^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}\pi \cdot 3^2 = 48 + 16\pi + 9\pi = 48 + 25\pi$. Bỏ đi phần nằm trong đường tròn (cả hình tròn, diện tích 25π) thì còn đúng bốn hình lưỡi liềm: $48 + 25\pi - 25\pi = 48$. Đáp án (A).

Điều bất ngờ: tổng các lưỡi liềm **bằng đúng diện tích hình chữ nhật**, vì tổng diện tích bốn nửa hình tròn (25π) trùng với diện tích hình tròn — đó chính là Pythagoras $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Bấy: 25π là tổng bốn nửa hình tròn, chưa trừ; cộng hình chữ nhật với bốn nửa hình tròn mà quên trừ hình tròn ra $25\pi + 48$; dùng cả cạnh làm bán kính ra $75\pi + 48$; áp dụng “lưỡi liềm trên hai cạnh góc vuông bằng diện tích tam giác” cho cả bốn tam giác vuông tạo bởi hai đường chéo thì mỗi lưỡi liềm bị đếm hai lần: $4 \cdot 24 = 96$.

24 (D) 74

Mười hai điểm là $(\pm 5, 0)$, $(0, \pm 5)$, $(\pm 3, \pm 4)$, $(\pm 4, \pm 3)$ (vì $25 = 0^2 + 5^2 = 3^2 + 4^2$). Đa giác đối xứng qua hai trục, nên tính phần nằm trong góc phần tư thứ nhất rồi nhân 4.

Phần đó là ngũ giác $O(0, 0)$, $(5, 0)$, $(4, 3)$, $(3, 4)$, $(0, 5)$. Cắt thành ba tam giác chung đỉnh O : $O, (5, 0), (4, 3)$ có đáy 5, cao 3: diện tích 7,5; $O, (3, 4), (0, 5)$: đáy 5, cao 3: 7,5; $O, (4, 3), (3, 4)$: bằng nửa $|4 \cdot 4 - 3 \cdot 3| = 3,5$ (hoặc lấy hình vuông 4×4 trừ ba tam giác vuông $6 + 6 + 0,5$).

Một phần tư: $7,5 + 7,5 + 3,5 = 18,5$; cả đa giác: $4 \cdot 18,5 = 74$. Đáp án (D).

Quên bốn điểm trên trục (chỉ lấy bát giác $(\pm 3, \pm 4), (\pm 4, \pm 3)$, diện tích $64 - 2 = 62$) ra 62; chỉ lấy hình vuông qua bốn điểm trên trục ra 50; lấy hình chữ nhật 8×6 ra 48; $25\pi \approx 78,5$ là diện tích hình tròn, lớn hơn mọi đa giác nội tiếp.

25 (C) 225

Ý then chốt: muốn vượt qua một viên trôn chỉ có **một** cách — đứng ngay trước nó và nhảy 2. Vì vậy ếch bắt buộc nhảy $4 \rightarrow 6$, $9 \rightarrow 11$, $14 \rightarrow 16$, và đường đi tách thành các đoạn độc lập: $0 \rightarrow 4$, $6 \rightarrow 9$, $11 \rightarrow 14$, $16 \rightarrow 20$.

Số cách đi hết quãng dài d bằng các bước 1 hoặc 2 là dãy Fibonacci: $d = 1, 2, 3, 4$ cho 1, 2, 3, 5 cách (mỗi số bằng tổng hai số trước, vì bước đầu là 1 hoặc 2). Các đoạn dài 4, 3, 3, 4 nên có 5, 3, 3, 5 cách.

Theo quy tắc nhân: $5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 225$. Đáp án (C).

Bấy: cộng các đoạn thay vì nhân ra 16; quên đoạn cuối $16 \rightarrow 20$ ra 45; đếm độ dài đoạn bằng số viên đá (dài hơn 1) ra $8 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 8 = 1600$; bỏ qua các viên trôn thì ra 10946 cách.

Glossary • Từ vựng Anh–Việt

absolute value — giá trị tuyệt đối

Addition Principle — quy tắc cộng

adjacent / next to — kề nhau, cạnh nhau

alternate interior angles — góc so le trong

alternating sum — tổng đan dấu

altitude (height) — đường cao

angle bisector — tia phân giác

arc / sector — cung / hình quạt

area — diện tích

arithmetic sequence — cấp số cộng

at least / at most — ít nhất / nhiều nhất

average speed — vận tốc trung bình

backsolving — thử đáp án

bar graph — biểu đồ cột

base — đáy

block — khối (gom lại)

bound — cận (chặn)

carry — số nhớ

casework — chia trường hợp

casting out nines — phép thử 9

central angle — góc ở tâm

chord — dây cung

circle graph — biểu đồ hình quạt

circumference — chu vi đường tròn

closest to — gần nhất với

collinear — thẳng hàng

coloring argument — lập luận tô màu

combination — tổ hợp

common difference — công sai

complementary counting — đếm phần bù

composite — hợp số

congruent — bằng nhau (trùng khít)

congruent modulo m — đồng dư theo môđun m

consecutive integers — các số nguyên liên tiếp

construction — xây dựng (ví dụ đặt được)

corresponding angles — góc đồng vị

cross-section — mặt cắt

cryptarithm — phép tính bằng chữ

cylinder / cone / sphere — hình trụ / nón / cầu

diagonal — đường chéo

digit — chữ số

digit sum — tổng các chữ số

directly proportional — tỉ lệ thuận

disjoint — rời nhau

distinct / different — khác nhau

distributive law — tính chất phân phối

divisible by — chia hết cho

division algorithm — phép chia có dư

divisor / factor — ước

equally likely — đồng khả năng

equation / solution — phương trình / nghiệm

estimate — ước lượng

Euclidean algorithm — thuật toán Euclid

expected value — giá trị kỳ vọng

expression — biểu thức

exterior angle — góc ngoài

factorial — giai thừa

fencepost error — lỗi hàng rào (lệch một)

finite differences — bảng hiệu

fraction in lowest terms — phân số tối giản

frequency — tần số

gap — khe

geometric sequence — cấp số nhân

greatest common divisor (gcd) — ước chung lớn nhất

greedy — tham lam

guess, check, and refine — thử – kiểm tra – điều chỉnh

hypotenuse — cạnh huyền

identical — giống hệt nhau

identity — hằng đẳng thức / đẳng thức đúng với mọi giá trị

inclusion–exclusion — bao hàm–loại trừ

inclusive — tính cả hai đầu

independent — độc lập

inequality — bất phương trình / bất đẳng thức

intercept — giao điểm với trục

invariant — bất biến

inversely proportional — tỉ lệ nghịch

isosceles / equilateral — cân / đều

kite — hình cánh diều

last two digits — hai chữ số tận cùng

lattice point — điểm nguyên (điểm lưới)

leading digit — chữ số đầu tiên

leap year — năm nhuận

least common multiple (lcm) — bội chung nhỏ nhất

leg (of a right triangle) — cạnh góc vuông

like terms — hạng tử đồng dạng

linear relationship — quan hệ tuyến tính (bậc nhất)

list — danh sách, dãy

mean (average) — trung bình cộng

median — trung vị
mediant — phân số trung gian
midpoint — trung điểm
mixture, concentration — hỗn hợp, nồng độ
mode — mode (giá trị xuất hiện nhiều nhất)
monovariant — đại lượng đơn điệu
multiple — bội
Multiplication Principle — quy tắc nhân
multiplier — hệ số nhân
n choose k — tổ hợp chập k của n
net — hình khai triển
non-congruent — không bằng nhau (không trùng khít)
off-by-one error — lỗi lệch một
order of operations — thứ tự thực hiện phép tính
ordered pair — cặp có thứ tự
outcome — kết quả
parallelogram — hình bình hành
parallelogram / rhombus — hình bình hành / hình thoi
parity — tính chẵn lẻ
part-to-whole ratio — tỉ số phần so với toàn thể
pattern — quy luật
percent increase / decrease — phần trăm tăng / giảm
percentage point — điểm phần trăm
perfect square / cube — số chính phương / lập phương
perimeter — chu vi
period — chu kỳ
periodic, period — tuần hoàn, chu kỳ
permutation — hoán vị / chỉnh hợp
pigeonhole principle — nguyên lý Dirichlet (chuồng – thỏ)
place value — giá trị theo hàng
prime — số nguyên tố
prime factorization — phân tích ra thừa số nguyên tố
proper divisor — ước thực sự
proportion — tỉ lệ thức
Pythagorean triple — bộ ba Pythagoras
quotient — thương
radius / diameter — bán kính / đường kính
range — khoảng biến thiên
rate / unit rate — tốc độ / đơn giá
ratio — tỉ số
reciprocal — số nghịch đảo
rectangular box — hộp chữ nhật
recursive rule — công thức truy hồi

regular polygon — đa giác đều
relative order — thứ tự tương đối
relative speed — vận tốc tương đối
relatively prime — nguyên tố cùng nhau
remainder — số dư
repeating decimal — số thập phân vô hạn tuần hoàn
rhombus / kite — hình thoi / hình cánh diều
rotation — phép quay
route, path — đường đi
scale (of a map) — tỉ lệ bản đồ
scale factor — hệ số tỉ lệ
sequence, term — dãy số, số hạng
shaded region — miền tô màu
similar figures — hình đồng dạng
slope — hệ số góc
slope, rate of change — hệ số góc, tốc độ thay đổi
small cases — trường hợp nhỏ
space diagonal — đường chéo không gian
special values — giá trị đặc biệt
stem-and-leaf plot — biểu đồ thân-lá
substitution / elimination — phương pháp thế / cộng đại số
supplementary / complementary — bù nhau / phụ nhau
system of equations — hệ phương trình
tangent — tiếp tuyến
telescoping — rút gọn dây chuyền (triệt tiêu xen kẽ)
terminating decimal — số thập phân hữu hạn
to evaluate — tính giá trị
trailing zeros — chữ số 0 tận cùng
transversal — cát tuyến
trapezoid — hình thang
tree diagram — sơ đồ cây
triangle inequality — bất đẳng thức tam giác
truth-teller / liar — người nói thật / nói dối
units / tens / hundreds digit — chữ số hàng đơn vị / chục / trăm
variable — biến, ẩn
Venn diagram — biểu đồ Venn
vertical angles — góc đối đỉnh
weighted average — trung bình có trọng số
without replacement — không hoàn lại
work rate — năng suất
working backwards — đi ngược (từ kết quả)
worst case — trường hợp xấu nhất

Học tiếp cùng 8020

Làm hết sách rồi? Bước tiếp theo: luyện đề thi thử bấm giờ trên web, rồi thi thật kỳ AMC tháng 11 (AMC 10/12) hoặc tháng 1 (AMC 8).

luyenthi8020.com/olympiad/amc-8/

Luyện tiếp online: bài tập theo chủ đề + đề thi thử AMC, chấm điểm ngay

luyenthi8020.com/gioi-thieu/amc/

Giới thiệu kỳ thi AMC → AIME: lịch thi, cấu trúc đề, cách đăng ký

luyenthi8020.com/olympiad/

Toàn bộ khu Toán Olympiad: AMC 8 · 10 · 12, TIMO lớp 1 → 10+

Lớp 1-1 hoặc nhóm nhỏ, online hoặc tại trung tâm — giáo viên của bộ phận học thuật 8020 trực tiếp đứng lớp, nhận xét bằng văn bản sau mỗi bài kiểm tra.



Zalo · WhatsApp 0332 747 169 · 0983 422 692 · luyenthi8020.com

© 8020 Education · Sách dùng cho học viên 8020 và phụ huynh. Vui lòng không sao chép, bán lại.

